52/1980

Krzysztof Żuchowski

ZWIĄZKI FLUKTUACYJNO-DYSYPACYJNE WARUNKI STACJONARNOŚCI I STABILNOŚCI W NIELOKALNYM OPISIE OŚRODKA ZJONIZOWANEGO

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
BIBLIOTEKA

P. 269

WARSZAWA 1980

http://rcin.org.pl

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych
Praca nr 177

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 września 1980 r.
Zarejestrowana pod nr 52/1980

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
BIBLIOTEKA

57109

IPPT PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 190 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark.druk. 1,5.
Oddano do drukarni w grudniu 1980 r.
Nr zamówienia 16/o/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

http://rcin.org.pl

Krzysztof Żuchowski
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

Zakład Podstawowych Problemów Techniki PAN BIBLIOTEKA

ZWIĄZKI FLUKTUACYJNO-DYSYPACYJNE, WARUNKI STACJONARNOSCI I STABILNOSCI W NIELOKALNYM OPISIE OSRODKA ZJONIZOWANEGO

Wstęp

Głównym celem tej pracy jest uwypuklenie związku pomiędzy korelacjami stochastycznych pól występujących w ośrodku zjonizowanym a warunkami stabilności rozwiązań nielokalnych, lecz liniowych, równań różniczkowo-całkowych opisujących gęstość prądu elektrycznego w tym ośrodku. Przykładem takiego nielokalnego równania jest uogólnione równanie Langevina [1] , które może opisywać gęstość natężenia stochastycznego prądu elektrycznego w ośrodku zjonizowanym.

Warunki stabilności układu dynamicznego, który może na przykład opisywać zachowanie się gęstości prądu elektrycznego w ośrodku zjonizowanym, obrazują wrażliwość stanu układu na małą zmianę parametrów początkowych układu.

Teoria stabilności układów dynamicznych determistycznych opisywanych przez układ równań różniczkowych zwyczajnych została omówiona szczegółowo w [2] , [3] .

W przypadku układu równań liniowych autonomicznych, o stałych współczynnikach, warunki stabilności można badać bezpośrednio na podstawie rozwiązania układu. Analogicznie można postąpić w przypadku badania stabilności deterministycznego liniowego układu całkowych równań splotowych typu Volterry, a także deterministycznego układu liniowego splotowego różniczkowo-całkowego typu Volterry.

http://rcin.org.pl

Jeżeli mamy natomiast do dyspozycji nieliniowy układ równań różniczkowych, to wtedy możliwe jest jeszcze badanie jego stabilności, pomimo nie znajomości jego rozwiązania, przy pomocy pośredniej metody Lapunowa, zwanej także drugą metodą Lapunowa [4] . Oczywiście metodę Lapunowa można także stosować do układów liniowych, lecz wtedy badanie bezpośrednio stabilności rozwiązania jest naogół prostsze.

W przypadku nieliniowych równań całkowych oraz różniczkowo-całkowych można także stosować nieco zmodyfikowaną metodę Lapunowa [5] , ale wtedy także bywają stosowane inne metody [6] , [7] , opierające się na analizie funkcjonalnej.

Gdy mamy do czynienia z równaniami stochastycznymi, to każdemu warunkowi stabilności, który zależy od wybranego sposobu zbieżności, dla odpowiedniej realizacji rozwiązania równania stochastycznego, mogą odpowiadać różne warunki stabilności stochastycznej. Niech $\underline{X}(t)$ oznacza rozwiązanie procesu opisanego przez układ stochastycznych równań różniczkowych, można podać następujące definicje stabilności dla momentów [8] , E - oznacza operacje uśrednienia względem odpowiedniego ansamblu:

Definicja 1

Układ jest stabilny w sensie wartości średniej jeżeli:

/1/
$$\lim_{t\to\infty} E\left|\underline{X}(t)\right| < \underline{C} ,$$

gdzie $\underline{C}$ jest stałym wektorem.

Definicja 2

Układ jest asymptotycznie stabilny w sensie wartości średniej jeżeli:

/2/
$$\lim_{t\to\infty} E\left|\underline{X}(t)\right| \to \underline{0} .$$

http://rcin.org.pl

Definicja 3

Układ jest stabilny w sensie wartości średniej kwadratowej jeżeli

/3/ $$\lim_{t \to \infty} E \left| \underline{X}(t) \, \underline{X}^T(t) \right| < \underline{\underline{C}} \quad ,$$

gdzie $\underline{\underline{C}}$ jest stałą macierzą kwadratową, której elementy są skończone. We wzorze /3/ występuje iloczyn diadyczny wektora i jego transpozycji.

Definicja 4

Układ jest asymptotycznie stabilny w sensie wartości kwadratowej jeżeli:

/4/ $$\lim_{t \to \infty} E \left| \underline{X}(t) \, \underline{X}^T(t) \right| \to \underline{\underline{0}} \quad ,$$

gdzie $\underline{\underline{0}}$ jest macierzą o zerowych elementach.

