Walter Zielke
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

CIĄG SOLITONÓW JONOWO-AKUSTYCZNYCH

1. Wstęp

Fale jonowo-akustyczne otrzymuje się przy rozpatrywaniu modelu zimnej, bezzderzeniowej plazmy. Zakłada się, że jony mają temperaturę zerową, co oznacza, że ich ruchy mogą być związane z propagacją fal, ale jony te nie mogą odbywać ruchów termicznych. O elektronach zakłada się, że mają zerową bezwładność i pozostają w równowadze z polem elektromagnetycznym fali. Równania opisujące omawiany ruch falowy tworzą układ równań różniczkowych cząstkowych, nieliniowych. Ścisłe rozwiązania tego układu, które udało się dotychczas otrzymać [1, 2] , mają postać całek i zależą od kombinacji zmiennych x, t, tzn. od $\vartheta = kx - \omega t$, gdzie k, ω stałe, t oznacza czas a x pojedynczą zmienną przestrzenną. Są to więc rozwiązania stacjonarne. Komplet wartości występujących w rozwiązaniu parametrów może odpowiadać rozwiązaniu periodycznemu lub też fali pojedynczej tzn. rozwiązaniu jedno-solitonowemu. Przy pewnych założeniach upraszczających oznaczających ograniczenie się do rozpatrywania fal długich i amplitud małych /ale bez linearyzacji/ rozważane równania sprowadzają się do pojedynczego nieliniowego równania cząstkowego trzeciego rzędu - do równania Kortewega-de Vriesa [3, 4] . Dla tego ostatniego równania znaleziono ścisłe rozwiązania [5] niestacjonarne. Wykazano, że przy pewnych warunkach początkowych rozwiązanie składa się z pewnej, określonej przez te warunki, liczby solitonów. Jest to tzw. rozwiązanie solitonowe. Solitony mogą oddziaływać nieliniowo, ale po fazie oddziaływania pojawiają się one znowu w postaci identycznej jak przed oddziaływaniem. Whitham [6] w swojej analizie ewolucji modulacyjnej rozwiązań stacjonarnych periodycznych rozpatrzył również przypadek przejścia rozwiązania periodycznego w ciąg solitonów. Otrzymane przez niego przybliżone związki określające ewolucję ciągu solitonowego dobrze zgadzają się z wyrażeniami otrzymanymi z rozwiązań ścisłych równania Kortewega - de Vriesa. Pozwala to przypuszczać, że metoda Whithama da również wyniki dobrze przybliżające zjawiska rzeczywiste dla ciągu solitonów jonowo-akustycznych, skoro równania fal jonowo-akustycznych, jak już powyżej wspomniano, redukuje się do równania Kortewega - de Vriesa.

W niniejszej pracy dyskutuje się nieco szerzej otrzymane już wcześniej rozwiązania jednosolitonowe [2] i otrzymuje się związki określające ewolucje ciągu solitonowego. Otrzymane związki zawierają wyrażenia całkowe ponieważ rozwiązanie jednosolitonowe dane jest tylko w postaci całkowej. Otrzymanie wyrażeń jonowych wymaga obliczeń numerycznych.

2. Funkcja Lagrange'a i ścisłe rozwiązania jednosolitonowe

Rozpatrzmy zasadę wariacyjną z funkcją Lagrange'a:

$$L = n\left(\alpha_t + \frac{1}{2}\alpha_x^2\right) - \frac{1}{2}\varphi_x^2 + n\varphi - e^{\varphi} . \tag{1}$$

Odpowiednie równania Eulera-Lagrange'a mają postać:

$$\begin{aligned} \delta\alpha &: \quad n_t + (n\alpha_x)_x = 0 , \\ \delta n &: \quad \alpha_t + \frac{1}{2}\alpha_x^2 + \varphi = 0 , \\ \delta\varphi &: \quad \varphi_{xx} - e^{\varphi} + n . \end{aligned} \tag{2}$$

