

4.42 — Konstrukcje plastyczne

P.269



Va Van The

DOLNE OSZACOWANIE PRZEMIESZCZEŃ
SILNIE DYNAMICZNIE ODKSZTAŁCANYCH
KONSTRUKCJI PLASTYCZNYCH

Praca doktorska

27 / 1981

WARSZAWA 1981

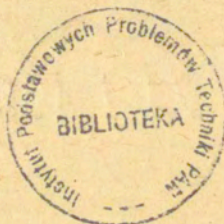
ISSN 0208-5658

Praca doktorska

Promotor: Prof.dr hab.Antoni Sawczuk

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 13 lipca 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 27/1981



57086



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 6,6. Ark.druk. 8,5.
Oddano do drukarni w lipcu 1981 r.
Nr zamówienia 423/0/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

VU VAN THE

Zakład Teorii Konstrukcji

IPPT PAN

DOLNE OSZACOWANIE PRZEMIESZCZEŃ
SIŁNIE DYNAMICZNIE ODKSZTAŁCANYCH KONSTRUKCJI PLASTYCZNYCH

1. Wstęp

1.1. Charakterystyka problemu

Wymagania praktyczne aeronautyki, przemysłu motoryzacyjnego, budownictwa wiertniczego na morzu, okrętownictwa, energetyki jądrowej i wielu innych dziedzin inżynierii doprowadziły do stałego wzrostu zainteresowania zagadnieniami dynamiki konstrukcji niesprężystych. Ostatnie lata przyniosły szczególnie intensywny rozwój tej dziedziny mechaniki. Pierwsze prace dotyczące zachowania się prostych konstrukcji sztywno-plastycznych, głównie belek i płyt w zakresie małych ugięć pojawiły się w latach 50-tych. Dalsze badania dotyczyły złożonych konstrukcji, oraz różnych zachowań się materiałów: sztywno-lepkoplastycznych, sprężysto-plastycznych itd. a również zmian konfiguracji geometrycznej konstrukcji w procesie plastycznego płynięcia. Obok wyników teoretycznych istnieje szereg rezultatów doświadczalnych. Ocenę aktualnego stanu teorii i rozwiązań problemów dynamiki konstrukcji plastycznych można znaleźć w pracach [5], [10], [32], [33], [35], [36], [84], [98].

Problem dynamiki konstrukcji polegający głównie na określeniu ruchu i czasu jego trwania opisany jest układem równań różniczkowych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych i czasu. W praktyce możliwość uzyskania rozwiązań tych układów są bardzo ograniczone. Znane rozwiązania zupełnie odnoszące się np. do konstrukcji idealnie plastycznych

dotyczą zagadnień dynamicznych belek prostych i niektórych przypadków obrotowo-symetrycznych płyt i powłok w zakresie małych ugięć i pozwalają określić kształt konstrukcji po ustaniu ruchu lub czas trwania tego ruchu. Pokazano, że trudności rozwiązania brzegowych problemów rosły ze wzrostem stopnia złożoności konstrukcji i stają się większe w przypadku uwzględnienia geometrycznej nieliniowości i rzeczywistych własności materiału. Należy zaznaczyć, że wybór metody rozwiązania zależy od geometrii konstrukcji, typu obciążenia oraz zachowania się materiału. Trudności spotykane przy rozwiązaniu zagadnień dynamiki sprawiły, że aktualne tendencje w dynamice konstrukcji plastycznych skupiają się na poszukiwaniu efektywnych metod przybliżonych.

Poszukiwania idą w dwóch kierunkach. Z jednej strony dąży się do ustalenia metod analitycznych umożliwiających w nieskomplikowany sposób ocenę pewnych interesujących wielkości jak np. czas trwania ruchu czy wielkości pochłaniającej energii. Drugim podejściem jest stosowanie metod numerycznych umożliwiających śledzenie procesu niesprężystej i geometrycznie nieliniowej deformacji konstrukcji obciążonej np. impulsem masy lub prędkości. W latach 60-tych w wyniku intensywnego rozwoju teorii nośności granicznej oraz pojawienia ekstremalnej zasady Tamaża [91] oraz twierdzeń szacujących Martina [49] stworzone zostały podstawy do opracowania ogólnych metod przybliżonych rozwiązywania zagadnień dynamicznych. W szeregu prac z ostatnich paru lat podjęte zostały próby opracowania przybliżonych analitycznych i numerycznych metod. Nasze zainteresowania będą szły w kierunku analitycznych metod dostarczających oszacowań. Metody te mają prostotę i dużą dokładność oraz pozwalają rozpatrzeć złożone procesy dynamiki. Dyskusji dotyczącej najbardziej znanych metod poświęcimy wiele uwagi w dalszej części pracy.

