

7.70 — zagadnienia ogólne i varia

Praca doktorska

Kurt Frischmuth

**ZAGADNIENIA MODELOWANIA
KONSTITUTYWNEGO
I STABILNOŚCI CIAŁ
DYSSYPATYWNYCH**

38/1982

P.269

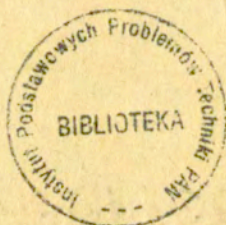
WARSZAWA 1982

<http://rcin.org.pl>

Praca doktorska

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 grudnia 1982 r.

Zarejestrowana pod nr 38/82



57036



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd.2,6. Ark.druk. 3,75.

Oddano do drukarni w grudniu 1982 r.

Nr zamówienia 5/0/83 Z-89

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

Kurt Frischmuth
Zakład Mechaniki Ośrodków
Ciągłych

ZAGADNIENIA MODELOWANIA KONSTITUTYWNEGO
I STABILNOŚCI CIAŁ DYSSYPATYWNYCH

P. 269

1. Wstęp

W nowoczesnej technologii coraz większą rolę odgrywają procesy lepkoplastycznego płynięcia, i to we wciąż rozszerzającym się zakresie odkształceń, prędkości odkształcenia i temperatury. W związku z tym rośnie znaczenie fizycznie uzasadnionego, niezawodnego opisu matematycznego.

Zgodność między zachowaniem się modelu a zachowaniem się rzeczywistego materiału powinna być zachowana dla coraz szerszej klasy procesów, również np. dla procesów nieproporcjonalnych, cyklicznych, niejednorodnych czy niestabilnych.

Zwłaszcza w związku z badaniami nad procesami niejednorodnego, zlokalizowanego płynięcia plastycznego, aż do utraty stateczności, powstała na podstawie sugestii badaczy doświadczalnych koncepcja zmodyfikowanej struktury z parametrami wewnętrznymi. Wskutek dużych gradientów wielkości traktowanych dotąd jako parametry wewnętrzne powstaje konieczność uwzględnienia wpływu otoczenia cząstki na ewolucję jej stanu wewnętrznego. Ta koncepcja [per. Perzyna 80, 81, 82] nie mieści się już w matematycznej teorii materiałów [Perzyna, Kosiński, 73] ze względu na swój nielokalny charakter i wykracza także poza ramy dotychczasowej teorii termodynamiki materiałów niesprężystych [Perzyna 75, 78]. Celem tej pracy jest więc przede wszystkim ujęcie zmodyfikowanej teorii z parametrami wewnętrznymi w ramach ogólniejszej teorii modeli konstytutywnych, zbadanie jej ograniczeń termodynamicznych oraz analiza jej cech stabil-

nościowych w sensie ciągłej zależności rozwiązania równań pola dla ciała od warunków początkowych.

Pierwszy rozdział zaczyna się od nowego spojrzenia na koncepcję metody przygotowania [por. Perzyna 71]. Wykażemy, że matematyzacja tej koncepcji [Perzyna, Kosiński, 72] narzuca zbyt mocne ograniczenia na postulowaną funkcję konstytutywną, żeby móc poprawnie opisać wiele sytuacji o dużym znaczeniu praktycznym, między innymi plastyczne płynięcie. Przedyskutowano te ograniczenia w przypadku ogólnym i na kilku przykładach. Jednocześnie przedstawiono propozycję wyjścia z tej sytuacji zachowując przy tym zalety koncepcji metody przygotowania. Nowe podejście do pojęcia procesu mechanicznego pozwala usunąć pewne niepożądane cechy topologii przestrzeni stanów wprowadzonej przez Nolla [Noll, 72].

W drugim rozdziale zbadamy ewolucję stanów w trakcie procesów relaksacyjnych. Przy pewnych założeniach dotyczących regularności funkcji ewolucji udowodnione twierdzenie o jednoznaczności stanów równowagi stanowiące uogólnienie twierdzenia Kosińskiego i Valanisa [Kosiński, Valanis, 78] dla struktury z parametrami wewnętrznymi. Szczegółowa analiza założeń tego twierdzenia doprowadziła do przewyżczenia pewnych poglądów, że struktury z parametrami wewnętrznymi i z czasową pamięcią mogą poprawnie opisać co najwyżej materiały semisprężyste [por. Kosiński, Valanis, 78]. Zbadano także jakościowe cechy opisów niepełniających wyżej wymienionych założeń, stosując ze względu na strukturę jednostyczną przestrzeni metody przygotowania aparat topologii ogólnej [por. Frischmuth, 81]. Dla przestrzeni historii przeszłych Koethe-Töplitsa uzyskano analogiczne wyniki w [Frischmuth, Kosiński, 82].

W rozdziale trzecim przedyskutujemy ograniczenia termodynamiczne. Trwa dyskusja nad postulatami adekwatnymi w przypadku ciał z efektami nielokalnymi [por. Kosiński, 82]. Dla ciał ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi zredukujemy poprzednią wersję ograniczeń [Perzyna 80] oraz wprowadzimy dla pewnej podklasy takich ciał koncepcję dodatkowych strumieni entropii, z której otrzymamy wyniki obejmujące

jednowymiarową termodynamikę Rice'a [Rice 81].

W ostatnim rozdziale zbadamy wreszcie ciągłość zależności rozwiązania równań pola dla ciała ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi od warunków początkowych. Skorzystając z twierdzenia Dafermosa i Kosińskiego oraz z warunku dyssypatywności operatora występującego w równaniach ewolucji [por. Perzyna 80] otrzymamy pewne oszacowanie, które dzięki wynikom rozdziału trzeciego możemy zastosować do układu równań składającego się z równań ruchu, energii, zgodności i ewolucji parametrów dla ciała ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi przy założeniu więzów adiabatycznych.

2. Ogólne modelowanie konstytutywne

2.1. Oznaczenia i definicje podstawowe

W pracach [Noll 72] i [Perzyna, Kosiński 73] podstawą rozważań jest tzw. element ciała, czyli trójka $(\mathcal{T}, \mathcal{G}, \Pi)$, gdzie \mathcal{G} jest podzbiorem spójnym i domkniętym przestrzeni $\text{Sym}^+(\mathcal{T}, \mathcal{T}^n)$ wszystkich tensorów drugiej walencji, symetrycznych i dodatnio określonych zbudowanych na skończenie-wymiarowej przestrzeni wektorowej \mathcal{T} . Π zaś jest klasą procesów deformacji o wartościach w \mathcal{G} spełniającą

- (Π a) każde zamrożenie w dowolnym $g \in \mathcal{G}$ należy do Π
- (Π b) jeśli P należy do Π to również każdy jego segment należy
- (Π c) Π jest zamknięte ze względu na kontynuację *
- (Π d) każde dwa $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ mogą być połączone procesem z Π ,

gdzie zamrożenie w g o trwaniu t jest to funkcja stała

$$g_{(t)}: [0, t] \rightarrow \{g\}$$

segmentem $P_{[t_1, t_2]}: [0, t_2 - t_1] \rightarrow \mathcal{G}$ procesu $P: [0, t] \rightarrow \mathcal{G}$ nazywamy dla $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$ funkcję określoną wzorem

$$P_{[t_1, t_2]}(s) := P(t_1 + s), \quad s \in [0, t_2 - t_1]$$

Kontynuacją procesu P_1 procesem P_2 nazywamy proces $P_1 * P_2$ określony:

$$P_1 * P_2(s) := \begin{cases} P_1(s) & \text{dla } s \in \text{Dom } P_1 \\ P_2(s - \text{dur } P_1) & \text{dla } s \in [\text{dur } P_1, \text{dur } P_1 + \text{dur } P_2] \end{cases}$$

przy czym $\text{dur } P := \sup \text{Dom } P$

a mówimy, że proces $P: [0, \text{dur } P] \rightarrow \mathcal{G}$ łączy g_1 z $g_2 \in \mathcal{G}$,

gdy $P(0) := P^i = g_1$ a $P(\text{dur } P) := P^f = g_2$

Dalej wprowadzono przestrzeń $\text{Sym}(\tau^*, \tau) =: S$ jako przestrzeń naprężeń elementu τ , podczas gdy elementy $g \in \mathcal{G}$ nazywamy konfiguracjami elementu τ . W zbiorze Z procesów naprężenia określone są również kontynuacja i obcinanie...

Zastosowania do różnego typu opisów materiałów uwzględniających zarówno efekty cieplne jak i zjawiska nielokalne wymagają pewnego uogólnienia wyżej przedstawionych pojęć. Tak na przykład w teoriach termodynamicznych [por. Perzyna 75, Perzyna 78] zwykło się przyjmować za konfigurację trójkę $g = (C, \vartheta, \nabla \vartheta)$, a za reakcję czwórkę $r = (\psi, \eta, T, q)$. Modelując ciało materialne okazuje się wygodnym przyjęcie $g = (m, \vartheta)$, gdzie m jest funkcją odległości [por. Noll 72, Kosiński 81], a ϑ polem temperatury. Za reakcję przyjmujemy wtedy czwórkę $p = (\psi, \eta, T, q)$.

W innych zastosowaniach, nawet czysto mechanicznych i lokalnych, wygodne może być przyjęcie klasy procesów o wartościach w innej przestrzeni niż $\text{Sym}^+(\tau, \tau^*)$ i również o nieco odmiennych aksjomatach i definicjach segmentu i kontynuacji procesu.

W pierwszej części pracy będziemy dalece abstrahować od tych szczegółów, żeby uchwycić istotę problemów. Zakładamy jedynie, że \mathcal{G} jest przestrzenią topologiczną, której elementy nazywamy konfiguracjami, Π jest zbiorem funkcji. Każde $P \in \Pi$ jest określone na $[0, \text{dur } P]$, $\text{dur } P \geq 0$ i ma wartości w \mathcal{G} . Ponadto jest zdefiniowane składanie procesów $*$, niekoniecznie dla wszystkich par procesów, spełniające

$$\text{dur } P_1 * P_2 = \text{dur } P_1 + \text{dur } P_2$$

Istnieją także pewne koncepcje wprowadzenia w Π struktury przestrzeni topologicznej [Fabrizio, Lazzari, 81] lub rozmierności różniczkowalnej [Kosiński, 82] nie będziemy jednak z nich korzystać.

Natomiast o przestrzeni reakcji, dalej oznaczonej przez S , będziemy zakładali, że jest przestrzenią ze strukturą jednostajną.

2.2. Przestrzeń stanów

Dla materiału sprężystego istnieje funkcja

$$(1) \quad f: \mathcal{G} \rightarrow S$$

przyporządkująca konfiguracjom reakcje.

Dla materiału niesprężystego natomiast nie istnieje funkcja konstytutywna postaci (1), lecz pewna multifunkcja przyporządkująca konfiguracjom zbiory możliwych reakcji

$$(2) \quad f: \mathcal{G} \rightarrow 2^S$$

Taka relacja konstytutywna zawiera jednak w ogólności za mało informacji, gdyż wymagana jest znajomość, która z możliwych reakcji w konkretnej sytuacji się realizuje. Dlatego też jednym z podstawowych zadań modelowania konstytutywnego jest określenie pewnego zbioru parametrów \mathcal{K} oraz funkcji F

$$(3) \quad F: \mathcal{G} \times \mathcal{K} \rightarrow S$$

takich, że

$$(4) \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad F(g, \mathcal{K}) := \{F(g, k) : k \in \mathcal{K}\} = f(g).$$

Pary (g, k) chcemy interpretować jako stany naszego modelu, żądamy więc w myśl zasady determinizmu, by istniała pewna funkcja e

$$(5) \quad e: (\mathcal{G} \times \mathcal{K} \times \Pi)_{\text{fit}} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{K}$$

gdzie $(\mathcal{G} \times \mathcal{K} \times \Pi)_{\text{fit}} = \{(g, k, P) : P^1 = g\}$

którą nazywamy funkcją ewolucji stanów, a która jest postaci

$$(6) \quad e(g, k, P) = (P^f, T_t(k, P)) \quad , \quad t = \text{dur}P, \quad P^i = g.$$

gdzie funkcja $T(\cdot, \cdot)$ spełnia^{1/}

$$(7) \quad \forall_{k \in K} \forall_{g \in G} T_0(k, g_{(0)}) = k$$

$$\forall_{k \in K} \forall_{P_1, P_2 \in \Pi} T_{t_1+t_2}(k, P_1 * P_2) = T_{t_2}(T_{t_1}(k, P_1), P_2) \\ P_1^i = P_2^i$$

T nazywamy funkcją ewolucji metody przygotowania, lub krótko funkcją ewolucji. Po właśnie te funkcje ewolucji $e(\cdot, \cdot)$ czy $T(\cdot, \cdot)$ pozwalają nam określić, kiedy która możliwa reakcja staje się reakcją rzeczywistą.

Żądamy jeszcze, by spełniony był następujący warunek.

$$(8) \quad \forall_{g \in G} \forall_{k_1 \neq k_2} \exists_{P \in \Pi_g} F(P^f, T_{\text{dur}P}(k_1, P)) \neq F(P^f, T_{\text{dur}P}(k_2, P))$$

gdzie oznaczyliśmy $\Pi_g := \{P \in \Pi : P^i = g\}$

Warunek ten można oczywiście zinterpretować jako warunek rozróżnialności stanów drogą pomiaru reakcji na procesy, czyli testów mechanicznych.

Warunkiem wystarczającym warunku (8) jest, by dla każdego $g \in G$ funkcja $F(g, \cdot)$ była różnowartościowa. Wyznacza się więc stan przez pomiar jedynie konfiguracji i aktualnej wartości reakcji. W następnym paragrafie pokażemy, że praca [Persyna, Kosiński, 73] obejmowała tylko ten szczególny przypadek materiałów prędkościowych^{2/}. Jednak nie wszystkie materiały wpadają w tę klasę, jak pokazuje następujący

^{1/} $T(\cdot, \cdot)$ jest funkcją argumentu k i P . Dopuszczamy wyłącznie dla wygody i odróżnienia od funkcji $T(\cdot, \cdot)$ (por. rozdział 2) czas trwania procesu P , $\text{dur}P$, obok T na dole jakby parametr rodziny¹.

^{2/} w uogólnionym sensie

Przykład 1.