W przypadku badania stabilności liniowych stochastycznych równań różniczkowych bądź całkowych można naogół postępować podobnie jak w przypadku deterministycznym. To znaczy, należy badać bezpośrednio rozwiązanie. Natomiast dla przypadków stochastycznych nieliniowych równań różniczkowych owocną okazuje się także metoda Lapunowa, oczywiście zmodyfikowana przez wzgląd na to, że wchodzą w grę procesy stochastyczne [8] , [9], [10] .

Jednak w przypadku nieliniowych stochastycznych równań całkowych i różniczkowo-całkowych podstawowe opracowania [11] , [12] , rozważające stabilność rozwiązań tych równań, wykorzystują w tym celu metody analizy funkcjonalnej, analogicznie jak w przypadku deterministycznym.

http://rcin.org.pl

Zagadnienie stabilności zwykłego równania Langevina

Zwykłe równanie Langevina stanowiło niewątpliwie bodziec do wprowadzenia uogólnionego równania Langevina [13], można także na podstawie uogólnionego otrzymać zwykłe równanie Langevina stosując przejście graniczne. Omówimy teraz zagadnienie stabilności związane z klasą równan stochastycznych w której mieści się zwykłe równanie Langevina a dokładniej zagadnienie stabilności związane z wektorowym równaniem **Ito** [10], ponieważ wektorowe zwykłe równanie Langevina stanowi jego szczególny przypadek.

Wektorowe równanie Ito ma postać:

/5/ $$d\underline{Y}(t)=\underline{F}\left[\underline{Y}(t),t\right]+\underline{G}\left[\underline{Y}(t),t\right]d\underline{Z}(t) \quad ,$$

gdzie $\underline{Y}(t)$ - badany proces stochastyczny n - wymiarowy, $\underline{F}(\underline{y},t)=\left[F_1(\underline{y},t),\dots,F_n(\underline{y},t)\right]$, $\underline{G}(\underline{y},t)=\left\{g_{ij}(\underline{y},t)\right\}$ - macierz o wymiarach n x m, $\underline{Z}(t)$ jest m - wymiarowym procesem Wienera, czyli inaczej procesem ruchu brownowskiego. Biały szum, to jest proces o stałej gęstości widmowej, jest uogólnioną pochodną procesu Wienera.

Przy dość ogólnych założeniach odnośnie funkcji wektorowej $\underline{F}(\underline{y},t)$ i funkcji macierzowej $\underline{G}(\underline{y},t)$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie $\underline{Y}(t)=\underline{Y}(\underline{y}^0,t_0,t)$ równania /5/ spełniające warunek początkowy $\underline{Y}(t_0)=\underline{y}^0$ i jest ono dyfuzyjnym procesem Markowa. Jeżeli przyjąć założenie $F_i(\underline{0},t)=0$, $g_{ij}(0,t)=0$, wtedy równanie /5/ ma trywialne rozwiązanie $\underline{Y}(t)=\underline{0}$, odpowiadające warunkowi $\underline{y}^0=\underline{0}$, które jest położeniem równowagi.

Położenie równowagi równania /5/ jest stochastycznie stabilne z prawdopodobieństwem równym 1, według Kushnera [14], jeżeli zachodzi warunek:

/6/ $$\lim_{|\underline{c}|\to 0} P\left[\sup_{t_0\le t<\infty}\left|\underline{Y}_t(\underline{c})\right|\geq \varepsilon\right]=0 \quad ,$$

http://rcin.org.pl

gdzie $\underline{Y}_t(\underline{c}) = \underline{Y}(\underline{c}, t_0, t)$.

Położenie równowagi jest asymptotycznie stochastycznie stabilne jeżeli jest stochastycznie stabilne oraz:

/7/ $$\lim_{|\underline{c}| \to 0} P\left[\lim_{t \to \infty} \underline{Y}_t(\underline{c}) = \underline{0}\right] = 1 .$$

Położenie równowagi jest globalnie asymptotycznie stabilne jeżeli jest stochastycznie stabilne:

/8/ $$P\left[\lim_{t \to \infty} \underline{Y}_t(\underline{c}) = \underline{0}\right] = 1$$

dla wszystkich $\underline{c} \in R^n$.

Jeżeli $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{0}}$ wtedy mamy przypadek deterministyczny.