1.2. Charakterystyka istniejących metod

Należy już tu jednak nadmienić, że metody oparte na zasadach ekstremalnych i wariacyjnych zależą do interesującej nas klasy rozwiązań analitycznych. W ostatnich latach pojawił się cały szereg zasad ekstremalnych charakteryzujących różne

zachowania się konstrukcji plastycznych obciążonych dynamicznie. Wykazuje się w nich fakt, że ścisłe pole prędkości przemieszczeń w danej chwili jest ekstremalną pewnego funkcjonału. Postać funkcjonału dobierać należy wówczas tak, aby warunek znikania pierwszej wariacji prowadził do różniczkowego równania ruchu. Sformułowanie opracowanych dotychczas zasad jest różne, gdyż miały one służyć różnym celom. Zasady ekstremalne w zakresie małych ugięć podane są w pracach [4], [6], [43], [47], [90], [91], [97], [102]. Najnowsze badania dotyczące uogólnienia tych zasad na skończone przemieszczenie można znaleźć w pracach [45], [83]. Wydaje się, że zasady ekstremalne przedstawiają duże potencjalne możliwości stosowania w problemach plastycznych. Pozwalają one bowiem na uzyskanie przybliżonego rozwiązania tych zagadnień, dla których znane są rodziny pól prędkości przemieszczeń zawierające ścisłe pola prędkości. Ponadto zasady te stanowią racjonalną podstawę metod obliczeń numerycznych.

Spośród przybliżonych założeń dynamiki konstrukcji plastycznych najbardziej rozpowszechniona jest metoda rozdzielania zmiennych. Pozwala ona na otrzymanie przybliżonych wartości maksymalnych trwałych ugięć. Została ona zaproponowana przez Martina i Symonasa [51] dla sztywno plastycznych konstrukcji obciążonych idealnym impulsem prędkości a następnie uogólniona została na przypadek konstrukcji wykonanych z materiału sztywno-lepkoplastycznego [44], [89]. W przypadku konstrukcji sztywno-plastycznych uzyskanie rozwiązania metodą rozdzielania zmiennych polega na przyjęciu stałej, niezmiennej w czasie formy ruchu, tzn. przyjęcie stałości kierunku wektora prędkości przemieszczeń w procesie płynięcia plastycznego konstrukcji. Matematycznie oznacza to, że należy przyjąć postać rozwiązania z rozdzielonymi zmiennymi dla równań różniczkowych cząstkowych jako :

$$\dot{u}_i^*(x, t) = A \cdot T(t) \phi_i(x)$$

gdzie: funkcja $T(t)$ jest znormalizowana, $T(0)=1$, funkcje $T(t)$ i $\Phi(x)$ dobiera^{się} tak, aby spełnione były wszystkie równania oraz kinetyczne warunki brzegowe. A dobiera się w ten sposób, aby błąd rozwiązania był możliwie najmniejszy. Metoda ta dla sztywno- plastycznych konstrukcji obciążonych impulsem ciśnienia jest przedstawiona w pracach [40], [41]. Ta dokładność może być sprawdzona przez porównania z obliczeniami numerycznymi wykonanymi za pomocą metod różnic lub elementów skończonych. Dla celów praktycznych takie intuicyjne podejście, w którym przyjmuje się odpowiedni kształt pola ugięć może okazać się wystarczająco dokładnie. Metoda rozdzielania zmiennych już rozszerzona została na problemy dużych ugięć belek [37], [38], płyt [9], i powłok [95] obciążonych impulsem prędkości oraz ciśnienia. Zupełnie teoretyczne podstawy tej metody przedstawione zostały w pracy [52]. Należy jednak zauważyć, że omówiona powyżej metoda może być zastosowana z powodzeniem jedynie w przypadkach prostych geometrycznie konstrukcji i obciążenia niezależnego od czasu.

W ostatnich latach intensywnie rozwijane są metody numeryczne w dynamice konstrukcji plastycznych, głównie metody różnic skończonych i elementów skończonych. W ramach tych metod możliwe staje się uwzględnienie wszystkich realnych efektów decydujących o plastycznym płynięciu konstrukcji. Uzyskane metodą numeryczną wyniki wykazują dobrą zgodność z rezultatami eksperymentalnymi. Przegląd tych metod można znaleźć w pracach [5], [18], [103].

Odrębną grupę stanowią metody oszacowania oparte na odpowiednio sformułowanych zasadach wariacyjnych. Poświęcono im wiele uwagi w zagadnieniach dynamicznej teorii plastyczności. Aktualne tendencje skupiają się na poszukiwaniu prostych w zastosowaniu metod określenia trwałych ugięć plastycznych konstrukcji. Spośród metod przybliżonych metody szacujące odznaczają się dużą prostotą oraz przy znacznie słabszych założeniach pozwalają oszacować maksymalne trwałe ugięcia i czas ruchu konstrukcji. Ponadto mają one znaczenie praktyczne, gdyż dają możliwości obustronnego ograniczenia ugięcia. Z tego względu, jeśli wyznaczony w ten sposób obszar, w którym

zawiera się rozwiązanie ścisłe w każdym przypadku jest dostatecznie wąski, metody szacujące są szczególnie pożyteczne. Istotną więc sprawą jest opracowanie metod pozwalających na ocenę od góry i od dołu np. czasu trwania ruchu dynamicznie obciążonej konstrukcji lub spodziewanego trwałego przemieszczenia. Górne, bezpieczne oszacowanie na maksymalne trwałe ugięcia i dolne oszacowanie na czas ruchu sztywno-plastycznych konstrukcji obciążonych idealnym impulsem prędkości podał Martin w roku 1964, [49]. Jego idea rozwijana dla materiałów plastycznych ze wzmocnieniem [48], [50]. Uzyskane wariacyjną metodą górne oszacowanie na maksymalne ugięcia zostało podane przez Wierzbickiego w roku 1971, [102]. Wykorzystując zasadę ekstremalną Erkhov [18] także otrzymał górne oszacowanie podobne do oszacowania Martina. Dolne oszacowanie na czas ruchu sztywno-plastycznych konstrukcji obciążonych skończonym impulsem podane zostało przez Kaliszkyego [40]. Metody górnego oszacowania ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznych w stanie przystosowania można znaleźć w pracach [7], [8], [11], [46], [68], [69], [94].