Rozważmy model sprężyste-plastyczny ze wzmocnieniem izotropowym.

$$k = (k_1, k_2) \quad , \quad k_1 = g_{\text{sprężyste}} \quad , \quad k_2 = \lambda$$

gdzie λ jest parametrem wzmocnienia izotropowego, czyli aktualną granicą plastyczności. Przestrzenią \mathcal{K} jest wtedy "stożek"

$$\{(k_1, k_2) : \phi(k_1) \leq k_2\}$$

gdzie ϕ jest funkcją uplastycznienia złożoną z prawem Hooke'a. Funkcja F ma własność

$$F(g, k) = \tilde{F}(k_1)$$

reakcja zależy tylko od parametru odkształceń sprężystych, nie jest więc różnowartościowa. Jeśli się natomiast przyjmuje prawo płynięcia i wyznacza funkcję ewolucji w znany sposób, to łatwo się przekonać, że warunek (8) jest spełniony.

Są jednak również takie opisy materiałów, tj. szóstki $(g, \pi, K^*, T^*, S, F^*)$, że warunek (8) nie jest spełniony, stany są nadokreślone. Wprowadza się wtedy relacje równoważności.

$$(9) \quad k_1 \sim_g k_2 \equiv \forall_{P \in \Pi_g} F(P^f, T_{\text{dur}P}(k_1, P)) = F(P^f, T_{\text{dur}P}(k_2, P))$$

i oznacza się

$$\mathcal{K}_g = \mathcal{K} / \sim_g$$

Przestrzeń stanów ma wtedy postać

$$\Sigma = \{(g, k) : g \in \mathcal{G}, k \in \mathcal{K}_g\}$$

Żeby określić w przestrzeni stanów Σ topologię wprowadza się na każdym \mathcal{K}_g strukturę jednostajną, najslabszą, w której rodzina funkcji

$$(10) \quad F(P, T_{\text{dur}P}(\cdot, P)) : \mathcal{K}_g \rightarrow S, \quad P \in \Pi_g$$

jest jednostajnie ciągła [por. Noll, 72]. Jednak przy takim przyjęciu dla różnych g przestrzenie \mathcal{K}_g mogą być zasadniczo różne, w związku z czym Noll proponuje \sum traktować jako sumę topologiczną wszystkich \mathcal{K}_g .

Taka definicja nie jest przydatna do badania stabilności procesów nierelaksacyjnych. Zauważmy bowiem, że np. dla materiału sprężystego mamy każde \mathcal{K}_g jednoelementowe, przestrzeń stanów \sum sprowadza się więc do przestrzeni konfiguracji \mathcal{G} z topologią dyskretną.

W związku z tym ograniczymy się do przypadku szczególnego, zakładając, że wszystkie \mathcal{K}_g są identyczne, mamy więc tak jak wyjściowo

$$\sum = \mathcal{G} \times \mathcal{K}$$

przy czym \times oznacza tutaj iloczyn topologiczny.

Przypominamy, że dzięki warunkowi (8) \mathcal{K} jest $T_{3,5}$ -przestrzenią i jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności [por. Engelking, 77].

Jeśli przestrzeń stanów \sum powstała w wyżej opisany sposób z \mathcal{G} i \mathcal{K}^* , to funkcję ewolucji uzyskuje się stosując $T^*(\cdot, \cdot)$ do reprezentantów elementów - klas przestrzeni $\mathcal{K} = \mathcal{K}^*/\sim$.

Łatwo się przekonać, że taka definicja funkcji $T(\cdot, \cdot)$ będzie niezależna od reprezentanta, poprawna, i spełnia warunek (7) oraz warunek (8) jest spełniony z konstrukcji.

Opis spełniający wszystkie warunki wraz z warunkiem rozróżnialności, tj. szóstka $(\mathcal{G}, \Pi, \mathcal{K}, T, S, F)$ nazywamy strukturą materialną [por. Kosiński, Perzyna, 73], natomiast opis nie spełniający (8) będzie nazywany prestrukturą. Większość wyników pracy stosuje się również do prestruktur. Zaznaczmy jednak, że kilka własności struktur, które mają sens fizyczny, trzeba traktować w przypadku prestruktur jako dodatkowe założenia [por. rozdział 3].

2.3. Funkcja konstytutywna R.

Mając zadane funkcje F i T można określić następującą funkcję R

$$(11) \quad R: \Pi \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{Z}$$

$$R(P, k)(t) = F(P(t), T_t(k, P_{[0, t]}))$$

gdzie \mathcal{Z} jest zbiorem procesów reakcji. W pracy [Perzyna, Kosiński, 73] nasze pojęcia stanu, funkcji reakcji F i ewolucji T, są wtórne wobec funkcji R. Zbadamy teraz, kiedy i jak ta funkcja wyznacza F i T_t, gdyż nie zrobiono tego w [Perzyna, Kosiński, 73] oraz zbadamy kilka konsekwencji tamtych definicji, swiadczyza przestrzeni metody przygotowania \mathcal{K} , ilustrując je na przykładach.

Zauważmy na początku, że zbiory Π i \mathcal{Z} procesów konfiguracji względnie reakcji są częściowo uporządkowane poprzez relację \prec "być segmentem początkowym"

$$(12) \quad P_1 \prec P_2 \equiv \exists_{t \in [0, \text{dur } P_2]} P_1 = P_{2[0, t]} \quad \text{względnie}$$

$$Z_1 \prec Z_2 \equiv \exists_{t \in [0, \text{dur } Z_2]} Z_1 = Z_{2[0, t]}$$

Z definicji R wynika bezpośrednio, że dla ustalonego K funkcja $R(\cdot, k): \Pi \rightarrow \mathcal{Z}$ zachowuje relację \prec oraz czas trwania dur.

Warunek (8) można za pomocą funkcji R sformułować

$$(8a) \quad \forall_{g \in \mathcal{G}} \forall_{k_1 \neq k_2} \exists_{P \in \Pi_g} R(P, k_1)^f \neq R(P, k_2)^f$$

lub równoważnie

$$(8b) \quad \forall_{g \in \mathcal{G}} \forall_{k_1 \neq k_2} \exists_{P \in \Pi_g} R(P, k_1) \neq R(P, k_2)$$

Oznacza on więc, że rodzina $\{R(P, \cdot): P \in \Pi_g\}$ rozdziela punkty.

Możemy sformułować teraz następujące

Twierdzenie 1. Jeśli funkcja konstytutywna R jest wyznaczona ze wzoru (11), to wyznacza ona funkcje F i T_t w sposób jedno-

znaczmy.

Dowód. Wzór (11) dla $P = g_{(0)}$ daje nam ze względu na $(7)_1$

$$(13) \quad F(g, k) = R(g_{(0)}, k)(0)$$

Dalej zauważmy, że $T_{durP}(k, P)$ spełnia

$$(14) \quad \forall_{\bar{P} \in \Pi_{pf}} R(\bar{P}, T_{durP}(k, P)) = R(P * \bar{P}, k)_{[durP, durP + dur\bar{P}]}$$

jako konsekwencja (11) i $(7)_2$

Zestawiając (14) z (8b) otrzymamy, że $T_{durP}(k, P)$ jest wyznaczone jednoznacznie poprzez funkcję R .

Powstaje jednak pytanie, jakie są warunki konieczne i wystarczające, by istniały funkcje F i T_t takie, by zadana funkcja $R: \Pi \times \mathcal{K} \rightarrow Z$ spełniała wzór (11). Odpowiedź daje następujące

Twierdzenie 2. Niech zadana będzie funkcja $R: \Pi \times \mathcal{K} \rightarrow Z$ zachowująca dur dla każdego ustalonego $k \in \mathcal{K}$. Wówczas istnieją funkcje F i T_t spełniające warunki (7) i (8), takie, że R jest wyznaczone ze związku (11), wtedy i tylko wtedy, gdy

a/ R zachowuje $<$ dla każdego ustalonego $k \in \mathcal{K}$ oraz

$$b/ \quad \forall_{(k, P) \in \mathcal{K} \times \Pi} \exists! \bar{k} \in \mathcal{K} \forall_{P \in \Pi_{pf}} R(\bar{P}, \bar{k}) = R(P * \bar{P}, k)_{[durP, durP + dur\bar{P}]}$$

Dowód. Konieczność warunków a/ i b/ jest oczywista (por. (8b) i (14)). Wystarczy więc udowodnić dostateczność. Określmy F ze wzoru (13) oraz oznaczmy K_1 z warunku b/ $T_{durP}(k, P)$.

Pokażemy, że spełniony jest wzór (11).

$$R(P, k)(t) \stackrel{a/}{=} R(P_{[0,t]}, k)(t) = R(P_{[0,t]} * P(t)_{[0,t]}, k)(t) =$$

$$\stackrel{b/}{=} R(P(t)_{[0,t]}, T_t(k, P_{[0,t]}))(0) \stackrel{13/}{=} F(P(t), T_t(k, P_{[0,t]}))$$

Pokażemy dalej, że spełnione jest $(7)_1$.

Dla każdego $(g, k) \in \mathcal{G} \times \mathcal{K}$, $P \in \Pi_g$ mamy

$$g_{(0)} * P = P$$

Stąd $\bar{k} = k$ spełnia b/, a z jednoznaczności \bar{k} wynika (7)₁, a tym samym udowodniliśmy także (8b).

Pozostaje udowodnić (7)₂, czyli że

$$\forall_{k \in \mathcal{K}} \forall_{P_1 \in \Pi, P_2 \in \Pi_{P_1 f}} T_{t_1+t_2}(k, P_1 * P_2) = T_{t_2}(T_{t_1}(k, P_1), P_2)$$

$$t_1 = \text{dur } P_1, \quad t_2 = \text{dur } P_2$$

Wystarczy więc pokazać, że względu na (8b), że

$$\forall_{k \in \mathcal{K}} \forall_{P_1 \in \Pi, P_2 \in \Pi_{P_1 f}, P_3 \in \Pi_{P_2 f}} R(P_3, T_{t_1+t_2}(k, P_1 * P_2)) = \\ R(P_3, T_{t_2}(T_{t_1}(k, P_1), P_2))$$

Równość ta jest oczywiście spełniona, gdyż przez jedno - względnie dwukrotne stosowanie warunku b/ lewa względnie prawa strona sprowadza się do

$$R(P_1 * P_2 * P_3, k)_{[\text{dur } P_1 + \text{dur } P_2, \text{dur } P_1 + \text{dur } P_2 + \text{dur } P_3]}$$

Zbadajmy teraz bliżej założenia pracy [Perzyna, Kosiński, 73] Zamiast multifunkcji f wprowadzili oni tzw. relację konstytutywną \mathcal{R} , od której żądali, by była lewostrewnie "na" oraz spełniała

$$(15) \quad \mathcal{R} \subset \Pi \times Z, \quad (P, Z) \in \mathcal{R} \implies \text{dur } P = \text{dur } Z \\ [(P, Z) \in \mathcal{R} \wedge (P_1, Z_1) < (P, Z)] \implies (P_1, Z_1) \in \mathcal{R}$$

Do relacji \mathcal{R} dobrano później funkcję $R^{1/}$ analogicznie jak my przeszliśmy z multi-funkcji f do funkcji F , przy czym zrobiono

^{1/} W pracy [Perzyna, Kosiński, 73] R ma trzy argumenty: $R = R(g, k, P)$ z ograniczeniem $g = P^1$. My opuszczamy tutaj argument g nie tracąc oczywiście informacji.

o wiele silniejsze założenia co do rozróżnialności stanów, jednocześnie jednak nie zapewniając istnienia funkcji ewolucji i reakcji.

Wprowadzono następującą definicję: Przestrzeń metody przygotowania jest to taka przestrzeń \mathcal{K} , że

$$(15) \quad \exists_{\Sigma \in \mathcal{G} \times \mathcal{K}} \exists_{R: \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \Pi_g \times \mathcal{K}_g \rightarrow Z} \forall_{g \in \mathcal{G}} \forall_{P \in \Pi_g} \exists_{\mathcal{K}_g} \\ \Sigma = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \{g\} \times \mathcal{K}_g$$

$R(P, \cdot): \mathcal{K}_g \rightarrow Z_p$ jest bijekcją

gdzie $Z_p = \{Z \in Z: (P, Z) \in R\}$

Zauważmy po pierwsze, że ostatni kwantyfikator jest zbędny, zbiór \mathcal{K}_g występuje już faktycznie pod pierwszym i drugim kwantyfikatorem, choć w oryginalnych oznaczeniach nie było to od razu widoczne. Funkcja wyznacza swoją dziedzinę, nie można jej więc a posteriori dobrać np. w zależności od procesu, który ma nastąpić w przyszłości - jak wskazuje kolejność ostatnich dwóch kwantyfikatorów. Pomimo to w późniejszych pracach Kosińskiego [por. Kosiński, 76] występuje żądanie, by istniało \mathcal{K}_p zależne od procesu P , co wynika przede wszystkim z błędnego ujęcia struktury typu różniczkowego [por. Kosiński, Perzyna, 73].

Zanim się jednak tym zajmniemy, uprościmy najpierw warunek (15). Pociąga on za sobą

$$(17) \quad P_1^i = P_2^i \Rightarrow \overline{\overline{Z}}_{P_1} = \overline{\overline{Z}}_{P_2} \quad \text{gdzie } \overline{\overline{}} \text{ oznacza moc zbioru}$$

oraz

$$(18) \quad \forall_{g \in \mathcal{G}} \exists_{\mathcal{K}_g \subset \mathcal{K}} \forall_{P \in \Pi_g} \overline{\overline{Z}}_P = \overline{\overline{\mathcal{K}}}_g$$

Warunek (18) jest zarazem dostateczny, z definicji równoliczności łatwo skonstruować Σ i R spełniające (15) ^{1/}.

^{1/} W pracy [Perzyna, Kosiński, 73] nie wprowadzono żadnych warunków topologicznych.

Sprawdziliśmy więc warunek (16) do warunku o wiele prostszego

$$(19) \quad [P_1^i = P_2^i \Rightarrow \bar{z}_{P_1} = \bar{z}_{P_2}] \wedge \forall_{P \in \Pi} \bar{z} \leq \bar{K}$$

Definicja przestrzeni metody przygotowania sprowadza się więc do żądania, by ona była odpowiednio dużej mocy, oraz do ograniczenia na relację konstytutywną \mathcal{R} , by moce zbiorów procesów reakcji będących w relacji z procesami o identycznej konfiguracji początkowej były identyczne.

Dalej zauważmy, że warunek (18) z $P = g_{(0)}$ daje

$$(20) \quad \begin{aligned} \forall_{g \in \mathcal{G}} \bar{K}_g &\leq \bar{S} \\ \forall_{P \in \Pi} \bar{z}_P &\leq \bar{S} \end{aligned}$$

Jako, że zwykle moc przestrzeni reakcji jest równa C , wystarczy przyjąć jako przestrzeń metody przygotowania dowolny zbiór mocy C , np. zbiór Cantora. Zanim przejdziemy do konsekwencji powyższych faktów dla teorii struktur materialnych zawartej w [Kosiński, Perzyna, 73], zbadamy jeszcze zagadnienie istnienia funkcji ewolucji i reakcji w ramach definicji (16). Podamy ideę konstrukcji relacji \mathcal{R} i funkcji R spełniających (15) i (16), a nie spełniających naszego warunku b/ z twierdzenia 2. Nie jest więc prawdą, że R bez dalszych ograniczeń generuje funkcję ewolucji^{2/}.