W przypadku, gdy proces wyjściowy Y_t jak i proces Wienera $Z(t)$ są jednowymiarowe, to dla jednorodnego, liniowego, autonomicznego równania Ito mamy postać:

/9/ $$dY_t = AY_t\,dt + BY_t\,dZ(t) , \qquad Y_{t_0} = c .$$

Warunek globalnej asymptotycznej stochastycznej stabilności położenia równowagi ma postać [10] :

/10/ $$A \geq B^2/2 .$$

Położenie równowagi jest stochastycznie niestabilne, gdy mamy:

/11/ $$A \geq B^2/2 > 0 .$$

Wynik ten można otrzymać bezpośrednio na podstawie rozwiązania równania /9/ jak i rozważając funkcje Lapunowa wybraną na podstawie metody Lapunowa. Gdy B = 0, to równanie /9/ opisuje układ deterministyczny, którego położenie równowagi jest asym-

http://rcin.org.pl

ptotycznie stabilne dla A < 0, stabilne dla A = 0 oraz niestabilne, gdy A > 0.

Rozważmy teraz układ równań stochastycznych, jest to wektorowe równanie Ito , który dla stałych macierzy $\underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{B}}$ jest wektorowym zwykłym równaniem Langevina:

/12/ $$d\underline{Y}_t = \underline{\underline{A}}\,\underline{Y}_t\,dt + \underline{\underline{B}}(t)\,d\underline{Z}(t) \quad , \quad \underline{Y}_{t_0} = \underline{c} \, ,$$

gdyż jest niejednorodny względem procesu $\underline{Y}_t$. Rozwiązanie tego równania ma postać:

/13/ $$\underline{Y}_t = \exp\left[\underline{\underline{A}}(t-t_0)\right]\underline{c} + \int_{t_0}^{t} \exp\left[\underline{\underline{A}}(t-s)\right]\underline{\underline{B}}(s)\,d\underline{Z}(s) \, .$$

Jeżeli macierz $\underline{\underline{A}}$ jest ujemnie określona, zaś:

/14/ $$\int_{t_0}^{\infty} |\underline{\underline{B}}(s)|^2 ds < \infty \quad ,$$

to rozwiązanie niezaburzonego układu, to jest dla $\underline{\underline{B}}(s)=0$, jest asymptotycznie stabilne z prawdopodobieństwem równym jeden:

/15/ $$P\left[\lim_{t\to\infty} Y_t = 0\right] = 1$$

a także według średniej kwadratowej.

Natomiast dla zwykłego równania Langevina $\underline{\underline{B}}$ = const, czyli warunek /14/ nie zachodzi a więc także nie ma miejsca asymptotyczna stabilność stochastyczna we wspomnianym wyżej sensie.

http://rcin.org.pl

Uogólnione równanie Langevina

W pracy [15] przedstawiono uogólnione równanie Langevina w języku procesów stochastycznych, jako stochastyczne równanie całkowe. Przedstawienie to zostało wykonane w oparciu o analogie ze zwykłym równaniem Langevina, które posłużyło jako przykład.

Klasyczna wersja uogólnionego równania Langevina ma postać:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\int_{t_0}^{t} \gamma(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau + A(t) + R(t,\mu), \qquad t > t_0, \tag{16}$$

gdzie jako $u(t)$ rozumiemy tu na przykład losową składową prędkości cząsteczek względem ustalonego kierunku, $R(t,\mu)$ - funkcja losowa /siła stochastyczna/ nie skorelowana z wartością procesu $u(t_0)$ w chwili początkowej t_0, $\gamma(t)$ - zależny od czasu współczynnik tarcia uwzględniający efekt opóźnienia w czasie, $A(t)$ - reprezentuje siłę wymuszającą /zewnętrzną/, μ oznacza element przestrzeni probabilistycznej Ω, $\mu \in \Omega$.

W języku procesów stochastycznych można równanie /16/ zaliczyć do klasy całkowych równań stochastycznych dających przedstawić się w postaci:

$$u(t,\mu) = u(t_0,\mu) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \gamma(s-r)\, u(r,\mu)\, dr\, ds + \int_{t_0}^{t} m[r, u(r,\mu)]\, dr + \int_{t_0}^{t} \sigma[r, u(r,\mu)]\, dM(r,\mu). \tag{17}$$

W przypadku odpowiadającym równaniu /16/ funkcje m oraz σ nie zależą od $u(r,\mu)$. Proces $M(r,\mu)$ występujący w równaniu /17/ nie jest procesem Wienera, jak to ma miejsce dla zwykłego równania Langevina, lecz jest ciągłym martyngałem [16]. Wobec tego całka stochastyczna występująca we wzorze /17/ nosi nazwę całki **Ito** - Dooba.

http://rcin.org.pl

W [15] wykazano istnienie i jednoznaczność dla równania /17/ przy pewnych ograniczeniach na funkcje m i σ , aby można było skorzystać z twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Poza tym rozważono równanie dla dwu pierwszych momentów rozważanego procesu oraz badano jego aproksymacje.

Natomiast ani w tej pracy, ani we wspomnianych wyżej pozycjach [11] , [12] nie zajmowano się stabilnością równania stochastycznego typu /17/ .