W roku 1970 wykorzystując podane przez Martina dolne oszacowanie czasu związaną z podejściem kinematycznym metodą dolnego oszacowania przemieszczeń konstrukcji sztywno-plastycznych zaproponowali Morales i Nevill [55]. Inną metodą uzyskiwania dolnych oszacowań podał Wierzbicki [99], przedstawiając następnie dyskusję dotyczącą metod dolnego oszacowania [100]. W roku 1972 na podstawie dolnego oszacowania czasu trwania ruchu konstrukcji zaproponowanego przez Kaliszkyego Morales [56] otrzymał dolne oszacowanie trwałych ugięć sztywno-plastycznych konstrukcji poddanych obciążeniu impulsem o skończonym czasie trwania. Metoda ta została rozszerzona na materiały lepkoplastyczne [57].

Na podstawie analizy uzyskiwanych wyników można twierdzić, że poszukiwane dolne oszacowanie w dużej mierze zależy od wyboru dopuszczalnego pola prędkości $\dot{u}_i^*(x,t)$. Dopuszczalne pole prędkości $\dot{u}_i^*(x,t)$ możemy jednak budować niezależnie od rzeczywistego ruchu a zatem czas t^* , w którym $\dot{u}_i^*(x,t) = 0$ może więc być dowolny. Jeżeli przy wyborze pola prędkości

przemieszczeń dokonanych rozdzielania zmiennych $\dot{U}_i(x,t) = V(t) a_i(x)$, to poszukiwane dolne oszacowanie zależy od wyboru oceny czasu trwania ruchu t^* , funkcji formy pola przemieszczeń $a_i(x)$ oraz funkcji czasu $V(t)$. Są to podstawowe elementy prowadzące do problemu optymalizacji otrzymanego rozwiązania przybliżonego. Ponadto należy podkreślać, że wykorzystanie uzyskanych przez Martina i Kaliszyego oszacowań czasu jest słuszne jedynie w zakresie teorii małych ugięć oraz nie daje możliwości rozpatrzenia całego procesu rzeczywistego ruchu konstrukcji. W związku z tym metoda dolnego oszacowania Moralesa i Nevilla oparta na istniejących oszacowaniach czasu nie daje możliwości bezpośredniego uogólnienia na przypadek dużych ugięć, gdy brak jest oszacowania czasu trwania ruchu w analizie nieliniowej. To jest podstawowa wada metody Moralesa i Nevilla. Taka sytuacja sprowadza do wymagania budowy ogólnej teorii dolnego oszacowania pokonującej powyższe wady. Podkreślimy raz jeszcze, że powyżej omawiane metody obowiązują w geometrycznie liniowej teorii plastyczności.

1.3. Konieczność uwzględnienia zmian geometrii

Metody uzyskania oszacowania trwałych ugięć konstrukcji głównie odnoszą się do modelu sztywno-plastycznego i sztywno-lepkoplastycznego. Modele te są słuszne jedynie jak długo całkowita energia odkształcenia plastycznego jest znacznie większa od maksymalnej energii sprężystej, jaką można zmagazynować w konstrukcji. W przypadku konstrukcji poddanych obciążeniu impulsem skończonym lub nieskończonym krótkim czasie trwania całkowita energia plastyczna równa się początkowej energii dynamicznej dostarczonej do konstrukcji. W tych przypadkach modele sztywno-plastyczne i sztywno-lepkoplastyczne mogą być zastosowane z powodzeniem przy intensywnych obciążeniach prowadzących do dużych ugięć. Sytuacja taka sprowadza do faktu, że w odpowiednim rozwiązaniu wymaga się uwzględnienia zmian konfiguracji geometrycznej konstrukcji. Powyższa analiza pokazała sprzeczność istniejącą w zastosowaniu teorii małych ugięć konstrukcji sztywno-plastycznych oraz wyjaśniła niezgodność wyników uzyskanych w ramach teorii małych ugięć z rezultatami doświadczalnymi i ścisłymi rozwią-

zianami. Sprawę tę omówimy szczegółowo w dalszej części pracy i zilustrujemy odpowiednimi porównaniami z doświadczeniami.

Faktem jest, że w praktyce istnieje wiele problemów dynamicznych, w których konfiguracja geometryczna konstrukcji znacznie się zmienia w procesie płynięcia plastycznego, same odkształcenia natomiast pozostają małe i konstrukcja jest stateczna w tym sensie, że nie zmienia się jej typ deformacji. Jako przykład posłużyć mają cienkie konstrukcje obciążone impulsem o wystarczającej intensywności, gdy maksymalne ugięcia przewyższają grubość ścianki. Dlatego opracowanie nowych prostych w zastosowaniu metod oszacowania w zakresie dużych ugięć stanowiłoby istotny postęp w rozwoju dynamiki konstrukcji plastycznych. Pierwsze wyniki w tym kierunku otrzymano w latach 70-tych. Podstawowe dotychczas badania jednak skupiają się na budowaniu twierdzeń górnego oszacowania na trwałe ugięcia [53], [66], [104]. Ponadto trudno jest określić dokładność poszukiwanych wyników wobec braku twierdzeń dających możliwość dolnego oszacowania przemieszczeń.