Wprowadzając oznaczenie $\alpha_x = u$ i różniczkując równanie (δn) względem x otrzymujemy układ równań opisujących fale magnetojonowe:

$$n_t + (nu)_x = 0 \,,$$

/3/ $$u_t + uu_x + \varphi_x = 0 \,,$$

$$\varphi_{xx} - e^{\varphi} + n \,,$$

gdzie n oznacza gęstość jonów, u prędkość /więc α jest potencjałem prędkości/, φ potencjał elektrostatyczny.
Dla otrzymania rozwiązań stacjonarnych podstawiamy

/4/ $$\vartheta = kx - \omega t \,,$$ gdzie k, ω rzeczywiste, stałe i dodatnie, do funkcji Lagrange'a /1/, co daje

/5/ $$L = n\left(-\omega\dot{\alpha} + \frac{1}{2}k^2\dot{\alpha}^2\right) - \frac{1}{2}k^2\dot{\varphi}^2 + n\varphi - e^{\varphi} \,,$$

gdzie $\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{d\vartheta}$, $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{d\vartheta}$.

Odpowiednie równania wariacyjne mają postać:

/6/ $$\delta\alpha: \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} = n\left(-\omega + k^2\dot{\alpha}\right) \equiv p = \mathrm{const} \,,$$

oraz po eliminacji funkcji α,

/7/ $$\delta n: \quad \frac{\partial R}{\partial n} = -\varphi - \frac{p^2}{2k^2n^2} + \frac{\omega^2}{2k} = 0 \,,$$

skąd

/8/ $$n = \sqrt{\frac{p^2}{\omega^2 - 2k^2\varphi}}$$

przez R oznaczono powyżej

/9/ $$R = p\dot{\alpha} - L = \frac{1}{2}k^2\dot{\varphi}^2 - n\varphi + e^{\varphi} + \frac{p^2}{2k^2 n} + \frac{\omega^2 n}{2k^2} + \frac{p\omega}{k^2} ,$$

/10/ $$\delta\varphi : \quad \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial R}{\partial\varphi} = k^2\ddot{\varphi} + n - e^{\varphi} = 0 .$$

Ostatnie równanie daje

/11/ $$\dot{\varphi}\frac{\partial R}{\partial\dot{\varphi}} - R = \frac{1}{2}k^2\dot{\varphi}^2 + n\varphi - e^{\varphi} - \frac{p^2}{2nk^2} - \frac{\omega^2 n}{2k^2} - \frac{p\omega}{k^2} \equiv A = \mathrm{const} .$$

lub

/12/ $$\frac{k^2}{2}\dot{\varphi}^2 = A + \frac{p\omega}{k^2} + \frac{p^2}{n(\varphi)k^2} + e^{\varphi} \equiv r(\varphi) ,$$

gdzie $n = n(\varphi)$ dane jest przez /8/.
Rozwiązanie ostatniego równania możemy przedstawić w postaci

/13/ $$\vartheta + \vartheta_0 = \sqrt{\frac{k^2}{2}} \int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{r(\varphi)}} ,$$

gdzie ϑ_0 jest stałą określającą punkt początkowy.
Równanie /6/ możemy zapisać inaczej

/14/ $n(-U+u)=\frac{p}{k}$, gdzie $U=\frac{\omega}{k}$

ma znaczenie prędkości fazowej, natomiast $u=k\dot{\alpha}$ jest prędkością płynu jonowego. Naturalnym warunkiem fizycznym jest, aby gęstość cząstek była dodatnia $n>0$ również przy $u=0$ co daje $p<0$, a więc

/15/ $u<U$.

Z kolei wymaganie, aby n było funkcją rzeczywistą φ daje na podstawie wzoru /8/

/16/ $\varphi<\frac{1}{2}U^2$.

Nierówności /15/ i /16/ pozwalają uważać parametr U za miernik amplitudy dla u oraz φ .