W [1] rozważony został układ równań stochastycznych różniczkowo-całkowych, który przedstawiał wpływ fluktuacji pola elektrycznego na reakcje ośrodka zjonizowanego wobec występującego w nim zewnętrznego harmonicznego pola elektrycznego. Stabilność uśrednionych rozwiązań tego układu związana jest z pewnymi warunkami dotyczącymi stacjonarności tego układu. Wynika to także z faktu, że do tego układu równań dołączone są pewne ograniczenia natury stochastycznej.

Wspomniany wyżej układ równań ma postać /przy uwzględnieniu jedynie dyspersji czasowej ośrodka/:

/18/
$$\frac{d}{dt}\check{J}_i(t_0+t,\mu)+\int_0^t dt'\,\Gamma_{ij}(t-t')\check{J}_j(t_0+t',\mu)+$$
$$+\mathring{\gamma}_{ij}\check{J}_j(t_0+t,\mu)=R_i(t_0+t,\mu)+K_i(t_0+t),$$

gdzie $\underline{\check{J}}$ - oznacza gęstość natężenia stochastycznego prądu elektrycznego w ośrodku zjonizowanym, $\underline{\Gamma}(t)$ - "tensorowy współczynnik tarcia" z opóźnieniem /macierzowa funkcja pamięci/, przy czym:

/19/ $\Gamma_{ij}(t)=0$ gdy $t<0$

jest warunkiem przyczynowości, zaś:

http://rcin.org.pl

/20/
$$\underline{R}(t_0+t,\mu) = \frac{ne^2}{m}\underline{E}(t_0+t,\mu)$$

jest "siłą stochastyczną" wynikającą z obecności w ośrodku fluktuującego pola elektrycznego $\underline{E}(t_0+t,\mu)$. Niesymetryczna macierz $\{\overset{\circ}{\gamma}_{ij}\}$ związana jest z obecnością stałego pola maggnetycznego $\underline{B}_0$ w ośrodku:

/21/
$$\{\overset{\circ}{\gamma}_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_c & 0 \\ -\omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

czyli zewnętrzne stałe pole magnetyczne jest skierowane wzdłuż osi z, $\omega_c = \frac{|e\ \underline{B}_0|}{mc}$ - oznacza częstość cyklotronową. Natomiast deterministyczna siła zewnętrzna, spowodowana występowaniem zewnętrznego, harmonicznego w czasie pola elektrycznego jest postaci: /$\underline{E}_0$ - **amplituda zewnętrznego pola elektrycznego/**

/22/
$$\underline{K}(t_0+t) = \frac{ne^2}{m}\underline{E}_0 \exp(-i\omega_0 t)\, H(t) ,$$

gdzie $H(t)$ funkcja Heaviside'a, ω_0 - częstość harmonicznego zewnętrznego pola elektrycznego. Tak więc chwila czasu t_0 związana jest z włączeniem siły zewnętrznej. Ponadto w powyższych wzorach występuje ładunek elementarny e, prędkość światła c, n - uśredniona koncentracja cząsteczek jednego znaku, których dynamika uwzględnia równanie /18/, zaś m oznacza ich masę.
W tym przypadku są to elektrony. Zakłada się, że średnia gęstość ładunku elektrycznego w ośrodku jest równa zeru, zaś jony stanowią neutralizujące tło dla poruszających się elektronów.
Ponadto we wzorze /18/ μ oznacza element przestrzeni probabilistycznej /ansamblu/ $\mu \in \Omega$. Przestrzeń probabilistyczna

http://rcin.org.pl

można przedstawić w postaci iloczynu kartezjańskiego dwu podprzestrzeni probabilistycznych $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Podprzestrzeń Ω_1 związana jest z występowaniem siły stochastycznej $\underline{R}$, zaś podprzestrzeń Ω_2 związana jest z ansamblem warunków początkowych procesu stochastycznego $\check{\underline{J}}$. Wobec tego dla każdego elementu μ przestrzeni probabilistycznej Ω mamy: $\Omega \ni \mu \; (\mu_1, \mu_2)$, gdzie $\mu_1 \in \Omega_1$ **oraz** $\mu_2 \in \Omega_2$. Uśrednienie względem μ_1 będzie oznaczone przez $\langle \; \rangle$, zaś względem μ_2 przez $\langle \; \rangle_0$, natomiast uśrednienie względem μ będzie oznaczone przez $\langle\!\langle \; \rangle\!\rangle_0$.

Równanie /18/ jest więc stochastycznym równaniem różniczkowo-całkowym typu splotowego z addytywną siłą stochastyczną $\underline{R}$ i deterministyczną siłą zewnętrzną $\underline{K}$.