Na podstawie analizy otrzymanych dotychczas rezultatów wynika, że należy przedsięwziąć badania, które zmierzają do zwiększenia dokładności metod oszacowania oraz do opracowania nowych metod znajdowania dolnego oszacowania w nieliniowej dynamice konstrukcji sztywno - plastycznych. Cel ten można osiągnąć przez zastosowanie konsekwentnie nieliniowej teorii i opracowanie metod umożliwiających uzyskiwanie ocen ugięć od dołu. Kierunki te mają w tej chwili duże znaczenie praktyczne a ponadto uzupełniają istniejące metody górnych oszacowań ugięć i pozwalają one określić przedział, w którym znajduje się rzeczywiste rozwiązanie.

2. Cel i zakres pracy

2.1. Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest opracowanie nowej metody uzyskania dolnego oszacowania największych trwałych ugięć sztywno - plastycznych konstrukcji poddanych obciążeniu impulsem o nieskończonym krótkim lub skończonym czasie trwania.

Metoda ta obowiązuje zarówno w geometrycznie liniowej jak i w nieliniowej teorii. Głównym przedmiotem zainteresowania jest teoria nieliniowa. Na podstawie zależności poszukiwanego dolnego oszacowania od wyboru dopuszczalnego pola prędkości oraz dowolności wyboru tego pola będziemy rozpatrywać problem optymalizacji dolnego oszacowania w zakresie małych ugięć oraz pokażemy oceny uzyskanych dotychczasowych oszacowań. W odróżnieniu od metody oszacowania Moralesa i Nevilla obecna metoda odznacza się dużą ogólnością, jednocześnie w dowodach nie stosujemy dolnego oszacowania czasu Martina. Zaproponowana metoda zostanie następnie uogólniona na przypadek dużych ugięć.

2.2. Szczegółowa tematyka pracy

Tematyka pracy ujęta jest z siedem głównych działów. Pierwszy i drugi dział zajmuje wstęp oraz poświęcone są tematyce pracy. Przedstawiona jest charakterystyka problemu, charakterystyka istniejących metod w dynamice konstrukcji plastycznych oraz cel pracy. Trzeci z nich dotyczy opracowania nowej metody dolnego oszacowania trwałych ugięć sztywno-plastycznych konstrukcji obciążonych idealnym impulsem prędkości w ramach liniowej teorii. Zawiera on ogólne sformułowanie problemu, optymalizację rozwiązania w przypadku belek i płyt kołowych oraz porównanie z dotychczas uzyskiwanymi oszacowaniami i zastosowanie dla płyt anizotropowych. Czwarty dział obejmuje uogólnienie teorii na przypadek dużych ugięć. W kolejności przedstawione są ogólne sformułowania problemu dla trójwymiarowych ciał i ogólne wyrażenie na oszacowanie. W kolejnym dziale jest zastosowanie teorii dla cienkich konstrukcji, poddanych umiarkowanej dużej deformacji. Rozwiązywane są problemy szczególne, a mianowicie przedstawione są dolne oszacowania ugięć powłok kulistych i cylindrycznych, płyt kołowych oraz belek. W celu oceny zaproponowanej teorii przeprowadzone jest porównanie uzyskanych wyników z rozwiązaniami i rezultatami doświadczalnymi dostępnymi w literaturze.

Wreszcie odpowiednia część poświęcona studium nad konstrukcjami poddanymi obciążeniu impulsem o skończonym czasie trwania. Rozpatrywany jest wpływ historii obciążenia na wielkość trwałych ugięć. Otrzymane wyniki są zilustrowane rysunkami podobnie jak w poprzednich rozdziałach.

Praca kończy się wnioskami i uwagami na temat kierunków dalszych badań i możliwych zastosowań.

Praca zawiera dodatek , który dotyczy założeń nieciągłości wewnętrznych sił , przemieszczeń oraz ich pochodnych w cienkich konstrukcjach obciążonych .

3. - DOLNE OSZACOWANIE UGIĘĆ W DYNAMICE LINIOWEJ NIE WYKORZYSTUJĄC OSZACOWANIA CZASU

3.1. Wprowadzenie

Dolne oszacowania ugięć konstrukcji plastycznych obciążonych dynamicznie w zakresie małych ugięć zostały przedstawione w pracach [55], [56], [99], [101]. We wszystkich tych pracach w istotny sposób wykorzystuje się warunek $\dot{U}_i(t_f) = 0$, gdzie \dot{U}_i jest rzeczywistą prędkością a t_f - rzeczywistym czasem trwania ruchu konstrukcji. Niezależnie od tego w [55], [56], wykorzystywane jest także dolne oszacowanie czasu Martina [49]. Okazuje się jednak, że przy założeniu monotonicznego wzrostu przemieszczeń, które w przypadku konstrukcji sztywno-plastycznych jest założeniem odpowiadającym rzeczywistości, dolne oszacowanie tych przemieszczeń można uzyskać bez wykorzystania dolnego oszacowania czasu trwania ruchu Martina [49]. Warunek $\dot{U}_i(t_f) = 0$ jest wówczas zastąpiony przez $\dot{U}_i^*(t^*) = 0$ gdzie t^* oznacza, że odpowiednie wielkości odnoszą się do procesu kinematycznie dopuszczalnego, w których t^* jest wielkością dowolną /większą lub mniejszą od t_f /. Pozbycie się konieczności oszacowania czasu t_f daje możliwość uogólnienia metody stosowanej w zagadnieniach liniowych na zagadnienia nieliniowe, w których oszacowanie czasu nie jest znane. Jest to przyczyna dla której w tym rozdziale dolne oszacowanie nie wykorzystujące oszacowania czasu prezentowane jest dla problemów geometrycznie liniowych. Podobne podejście do problemów geometrycznie nieliniowych zawarta jest w dalszych rozdziałach.