Weźmy jako punkt wyjścia dowolny materiał semisprężysty, a niesprężysty [por. Noll, 72] o przestrzeni metody przygotowania \mathcal{K} , tj. każda g -sekcja przestrzeni stanów Nolla jest równa \mathcal{K} , $\Sigma = \mathcal{G} \times \mathcal{K}$. Dla każdego $g \in \mathcal{G}$ istnieje dokładnie jedno $k_g \in \mathcal{K}$ takie, że

$$\forall_{t \in R^+} T_t(k_g, g_{(t)}) = k_g$$

^{2/} por. [Perzyna, Kosiński, 73], str. 653, notka.

Położmy $\bar{K}_g = \{k_g\}$, $\bar{\Sigma} = \{(g, k_g), g \in \mathcal{G}\}$

oraz

$$\bar{R}(k_g, P)(t) = F(P(t), T_t(k_g, P_{[0, t]}))$$

Relacja \bar{R} jest więc funkcją,

$$Z_P = \{\bar{R}(k_{p_i}, P)\}$$

a jedyną możliwą funkcją ewolucji jest

$$\bar{T}_{dur P}(k_{p_i}, P) = k_{pf}$$

Zgodnie z aksjomatem VI Nolla [por. Noll, 72] istnieją jednak $g \in \mathcal{G}$ i $P \in \Pi_g$ takie, że $\bar{T}_{dur P}(k_g, P) \neq k_{pf}$. Stąd, jeśli wyjściowy opis spełnia warunek rozróżnialności, to wnioskujemy z twierdzenia 1, że R nie jest wyznaczone z funkcji ewolucji i reakcji. Wiąże się to oczywiście z niespełnieniem warunku b/ twierdzenia 2. Niemniej jednak \bar{R} spełnia (15) oraz $\bar{\Sigma}$ i \bar{R} spełniają (16). Jako konkretny przykład można podać

$$\bar{R}(P, k_{p_i})(t) = L\left(\int_0^t P(t-s)e^{-s} ds + P^i e^{-t}\right), \quad t \in [0, dur P],$$

gdzie $\mathcal{G} = \text{sym}^+(\tau, \tau^*)$, $L \in \text{Invlin}(\text{sym}(\tau, \tau^*), \text{sym}(\tau^*, \tau))$,

$k_{p_i} = p_i^+$ - historia stała.

Uwaga. Tak skonstruowana relacja \bar{R} spełnia tylko warunek (15), nie spełnia zaś dla dowolnego t_1

$$(21) \quad (P, Z) \in \bar{R} \Rightarrow (P_{[t_1, t_2]}, Z_{[t_1, t_2]}) \in \bar{R}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq dur P$$

Okaże się jednak, że również zastąpienie warunku (15)₂ przez (21) nie poprawiłoby sytuacji istotnie. Udowodnijmy najpierw, że każda struktura spełniająca (16) a wyznaczona przez jakąś parę

(F, T) jest typu prędkościowego.

Twierdzenie 3. Niech zadane będą \sum , R , F i T spełniające (1) i (16) oraz niech $P \in \Pi$ będzie dowolnym procesem. Wówczas jeśli $Z_1, Z_2 \in Z_p$ oraz istnieje t , $0 \leq t \leq \text{dur} P$ takie że

$$Z_{1[0,t]} = Z_{2[0,t]}$$

to $Z_1 = Z_2$

Dowód. Niech $Z_1 = R(P, k_1)$, $Z_2 = R(P, k_2)$

Jako, że R wyznaczone jest przez F i T_t spełnia ono warunek a/ twierdzenia 2. Stąd

$$Z_{1[0,t]} = R(k_1, P_{[0,t]})$$

$$Z_{2[0,t]} = R(k_2, P_{[0,t]})$$

Z założenia 1 z (16) mamy więc $k_1 = k_2$, a stąd $Z_1 = Z_2$

Wniosek. Dla $t = 0$ otrzymamy

$$R(k_1, P)(0) = R(k_2, P)(0) \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow R(k_1, P) = R(k_2, P)$$

czyli $F(k_1, P^i) = F(k_2, P^i) \Rightarrow R(k_1, P) = R(k_2, P)$.

Stąd każdy opis spełniający założenia twierdzenia 3 przedstawia materiał typu prędkościowego. Odpowiada to warunkowi rozróżnialności

$$(22) \quad \forall_{g \in \mathcal{G}} \forall_{k_1 \neq k_2} \forall_{P \in \Pi_g} R(P, k_1) \neq R(P, k_2),$$

podczas gdy warunek (8b) żąda jedynie istnienia jednego takiego procesu $P \in \Pi_g$

Jeśli chcemy więc dowolny materiał nieprędkościowy opisać w ramach teorii [Perzyna, Kosiński, 73], to musimy zrezygnować z istnienia funkcji ewolucji i reakcji.

W pracy [Kosiński, Perzyna, 73] wprowadzono kilka struktur materialnych. Strukturę z parametrami wewnętrznymi zdefiniowano warunkiem

$$(23) \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad \overline{\mathcal{K}}_g \leq c$$

Z (20) wyciągamy więc wniosek: Każda struktura materialna w sensie [Perzyna, Kosiński, 73] jest strukturą z parametrami wewnętrznymi w sensie [Kosiński, Perzyna, 73].

Natomiast materiał typu funkcyjnego, a w szczególności materiał prosty z pamięcią [por. Kosiński, Perzyna, 73, 4.1] ma spełnić

$$\exists \mathcal{A} \subset \Pi \quad \forall p \in \mathcal{R} \quad \overline{\mathcal{Z}}_p > c$$

Dla $\mathcal{A} \neq \emptyset$ warunek ten jest logicznym przeczeniem warunku (23), wnioskujemy więc: struktury te są puste.

Należy tutaj zaznaczyć, że w przypadku "klasycznych" teorii materiałów z pamięcią [por. Coleman, Mizel, 66, 67, 68], przestrzenie historii przeszłych, spełniające rolę \mathcal{K}^* , są ośrodkowe, co zapewnia (23). Teorie te wpadają więc według podziału z [Kosiński, Perzyna, 73] do klasy materiałów z parametrami wewnętrznymi. Co więcej okazuje się, że tylko w bardzo szczególnych sytuacjach teorie te spełniają warunek (16), jeśli żądamy istnienia funkcji ewolucji.

Przykład 2. Rozważmy jednowymiarowy materiał prosty z pamięcią

$$\mathcal{G} = \mathcal{R} \setminus \{0\}, \quad \tau = \mathcal{R}, \quad \mathcal{K}^* = L^p((0, \infty), \mathcal{G}) \subset L^p((0, \infty), \mathcal{R})$$

Reakcja jest zadana następującym związkem

$$r = A_g + \int_0^\infty A(s) k^*(s) ds$$

gdzie $A, A(s) \in \mathcal{R}$, $A(\cdot) \in L^q((0, \infty), \mathcal{R}) \cap C^0((0, \infty), \mathcal{R})$

Żeby przejść z tej prestruktury do struktury w sensie [Kosiński, Perzyna, 73], tj. żeby spełnić (16), trzeba \mathcal{K}^* podzielić przez relację równoważności

$$(24) \quad k_1^* \xrightarrow{*} k_2^* \equiv \int_0^{\infty} A(s) k_1^*(s) ds = \int_0^{\infty} A(s) k_2^*(s) ds$$

Żeby funkeja ewolucji dla prestruktury

$$T_t^*(k^*, P) = k^* * P$$

wyznaczyła funkeję ewolucji w $\mathcal{K} = \mathcal{K}^* / \leftarrow$ potrzeba zgodności z podziałem na klasy, czyli

$$(25) \quad \forall_{k^* \in L^P} \forall_{t \in R^+} \int_0^{\infty} A(s) k^*(s) ds = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} A(s) k^{*(t)}(s) ds = 0$$

gdzie $k^{*(t)}(s) = \begin{cases} k^*(s-t) & \text{dla } s > t \\ 0 & \text{dla } t > s \end{cases}$ jest zredukowanym

t-przedłużeniem historii $k^*(\cdot)$ [per. Coleman, Mizel, 66]. Oznacza to po prostu równoważność \sim oraz \leftarrow i prowadzi przez wykorzystanie twierdzenia Hahna-Banacha do równania funkcyjnego

$$(26) \quad \forall_{t \in R^+} \exists_{\alpha(t) \in R} \forall_{s \in R^+} A_{(t)}(s) = \alpha(t) A(s)$$

gdzie $A(s) := A(t+s)$ jest t-cięciem funkeji $A(\cdot)$.

Rozwiązanie ogólne tego problemu jest postaci

$$(27) \quad A(s) = A_0 e^{as}$$

przy czym z $A(\cdot) \in L^q$ wynika $a < 0$ lub $A_0 = 0$. Wynik ten uogólnia się w sposób dość naturalny na przypadek $\mathcal{T} = R^3$, $\mathcal{G} = \text{Sym}^+(R^3, R^3)$ przy czym A i $A(s)$ są tenso-rami o walencji trzy, e^{as} definiuje się jako sumę szeregu i mnożenie zastępuje się przez odpowiednie zwiężenia. Warunek ciągłości funkeji $A(\cdot)$ można przy tym znacznie osłabić [Hille, Philips, 57].

Widzimy więc, że konstrukcja funkcji ewolucji [per.Kosiński, Perzyna, 73, 4] nie jest w ogólności poprawna. W przypadku liniowym przy pewnych założeniach żądanie poprawności prowadzi do materiału Voltery-Boltzmann'a. Zauważmy, że materiał spełniający (27) można w sposób bardzo łatwy opisać za pomocą parametrów wewnętrznych lub jako materiał typu prędkościowego nawet w klasycznym sensie [Noll, 72], zgodnie z wnioskiem z twierdzenia 3.

Rozważmy teraz jeszcze jeden przykład, materiał typu różniczkowego. Materiał ten spełnia (16), istnieje funkcja ewolucji, pomimo to jego ujęcie w [Kosiński, Perzyna, 73] jest sprzeczne z samą teorią [Perzyna, Kosiński, 73]. Wyprowadźmy go jako materiał z pewnego rodzaju pamięcią.

Przykład 3. Niech \mathcal{K}^* będzie przestrzenią przeszłych historii gradientu odkształcenia względem konfiguracji aktualnej, ciągłych i prawostronnie różniczkalnych na $[0, \infty)$. Granicą każdej historii z \mathcal{K}^* dla $s \rightarrow 0_+$ jest tensor jednostkowy $\mathbb{1}$. Odpowiadający temu zbiór procesów Π jest postaci [por.Noll, 72]

$$\Pi = \{P \in C([0, t_p]G) : t_p \in [0, \infty), P^i = \mathbb{1}, \frac{d}{dt_1} P \text{ istnieje na } (0, t_p)\}$$

Łatwo określić funkcję ewolucji

$$T_t^*(k^*, P) = (k^* * P) \circ P^{t^{-1}}$$

Niech teraz F^* będzie takie, że

$$\forall g \in \mathcal{G} \quad \forall k_1^*, k_2^* \in \mathcal{K}^* \quad F^*(g, k_1^*) = F^*(g, k_2^*) \equiv \text{sym} \frac{d}{ds_p} k_1^*(0) = \text{sym} \frac{d}{ds_p} k_2^*(0)$$

np. $r = F^*(g, k^*) = p(g) - Z \frac{d}{ds_p} k^*(0)$

gdzie $Z = \mu(1, 3, 2, 4) * \mathbb{1} \circ \mathbb{1}$, a $\mathbb{1} \in \text{Invl in}(\tau, \tau^*)$

jest tensorem jednostkowym, a μ lepkością^{1/}

^{1/} Niezależność F^* od antysymetrycznej części tej pochodnej wynika z postulatu obiektywności materialnej.

Relacje \sim jak i \rightarrow sprowadzają się wtedy do

$$k_1^* \sim k_2^* \equiv \text{sym} \frac{d}{ds_p} k_1^*(0) = \text{sym} \frac{d}{ds_p} k_2^*(0)$$

Po podzieleniu przez \sim otrzymujemy przestrzeń metody przygotowania, przestrzeń $\text{Sym}(\tau, \tau^*)$

Funkcja ewolucji zaś jest postaci

$$T_t(k, P) = \begin{cases} \text{sym} \left[\frac{d}{dt} P(t) \circ P(t)^{-1} \right], & \text{dur } P > 0 \\ k, & \text{dur } P = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że tu nie ma żadnej zależności od przyszłego procesu typu $\mathcal{K} = \mathcal{K}(P)$, jak to miało miejsce w [Kosiński, Perzyna, 73] bądź [Kosiński, 76]. Może jednak istnieć zależność $\mathcal{K} = \mathcal{K}_g$ w przypadku więzów kinematycznych. Wtedy

$$\mathcal{K}_g = \left\{ \text{Sym}(L, L^*): L \text{ styczna do } \mathcal{G} \text{ w } g \right\}$$

Wymiar tej przestrzeni nie zależy jednak od g , więc można tę zależność usunąć przyjmując $\mathcal{K} = \mathbb{R}^{\dim \mathcal{K}_g}$

Należy podkreślić, że z danego stanu $G = (k, g)$ może startować każdy proces, więc z koniecznością występują w \mathcal{K}^+ i Π historie, względnie procesy, nieładkie.

2.4. Przestrzeń stanów zredukowanych

W związku z ostatnim przykładem nasuwa się pytanie, czy nie byłoby możliwe przeprowadzenie powyższych rozumowań w opisie Eulera, tj. przyjmując konfigurację aktualną za konfigurację odniesienia, a klasę historii względnie procesów z przykładu 3. Miałyby to następujące zalety: każdy proces można by złożyć z każdym procesem, a założenie rozróżnialności stanów pociągałoby za sobą utożsamienie równoważnych w sensie izomorfizmu materialnego por. [Noll, 72] stanów, tak że mielibyśmy bezpośrednio stany zredukowane. Dla cieczy by wtedy np. konfiguracją była objętość charakterystyczna. Wadą natomiast byłoby to, że trzeba by postulować obiektywność materiałową jako ograniczenie na funkcję ewolucji.