O sile stochastycznej $\underline{R}$ zakładamy, że jest procesem stochastycznym o wartości średniej równej zeru:

$$\langle R_i (t_0 + t, \mu) \rangle = 0 , \qquad t > 0 , \tag{23}$$

poza tym, że nie ma korelacji pomiędzy wartością stochastycznej gęstości natężenia prądu elektrycznego w chwili t_0 oraz siłą stochastyczną $\underline{R}$ w chwili $t_0 + t$:

$$\langle\!\langle \check{J}_i (t_0, \mu) R_j (t_0 + t, \mu) \rangle\!\rangle_0 = 0 . \tag{24}$$

Natomiast o elementach macierzy "tensora współczynnika tarcia" $\Gamma_{ij}(t)$ zakładamy, że należą do przestrzeni funkcji bezwzględnie całkowalnych na półprostej $R_+ (0, \infty)$: $\Gamma_{ij}(t) \in L_1 (R_t)$.

Ponadto zakładamy, że wszelkie korelacje brane w różnych chwilach czasu dążą do zera, gdy ich różnica argumentów dąży do nieskończoności, na przykład:

$$\lim_{t \to \infty} \langle\!\langle \check{J}_i (t_0, \mu) \, \check{J}_j (t_0 + t, \mu) \rangle\!\rangle_0 = 0 \tag{25}$$

http://rcin.org.pl

Powyższe założenie nie oznacza jednak uprzedniego żądania stacjonarności procesu stochastycznego $\check{J}$, gdyż korelacja występująca w /25/ może być funkcją t_0+t .

Ponieważ zakładamy, że będziemy się zajmować wyłącznie efektami w przybliżeniu liniowym względem siły zewnętrznej $\underline{K}$, więc zależności pomiędzy korelacjami stochastycznego prądu elektrycznego, siły stochastycznej oraz tensorowym współczynnikiem tarcia wyrazimy z równania /18/ przy nieobecności siły zewnętrznej $\underline{K}$. Związki te wyrażone w terminach transformacji Fouriera-Laplace'a względem czasu będą nosiły nazwę relacji /związków/ fluktuacyjno-dyssypacyjnych.

Dalsze założenia i rozwinięcia założeń już poczynionych będą czynione w miarę potrzeb.

Pierwszy związek fluktuacyjno-dysypacyjny

Pomnóżmy obie strony równania /18/, bez siły zewnętrznej $\underline{K}$, przez $\check{J}_l(t_0,\mu)$ oraz dokonamy uśrednienia względem ansamblu przy założeniu warunku /24/. Następnie dokonamy przekształcenia Fouriera-Laplace'a względem czasu otrzymanego uprzednio równania, co daje pierwszy związek fluktuacyjno-dysypacyjny:

/26/ $$\left\{-i\omega\delta_{ij} + \Gamma_{ij}[\omega] + \mathring{\gamma}_{ij}\right\} \ll \check{J}_l\check{J}_j \gg_0^{\omega} = \langle \check{J}_l\check{J}_i \rangle_0^{t=0} ,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

/27/ $$\Gamma_{ij}[\omega] = \int_0^{\infty} \Gamma_{ij}(t)\exp(i\omega t)\,dt ,$$

/28/ $$\langle \check{J}_l\check{J}_i \rangle_0^{t=0} = \ll \check{J}_l(t_0,\mu)\check{J}_i(t_0,\mu) \gg_0 - \langle \check{J}_l(t_0,\mu)\check{J}_i(t_0,\mu) \rangle_0 ,$$

http://rcin.org.pl

/29/ $$\langle\langle \check{J}_l \check{J}_i \rangle\rangle_0^{\omega} = \langle\langle \check{J}_l(t_0,\mu)\, \check{J}_i(t_0+t,\mu) \rangle\rangle_0^{\omega} = \int_0^{\infty} \langle\langle \check{J}_l(t_0,\mu)\, \check{J}_i(t_0+t,\mu) \rangle\rangle_0 \times$$
$$\times \exp(i\omega t)\, dt \quad .$$

Pierwszy związek "fluktuacyjno-dysypacyjny" wiąże transformacje Fouriera-Laplace'a względem czasu t korelacji fluktuacji gęstości prądu elektrycznego w ośrodku z analogiczną transformacją tensora współczynnika tarcia i średnią kwadratu fluktuacji gęstości prądu elektrycznego.

Związek ten zależy w sposób jawny od wartości stałego pola magnetycznego znajdującego się w ośrodku, która jest reprezentowana przez niesymetryczną macierz $\mathring{\gamma}_{ij}$ daną wzorem /21/.

Pierwszy związek fluktuacyjno-dysypacyjny będzie wykorzystany do wyprowadzenia drugiego związku fluktuacyjno-dysypacyjnego, który będzie wiązał transformacje tensora współczynnika tarcia z transformacją korelacji siły stochastycznej i średnią kwadratu fluktuacji gęstości prądu elektrycznego.