Wyrażenie szacujące przemieszczeń jest zależne od wyboru

kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości $\dot{U}_i^*(x,t)$ i od czasu Istotne jest więc pytanie jak należy wybrać pole prędkości $\dot{U}_i^*(x,t)$ i czas t^* by otrzymać najlepsze /tzn. największe / dolne oszacowanie . Pytanie te dotyczące jedynie $\dot{U}_i^*(x,t)$, w roku 1980 postawił sobie takie Symonds [85]

Analizując dotychczasowe wyniki w dziedzinie metod oceny ugięć można powiedzieć, że brak jest w literaturze studiów powyższego problemu w zakresie optymalizacji ze względu na wybór $\dot{U}_i^*(x,t)$ i istotnie na wybór czasu trwania ruchu t^* . Temu zagadnieniu maksymalizacji dolnego oszacowania trwałych ugięć dynamicznie obciążonych konstrukcji wykonanych z materiału sztywno-plastycznego poświęcena zostanie nasza uwaga w tym rozdziale . Punktem wyjścia zaproponowanej poniżej metody jest postulat stateczności Druckera i zasada mocy wirtualnych dla infinytymalnych odkształceń . Przyjmujemy dopuszczalne pole prędkości w postaci właściwej dla rozdzielenia zmiennych $\dot{U}_i^*(x,t) = V(t) \cdot U_i(x)$, tzn. do postaci modalnych . Taką postać pola prędkości sprowadzimy do wyrażenia na oszacowanie , które zawiera nieznaną końcowy czas trwania ruchu i czynniki odpowiednio zależne od funkcji $V(t)$ oraz $U_i(x)$. Końcowy czas ruchu jest określony poprzez warunek maksimum wyrażenia szacującego a następnie najlepsze oszacowanie otrzymujemy w rezultacie maksymalizacji współczynników występujących przy funkcjach $V(t)$ i $U_i(x)$. W pracy interesują nas głównie cienkie konstrukcje jedno i dwuwymiarowe tzn. belki, płyty i powłoki . Do tego typu konstrukcji zostanie zastosowana opracowana zasada maksymalizacji oszacowań ugięć w wyniku impulsowego obciążenia .

3.2. Ogólne sformułowanie problemu dolnego oszacowania
przemieszczeń dla ciała trójwymiarowego.

1/. Oznaczenia:

x - Współrzędna punktu na osi belki, na płaszczyźnie
środkowej płyty lub na powierzchni środkowej
powłoki.

V - Obszar ciała

S - brzeg ciała

F_i - Siła masowa

ρ - gęstość ciała

S_p - część powierzchni na której dane są siły
powierzchniowe

S_u - część powierzchni na której zdane są prędkości
 \dot{u}_i lub przemieszczenia u_i

t_f - rzeczywisty czas trwania ruchu konstrukcji

L - powierzchnia nieciągłości przyspieszeń i
odkształceń

$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}, \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^*$ - rzeczywiste i dopuszczalne odkształcenie

$\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}^*$ - rzeczywiste i dopuszczalne naprężenie

$u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ - przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie
rzeczywiste

$\dot{u}_i^*, \ddot{u}_i^*, \ddot{u}_i^{**}$ - prędkość, przyspieszenie i pochodna przyspiesze-
nia kinematycznie dopuszczalnego pola.

2/. Podstawowy układ równań.

Działanie dynamicznego obciążenia na konstrukcję sztywno-plastyczną wywołuje w jej obszarach linie załomów /dla dwuwymiarowych konstrukcji/ lub przeguby/ dla jednowymiarowych konstrukcji/. Analiza szczegółowych przypadków i rezultatów doświadczalnych prowadzi do wniosku, że te linie i przeguby są na ogół zmienne w czasie. Na liniach załomów i przegubach występują nieciągłości naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$, prędkości odkształcenia oraz prędkości przemieszczenia \dot{u}_i i przyspieszenia \ddot{u}_i dla przypadku ruchomych linii załomów i przegubów/. W tej pracy omówione powyżej nieciągłości będą uwzględnione w opisie układu podstawowych równań .

a/. Równania ruchu

$$\begin{aligned} /3.1/. \quad \sigma_{\alpha\beta, \beta} + F_i &= \rho \ddot{u}_i \quad \text{w obszarze } V - L \\ [\sigma_{\alpha\beta}] \mu_\beta &= \rho (\gamma_\mu - G) [\dot{u}_i] \quad \text{na powierzchni } L \end{aligned}$$

gdzie:

μ_β - składowe wektora normalnego do powierzchni

γ_μ - składowa normalna prędkości cząstek ciała

G - składowa normalna prędkości powierzchni
nieciągłości L

W większości przypadków mamy na powierzchni L $[\dot{u}_i] = 0$ wobec drugiego równania w (3.1) implikuje

$$[\sigma_{\alpha\beta}] \mu_\beta = 0 \quad \text{lub} \quad p^- = p^+$$

b/. Warunki brzegowe

$$\begin{aligned} |3.2| \quad \sigma_{\alpha\beta} n_\beta &= p_i \quad \text{na } S_p \\ \dot{u}_i &= \dot{u}_i^S \quad \text{lub } u_i = u_i^S \quad \text{na } S_u \end{aligned}$$

c/. Warunek początkowy

$$|3.3| \quad \dot{u}_i|_{t=0} = \dot{u}_{i0}, \quad u_i|_{t=0} = 0$$

d/. Warunek plastyczności

$$|3.4| \quad \Phi(\sigma_{\alpha\beta}) = 0$$

e/. Stowarzyszone prawo płynięcia

$$|3.5| \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}, \quad \lambda \geq 0$$

f/. Postulat stateczności w małym

$$|3.6| \quad (\sigma_{\alpha\beta}^* - \sigma_{\alpha\beta}) \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^* \geq 0$$

h/. Związki pomiędzy prędkościami przemieszczeń i odkształceń

$$\begin{aligned} |3.7| \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha}) \quad \text{w obszarze } V - \mathcal{L} \\ [\dot{u}_\alpha] + [\dot{u}_{\alpha,\beta}] \mu_\beta &= 0 \quad \text{na powierzchni } \mathcal{L} \end{aligned}$$

3/. Kinematycznie dopuszczalne pole prędkości.

Definicja: Zespół wielkości $\dot{u}_i, \ddot{u}_i, \dot{\epsilon}_{ij}^*$ nazywany odpowiednio kinematycznie dopuszczalnym polem prędkości, przyspieszeń i odkształceń, gdy \dot{u}_i jest ciągle, różniczkowalne w obszarze $V-L$ i gdy spełnione są:

a/. Związki geometryczne

$$13.8d \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad \text{w obszarze } V-L$$

$$[\ddot{u}_i] = [\dot{u}_{i,j}] M_j G = 0 \quad \text{na powierzchni } L$$

b/. Warunki brzegowe i końcowe

$$13.9d \quad \ddot{u}_i(x, t) = \ddot{u}_i^S \quad \text{na } S_u$$

$$\ddot{u}_i(x, t^*) = 0 \quad \text{w obszarze } V$$

4/. Wyrażenie na oszacowanie w liniowej dynamicznej plastyczności.

W zakresie małych przemieszczeń zasada mocy wirtualnych ma postać:

$$13.10d \quad \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dv = - \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dv + \int_{S_p} P_i \dot{u}_i^* ds$$

Dla prostoty siły masowe nie będą uwzględnione w analizie. Uwzględnienie stałych sił masowych nie przedstawia specjalnych trudności. Z uwagi na równania (3.8) $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ nie jest na ogół ciągle w V . Oznaczmy przez t^* końcowy czas ruchu należny do kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości \dot{u}_i^* , tzn. $\dot{u}_i^*(x, t^*) = 0$. Całkując wyrażenie (3.10) względem czasu w przedziale $(0, t^*)$ otrzymujemy:

$$13.11d \quad \int_0^{t^*} \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dv dt = - \int_0^{t^*} \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dv dt + \int_0^{t^*} \int_{S_p} P_i \dot{u}_i^* ds dt$$

Wykonując całkowanie przez części, dotyczące pierwszej z całek po prawej stronie (3.11), wykorzystując warunek $\dot{u}_i^*(x, t) = 0$ i zakładając $[u_i^*] = [\dot{u}_i^*] = 0$ mamy:

$$13.12/ \int_0^{t^*} \int_V \xi \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dt = \xi \dot{u}_i \dot{u}_i^* \Big|_0^{t^*} - \int_0^{t^*} \int_V \xi \dot{u}_i \ddot{u}_i^* dt = - \xi \dot{u}_i \dot{u}_i^* \Big|_0^{t^*} - \int_0^{t^*} \int_V \xi \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dt$$

Całkując raz jeszcze przez części ostatnią całkę z prawej strony (3.12) i wykorzystując warunek $u_{i_0} = 0$ ostatecznie otrzymujemy:

$$13.13/ \int_0^{t^*} \int_V \xi \ddot{u}_i \dot{u}_i^* dt = - \xi \dot{u}_i \dot{u}_i^* \Big|_0^{t^*} - \xi \dot{u}_i \ddot{u}_i^* \Big|_0^{t^*} + \int_0^{t^*} \int_V \xi \ddot{u}_i \ddot{u}_i^* dt$$

gdzie $u_{i_t} = u_i(x, t^*)$, $\ddot{u}_{i_t} = \ddot{u}_i(x, t^*)$

Z postulatu stateczności (3.6) wynika następująca nierówność

$$13.14/ \int_0^{t^*} \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\xi}_{ij}^* dv dt \geq \int_0^{t^*} \int_V \sigma_{ij} \dot{\xi}_{ij} dv dt$$

Wyrażenia (3.13), (3.14) pozwalają z równości (3.11) otrzymać

$$13.15/ - \int_V \xi \dot{u}_{i_t} \ddot{u}_{i_t}^* dv + \int_0^{t^*} \int_V \xi \ddot{u}_i \ddot{u}_i^* dv dt \geq \int_V \xi \dot{u}_i \dot{u}_i^* dv - \int_0^{t^*} \int_V D(\dot{\xi}_{ij}^*) dv dt + \int_0^{t^*} \int_V p_i \dot{u}_i^* dv dt$$

gdzie: $D(\dot{\xi}_{ij}^*) = \sigma_{ij}^* \dot{\xi}_{ij}^*$ oznacza funkcję dysypacji

Z uwagi na fakt, że po prawej stronie nierówności (3.15) występują jedynie wielkości znane (\dot{u}_{i_0} , p_i) lub założone (\dot{u}_i^*), natomiast jedyną nieznaną po lewej stronie wielkością jest przemieszczenie u_i , to możemy otrzymany związek interpretować jako oszacowanie tego przemieszczenia.