Załóżmy więc, że Π jest klasą procesów o wartościach w podzbiorze \mathcal{G} elementów odwracalnych pewnej algebry, w szczególności automorfizmów przestrzeni liniowej \mathcal{L} . Definiujemy

$$P_1 * P_2(t) = \begin{cases} P_1(t) & , t \in [0, \text{dur } P_1] \\ P_2(t - \text{dur } P_1) \circ P_1^t & , t \in [\text{dur } P_1, \text{dur } P_1 + \text{dur } P_2] \end{cases}$$

$$P_{[t_1, t_2]}(t) = P(t + t_1) \circ P(t_1)^t, t \in [0, t_2 - t_1]$$

gdzie $P, P_1, P_2 \in \Pi$

Jako postulaty dotyczące klasy procesów Π można by wtedy przyjąć:

- ($\Pi 1$) $P \in \Pi \Rightarrow P^1 = 1$ 1 - jedynka grupy, w szczególności identyczność
- ($\Pi 2$) $P_1, P_2 \in \Pi \Rightarrow P_1 * P_2 \in \Pi$
- ($\Pi 3$) $P \in \Pi, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \text{dur } P \Rightarrow P_{[t_1, t_2]} \in \Pi$
- ($\Pi 4$) $\forall g \in \mathcal{G} \exists P \in \Pi P^t = g$
- ($\Pi 5$) $\mathbb{1}_{(t)} \in \Pi$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$

Zauważmy, że przy tych postulatach definicja $*$ jest poprawna, to jest zgodna dla $t_1 = \text{dur } P_1$

Następnie przyjmujemy, że istnieje przestrzeń stanów Σ oraz funkcja ewolucji e

$$e: \Sigma \times \Pi \rightarrow \Sigma$$

taka, że $e(\cdot, \mathbb{1}_{(0)}) = \text{id}_\Sigma, e(\cdot, P_2) \circ e(\cdot, P_1) = e(\cdot, P_1 * P_2)$

Funkcja e jest już określona na całym $\Sigma \times \Pi$, bez warunku zgodności. Zauważmy, że Π jest półgrupą ze względu na działanie $*$ z jedynką $\mathbb{1}_{(0)}$, a funkcja ewolucji jest działaniem półgrupy Π na przestrzeni stanów Σ .

Można teraz wprowadzić funkcję reakcji $F: \Sigma \rightarrow S$ i postuluować warunek rozróżnialności stanów

$$\forall G_1, G_2 \in \Sigma \exists P \in \Pi F(e(G_1, P)) \neq F(e(G_2, P)).$$

Pozwala to na definicję topologii jednostajnej w całej przestrzeni na raz, czyli już nie tylko w g -sekcjach \mathcal{K}_g . Jest to właśnie najsłabsza jednostajność, w której wszystkie $F(e(\cdot, A))$, $P \in \Pi$ są jednostajnie ciągłe.

Nie mamy tutaj już określonej funkcji $\hat{g}: \Sigma \rightarrow \mathcal{G}$ lecz multi-funkcję $\hat{g}: \Sigma \rightarrow 2\mathcal{G}$ przyporządkującą stanom zbiory równowżnych konfiguracji, czyli orbity grupy izotropii [por. Noll, 7].

Zastosowanie takiego opisu w mechanice cieczy i gazów, a także pewnych zagadnień plastycznego płynięcia, byłoby na pewno korzystne, należy tu jednak zwrócić uwagę na spełnienie postulatu obiektywności materialnej i dobór właściwych miar naprężenia.

3. Procesy relaksacyjne.

3.1. Jednoznaczność stanów równowagi.

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy przestrzeń stanów z topologią jednostajną zadaną przez żądanie, by rodzina funkcji $F(P^f, T_{durP}(\cdot, P))$, $P \in \Pi$ była jednostajnie ciągła, względnie jako iloczyn topologiczny przestrzeni \mathcal{G} razy przestrzeń metody przygotowania, w której topologia jednostajna zadaną jest podobnym żądaniem. W każdym z tych dwóch przypadków odwzorowanie $T_{durP}(\cdot, P)$ jest ciągłe z definicji topologii [por. Noll, 72], w pierwszym przypadku jako odwzorowanie $\Sigma \rightarrow \Sigma$, w drugim z $\sum_{p_i} \rightarrow \sum_{p_f}$, czyli z $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, zgodnie z naszym założeniem.

W tym rozdziale będziemy badali bardzo szczególną klasę procesów, mianowicie procesy stałe lub relaksacyjne, $P = \mathcal{G}_{(durP)}$ dla przypadku $\Sigma = \mathcal{G} \times \mathcal{K}$. Procesy tego rodzaju badali już [Coleman, Gurtin, 67], [Coleman, Mizel, 66, 67, 68] w przypadku materiału z parametrami wewnętrznymi i materiału z pamięcią i [Noll, 72] dla swojej przestrzeni stanów. Coleman i Gurtin wprowadzili tzw. postulat stabilności, mianowicie, żeby granica

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T_t(k, g_{(t)}) = \tilde{T}(g)$$

istniała dla wszystkich k , g i była funkcją tylko g . Noll także postuluje istnienie powyższej granicy, lecz dopuszcza

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T_t(k, g_{(t)}) = T(k, g)$$

Klasę materiałów, dla których $T(k, g) = \tilde{T}(g)$ nazywa on klasą materiałów semisprężystych.

Zagadnienie, czy dana struktura materialna spełnia postulat stabilności Colemana i Gurtina ma dużą wagę, gdyż decyduje ono o tym, czy struktura ta nadaje się do opisu plastyczności czy nie. Szerokie badania na ten temat prowadzili Kosiński i Valanis uzyskując szereg twierdzeń o semisprężystości, czy też jednoznaczności punktów równowagi, dla struktur z parametrami wew-

nętrznymi oraz z pamięcią [Kosiński, Valanis, 76a, b, 78]. Jednak nie dyskutowali oni krytycznie założeń swych twierdzeń [por. Frischmuth 81; Frischmuth, Kosiński 82], gdyż chodziło im głównie o wykazanie niemożliwości opisu plastyczności w ramach danej struktury, ap. [Kosiński, Valanis, 78].

W tym rozdziale podsumujemy główne wyniki prac [Frischmuth, 81] i [Frischmuth, Kosiński, 82]. Wyniki te dotyczą przypadku ogólnej jednostajnej przestrzeni metody przygotowania, gdyż zakładamy tylko, iż \mathcal{K} jest przestrzenią Hausdorffa.

Założmy więc, że

$$(3) \quad \forall_{(g, k) \in \Sigma} \lim_{t \rightarrow \infty} T_t(k, g_{(t)}) =: T(k, g)$$

istnieje i zależy dla ustalonego g w sposób ciągły od k . Wprowadźmy jeszcze pojęcie punktu równowagi i stanu równowagi przez żądanie, by

$$(4) \quad \forall_{t \in \mathbb{R}^+} T_t(k, g_{(t)}) = k$$

Wtedy k nazywamy punktem, a (g, k) - stanem równowagi dla g . Dziedzina przyciągania stanu równowagi (g, k) nazywamy zbiór

$$(5) \quad D(k, g) := \left\{ \bar{k} \in \mathcal{K} : T(\bar{k}, g) = k \right\}$$

Dziedzina ta zawiera oczywiście samo k i jest domknięta ze względu na ciągłość $T(\cdot, g)$. Dziedziny różnych stanów równowagi dla tego samego g są rozłączne jako przeciwobrazy różnych punktów przy funkcji $T(\cdot, g)$.

Definicja. Mówimy, że stan równowagi (g, k) jest quasi-asymptotycznie stabilny, gdy dziedzina $D(k, g)$ jest jego otoczeniem.

Możemy teraz sformułować główne twierdzenie tego rozdziału.

Twierdzenie 1. Dla każdego $g \in \mathcal{G}$ istnienie quasi-asymptotycznie stabilnego stanu równowagi (g, k) wyklucza istnienie innego punktu równowagi $k_1 \neq k$ dla g w tej składowej spójności \mathcal{K} do której należy k .

Doród. Wiemy już, że $D(k, g)$ jest domknięte, wystarczy więc udowodnić otwartość.

Z założenia o quasi-asymptotycznej stabilności (g, k) istnieje otwarty zbiór $U_{g,k}$ taki, że

$$k \in U_{g,k} \subset D(k, g)$$

Jako, że różne dziedziny przyciągania są rozłączne, $D(k, g)$, a tym bardziej $U_{g,k}$, nie zawiera punktów równowagi dla g różnych od k . Stąd mamy

$$(e) \quad T(\cdot, g)^{-1}(U_{g,k}) = \left\{ \bar{k} \in \mathcal{K} : T(\bar{k}, g) \in U_{g,k} \right\} = \left\{ k \in \mathcal{K} : T(k, g) = k \right\} = D(k, g)$$

przy czym skorzystaliśmy z oczywistego faktu, że dla wszystkich (k, g) punkt $T(k, g)$ jest punktem równowagi dla g ^{1/}. Równość powyższa razem z ciągłością $T(\cdot, g)$ dowodzi otwartości

$D(k, g)$. Tym samym dziedzina ta jest niepustym otwarto - domkniętym podzbiorem, czyli składową spójności, przestrzeni \mathcal{K}

Włosek. Jeśli k_1 i k_2 są dwoma różnymi punktami równowagi dla tej samej konfiguracji g oraz para (g, k_1) stanowi quasi-asymptotycznie stabilny stan, to nie istnieje żaden proces ciągły $k(\cdot) : [0, t] \rightarrow \mathcal{K}$ taki, że $k(0) = k_1$ a $k(t) = k_2$

Dalej wnioskujemy z twierdzenia 1, że założenie quasi-asymptotycznej stabilności wszystkich stanów równowagi danego modelu oraz spójności przestrzeni \mathcal{K} pociąga za sobą, że $T(k, g)$ jest funkcją tylko argumentu g , czyli że model jest semi-sprężysty.

Twierdzenie nasze nie zakłada postulatu rozróżnialności stanów, jest więc prawdziwe również dla prestruktur, o ile założymy istnienie granicy $T(k, g)$ ciągłej ze względu na k .

^{1/} skorzystamy w tym miejscu z ciągłości $T_t(\cdot, g(t))$

Częste \mathcal{K} jest przestrzenią Banacha, więc założenie o spójności jest spełnione. Co więcej, jeśli dla każdego $P \in \Pi$ i $k \in \mathcal{K}$ funkcja

$$(7) \quad \tau \longrightarrow T_\tau(k, P_{[0, \tau]})$$

jest ciągła, to spójność przestrzeni \mathcal{K} jest konsekwencją postulatu [Noll, 72], żeby przestrzeń stanów zawierała co najmniej jeden stan zrelaksowany, dla którego zbiór stanów osiągalnych za pomocą procesu z Π jest gęsty w Σ .

W [Kosiński, Valanis, 76] udowodniono analogiczne twierdzenie do naszego twierdzenia dla przypadku $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ przy założeniu, że $T_t(\cdot, P)$ jest jednakowo ciągłą ze względu na t funkcją i że granica $T(k, g)$ istnieje dla każdego (g, k) , przy czym idea dowodu była znacznie bardziej skomplikowana. Doprowadzono do sprzeczności założenie, że istnieją dwa różne stany quasi-asymptotycznie stabilne dla tego samego g . Obecne twierdzenie jest więc istotnie silniejsze.

W pracy [Frischmuth, Kosiński] zbadano zagadnienie jednoznaczności stanów równowagi przy zadanej konfiguracji dla prestruktury z pamięcią. Wprowadzono przestrzeń Koetha-Töplitza z normą funkcyjną o ciągłej własności Fatou, w której wyróżniono stożek historii przeszłych, tj. funkcji z przedziału $(0, \infty)$ o wartościach w $\mathcal{G} \subset \text{Sym}^+(\tau, \tau^*)$. Przy pewnych założeniach dotyczących obciążenia i kontynuacji historii [por. Coleman, Mizel 66, 67, 68] udowodniono, że dla tej prestruktury samo istnienie granicy pociąga za sobą niezależność, więc tym bardziej ciągłość zależności od początkowej prehistorii oraz quasi-asymptotyczną stabilność w sensie globalnym.

Gdy spełniony jest warunek rozróżnialności, czyli jeśli mamy do czynienia z tzw. absolutną pamięcią, to istnienie granicy $T(k, g)$ ma sens fizyczny [por. Noll, 72]. Można stąd wyciągnąć następujący wniosek: Pamięć materiału rzeczywistego nie może być jednocześnie absolutna i niezankająca. Abstrahujemy przy tym od tego, czy w ogóle istnieje materiał z absolutną pamięcią.

Dalsze wnioski można znaleźć w samej pracy [Frischmuth, Kosiński, 82].

3.2. Niestabilność stanów równowagi

W pracy [Frischmuth, 81] zbadano dalej przypadek nie-quasi-asymptotycznie stabilny. Udowodniono, że również dla przestrzeni stanów jednostajnej, a więc niekoniecznie metrycznej, zbiór punktów równowagi modelu przy ustalonej konfiguracji jest domknięty a ponadto spójny, o ile \mathcal{K} jest spójna. Pociąga to za sobą, że każdy punkt równowagi leży na brzegu swej dziedziny przyciągania. Dalej, jeśli \mathcal{K} jest spójną przestrzenią metryczną, to zbiór punktów równowagi dla zadanej konfiguracji jest albo jednoelementowy - w przypadku quasi-asymptotycznie stabilnym, albo nieprzeliczalny - jeśli istnieje choć para punktów równowagi dla jednego $g \in \mathcal{G}$.

Później wprowadzono koncepcję zbiorów niezmienniczych. Okazuje się, że do tej klasy należą, obok dziedzin przyciągania, również brzegi tych dziedzin oraz części wspólne dowolnej rodziny brzegów dziedzin przyciągania. W przypadku $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ z tych faktów można wyciągnąć kilka ciekawych wniosków.

Głównie jednak wykorzystano ideę zbiorów niezmienniczych, aby scharakteryzować założenie ciągłości funkcji $T(\cdot, g)$. Udowodniono mianowicie następujące

Twierdzenie 2. Jeśli \mathcal{K} jest regularną przestrzenią topologiczną, $T(\cdot, g)$ istnieje lecz jest nieciągłe dla pewnego $g \in \mathcal{G}$, to wtedy istnieje punkt równowagi k dla g , który jest niestabilny w sensie Lapunowa, tj. istnieje takie otoczenie W punktu k , że każde otoczenie U punktu k zawiera co najmniej jeden punkt k_U taki, że dla pewnego t_{k_U}

$$(8) \quad T_{t_{k_U}}(k_U, g(t_{k_U})) \notin W$$

idea dowodu. Z założenia nieciągłości $T(\cdot, g)$ istnieje takie $\bar{k} \in \mathcal{K}$ i takie otoczenie V punktu $T(\bar{k}, g)$, że dla żadnego otoczenia U punktu \bar{k} nie zachodzi

$$(9) \quad T(U, g) \subset V$$

Jednak k niekoniecznie musi być punktem równowagi dla g . Okazuje się jednak, że własność: dla żadnego otoczenia nie zachodzi (9), i to z tym samym V , jest niezmiennicza, czyli także każde $T_t(\bar{k}, g_{(t)})$ ma tę własność. Dalej, można przejść do granicy z t do nieskończoności, a z ciągłości każdego $T_t(\cdot, g_{(t)})$ punkt graniczny $T(\bar{k}, g) =: k$ już jest punktem równowagi. Wystarczy więc wziąć jako W takie otoczenie $T(\bar{k}, g)$, które zawiera się wraz ze swoim domknięciem $c(W)$ w V , żeby otrzymać (8).