Warunki stacjonarności

Zajmiemy się teraz warunkami, przy których uogólnione równanie Langevina /18/, uwzględniające obecność stałego pola magnetycznego w ośrodku zjonizowanym, może posiadać, podczas nieobecności siły zewnętrznej **K**, stacjonarne rozwiązania. Warunki te nie są tu celem samym w sobie, lecz przy ich pomocy drugi związek fluktuacyjno-dysypacyjny przebierze prostą postać. W tym celu będziemy poszukiwać warunków, przy których ma miejsce:

/30/ $$\frac{d}{dt_0} \langle\langle \check{J}_l(t_0,\mu)\, \check{J}_i(t_0+t,\mu) \rangle\rangle_0 = 0 \quad .$$

http://rcin.org.pl

Pomnóżmy obie strony równania /18/, bez siły zewnętrznej $\underline{K}$, przez $\check{J}_i(t_0,\mu)$ oraz dokonajmy ich uśrednienia względem przestrzeni probabilistycznej. Otrzymamy wtedy równanie:

/31/
$$\left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\frac{d}{dt}\check{J}_i(t_0+t,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0 = -\mathring{\gamma}_{ij}\left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_j(t_0+t,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0 + -\int_0^t \Gamma_{ij}(t-t')\left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_j(t_0+t',\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0 dt' .$$

Przechodząc do granicy $\lim\limits_{t\to 0}$ obu stron równania /31/ otrzymamy:

/32/
$$\left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\frac{d}{dt_0}\check{J}_i(t_0,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0 = -\mathring{\gamma}_{ij}\left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_j(t_0,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0 = = \left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_j(t_0,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0 \mathring{\gamma}_{ij} .$$

Teraz naszym celem jest znalezienie dodatkowego warunku,przy którym może być spełnione równanie:

/33/
$$\frac{d}{dt_0}\left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_i(t_0,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0 = 0 .$$

W takim razie trzeba otrzymać wyrażenie analogiczne do /32/ dla:

/34/
$$\left\{\left\langle\!\left\langle \frac{d}{dt_0}\check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_i(t_0,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0\right\} = \underline{\underline{G}}' .$$

Wprowadzimy oznaczenia:

/35/
$$\underline{\underline{C}} \equiv \left\{\left\langle\!\left\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\frac{d}{dt_0}\check{J}_i(t_0,\mu)\right\rangle\!\right\rangle_0\right\}$$

http://rcin.org.pl

/36/ $$\underline{\underline{M}} = \left\{ \langle\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\, \check{J}_j(t_0,\mu) \rangle\rangle_0 \right\} \quad .$$

/37/ $$\underline{\underline{\mathring{\gamma}}} = \left\{ \mathring{\gamma}_{ij} \right\} \quad .$$

Wobec tego równanie /32/ można przedstawić w postaci:

/38/ $$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{M}}\, \underline{\underline{\mathring{\gamma}}}$$

lub też postaci do niej transponowanej:

/39/ $$\underline{\underline{C}}^T = \mathring{\gamma}^T\, \underline{\underline{M}}^T \quad .$$

Mamy także spełnione związki:

/40/ $$\underline{\underline{M}}^T = \underline{\underline{M}} \quad , \quad \underline{\underline{\mathring{\gamma}}}^T = -\, \underline{\underline{\mathring{\gamma}}} \quad , \quad \underline{\underline{C}}^T = \underline{\underline{G}}' \quad .$$

W takim razie na mocy równania transponowanego /39/ otrzymujemy:

/41/ $$\langle\langle \frac{d}{dt_0} \check{J}_i(t_0,\mu)\, \check{J}_i(t_0,\mu) \rangle\rangle_0 = -\, \mathring{\gamma}_{ij} \langle\langle \check{J}_j(t_0,\mu)\, \check{J}_i(t_0,\mu) \rangle\rangle_0 \quad .$$

Dodając stronami równania /32/ i /41/ otrzymujemy:

/42/ $$\frac{d}{dt_0} \langle\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\, \check{J}_i(t_0,\mu) \rangle\rangle_0 = \langle\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\, \check{J}_j(t_0,\mu) \rangle\rangle_0\, \mathring{\gamma}_{ji} + $$
$$- \mathring{\gamma}_{ij} \langle\langle \check{J}_j(t_0,\mu)\, \check{J}_i(t_0,\mu) \rangle\rangle_0 \quad .$$

http://rcin.org.pl

Warunek /33/ będzie zachodził, jeżeli macierze $\overset{\circ}{\underline{\underline{\gamma}}}$ i $\underline{\underline{M}}$ będą komutować:

/43/ $$\underline{\underline{M}}\,\overset{\circ}{\underline{\underline{\gamma}}} - \overset{\circ}{\underline{\underline{\gamma}}}\,\underline{\underline{M}} \quad ,$$

co będzie na przykład miało miejsce, gdy macierz $\underline{\underline{M}}$ jest diagonalna i ma postać:

/44/ $$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} .$$

Wyróżnienie osi z zostało spowodowane postacią macierzy $\overset{\circ}{\underline{\underline{\gamma}}}$ /21/, z której to jest widoczne, że stałe pole magnetyczne ma kierunek wzdłuż osi z.