Oszacowanie to odnosi się do obszaru V i przedziału czasu $(0, t^*)$, w dalszej części zostanie też pokazane, że daje ono dolne ograniczenie rzeczywistych przemieszczeń \bar{u}_{max} występujących dla $x \in V$ $t \in (0, t^*)$. Jeśli jednak założyć, że w analizie sztywno-plastycznej impulsowo-obciążonych konstrukcji, przemieszczenia są monotonicznie rosnącą funkcją czasu, a maksymalna wartość przemieszczeń u_{max} jaką może pojawić się dla $x \in V$ i $t \in (0, t_f)$ jest nie mniejsza niż \bar{u}_{max} tzn:

$$\max_{t, x \in [0, t_f], V} u_i(x, t) \gg \max_{t, x \in [0, t^*], V} \bar{u}_i(x, t) \quad . \text{Założenie takie odzwierciedla}$$

dla rzeczywiste zachowanie się konstrukcji sztywno-plastycznych i znajduje potwierdzenie we wszystkich rozwiązanych problemach szczegółowych. Założenie to również będzie stosowane do analizy problemów nieliniowych w dalszych rozdziałach. Tak więc niezależnie tego czy $t^* \leq t_f$ czy też $t^* \gg t_f$ ^{-od} dolne oszacowanie wynikające z (3.15) daje ocenę maksymalnych przemieszczeń w całym rzeczywistym procesie deformacji konstrukcji.

Należy zauważyć, że przyjmując $\dot{u}_i^* = \dot{u}_i$ tzn: przyjmując za kinematycznie dopuszczalne pole prędkości pole rzeczywiste wyrażenie (3.15) staje się równością. Aby uzyskać oszacowanie jednej ze składowych przemieszczenia np: składowej K należy przyjmować kinematycznie dopuszczalne pole prędkości tak aby pozostałe składowe były równe zeru tzn:

$$\dot{u}_i^*(x, t) = \delta_i^K a(x, t) \quad K \text{ ustalone}$$

2/. Bezwymiarowa postać nierówności szacującej.

Wprowadźmy zmienne bezwymiarowe przyjmując t^* , L , M_0 , S , jako charakterystyczne wielkości czasu, długości, momentu zajmującego graniczone i masy jednostkowej.

$$\underline{r} = \frac{r}{L}, \underline{w} = \frac{w}{L}; \underline{t} = \frac{t}{t^*}; \underline{q} = \frac{L^2 q}{M_0}; m_i = \frac{M_i}{M_0}; \dot{\underline{T}} = \frac{\partial T}{\partial \underline{t}}$$

$$/3.20/ \quad \ddot{\underline{T}} = \frac{1}{L^2} \ddot{\underline{T}}; \underline{K}_i^* = \frac{\dot{\underline{T}}}{L^2} \underline{K}_i^*(r); \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \underline{r}}; \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \underline{r}^2}$$

Pokazano, że dla modalnych pól kinematycznie dopuszczalnych wektor prędkości odkształceń ma stały kierunek w procesie plastycznego płynięcia, stąd wynika, że stan naprężeń nie zależy od czasu. Możemy funkcję dyspacji przedstawić w postaci:

$$/3.21/ \quad D(\underline{K}^*) = M_i \underline{K}_i^* = \frac{M_0}{t^*} m_i^* \underline{K}_i^*(r) |\dot{\underline{T}}| = \frac{M_0}{L^2} |\dot{\underline{T}}| D(\underline{K}^*)$$

gdzie: $D(\underline{K}^*)$ - funkcja dyspacji w problemie statycznym

M_i - momenty zginające w belce lub płycie

\underline{K}_i - prędkości krzywizny

Dla belek $i=1$, natomiast dla płyty $i=1, 2$

Przy powyższych zmiennych możemy nierówność szacującą przepisać w postaci

$$/3.22/ \quad S \frac{L^{3+\alpha}}{t^{*\alpha}} \left[- \int_0^1 \underline{w} \ddot{\underline{T}}_i \underline{v} \underline{r}^\alpha \underline{dr} + \int_0^1 \int_0^1 \underline{w} \ddot{\underline{T}} \underline{v} \underline{r}^\alpha \underline{dr} \underline{dt} \right] \geq S \frac{L^{3+\alpha}}{t^{*\alpha}} \int_0^1 \underline{\dot{w}}_0 \dot{\underline{T}} \underline{v} \underline{r}^\alpha \underline{dr}$$

$$- L^2 M_0 \left[\int_0^1 \int_0^1 \dot{\underline{T}} |\dot{\underline{T}}| D(\underline{K}^*) \underline{r}^\alpha \underline{dr} \underline{dt} - \int_0^1 \int_0^1 \dot{\underline{T}} \underline{q} \underline{v} \underline{dr} \underline{dt} \right]$$

gdzie: $\ddot{\underline{T}}_i = \ddot{\underline{T}}(1)$, $\dot{\underline{T}}_0 = \dot{\underline{T}}(0)$