Ze względu na jednostajną topologię przestrzeni \mathcal{K} można w dość naturalny sposób wprowadzić pojęcie stabilności procesu. Nie będziemy się jednak tym zajmować, przejdziemy do badania konkretnego modelu konstytutywnego, mianowicie ciała ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi. W następnym rozdziale zbadamy przede wszystkim ograniczenia termodynamiczne dla tej struktury, żeby dopiero w ostatnim rozdziale wykorzystać te wyniki do analizy stabilnościowej.

4. Ciało ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi

W tym rozdziale zajmujemy się termodynamiką ciała z pewną nową strukturą materialną, wprowadzoną w serii prac [Perzyna, 80, 81, 82]. Zaczynamy od wprowadzenia kilku niezbędnych oznaczeń.

Niech $\mathcal{B} \subset R^3$ będzie konfiguracją odniesienia rozpatrywanego ciała materialnego o gęstości masy $\rho: \mathcal{B} \rightarrow R^{++}$. Umiejscowienie ciała jest zadane z dokładnością do obrotów i translacji, jeśli zadana jest funkcja odległości (metryka) $m: \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow R^+$, która przyporządkowuje parom cząstek (x, y) ich odległość w umiejscowieniu aktualnym $\chi_t(\mathcal{B})$ [Noll, 72, Kosíński 81]. Przyjmujemy obecnie jako konfigurację termomechaniczną ciała parę

$$g = (m, \mathcal{T})$$

gdzie $\mathcal{T}: \mathcal{B} \rightarrow R^{++}$ jest skalarnym polem temperatury.

Jako metodę przygotowania zaś przyjmujemy pole

$$\alpha: \mathcal{B} \rightarrow R^l$$

którego wartość w ustalonej cząstce interpretujemy jako zespół parametrów wewnętrznych. W ogólności α nie jest polem wektorowym, lecz kolekcją pól tensorowych różnej walencji o wartościach w nadbudowie tensorowej przestrzeni stycznej do \mathcal{B} . Jest to fakt istotny przy zmianach układu współrzędnych materialnych.

Przez proces rozumiemy w tym rozdziale odwzorowanie P z przedziału $[0, \text{dur } P]$ w przestrzeń konfiguracji \mathcal{G} , przy czym żądamy, by istniała funkcja T przyporządkująca parom (metoda przygotowania, proces) nową metodę przygotowania. Żądanie to stanowi pewne ograniczenie na klasę procesów Π , gdy T_t zadane jest za pomocą równań różniczkowych. Ponadto pozwala ono parę (g, α) nazywać "stanem" ciała \mathcal{B} . Pamiętajmy jednak o tym, że to jest formalne uogólnienie podejścia do cząstki materialnej, uzasadnione na tym etapie modelowania konstytutywnego. Konsekwencją tego przyjęcia jest występowanie szerszej klasy s.t. masowych, niż się zwykle przyjmuje, gdy przez stan ciała

rozumie się parę (g, v) , gdzie v jest polem prędkości na \mathcal{B} . Bliżej będziemy się tym zajmowali w następnym rozdziale.

Stan ciała wyznacza reakcję, czyli czwórkę pól określonych na ciele $(\Psi, \eta, T, q) = (\Psi, N, \mathcal{T}, Q)(g, \alpha)$, gdzie Ψ jest energią swobodną, η entropią, T naprężeniem Pioli-Kirchhoffa i q przepływem energii niemechanicznej.

Zasadniczą nowością koncepcji Perzyny [Perzyna, 80] jest postać równania ewolucji dla metody przygotowania, która uwzględnia wpływ otoczenia na ewolucję "stanu" osłuszki materiału. Nadaje ona teorii cechy nielokalne.

Zakładamy, że m należy do pewnej klasy funkcji odległości \mathcal{M} , a α należy do pewnej przestrzeni Hilberta $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ funkcji określonych na \mathcal{B} , zawierającej $C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^1)$. Mamy więc $\mathcal{G} = \mathcal{M} \times \mathcal{K}$.

Postulujemy, że funkcja ewolucji $T(\cdot, \cdot)$ jest funkcją rozwiązującą równanie ewolucji

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \alpha(\cdot) = L(P(\cdot))\alpha(\cdot), \text{ lub skrótowo } \dot{\alpha} = L\alpha$$

gdzie L jest postaci

$$(L(m, \mathcal{D})\alpha)(x) = \sum_{i=1}^n L_i(C(x), \mathcal{D}(x)) \nabla^{(i)}(x) + f(C(x), \mathcal{D}(x), \nabla \mathcal{D}(x), \alpha(x))$$

i spełnia warunek dyssypatywności, [Perzyna 80].

$$\forall_{m, \mathcal{D}} \exists_{\beta \in \mathbb{R}} \forall_{\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Dom } L} \langle L(m, \mathcal{D})\alpha_1 - L(m, \mathcal{D})\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 \rangle \leq \beta \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\mathcal{K}}^2$$

Tutaj przez $\nabla^{(i)}$ oznaczamy i -ty gradient, a C jest prawym tensorem Cauchy-Greena, związanym z m poprzez, [Kosiński 81],

$$C(z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} m^2(x, y) \Bigg|_{\substack{x=z \\ y=z}}$$

Każde L_i jest odwzorowaniem liniowym o wartościach w R^1

$$L_i(C, \dot{v}): R^{3n} \rightarrow R^1$$

Dalszym istotnym założeniem jest, że reakcja w każdej cząstce materiału ciała jest wyznaczona przez "stan" w najbliższym swoim otoczeniu. Zakładając gładkość pola temperatury przyjmuje się zgodnie z tym w pierwszym przybliżeniu

$$r(m, \dot{v}, \alpha)(x) = r(C(x), \dot{v}(x), \nabla \dot{v}(x), \alpha(x))$$

czyli

$$\Psi(m, \dot{v}, \alpha)(x) = \Psi(C(x), \dot{v}(x), \nabla \dot{v}(x), \alpha(x))$$

$$(5) \quad N(m, \dot{v}, \alpha)(x) = \eta(C(x), \dot{v}(x), \nabla \dot{v}(x), \alpha(x))$$

$$J(m, \dot{v}, \alpha)(x) = T(C(x), \dot{v}(x), \nabla \dot{v}(x), \alpha(x))$$

$$Q(m, \dot{v}, \alpha)(x) = q(C(x), \dot{v}(x), \nabla \dot{v}(x), \alpha(x))$$

4.1. Redukcja nierówności termodynamicznej

Zbadamy teraz ograniczenia termodynamiczne w oparciu o propozycję z pracy [Perzyna 80], tj. żądamy, aby w każdej cząstce i w każdej chwili każdego procesu spełniona była nierówność

$$(6) \quad -\dot{\Psi} - \dot{v} \eta + \frac{1}{2\rho} T \dot{C} - \frac{1}{\rho \dot{v}} q \nabla \dot{v} \geq 0$$

Rozważania tego typu można znaleźć w wielu pracach, np. [Perzyna 78], [Coleman, Gurtin 67], [Valanis 67], [Perzyna 75]. Przy standardowych założeniach gładkości funkcji Ψ, η, T, q uzyskamy ograniczenia

$$(7) \quad \partial_{v_s} \Psi(C, \dot{v}, \nabla \dot{v}, \alpha) = 0, \quad T = 2\rho \partial_c \Psi, \quad \eta = -\partial_s \Psi,$$

oraz nierówność

$$(8) \quad -\partial_{\alpha} \psi \cdot \alpha \frac{1}{\rho \vartheta} qv^{\vartheta} \geq 0$$

Wynik ten był eksplloatowany w pracach [Perzyna 80], [Perzyna 82]. Jednak dotąd nie zauważono faktu, że nierówność (8) redukuje się dalej. Zauważmy bowiem, że na α wpływają liniowe gradienty $v^{(i)} \alpha$, które nie występują w pozostałych wyrazach nierówności.

Określmy przestrzeń liniową

$$V: R^{3l} \times R^{3^2l} \times \dots \times R^{3^nl} \ni v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

oraz odwzorowanie liniowe

$$D_{C,\vartheta}: V \rightarrow R^l, \quad Dv = \sum_{i=1}^n L_i(C, \vartheta) v_i$$

Przy tych oznaczeniach wyciągamy z nierówności (8) wniosek

$$w \in \text{Im} D_{C,\vartheta} \implies \partial_{\alpha} \psi(C, \vartheta, \alpha) \cdot w = 0$$

lub inaczej $\partial_{\alpha} \psi \perp \text{Im} D$ w naturalnym iloczynie skalarnym w R^l .

W tym miejscu dogodnie jest założyć, że podprzestrzeń $\text{Im} D_{C,\vartheta} \subset R^l$ nie zależy od C i ϑ . Wtedy R^l możemy przedstawić jako sumę ortogonalną swoich podprzestrzeni

$$\text{Im} D =: K_2 \quad \text{oraz} \quad K_2^{\perp} =: K_1$$

w sposób niezależny od konfiguracji. To znaczy, że każdy wektor $w \in R^l$ posiada jednoznaczny rozkład

$$w = w_1 + w_2, \quad w_1 \in K_1, \quad w_2 \in K_2.$$

Możemy więc w sposób równoważny każdą funkcję zależną od α traktować jako funkcję dwu zmiennych α_1 i α_2 będących składowymi α .

Przy tych oznaczeniach prawdziwe jest więc twierdzenie:

Twierdzenie 1. Nierówność termodynamiczna (6) jest spełniona dla każdego procesu w każdej chwili i w każdej cząstce wtedy i tylko wtedy gdy zachodzą związki (7) oraz

$$(9) \quad \psi = \psi(C, \vartheta, \alpha_1)$$

$$(10) \quad -\partial_{\alpha_1} \psi \cdot f(C, \vartheta, \nabla \vartheta, \alpha_1, \alpha_2) - \frac{1}{\gamma^3} q(C, \vartheta, \nabla \vartheta, \alpha_1, \alpha_2) \nabla \vartheta \geq 0$$

gdzie $\alpha_1 \in K_1$, $\alpha_2 \in K_2$ oraz $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Wniosek. Jeśli przyjmujemy równanie ewolucji w postaci (4) wraz z postulatem termodynamicznym (6), to energia swobodna, a konsekwentnie naprężenie i entropia, nie zależą od α_2 .

Niemniej α_2 wchodzi w równanie ewolucji α_1 i może w ten sposób wpłynąć na reakcję "z opóźnieniem".

Zanim przejdziemy do ogólniejszego postulatu termodynamicznego dla pewnej szczególnej zmodyfikowanej struktury z parametrami wewnętrznymi, rozpatrzmy jeszcze dwa przykłady.

Przykład 1. Położmy $K_2 = R$, $K_1 = R$, a przyjmujemy równania ewolucji postaci

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2 \\ \dot{\alpha}_2 &= D \Delta \alpha_2 + g(\alpha_2) \end{aligned}$$

Równania tego typu występują w teorii materiałów napromieniowanych. α_2 jest gęstością np. neutronów, a α_1 dozą napromienowania - por. [Pęcherski, 76].

Ograniczenia termodynamiczne w pracy Pęcherskiego są jednak nieco inne niż u nas, gdyż przyjęte zostały inne zmienne jako niezależne, należy tam przede wszystkim uwzględnić jawną zależ-

ność ψ od \dot{C} . W stanach równowagi zaś wyniki się pokrywają. Można uzyskać pełną zgodność opisując efekty lepkosprężyste za pomocą parametrów wewnętrznych [Valanis, 66] i wyrugując jawną zależność od prędkości odkształcenia.

Przykład 2. Rozpatrzmy model lepkoplastyczny Perzyny

$$\psi = \psi(C, \dot{v}, \kappa, \gamma, \alpha_{pl})$$

gdzie κ jest parametrem wzmocnienia, γ parametrem lepkości, a α_{pl} tensorem odkształceń niesprężystych.

Równania ewolucji przyjmujemy w następującej zmodyfikowanej postaci

$$(12) \quad \begin{aligned} \kappa &= k(\sigma) \\ \dot{\gamma} &= \Gamma(\sigma) \\ \dot{\alpha}_{pl} &= \gamma \left\langle \frac{\phi(T(\sigma), \xi)}{\kappa} - 1 \right\rangle \partial_T \phi \\ \dot{\xi} &= D \Delta \xi + \Xi(\sigma) \dot{\alpha}_{pl}(\sigma) \end{aligned}$$

gdzie $\sigma = (C, \dot{v}, \kappa, \gamma, \alpha_{pl})$, a k, Γ, Ξ i ϕ są funkcjami, a $D > 0$ stałą materiałową. Można ich postać, w szczególności zależność ϕ od ξ tak dobrać, żeby ξ opisało imperfekcje czy puzki w ciele B . Wtedy $\xi \neq 0$ powinno spowodować osłabienie (szybsze płynięcie) oraz dylatację plastyczną (zależność funkcji nadwyżki ϕ od pierwszego niezmiennika $T(\sigma)$) [por. Perzyna 82].

Zauważmy w tym miejscu, że w obydwu przykładach funkcja f nie zależy od $v \dot{v}$. Mamy więc dodatkowo do nierówności

$$(10) \quad -\partial_{\alpha_1} \psi \cdot f(C, \dot{v}, v \dot{v}, \alpha_1, \alpha_2) - \frac{1}{\rho} q(C, \dot{v}, v \dot{v}, \alpha_1, \alpha_2) v \dot{v} > 0$$

nierówność

$$(13) \quad -\partial_{\alpha_1} \psi \cdot f(C, \dot{v}, v \dot{v}, \alpha_1, \alpha_2) \geq 0$$

którą otrzymamy poprzez podstawienie do (10) $\nabla \mathcal{U} = 0$ i wykorzystanie niezależności f od $\nabla \mathcal{U}$

Druga rzecz, na którą warto zwrócić uwagę, to fakt, że w obu przykładach mamy do czynienia z równaniami bilansu, przy czym człony odpowiadające przepływowi są niezerowe każdorazowo tylko w ostatnim z równań.