W [17] pokazano, że korelacje /autokorelacje/ fluktuacji gęstości natężenia prądu elektrycznego w plaźmie wzięte w jednym czasie nie zależą od wartości stałego pola magnetycznego. Usprawiedliwia to więc przyjęcie macierzy $\underline{\underline{M}}$ jako diagonalnej, zaś postać macierzy $\overset{\circ}{\underline{\underline{\gamma}}}$ /21/ dopuszcza spełnienie związku /43/, gdy postać macierzy **M** wyróżnia kierunek odpowiadający osi z /44/.

Ponieważ zakładamy, że wzór /33/ jest słuszny dla wybranej zupełnie dowolnie chwili początkowej t_0 , więc możemy na jego podstawie zadać stały warunek początkowy dla równania:

/45/ $$\frac{d}{dt}\langle\!\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_i(t_0+t,\mu)\rangle\!\rangle_0 = -\overset{\circ}{\gamma}_{ij}\langle\!\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_j(t_0+t,\mu)\rangle\!\rangle_0 + \\ - \int_0^t \Gamma_{ij}(t-t')\langle\!\langle \check{J}_i(t_0,\mu)\check{J}_j(t_0+t',\mu)\rangle\!\rangle_0 \, dt' .$$

http://rcin.org.pl

Równanie /45/ jest równoważne równaniu /31/. Dzięki założonemu stałemu warunkowi początkowemu, ze względu na /33/ rozwiązanie równania /45/ spełnia warunek /30/.

Warunki /32/ oraz /43/ są warunkami koniecznymi dla stacjonarności w szerszym sensie procesu stochastycznego $\check{J}(t_0+t, \mu)$ [9].

Drugi związek fluktuacyjno-dysypacyjny

Warunki konieczne stacjonarności /32/, /43/ oraz założenie stacjonarności w szerszym sensie siły stochastycznej, a więc stochastycznego pola elektrycznego, pozwalają uzyskać drugi związek fluktuacyjno-dysypacyjny.

W tym celu należy obliczyć wyrażenie:

$$\langle R_l R_i \rangle^{\omega} = \int_0^{\infty} \langle R_l(t_0, \mu) R_i(t_0+t, \mu) \rangle \exp(i\omega t)\, dt, \tag{/46/}$$

wykorzystując przy tym zależność:

$$R_l(t_0, \mu) = \frac{d}{dt} \check{J}_l(t_0, \mu) + \mathring{\gamma}_{lr} \check{J}_r(t_0, \mu) . \tag{/47/}$$

Obliczanie /46/ przebiega podobnie jak w [18] z wykorzystaniem pierwszego związku fluktuacyjno-dysypacyjnego, lecz wzory /32/, /43/ wpływają w istotny sposób na ostateczną postać wyrażenia.

Drugi związek fluaktuacyjno dysypacyjny przybiera więc postać:

$$\langle R_l R_i \rangle^{\omega} = \Gamma_{ij}[\omega] \langle \check{J}_l \check{J}_j \rangle_0^{t=0} . \tag{/48/}$$

Tak więc, w odróżnieniu od pierwszego związku fluktuacyjno-dysypacyjnego, jego postać nie zależy explicite od wartości stałego pola magnetycznego, dzięki zależnościom /32/, /43/.

http://rcin.org.pl

Stabilność rozwiązań równań dla korelacji

Analityczne własności transformacji Fouriera-Laplace'a współczynnika tarcia $\Gamma[\omega]$ są powiązane z analogicznymi własnościami transformacji Fouriera-Laplace'a stochastycznego pola elektrycznego, która to od takiej samej transformacji korelacji siły stochastycznej różni się tylko czynnikiem niezależnym od częstości ω . Na mocy warunku /19/, przy założeniu, że elementy macierzy $\Gamma_{ij}(t) \in L_1(0,\infty)$, przedłużenie analityczne funkcji $\Gamma_{ij}[\tilde{\omega}]$ /gdzie $\tilde{\omega} = \omega_1 + i\,\omega_1$ / nie ma osobliwości w górnej półpłaszczyźnie $\mathrm{Im}\,\tilde{\omega} = \omega_1 > 0$ płaszczyzny zespolonej $\tilde{\omega}$. Własności tego typu są potwierdzone przez postać transformaty korelacji stochastycznego pola elektrycznego [19] dla plazmy opisanej rozkładem Maxwella, co zostało rozważone w [20] .