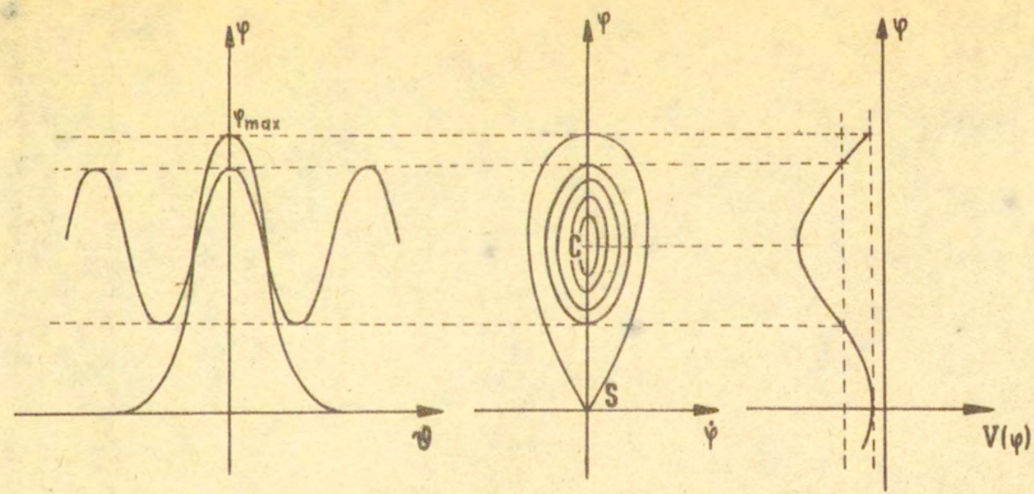
Wzór /12/ możemy przepisać w postaci

/17/ $\frac{k^2}{2}\dot{\varphi}^2=h-V(\varphi)$,

gdzie $h=A+\frac{p\omega}{k^2}=A+\frac{pU}{k}=A-\frac{|p|U}{k}$,

/18/ $V(\varphi)=-\sqrt{\frac{p^2}{k^2}(U^2-2\varphi)}-e^{\varphi}$.

Równanie /17/ dopuszcza rozwiązania periodyczne lub w postaci fali pojedyńczej czyli solitonu zależnie od wartości parametrów występujących w tym równaniu. Przykładowy kształt funkcji $V(\varphi)$ oraz odpowiednie krzywe w przestrzeni fazowej $(\varphi,\dot{\varphi})$ wraz z odpowiednimi rozwiązaniami $\varphi(\vartheta)$ przedstawiono na rys./1/.



Rys. 1. Rozwiązania stacjonarne
C - centrum /punkt wirowy/
S - siodło

Rozwiązanie w postaci solitonu otrzymujemy przy spełnieniu następujących warunków:

/19/ $$V'(\varphi)_{\varphi=0} = 0 \quad , \quad V''(\varphi)|_{\varphi=0} < 0$$

oraz

/20/ $$\dot{\varphi} = 0 \quad \text{przy} \quad \varphi = 0 \quad \text{i przy} \quad \varphi = \varphi_{max} \; ,$$

ale $V'(\varphi)\Big|_{\varphi=\varphi_{max}} \neq 0$.

Pierwszy z warunków /19/ daje

/21/ $$|p| = kU \; ,$$

a wtedy drugi z tych warunków przybiera postać

/22/ $$U^2 > 1 \; .$$

Z podstawienia związków /20/ i /21/ do /17-18/ otrzymujemy

/23/ $$A = -1 \; ,$$

oraz

/24/ $$-1 - U^2 + U\sqrt{U^2 - 2a} + e^a = 0 \; ,$$

gdzie $a = \varphi_{max}$.

Równość /24/ wiąże amplitudę a i prędkość fazową U solitonu. Dla przypadku równania Kortewega - de Vriesa prędkość U jest wprost proporcjonalna do amplitudy a. Zależność otrzymana dla solitonu jonowo-akustycznego bez korzystania z przybliżenia małych amplitud jest bardziej skomplikowana.
Wzór /13/ dla solitonu przybiera więc postać:

/25/ $$\vartheta + \vartheta_0 = \frac{k}{\sqrt{2}} \int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-1-U^2+U\sqrt{U^2-2\varphi}+e^{\varphi}}} ,$$

gdzie całkowanie przebiega pomiędzy wartościami $\varphi=0$ oraz $\varphi=\varphi_{max}=a$ /por. wzór 24/.
Rozwiązanie periodyczne otrzymuje się ze wzoru /13/ przy nieco innym zespole wartości stałych, a całkowanie w tym wzorze przebiega wtedy pomiędzy dwoma zerami prostymi funkcji $r(\varphi)$. W przypadku solitonu tylko $\varphi=a$ jest zerem prostym funkcji $r(\varphi)$, tzn. $r(\varphi)|_{\varphi=a}=0$, $r'(\varphi)|_{\varphi=a}\neq 0$, natomiast zgodnie z narzuconymi przez nas warunkami otrzymujemy $r(\varphi)|_{\varphi=0}=0$, $r'(\varphi)|_{\varphi=0}=0$, wobec tego $\varphi=0$ nie jest zerem prostym funkcji $r(\varphi)$.

3. Uśredniona funkcja Lagrange'a i ciąg solitonów

Dla równania Kortewega - de Vriesa /KdV / udało się pokazać /Whitham [6] / na podstawie teorii modulacji, że rozwiązanie periodyczne może przechodzić w ciąg solitonów. Otrzymano przy tym dobrą zgodność z wynikami teorii ścisłej, a więc dobry sprawdzian poprawności teorii modulacji dla przypadku ciągu solitonów. Równania różniczkowe będące podstawą rozważań w niniejszej pracy redukuje się w przybliżeniu do równania KdV , założymy więc, że i w naszym przypadku teoria modulacji [6] opisuje poprawnie ciąg solitonów, chociaż otrzymane tu formuły są zbyt skomplikowane i nie można na ich podstawie prześledzić przejścia granicznego od rozwiązania periodycznego do ciągu solitonów.

Teoria modulacji [6] opiera się na założeniu istnienia ciągów falowych, których parametry zmieniają się nieznacznie na odległościach rzędu długości fali i w czasach rzędu jednego okresu rozwiązania periodycznego. Oznacza to formalnie, że rozwiązanie zależy od ϑ, X, T :

/26/
$$X = \varepsilon x \quad , \quad T = \varepsilon t \quad , \quad \vartheta = \varepsilon^{-1}\,\Theta(X,T)$$
$$\omega(X,T) = -\vartheta_t = \Theta_T \quad , \quad k(X,T) = \vartheta_x = \Theta_X$$
$$\varphi(x,t) = \Phi(\Theta, X, T, \varepsilon) \; .$$

Funkcja fazowa $\vartheta = \vartheta(x,t)$ jest uogólnieniem wyrażenia /4/, natomiast ε jest małym parametrem względem którego będziemy rozwijać w szereg asymptotyczny rozwiązanie Φ :

/27/
$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\,\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\,\Phi^{(2)} + \cdots \; .$$

Równania opisujące powolne zmiany parametrów rozwiązania periodycznego otrzymuje się na podstawie zasady wariacyjnej, która dla przypadku funkcji Lagrange'a /5/ przybiera postać:

/28/
$$\delta \iiint_0^{2\pi} L\left(N, \Phi, k\Phi_\vartheta + \varepsilon\Phi_X, -\omega\Phi_\vartheta + \varepsilon\Phi_T, kA_\vartheta + \varepsilon A_X + \beta, -\omega A_\vartheta + \varepsilon A_T - \gamma\right) d\vartheta\, dX\, dT = 0$$

gdzie $\alpha = A(\Theta, X, T, \varepsilon) + \Psi(X,T)$

/29/ $$n=N(\theta, X, T, \varepsilon)$$

$$\Psi=\varepsilon^{-1}\Psi(X,T), \quad \beta=\Psi_X, \quad \gamma=-\Psi_T \quad .$$

Wewnętrzna całka we wzorze /28/ przedstawia uśrednioną funkcję Lagrange'a:

/30/ $$\bar{L}=\int_0^{2\pi} L \, d\vartheta \quad .$$

Dla przypadku ciągu solitonów dopuszczamy również powolną zmienność niektórych parametrów rozwiązania tzn. solitony występujące w "ciągu" różnią się między sobą. Wymagamy jednak, aby w procesie modulacji nie zmieniały się charakterystyczne dla rozwiązań solitonowych związki pomiędzy parametrami /21-24/. Uśredniona funkcja Lagrange'a przybiera prostszą postać po wprowadzeniu zmiennych

/31/ $$\Pi_1=\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\vartheta 0}} \quad , \quad \Pi_2=\frac{\partial L}{\partial A_{\vartheta 0}}$$

$$H(\Pi_1, \Pi_2, \Phi_0; \vartheta, \Psi)=\Pi\Phi_{\vartheta_0}+\Pi A_{\vartheta_0}-L \quad .$$

Ponieważ Π_2 nie zależy od ϑ, z kolei A_ϑ jest periodyczne, a H jest całką energii więc

/32/ $$\Pi_2=p_{ro}(X,T) \quad , \quad H=A(X,T) \quad ,$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2\pi}\oint \Pi_1 \, d\Phi_0 - H \quad .$$

Dla rozwiązania solitonowego otrzymujemy stąd:

$$/33/ \qquad \mathcal{L}=\mathcal{L}(\omega,k,a)=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}k\int_0^a\sqrt{-1-\frac{\omega^2}{k^2}+\frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}-2\Phi_0}+e^{\Phi_0}}\,d\Phi_0+1\,,$$

gdzie $\quad \omega=\omega(X,T)=\theta_T \quad , \quad k=k(X,T)=\theta_X$

W dalszym ciągu przyjmujemy $U=\frac{\omega}{k}$, ale obecnie interpretacja występujących tu parametrów jest nieco inna, analogiczna do interpretacji dla rozwiązania periodycznego, a nie dla rozwiązania jednosolitonowego.

Równanie wariacyjne /28/ z funkcją $\mathcal{L}$ /33/ względem amplitudy a daje

$$/34/ \qquad \mathcal{L}_a=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}k\sqrt{-1-\frac{\omega^2}{k^2}+\frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}-2\Phi_0}+e^{\Phi_0}}=0\;.$$

Otrzymaliśmy więc ponownie równanie /24/, ale obecnie rozumiemy pod wartością ω liczbę solitonów przebiegających w jednostce czasu przez dany punkt przestrzeni, natomiast przez k liczbę solitonów przypadającą na odległość 2δ /liczba 2δ została wprowadzona dla zachowania analogii z liniową teorią rozwiązań periodycznych/. Mamy więc nieliniowy związek dyspersyjny

$$/35/ \qquad -1-\frac{\omega^2}{k^2}+\frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{\omega^2}{k^2}-2a}+e^{a}\equiv f(\omega,k,a)=0\;.$$

Dalsze równanie charakteryzujące ciąg solitonów otrzymuje się z wariacji /28/ względem θ :

/36/ $$\frac{\partial}{\partial T}\mathcal{L}_{\omega}-\frac{\partial}{\partial X}\mathcal{L}_{k}=0 .$$

Wreszcie należy dołączyć tu równanie zgodności

/37/ $$\frac{\partial}{\partial T}k + \frac{\partial}{\partial X}\omega = 0 .$$

Równania /35 - 37/ z funkcją $\mathcal{L}$ daną przez /33/ określają ewolucje ciągu solitonów.

LITERATURA

[1] G.M. ZASLAVSKII, N.N. FILONENKO, Żurnal Eksp. i Teor. Fizyki, 57, /1969/ 1064-1074.

[2] W. ZIELKE, Prace IPPT, 58 /1977/.

[3] C.H. SU, C.S. GARDNER, J. Math. Phys., 10, 3 /1969/.

[4] W. ZIELKE, J. Math. Phys., 16, /1975/ 1573.

[5] C. S. GARDNER, J.M. GREEN, M.D. KRUSKAL, R.M. MIURA, Phys. Rev. Letters, 19, 19 /1967/.

[6] G.B. WHITHAM, Linear and nonlinear waves, J. Wiley Sons, New York, 1974.