Skupmy się obecnie na tym szczególnym przypadku i sformułujmy taki postulat termodynamiczny, który zawiera nasze obecne wyniki jako przypadek szczególny, a który w ogólności dopuszcza nietrywialną zależność energii swobodnej od wszystkich parametrów wewnętrznych.

4.2. Dodatkowy strumień entropii

Przyjmujemy równania ewolucji dla parametrów wewnętrznych (por. (4)) w postaci

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= g_1(C, \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}, \alpha_1, \alpha_2, \nabla \alpha_2) \\ \dot{\alpha}_2 &= g_2(C, \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}, \alpha_1, \alpha_2, \nabla \alpha_2) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} p(C, \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}, \alpha_1, \alpha_2, \nabla \alpha_2) \end{aligned}$$

gdzie $p = p(C, \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}, \alpha_1, \alpha_2, \nabla \alpha_2)$ jest przepływem wielkości α_2 . Oznaczmy $\nabla \mathcal{U} =: \nabla, \nabla \alpha_2 =: \square$ i załóżmy, iż α_1 może być zespołem $l-1$ pojedynczych parametrów, a α_2 jest skalar-nym parametrem, tak że p jest wektorem z przestrzeni stycznej do \mathcal{B} . Zakładamy, że p jest lokalnie odwracalną funkcją \square , czyli, że $\det(\partial p / \partial \square) \neq 0$, liniowości obecnie nie zakładamy.

Postulujemy następującą nierówność termodynamiczną

$$(15) \quad \eta + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \phi \geq s$$

gdzie ϕ oznacza przepływ entropii a

s źródło entropii związane z radiacją ciepła.

Jeśli do (15) podstawimy

$$\phi = \frac{q}{\rho}, \quad s = \frac{r}{\rho}$$

gdzie r jest radiacją ciepła, równą z pierwszego prawa termodynamiki

$$(16) \quad r = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} \eta + \vartheta \dot{\eta} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} q - \frac{1}{2\vartheta} \dot{C} T$$

to z powrotem otrzymamy poprzednią nierówność (6).

Przyjmijmy jednak ogólniej, że przepływ entropii ϕ jest pewną kombinacją liniową przepływów energii niemechanicznej i przepływu wielkości α_2 , tj.

$$(17) \quad \phi = \mu p + v q, \quad \mu \in R, \quad v \neq 0$$

oraz

$$(18) \quad s = \varphi r$$

gdzie μ , v i φ są funkcjami zmiennych $C, \vartheta, v, \alpha_1, \alpha_2$ i \square . Przekonamy się - jak należało się spodziewać, że $\varphi = v$ oraz że w przypadku braku parametru α_2 o nieznikającym przepływie jedyną możliwością jest

$$v = \frac{1}{\vartheta}, \quad \text{czyli} \quad \phi = \frac{q}{\vartheta}$$

najwyżej po zmianie skali temperatury. W ogólności zaś tak nie musi być, współczynnik v może być różny od $\frac{1}{\vartheta}$, chociaż nie wprowadzamy pochodnej $\dot{\vartheta}$ jako zmiennej niezależnej [por. Müller, 72].

Podstawmy więc (16), (17) i (18) do (15). Przy odpowiednich założeniach gładkości funkcji ψ otrzymamy stąd nierówność^{1/}

$$(19) \quad v \left(\frac{1}{2\rho} T - \psi_{,c} \right) \dot{C} + v (1 - \eta - \psi_{,\vartheta}) \dot{\vartheta} + (1 - \vartheta v) \dot{\eta} + (v - \varphi) r + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} v \cdot \dot{q} + \\ + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{div} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \mu \cdot p - v \psi_{,\alpha_1} \dot{\alpha}_1 - v \psi_{,\alpha_2} \dot{\alpha}_2 - v \psi_{,v} \dot{v} - v \psi_{,\square} \dot{\square} \geq 0$$

1/ Zeby uniknąć pomyłki wprowadziliśmy oznaczenia grad i div na miejsce ∇ i ∇ .

Zaczniemy od dyskusji przypadku $V = \frac{1}{3}$. Wtedy człon $(1 - \partial v)\eta$ znika i z nierówności (19) wnioskujemy przy założeniu

$$\frac{\partial q}{\partial v} \neq 0 \quad (\text{por. (16)})$$

$$(20) \quad T = 2\rho \psi_{,c}, \eta = -\psi_{,g}, v = \varphi, \psi_{,v} = 0, \psi_{,\square} = 0 \quad \text{oraz}$$

$$(21) \quad \frac{1}{\rho V} (\text{grad } v \cdot q + \text{grad } \mu \cdot p) - \psi_{,\alpha_1} g_1 - \psi_{,\alpha_2} g_2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu}{V} + \psi_{,\alpha_2} \right) \text{div } p \geq 0$$

Na niektóre człony nierówności (21) wpływa drugi gradient $\text{grad } \square$ w sposób liniowy - zależności te muszą się oczywiście nawzajem znieść. W związku z tym mamy

$$(22) \quad \frac{1}{\rho V} (\mu_{,\square} \otimes p + (\mu + v \psi_{,\alpha_2}) p_{,\square}) = 0$$

Z założenia $p_{,\square}$ jest tensorem odwracalnym, $\mu_{,\square} \otimes p$ jest zaś tensorem rozkładalnym, w związku z tym musi być

$$(23) \quad \mu = -v \psi_{,\alpha_2} = -\frac{1}{3} \psi_{,\alpha_2}$$

oraz przy niesnikającym tożsamościowo p i ciągłym - bo różniczkowalnym - ze względu na \square μ mamy tożsamościowo

$$(24) \quad \mu_{,\square} = 0$$

Wynik ten jest zgodny z warunkiem

$$\psi_{,\square} = 0$$

W przypadku większej ilości parametrów α_2 podlegających transportowi otrzymany w sposób analogiczny jak warunek (22)

$$(25) \quad \frac{1}{\rho V} \left(\sum_{i=1}^{l_2} \mu_{, \square}^{(i)} \otimes p^{(i)} + \sum_{i=1}^{l_2} (\mu^{(i)} + V \Psi_{, \alpha_2}^{(i)}) p^{(i)}_{, \square} \right) = 0$$

W ogólności już nie można wnioskować z (25), że obie sumy oddzielnie też znikają, warunki

$$(26) \quad \mu^{(i)} = -\frac{1}{\mathfrak{D}} \Psi_{, \alpha_2}^{(i)}$$

$$(27) \quad \mu_{, \square}^{(i)} = 0$$

są więc warunkami jedynie dostatecznymi spełnienia (25), z tym, że założenie któregośkolwiek z nich pociąga już drugi za sobą.

Z (21) wnioskujemy dalej, że μ nie zależy od C i α_1 , gdyż znowu gradienty tych wielkości wchodzą tylko do członu $\frac{1}{\rho V} \text{grad } \mu \cdot p$. Ostatecznie mamy więc $\mu = \mu(\mathfrak{D}, \alpha_2)$ czyli

$$(28) \quad T_{\alpha_2} = 2\rho \Psi_{, C \alpha_2} = -2\rho \mathfrak{D} \mu_{, C} = 0, \quad \Psi_{, \alpha_1 \alpha_2} = 0$$

Podsumujmy powyższe rozważania w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2. Jeśli dla zmodyfikowanej struktury z parametrami wewnętrznymi o równaniach ewolucji (14) strumień i źródło entropii spełniają

$$\phi = \frac{1}{\mathfrak{D}} q + \mu p, \quad s = \varphi r$$

to przy powyższych założeniach gładkości i niesobliwości nierówność termodynamiczna (15)

$$\dot{\eta} + \frac{1}{\rho} \text{div } \phi \geq s$$

jest spełniona wtedy i tylko wtedy gdy

$$T = 2\rho\psi_{,c}, \quad \eta = -\psi_{,s}, \quad \varphi = \frac{1}{\mathfrak{S}}, \quad \psi_{,v} = 0, \quad \psi_{,\square} = 0,$$

$$T_{,\alpha_2} = 0, \quad \psi_{,\alpha_1\alpha_2} = 0, \quad \mu = -\frac{1}{\mathfrak{S}}\psi_{,\alpha_2}$$

oraz

$$(29) \quad -\frac{1}{\rho\mathfrak{S}} \text{grad}\mathfrak{S}(q - p\psi_{,\alpha_2}) - \frac{1}{\rho} \text{grad}\psi_{,\alpha_2} \cdot p - \psi_{,\alpha_1}g_1 - \psi_{,\alpha_2}g_2 \geq 0$$

W przypadku większej ilości parametrów o nieznikającym przepływie wyżej wymienione warunki są warunkami jedynie dostatecznymi spełnienia nierówności termodynamicznej.

Zanalizujmy teraz założenie $v = \frac{1}{\mathfrak{S}}$. Przy tym założeniu uzyskaliśmy jako jeden z wyników $\eta = -\psi_{,s}$. Zauważmy, że przy $\eta_{,s} = -\psi_{,ss} \neq 0$ słuszna jest również odwrotna implikacja

$$\eta = -\psi_{,s} \implies v = \mathfrak{S}^{-1}$$

Istotnie, jeśli $\eta = -\psi_{,s}$, to człon zawierający \mathfrak{S} odpada z (19), a z dowolności $\dot{\eta}$ uzyskamy $v = \mathfrak{S}^{-1}$ oraz pozostałe wyniki podsumowane w twierdzeniu 2.

Zajmijmy się teraz przypadkiem $v \neq \frac{1}{\mathfrak{S}}$, czyli także $\eta \neq -\psi_{,s}$. Dla uproszczenia przyjmijmy jednak od razu że μ i v nie zależą od ∇ i \square . Ilość parametrów α_2 może być teraz dowolna, a sumowanie po "i" oznaczmy przez "e".

Oznaczmy $\Theta = v^{-1} - \mathfrak{S}$ i przepiszmy (19), zakładając gładkość ψ i η :

$$(30) \quad \left(\frac{1}{2\rho} T - \psi_{,c} + \Theta\eta_{,c}\right)\dot{c} + (-\eta - \psi_{,s} + \Theta\eta_{,s})\dot{s} + (v - \varphi)\frac{\dot{r}}{v} + \frac{1}{\rho v} \text{grad}v \cdot q + \\ + \frac{\mu}{\rho v} \circ \text{div}p + \frac{1}{\rho v} \text{grad}\mu \cdot p - (\psi_{,\alpha_1} - \Theta\eta_{,\alpha_1})g_1 - (\psi_{,\alpha_2} - \Theta\eta_{,\alpha_2}) \circ (g_2 - \frac{1}{\rho} \text{div}p) + \\ - (\psi_{,v} - \Theta\eta_{,v})\dot{v} - (\psi_{,\square} - \Theta\eta_{,\square}) \circ \square \geq 0$$

Otrzymamy następujące związki

$$(31) \quad T = 2\varphi(\psi_{,c} - \Theta\eta_{,c}), \quad v = \varphi, \quad \psi_{,v} = \Theta\eta_{,v},$$

$$\eta - \Theta\eta_{,s} = -\psi_{,s}, \quad \psi_{,s} = \Theta\eta_{,s}, \quad \mu = -v(\psi_{,cc} - \Theta\eta_{,cc})$$

oraz nierówność

$$(32) \quad \frac{1}{\rho v} (\text{grad } v q + \text{grad } \mu \circ p) - \sum_{j=1,2} (\psi_{,cc_j} - \Theta\eta_{,cc_j}) g_j \geq 0$$

Widzimy więc, że dla zmodyfikowanej struktury z parametrami wewnętrznymi przyjęcie $v = \frac{1}{\bar{v}}$ nie jest koniecznością. Warto przy tym podkreślić, że istnienie wielkości α_2 o przepływie p jest istotne. Rzeczywiście, gdyby nie α_2 , mielibyśmy

$v = v(\bar{v})$. Moglibyśmy wtedy wprowadzić nową bezwzględną skalę temperatury $\bar{v} = \frac{1}{v}$ i energię swobodną $\bar{\psi} = \psi - \Theta\eta = \varepsilon - \bar{v}\eta$. Łatwo się przekonać, że pierwsze prawo termodynamiki się wtedy przepisuje w postaci

$$\dot{\bar{\psi}} + \bar{v}\dot{\eta} + \bar{v}\dot{\eta} + \frac{1}{\rho} \text{div } q - \frac{1}{2\rho} \dot{c}T = r$$

a drugie prawo przyjmuje postać (19), przy czym \bar{v} i $\bar{\psi}$ zastąpimy przez \bar{v} i $\bar{\psi}$ odpowiednio.

Można więc stwierdzić, że wprowadzenie uogólnionych parametrów wewnętrznych stwarza możliwość opisu nowych zjawisk termodynamicznych, których interpretacja fizyczna pozostaje na razie otwarta. Będzie ona oczywiście zależała od konkretnego modelu. Wyniki zaś dla przypadku $v = \frac{1}{\bar{v}}$ potwierdzają poprzednie wyniki ($\mu = 0$) i są w zgodzie z klasyczną termodynamiką, gdy $\mu = -\frac{P}{\bar{v}}$, a $P = \psi_{,cc_2}$ jest tzw. potencjałem wielkości α_2 [por. Baranowski, 74].

4.3. Uwaga o stabilności stanu równowagi ciała

Z naszych rozważań termodynamicznych można wyciągnąć kilka wniosków dotyczących stabilności ruchu ciała B modelowanego w ramach nowej struktury. Mianowicie widzimy, że przyjęcie postulatu termodynamicznego (6) pociąga za sobą, iż funkcja Lapunowa, proponowana w [Perzyna 82],

$$V_{T_1}(\bar{\sigma}^*, \bar{\sigma}_T(t)) = \int_B [\hat{\psi}(\bar{\sigma}_T(t)) - \hat{\psi}(\bar{\sigma}^*)] dV \quad \text{bądź też}$$

$$V_{T_1}(\varphi^*, \varphi_T(t)) = \int_B \left\{ \psi(\varphi_T(t)) - \psi(\varphi^*) + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \right\} dV$$

nie może być na ogół dodatnio określona, gdyż nie zależy ona po prostu od parametrów α_2 wchodzących w skład $\bar{\sigma}$, względnie φ . [Per. Perzyna 82, Frischmuth, Perzyna 82].

Powstaje pytanie, czy metody przedstawione w [Perzyna 82] można wykorzystać wprowadzając inną funkcję Lapunowa. Okazuje się, że można uzyskać pewne wyniki modyfikując funkcję Lapunowa wprowadzaną przez Gurtina [Gurtin 75].