Wobec tego deterministyczne równanie różniczkowo-całkowe /45/, które opisuje rozwój korelacji fluktuacji gęstości natężenia stochastycznego prądu elektrycznego w czasie ma rozwiązanie asymptotycznie stabilne. Wynika to z tego, że rozwiązanie równania /45/ przy pomocy transformacji Fouriera-Laplace'a ujawnia tylko drgania zanikające wykładniczo w czasie. Powodem tego jest fakt [20] , [21] , że wyznacznik macierzy:

/49/ $$\det\left\{ -i\tilde{\omega}\delta_{ij} + \Gamma_{ij}[\tilde{\omega}] + \mathring{\gamma}_{ij} \right\} = 0$$

dla $\mathrm{Im}\,\tilde{\omega} = \omega_1 < 0$

posiada miejsca zerowe tylko w dolnej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej $\tilde{\omega}$, przynajmniej w pewnym obszarze wartości stałego pola magnetycznego. Wynika on z własności analitycznych $\Gamma_{ij}[\tilde{\omega}]$, kóre można przy pomocy drugiego związku fluktuacyjno-dysypacyjnego porównać z realną sytuacją fizyczną.

Warunek tego typu był wykorzystywany w [22] , [23] , przy rozpatrywaniu stabilności drgań dla układu równań różniczkowo-całkowych splotowych typu Volterry analogicznych do /45/.
Różnica polegała tylko na tym, że w wspomnianych pracach użyto

http://rcin.org.pl

transformacji Laplace'a zamiast transformacji Fouriera-Laplace'a.

Przy poszukiwaniu odpowiedzi ośrodka na harmoniczne w czasie zaburzenie zewnętrzne, która jest opisana przez uśredniony względem ansamblu układ /18/, warunek /49/ eliminuje drgania narastające w czasie. W tym przypadku stabilność asymptotyczna nie zachodzi wskutek obecności drgań wymuszających o zadanej częstości. Należy tu posługiwać się stanem ustalonym, którego realizację także zapewnia warunek /49/.

LITERATURA

[1] K. ŻUCHOWSKI, Odpowiedź zjonizowanego ośrodka dyspersyjnego na zaburzenie zewnętrzne i fluktuacyjne w nielokalnym opisie, Prace IPPT, 44/1979.

[2] N.P. BHATIA, G.P. SZEGÖ, Stability theory of dynamical systems, Springer, 1970.

[3] W. HAHN, Stability of motion, Springer, 1967.

[4] R. GUTOWSKI, Równania różniczkowe zwyczajne, WNT, Warszawa 1971.

[5] R.K. MILLER, Nonlinear Volterra Integral Equations, Benjamin, 1971.

[6] J. KUDREWICZ, Częstotliwościowe metody w teori nieliniowych układów dynamicznych, WNT, Warszawa 1970.

[7] C. CORDUNEANU, Integral equations and stability of feedback systems, Academic Press, 1975.

[8] T.T. SOONG, Random differential equations in science and engineering, Academic Press, 1973.

[9] K. SOBCZYK, Metody dynamiki statystycznej, PWN, Warszawa 1973.

[10] L. ARNOLD, Stochastic differential equations, J. Wiley, 1974.

[11] C.P. TSOKOS, W.J. PADGETT, Random Integral Equations with Applications to Stochastic Systems, Lecture Notes in Mathematics 233, Springer, 1971.

http://rcin.org.pl

[12] A.T. BHARUCHA-REID, Random integral equations, Academic Press, 1972.

[13] R. KUBO, The fluctuation - dissipation theorem, 1966 Rept. Progr. Phys. 29, 155.

[14] H.J. KUSHNER, Stochastic stability and control, Academic Press, 1969.

[15] D. KANNAN, A.T. BHARUCHA-REID, Random integral equation formulation of a generalized Langevin equation, J. Stat. Phys. 5, 209 - 233, 1972.

[16] E. WONG, Procesy stochastyczne w teorii informacji i układach dynamicznych, WNT, Warszawa 1976.

[17] Elektrodinamika płazmy - pod redakcją A.I. Achieziera, Nauka, Moskwa 1974.

[18] K. ŻUCHOWSKI, Metody stochastyczne w zastosowaniu do wyznaczania współczynników transportu w plaźmie. Prace IPPT, 18/1973, Warszawa.

[19] S. ICHIMARU, Basic principles of plasma physics, Benjamin, 1973.

[20] K. ŻUCHOWSKI, Uogólnione równanie Langevina, autokorelacje i rezystywność plazmy. Prace IPPT, 85/1975, Warszawa.

[21] K. ŻUCHOWSKI, Związek rezystywności plazmy z autokorelacjami pola elektrycznego na podstawie równania Langevina. Prace IPPT, 14/1975 Warszawa.

[22] R.K. MILLER, Asymptotic stability properties of linear Volterra integrodifferentiol equations, J. Differential Equations, 10, 485 - 506, 1971.

[23] R.K. MILLER, Structure of solutions of unstable linear Volterra integrodifferential equations, J. Differential Equations, 15, 129 - 157, 1974.

http://rcin.org.pl