Podamy tu tylko krótko ideę konstrukcji funkcji Lapunowa, gdyż dalsze postępowanie jest niemal identyczne jak w pracy Gurtina, a wyniki dotyczą tylko bardzo szczególnych sytuacji. Przyjmijmy oznaczenia [por. Gurtin 75]

E - energia całkowita ciała	S - entropia ciała
P - moc mechaniczna dostarczana ciału	Q - moc niemechaniczna dostarczana przez powierzchnię (brak radiacji)
G - produkcja entropii w ciele (G_e) (na powierzchni)	
U_e - potencjał sił zachowawczych	P_e - moc sił niezachowawczych
J - ilość parametru α_2 w ciele	Σ - dopływ α_2 do ciała przez powierzchnię
Z - produkcja α_2 w ciele	

Zakładamy za Gurtinem nierówności

$$(33) \quad P_e \leq 0, \quad G_e \geq 0, \quad G \geq 0$$

oraz dodatkowo

$$(34) \quad Z \geq 0 \quad , \quad \mu \leq 0$$

Wielkości wyżej wprowadzone spełniają równania bilansu

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{E} &= Q + P \quad , \quad P = P_e - \dot{U}_e \\ \dot{S} &= G_e + G + \frac{1}{\vartheta_e} Q + \mu_e \Sigma \\ j &= \Sigma + Z \end{aligned}$$

Tutaj $\vartheta_e > 0$ jest stałą z założenia temperaturą na powierzchni ciała, a $\mu_e = \mu(\vartheta_e, \alpha_e)$, gdzie α_e jest również stałą - w czasie i w przestrzeni - wartością α_2 na brzegu ciała, np. $\alpha_2|_{\partial B} \equiv 0$.

Rozpatrzmy teraz funkcję

$$(36) \quad V := U_e + E - \vartheta_e (S - \mu_e J)$$

Policzmy jej pochodną \dot{V}

$$(37) \quad \dot{V} = \dot{U}_e + \dot{E} - \vartheta_e \dot{S} + \mu_e \vartheta_e \dot{J}$$

Podstawiając równania bilansu otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{V} &= P_e - \vartheta_e (G_e + G + \mu_e \Sigma) + \mu_e \vartheta_e (\Sigma + Z) = \\ &= P_e - \vartheta_e (G_e + G - \mu_e Z) \leq 0 \end{aligned}$$

Mamy więc wniosek, że V jest funkcją nierosnącą. Jest teraz już sprawą prawie że formalną, żeby przenieść rozumowanie Gurtina na naszą sytuację, tj. wyrażanie V poprzez lokalne wielkości za pomocą odpowiedniego lematu Ericksena i wyciąganie wniosków analogicznych do twierdzeń sekcji szóstej czy ósmej pracy Gurtina.

Wnioski te będą dotyczyły jednak jedynie stabilności procesów równowagowych ciała, i to przy dość silnych założeniach, jakie przyjęliśmy, a jeszcze dalszych dotyczących przede wszystkim zależności ψ od ϑ i α_1 jak i potencjału U . W związku z tym proponuję inną drogę, żeby pokazać ciągłą zależność rozwiązania równań pola dla ciała B od warunków początkowych, polegającą na pewnym twierdzeniu Dafermosa-Kosińskiego oraz na warunku dyssypatywności.

5. Stabilność w sensie ciągłej zależności od warunków początkowych rozwiązań równań pola dla ciała

5.1. Zastosowanie twierdzenia Dafermosa-Kosińskiego

W ciągu ostatnich kilku lat W. Kosiński udowodnił szereg twierdzeń o stabilności rozwiązań gładkich układów równań bilansu w klasie rozwiązań słabych dopuszczalnych, tj. spełniających pewną dodatkową nierówność. Twierdzenia te można zastosować między innymi do zagadnienia ruchu ciała dyssypatywnego nieprzewodzącego ciepła opisanego w ramach struktury z parametrami wewnętrznymi. Najnowsza wersja tych twierdzeń [Dafermos, Kosiński, to appear] uogólnia wcześniejsze wyniki Di Perny, Dafermosa i Kosińskiego. Celem tego rozdziału jest wyprowadzenie twierdzenia o stabilności dla zmodyfikowanej struktury z parametrami wewnętrznymi. Wykorzystamy przy tym obok wyników Kosińskiego warunek dyssypatywności operatora L , wprowadzony przez Perzynę w [Perzyna 80] oraz wyniki części termodynamicznej tej pracy.

Żeby sformułować potrzebne nam tutaj twierdzenie Dafermosa-Kosińskiego [per. Dafermos, Kosiński, to appear, tw.2] wprowadzimy kilka pojęć. Rozpatrzmy układ równań bilansu

$$(1) \quad U_t + \operatorname{div} f(U) = B(U)$$

przy czym U jest wektorem N -wymiarowym, zależnym od x i t , zawartym w zbiorze wypukłym otwartym D . Dalej przyjmujemy, że na D określona jest wypukła funkcja $\hat{\eta}$, zwana entropią układu (a niekoniecznie związana z entropią fizyczną, o której dotąd była mowa)

$$\hat{\eta} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

oraz funkcja \hat{h} , zwana strumieniem entropii układu,

$$\hat{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{gdzie } n\text{-wymiar ciała}$$

takich, że wszystkie Lipschitz-ciągłe (dalej-gładkie) rozwiązania układu (1) spełniają dodatkowe prawo bilansu

$$(2) \quad \hat{\eta}(U)_{,t} + \operatorname{div} \hat{h}(U) = \hat{r}(U)$$

Warunki konieczne i wystarczające na to są

$$(3) \quad \hat{r} = \nabla \hat{\eta} B \quad \text{oraz} \quad \nabla \hat{h} = \nabla \hat{\eta} \nabla f$$

gdzie ∇ oznacza gradient ze względu na U .

Rozwiązania słabe w klasie BV spełniają układ (1) w sensie miar, a żądamy ponadto spełnienia warunku depuszczalności, również w sensie miar,

$$(4) \quad \hat{\eta}(U)_{,t} + \operatorname{div} \hat{h}(U) \leq \hat{r}(U)$$

Dowód twierdzenia Dafermosa-Kosińskiego polega na pewnym oszacowaniu w którym, obok wypukłości $\hat{\eta}$, korzysta się z różniczkowalności funkcji B , f i $\hat{\eta}$, zakładamy więc także, że f i B są dwu-, a $\hat{\eta}$ trzykrotnie różniczkowalne w sposób ciągły,

$$B: D \rightarrow R^N, \quad f: D \rightarrow R^N \otimes R^n, \quad \eta: D \rightarrow R$$

Ponadto potrzebne jest przedstawienie B w następującej postaci

$$(5) \quad B(U) = B_0 + B_1 U + B_2(U)$$

gdzie B_0 nie zależy od U , B_1 jest operatorem liniowym, a B dowolną już funkcją U założonej klasy.

Zakłada się dalej, że obszar \mathcal{B} jest ograniczony i ma skończony perimeter, a na jego brzegu zadane są warunki brzegowe zmienne w czasie postaci

$$(6) \quad C(t,x)U = g(t,x), \quad (t,x) \in [0,t_0] \times \partial^* \mathcal{B}$$

Sformułujmy teraz twierdzenie Dafermosa-Kesińskiego

Twierdzenie 1. Niech \bar{U} będzie rozwiązaniem gładkim układu (1) przy prawej stronie \bar{B} postaci (5) takiej, że

$$(7) \quad (\bar{B}_1, \bar{B}_0) \in L^1([0, t_0], L^2(\mathcal{B}_*))$$

zadany na zbiorze

$$\bar{\Omega} := [0, t_0] \times \bar{\mathcal{B}}$$

spełniającym warunki początkowo-brzegowe

$$(8) \quad \bar{U}(0, x) = \bar{U}_0(x) \quad x \in \mathcal{B}$$

$$(9) \quad \bar{U}(t, x) = \bar{g}(t, x) \quad (t, x) \in [0, t_0] \times \partial^* \bar{\mathcal{B}}$$

oraz takim, że $\bar{U} \in D$ dla wszystkich $(t, x) \in \bar{\Omega}$

Wtedy istnieją cztery dodatnie stałe $c_0, c_1, \dots, c_2, c_3$ takie, że dla każdego $s \in [0, t_0]$ spełniona jest nierówność

$$(10) \quad \begin{aligned} \|(\bar{U} - U)(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{B}_*)} &\leq \sqrt{c_0} e^{c_2 s} \|(\bar{U}_0 - U_0)(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{B}_*)} + \\ &+ c_3 e^{c_2 s} \int_0^s \|(\bar{B}_1 - \bar{B}_1, \bar{B}_0 - \bar{B}_0)(t, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{B}_*)} dt, \end{aligned}$$

gdzie U jest dowolnym rozwiązaniem dopuszczalnym klasy BV układu (1) przy prawej stronie B postaci (5) takiej, że

$$(7a) \quad (B_1, B_0) \in L^1([0, t_0], L^2(\mathcal{B}_*)) , \quad B_2 = \bar{B}_2$$

istotnie ograniczonym na $\bar{\Omega}$, czyli

$$(11) \quad U(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\bar{\Omega})$$

o śladzie wewnętrznym

$$(12) \quad u^+ \in L^2(\partial^* \mathcal{B})$$

spełniającym warunki początkowo-brzegowe

$$(8a) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathcal{B}$$

$$(9a) \quad \Gamma(t, x)u(t, x) = g(t, x), \quad (t, x) \in [0, t_0] \times \partial \mathcal{B}_*$$

i bliskim rozwiązaniu \bar{u}

$$(13) \quad \|u(t, x) - \bar{u}(t, x)\|_{R^N} \leq c_1$$

o ile spełnione jest następujące założenie: warunki brzegowe są takie, że zapewniona jest nierówność

$$(14) \quad \{h(u) - h(\bar{u}) - \nabla \eta(\bar{u})(f(u) - f(\bar{u}))\}^+ N \geq 0 \quad \text{na } \partial^* \mathcal{B}$$

gdzie N oznacza wektor normalny wewnętrzny na $\partial^* \mathcal{B}$

Uwagi: 1/ Warunek (13) może być zastąpiony żądaniem by również $u(t, x) \in D$ dla wszystkich $(t, x) \in \bar{\Omega}$ i odpada tym samym, jeśli zakładamy $D = R^N$

2/ Warunek (14) jest spełniony, jeśli zakładamy identyczne warunki brzegowe dla obu rozwiązań. Dla interpretacji mechanicznej por. [Kosiński 81].

Najistotniejszym dla nas faktem jest to, że rozwiązania \bar{u} i u mogą spełnić układ (1) z dwiema różnymi prawymi stronami \bar{B} i B odpowiednio. Pozwala to na uzależnienie prawej strony od dodatkowego parametru ∞_2 ^{1/}.

Założmy więc, że zadana jest pewna funkcja ∞ , Lipschitz - ciągła

$$\infty : \bar{\Omega} \rightarrow R^1$$

^{1/} Będziemy odtąd opuszczać wskaźnik 2. Parametr ∞_1 wchodzi w skład u , nie może to więc spowodować pomyłek.

oraz funkcja (B_1, B_0)

$$(B_1, B_0): R^1 \rightarrow R^N \otimes R^N \times R^N$$

ciągła w sensie Lipschitza ze stałą b .

Przy powyższych założeniach i założeniach twierdzenia 1 mamy natychmiast następujący lemat

Lemat. Jeśli prawe strony spełniają

$$(B_1, B_0) = (B_1, B_0)(\alpha)$$

$$(\bar{B}_1, \bar{B}_0) = (B_1, B_0)(\bar{\alpha})$$

gdzie α i $\bar{\alpha}$ są dwiema gładkimi funkcjami na $\bar{\Omega}$, to dla każdego $s \in [0, t]$ spełniona jest nierówność

$$(15) \quad \begin{aligned} \|(U - \bar{U})(s, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{B}_s)} &\leq \sqrt{c_0} e^{c_2 s} \|(U_0 - \bar{U}_0)(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{B}_0)} + \\ &+ c_3 e^{c_2 s} b \int_0^s \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2(\mathcal{B}_t)} dt \end{aligned}$$

Niech teraz L będzie operatorem dyssypatywnym o dziedzinie zawartej w $L^2(\mathcal{B}_s, R^1)$, tj. spełniającym warunek

$$(16) \quad \exists_{\beta \in R} \forall_{y_1, y_2 \in \text{Dom } L} \langle Ly_1 - Ly_2, y_1 - y_2 \rangle_{L^2(\mathcal{B}_s)} \leq -\beta^2 \|y_1 - y_2\|_{L^2(\mathcal{B}_s)}^2$$

Operator L może przy tym zależeć od czasu, zakładamy tylko, że stała β jest wspólna dla wszystkich $s \in [0, t_0]$. Nie wykluczamy $\beta = 0$.

Teraz możemy sformułować

Twierdzenie 2. Niech spełnione będą wszystkie poprzednie założenia dotyczące f , B_2 , $\hat{\eta}$, B_1 , B_0 i warunków brzegowych (9), (9a), (14) oraz operatora L , a niech $(\bar{U}, \bar{\alpha})$ i (U, α) będą dwoma rozwiązaniami układu równań

$$(17) \quad U_t + \operatorname{div} f(U) = B_0(\alpha) + B_1(\alpha)U + B_2(U)$$

$$\alpha_t - L\alpha = 0$$

takimi, że \bar{U} i U spełniają warunki podane w twierdzeniu 1, a α i $\bar{\alpha}$ są gładkimi funkcjami takimi, że $\bar{\alpha}(s, \cdot), \alpha(s, \cdot)$ należą do $\operatorname{Dom} L^{1/}$ dla każdego $s \in [0, t_0]$ i spełniają warunki początkowe

$$(18) \quad \bar{\alpha}(0) = \bar{\alpha}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0$$

Wówczas spełnione są nierówności

$$(19) \quad \|(\alpha - \bar{\alpha})(s, \cdot)\|_{L^2} \leq e^{-\beta^2 s} \|(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0)(\cdot)\|_{L^2}$$

$$(20) \quad \|(U - \bar{U})(s, \cdot)\|_{L^2} \leq \sqrt{c_0} e^{c_2 s} \|(U_0 - \bar{U}_0)(\cdot)\|_{L^2} +$$

$$+ c_3 e^{c_2 s} b \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\beta^2} [1 - e^{-\beta^2 s}] \\ s \end{array} \right\} \|(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0)(\cdot)\|_{L^2}$$

(górnny współczynnik dla $\beta \neq 0$, dolny dla $\beta = 0$)
dla każdego $s \in [0, t_0]$

Dowód. Nierówność (20) jest oczywiście konsekwencją nierówności (19) i lematu, wystarczy więc oszacować różnicę $\alpha - \bar{\alpha}$. Policzmy w tym celu pochodną funkcji

$$t \mapsto \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2}^2$$

^{1/} Warunek ten obejmuje warunki brzegowe. Por. [Perzyna 80].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_2^2 &= \frac{d}{dt} \langle (\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot), (\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot) \rangle_2 = \\ &= 2 \langle \frac{d}{dt} (\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot), (\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot) \rangle_2 = 2 \langle L\alpha(t, \cdot) - L\bar{\alpha}(t, \cdot), (\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot) \rangle_2 = \\ &\leq -2\beta^2 \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_2^2 \end{aligned}$$

Łatwe całkowanie tej nierówności daje nam nierówność (19)

5.2. Oszacowanie dla układu sprzężonego.

Twierdzenia 2 nie można jednak stosować w przypadku, gdy układ (17) jest układem sprzężonym, tzn. gdy $L = L(U)$. Obejmuje ono jednak sytuacje typu przykładu pierwszego z poprzedniej części pracy. Żeby uzyskać oszacowanie również dla układu sprzężonego, uczynimy następujące założenie

$$(21) \quad L = L_1 + \hat{g}(U, \cdot)$$

gdzie L_1 jest operatorem dyssypatywnym niezależnym od U , a stałej β , a

$$\hat{g}(U, \alpha)(t, x) = g(U(t, x), \alpha(t, x))$$

przy czym g jest Lipschitz-ciągła ze stałą $\gamma > 0$

$$g: \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$$

Policzmy teraz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_2^2 &= 2 \langle L_1 \alpha(t, \cdot) - L_1 \bar{\alpha}(t, \cdot), (\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot) \rangle_2 + \\ &+ \langle (\hat{g}(U, \alpha) - \hat{g}(U, \bar{\alpha}))(t, \cdot), (\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot) \rangle_2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\beta^2 \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \gamma \|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})(t, \cdot)\|_{L^2} + \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2} \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \\ &\leq (-2\beta^2 + \gamma) \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \gamma \|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})(t, \cdot)\|_{L^2} \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2} \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\frac{d}{dt} \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \gamma \|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})(t, \cdot)\|_{L^2} + (-2\beta^2 + \gamma) \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2}$$

Całkując tę nierówność dostaniemy

$$\|(\alpha - \bar{\alpha})(s, \cdot)\|_{L^2} \leq \gamma \int_0^s \|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})(t, \cdot)\|_{L^2} dt + e^{(-2\beta^2 + \gamma)s} \|(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0)(\cdot)\|_{L^2}$$

Zestawiając nierówności (22) i (15) z lematu

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})(s, \cdot)\|_{L^2} &\leq \sqrt{c_0} e^{c_2 s} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)(\cdot)\|_{L^2} + c_3 e^{c_2 s} b \int_0^s \|(\alpha - \bar{\alpha})(t, \cdot)\|_{L^2} dt \\ \|(\alpha - \bar{\alpha})(s, \cdot)\|_{L^2} &\leq e^{(-2\beta^2 + \gamma)s} \|(\alpha_0 - \bar{\alpha}_0)(\cdot)\|_{L^2} + \gamma \int_0^s \|(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})(t, \cdot)\|_{L^2} dt \end{aligned}$$

otrzymamy, wprowadzając w $L^2(\mathcal{B}, R^{N+1})$ normę $\|\cdot\|_{L^2}$
 będącą sumą norm w $L^2(\mathcal{B}, R^N)$ i $L^2(\mathcal{B}, R^1)$ odpowiednio

$$\begin{aligned} (23) \quad \|((\mathbf{u}, \alpha) - (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\alpha}))(s, \cdot)\|_{L^2} &\leq M(s) \|((\mathbf{u}_0, \alpha_0) - (\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\alpha}_0))(\cdot)\|_{L^2} + \\ &+ N(s) \int_0^s \|((\mathbf{u}, \alpha) - (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\alpha}))(t, \cdot)\|_{L^2} dt \end{aligned}$$

gdzie

$$M(s) = \max \left\{ \sqrt{c_0} e^{c_2 s}, e^{(-2\beta^2 + \gamma)s}, 1 \right\} a$$

(24)

$$N(s) = \max \left\{ c_3 e^{c_2 s}, b, \gamma \right\}$$

Jest to znana nierówność Gronwall'a, która pozwala nam sformułować następujące twierdzenie

Twierdzenie 3. Niech $(\bar{U}, \bar{\alpha})$ i (U, α) będą takie jak w twierdzeniu 2 a L postaci (20) ze stałymi β i γ . Wtedy zachodzi nierówność

$$\| (U, \alpha) - (\bar{U}, \bar{\alpha}) (s, \cdot) \|_{L(\mathcal{B}, R^{N+1})} \leq M(s) e^{S_N(s)} \| (U_0, \alpha_0) - (\bar{U}_0, \bar{\alpha}_0) (\cdot) \|_{L(\mathcal{B}, R^{N+1})}$$

dla wszystkich $s \in [0, t]$, gdzie $M(s)$ i $N(s)$ są określone wzorami (24).

Powyższe twierdzenie można zastosować bezpośrednio do równań pola ciała \mathcal{B} . Przyjmuje się [por. Kosiński 81, Kosiński, Dafermos, to appear], że składowymi U są po kolei gęstość pędu, gęstość energii całkowitej, gradient odkształcenia i parametr wewnętrzny α_1 . Strumieniami tych wielkości dla ciała nieprzewodzącego ciepła są oczywiście T , vT , $v \otimes T$ i 0 odpowiednio i są one wyznaczone przez składowe U , jeśli przyjmujemy, że napężenie nie zależy od α_2 i że energia wewnętrzna jest przy zadanym α_1 i F jednoznaczna funkcją temperatury. Wystarczy więc założyć $\mu = 0$ i $\psi_{,33} = 0$ ujemne dla wszystkich argumentów z dziedziny (dodatniość ciepła właściwego $\epsilon_{,3}$). Produkcja $B(U, \alpha)$ ma składowe $\rho b_c, \rho b_c v + p_r, 0, \hat{g}_1(F, \epsilon, \alpha_1, \alpha)$, gdzie

$$\hat{g}_1(F, \epsilon, \alpha_1, \alpha) = g_1(F^T F, \hat{\nu}(F, \alpha_1), \alpha_1, \alpha)$$

przy czym musimy założyć, że g_1, \dots jest co najwyżej liniową funkcją U

Jako entropia układu $\hat{\eta}$ w wielu przypadkach może służyć minus fizyczna entropia,

$$\hat{\eta} = -\eta, \quad \hat{h} = -\phi = 0,$$

$\alpha - \hat{r}$ jest równe produkcji entropii dla procesów gładkich plus radiacja $\int_{\mathcal{S}} \dots$. Warunek dopuszczalności oznacza, że w przypadku utraty gładkości rozwiązania U występują nowe źródła

entropii nieujemne, a które nie występują dla rozwiązań gładkich \bar{u} . Przypominamy, że przyjęcie postulatu termodynamicznego (6) z rozdziału 4 zapewnia nam warunki $T_{,\infty} = 0$ i $\mathcal{E}_{,\infty} = 0$.

6. Uwagi końcowe

Z postaci stałych $M(s)$ i $N(s)$ z ostatniego twierdzenia wynika, że uwzględnienie efektów przestrzennych na ewolucję parametrów wewnętrznych nie pogarsza oszacowań na normę różnicy rozwiązań w chwili s . Gdybyśmy bowiem położyli $L_1 \equiv 0$ otrzymalibyśmy stałą N identyczną a M nie mniejszą, niż w przypadku L_1 nieznikającego.

Warunkiem koniecznym utraty stabilności, w szczególności warunkiem utraty jednoznaczności rozwiązania, jest niespełnienie co najmniej jednego z założeń twierdzenia 5.3. Można więc wnioskować, że póki założenia te są spełnione, to zachowanie się ciała ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi szacuje się lepiej, niż dla ciała porównawczego, z $L_1 \equiv 0$. Jednak ze względu na to, że mamy tylko warunek konieczny utraty stabilności, nie można wyciągnąć wniosku: utrata stabilności ciała ze zmodyfikowaną strukturą następuje później niż u ciała z klasyczną strukturą z parametrami wewnętrznymi. Problem warunków dostatecznych czy też dostatecznych i wystarczających jest więc nadal otwarty. Pewne wyniki uzyskał tu [Rice, 1981] w przypadku bardzo uproszczonego modelu jednowymiarowego, które potwierdzają bardziej stabilne zachowanie się ciała ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi i które w ciekawy sposób naświetlają zagadnienie wyboru mechanizmu lokalizacji.

Dalszym problemem otwartym jest rozpatrzenie przypadku ciała bez więzów adiabatycznych oraz ciała z nietrywialną zależnością energii od nowych parametrów wewnętrznych.

Nieco łatwiejszym wydaje się być uzyskanie oszacowań w przypadku prawych stron różnych dla \bar{U} i \bar{U} również dla układu sprzężonego.

Kilka pytań zostało także w związku z rozdziałem drugim, trzecim i czwartym. Należy tu wymienić rozwinięcie i zastosowanie koncepcji przestrzeni stanów z paragrafu 2.4., kwestia istnienia materiału z absolutną pamięcią oraz kilka problemów fizycznych związanych z rozdziałem o termodynamice, zwłaszcza dotyczących brzegu ciała.

7. Bibliografia

1. B. Baranowski, 1974, *Nierównowagowa termodynamika w chemii fizycznej*, PWN, Warszawa.
2. C.M. Dafermos, W. Kosiński, 1982, Continuous dependence of solutions within the class BV to quasi-linear hyperbolic systems with a convex entropy, *to appear*.
3. B.D. Coleman and M.E. Gurtin, 1967, Thermodynamics with internal state variables, *J. Chem. Phys.*, 47, 597-613.
4. B.D. Coleman and V.J. Mizel, 1966, Norms and semi-groups in the theory of fading memory, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 23, 87-123.
5. B.D. Coleman and V.J. Mizel, 1967, A general theory of dissipation in materials with memory, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 27, 255-274.
6. B.D. Coleman and V.J. Mizel, 1968, On the general theory of fading memory, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 29, 18-31.
7. R. Engelking, 1977, *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warszawa.
8. M. Fabrizio, B. Lazzari, 1981, On the notion of state for a material system, *Meccanica*, December 1981, 175-180.
9. K. Frischmuth, 1981, A study of equilibrium points with application to constitutive modelling, *Arch.Mech.*, 34, 3, in print.
10. K. Frischmuth and W. Kosiński, 1982, The asymptotic rest property for materials with memory, *Arch.Mech.*, 34, in print.
11. K. Frischmuth and P. Perzyna, 1982, Thermodynamics of the modified structure with internal state variables, *Arch.Mech.*, 34, in print.
12. M.E. Gurtin, 1975, Thermodynamics and Stability, *Arch.Rat. Mech.Anal.*, 59, 63-96.

13. E. Hille, R.S. Phillips, 1957, Functional analysis and semi-groups, AMS, Providence.
14. W. Kosiński, 1976, Intrinsic time in unique material structures /lecture notes/ Div.Mater.Eng., University of Iowa, Report G-123 DME-76-009, Iowa-City.
15. W. Kosiński, 1978, Equilibrium states of material with permanent deformations, Polish - W. Germany Symposium, Warsaw 1978, also Mechanics of Inelastic Media and Structures, O. Mahrenholtz and A. Sawczuk /eds./ PWN-PSP, Poznań, Warsaw 1982, 143-152.
16. W. Kosiński, 1981, Wstęp do teorii esobliwości pola i analizy fal, PWN, Warszawa-Poznań.
17. W. Kosiński, 1981, On weak solutions, stability and uniqueness in dynamics of dissipative bodies, Arch.Mech., 33, 2, 319-323.
18. W. Kosiński, 1982, On global evolution of states of deformable bodies, to be published in "Global Analysis, Analysis on Manifolds", ed. T.K. Rassias.
19. W. Kosiński and P. Perzyna, 1973, The unique material structures, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Techn., 21, 655-662.
20. W. Kosiński and K.C. Valanis, 1976, Temporal memory as a constitutive principle and its limitations, not published yet.
21. W. Kosiński and K.C. Valanis, 1976, Constitutive continuity and asymptotic stability of materials with internal variables, Iowa City, not - published.
22. W. Kosiński and K.C. Valanis, 1978, Intrinsic physical limits to the theory of materials with memory, Arch.Mech., 30, 6, 699-715.
23. I. Müller, 1973, Entropy, absolute temperature and coldness in thermodynamics, CISM Lectures 1971, No.76, Springer-Verlag, Vienna - New York.

24. W. Noll, 1972, A new mathematical theory of simple materials, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, 48 /1/, 1-50.
25. W. Olszak, P. Perzyna, A. Sawczuk, 1965, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa.
26. P. Perzyna, 1971, A gradient theory of rheological materials with internal structural changes, *Arch.Mech.*, 23, 845-850.
27. P. Perzyna, 1975, Thermodynamics of unique material structure, *Arch.Mech.*, 27, 791-806.
28. P. Perzyna, 1978, *Termodynamika materiałów niesprężystych*, PWN, Warszawa.
29. P. Perzyna, 1980, Stability phenomena of dissipative solids with internal defects and imperfections, XV-th IUTAM Congress, Toronto, Proc.: Theoretical and Applied Mechanics, ed. F.P.J. Rivett and B. Tabarrok, North-Holland, 369-376.
30. P. Perzyna, 1981, Stability problems for inelastic solids with defects and imperfections, *Arch.Mech.*, 33, 587-602.
31. P. Perzyna, 1982, Application of dynamical system methods to flow processes of dissipative solids, *Arch.Mech.*, 34, in print.
32. P. Perzyna and W. Kosiński, 1973, A mathematical theory of materials, *Bull.Acad.Polon.Sci., Série Sci.Tech.*, 21, 647-654.
33. J.R. Rice, 1981, Stability of shear in plastic materials with diffusive transport of state parameters /manuscript July 1981, to appear/.

Spis treści

	str.
1. Wstęp	3
2. Ogólne modelowanie konstytutywne	6
2.1. Oznaczenia i definicje podstawowe	6
2.2. Przestrzeń stanów	8
2.3. Funkcja konstytutywna R	12
2.4. Przestrzeń stanów zredukowanych	22
3. Procesy relaksacyjne	25
3.1. Jednoznaczność stanów równowagi	25
3.2. Niestabilność stanów równowagi	29
4. Ciało ze zmodyfikowaną strukturą z parametrami wewnętrznymi	31
4.1. Redukcja nierówności termodynamicznej	33
4.2. Dodatkowy strumień entropii	37
4.3. Uwaga o stabilności stanu równowagi ciała	43
5. Stabilność w sensie ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych równań pola dla ciała	46
5.1. Zastosowanie twierdzenia Dafermosa-Kosińskiego	46
5.2. Oszacowanie dla układu sprzężonego	51
6. Uwagi końcowe	56
7. Bibliografia	57