Rozpatrzmy konstrukcje obciążone idealnym impulsem prędkości w chwili początkowej $\underline{\dot{w}}(\underline{r}, 0) = \underline{\dot{w}}_0(\underline{r}) \geq 0$. Wybierzmy kinematycznie dopuszczalne pole prędkości $\underline{\dot{w}}^* = \dot{\underline{T}}(\underline{t}) \underline{v}(\underline{r})$ spełniające warunki:

$$/3.23/ \quad \underline{v}(\underline{r}) \geq 0 \quad \forall \underline{r} \in [0, 1], \underline{v}(1) = 0$$

$$\dot{\underline{T}}(1) = 0, \quad \dot{\underline{T}}(0) = 1, \quad \ddot{\underline{T}}(1) \leq 0.$$

Aby uzyskać oszacowanie największych ugięć dzielimy obszar (0,1) na podzbiory $(\underline{t}_k; \underline{t}_{k+1})$ w których \ddot{T} ma stały znak. Nasza uwaga poświęcona jest podzbiorom, w których $\ddot{T} > 0$.

Wykorzystujemy następnie twierdzenie o wartości średniej dla całki $\int_a^b f(x)g(x)dx$, dla której funkcja $f(x), g(x)$ są ciągłe. Jeśli ponadto funkcja $g(x)$ jest dodatnia w przedziale (a, b) , to zachodzi wtedy następująca nierówność:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \max_x f(x) \int_a^b g(x)dx$$

Uwzględniając założenia (3.23), z wyrażenia (3.22) wynika następujące oszacowanie dolne.

$$\underline{W}_{\max} \left[- \int_0^1 \ddot{T}_k \underline{v} \underline{r}^a \underline{d}r + \int_0^1 \underline{v} \underline{r}^a \underline{d}r \sum_k \int_{\underline{t}_k}^{\underline{t}_{k+1}} \ddot{T} \underline{d}t \right] \gg$$

$$t^* \int_0^1 \dot{W}_0 \underline{v} \underline{r}^a \underline{d}r - \frac{M_0}{gL^3} t^{*2} \int_0^1 D(K^*) \underline{r}^a \underline{d}r \int_0^1 \ddot{T} \underline{d}t$$

lub inaczej:

$$\underline{W}_{\max} \gg \frac{t^* \int_0^1 \dot{W}_0 \underline{v} \underline{r}^a \underline{d}r - \frac{M_0}{gL^3} t^{*2} \int_0^1 D(K^*) \underline{r}^a \underline{d}r \int_0^1 \ddot{T} \underline{d}t}{(-\ddot{T}_1 + \sum_k \ddot{T} \Big|_{\underline{t}_k}^{\underline{t}_{k+1}}) \int_0^1 \underline{v} \underline{r}^a \underline{d}r}$$

gdzie: $(\underline{t}_k^q, \underline{t}_{k+1}^q)$ - podzbiory w których $\ddot{T} > 0$

$$\underline{W}_{\max} = \max_{r, t} \underline{W} = \max_{r, t} \frac{\underline{W}}{L}$$

3.4. Dyskusja otrzymanych wyników

1/. Uwagi ogólne

a - W odróżnieniu od poprzednich wyników wzór (3.24) otrzymano nie posługując się warunkiem

$$\dot{W}(t_f) = 0$$

Określającym koniec rzeczywistego ruchu lecz warunkiem

$$\dot{W}^*(t^*) = 0$$

Ponieważ pole \dot{W}^* budujemy niezależnie od rzeczywistego ruchu zatem t^* może być dowolne. Wyrażenie (3.24) daje możliwość optymalizacji ze względu na wielkość t^* . Jest to istotny element zaproponowanej metody.

b/. Wyrażenie (3.24) pozwala badać wpływ kształtu funkcji \underline{V} i $\dot{\underline{T}}$ występujących w (3.18) na wielkość dolnego oszacowania ugięcia związanego z ustaniem ruchu.

2/. Optymalizacją ze względu na czas trwania ruchu t^*

Mamy wyrażenie $\underline{W}_{max} \gg B(t^*)$

gdzie: $B(t^*)$ określone jest przez wyrażenie stojące po prawej stronie nierówności (3.24). Wyrażenie $B(t^*)$ osiągnie maksimum dla następującej wartości t^*

$$/3.25/ \quad t^* = \frac{SL^3}{2M_0} \frac{\int_0^1 \dot{\underline{W}}_0 \underline{V} r^{\alpha} dr}{\int_0^1 \dot{\underline{T}} dt \int_0^1 D(\underline{k}^*) r^{\alpha} dr}$$

Ustawiając powyższe wyrażenie do wzoru (3.24) otrzymujemy następujące oszacowanie.

$$\underline{W}_{max} \gg \frac{1}{(-\dot{\underline{T}}_1 + \sum_k \dot{\underline{T}} \Big|_{t_k^1}^{t_{k+1}^1}) \int_0^1 \underline{V} r^{\alpha} dr} \times \frac{\left[\int_0^1 \dot{\underline{W}}_0 \underline{V} r^{\alpha} dr \right]^2}{\int_0^1 \dot{\underline{T}} dt \int_0^1 D(\underline{k}^*) r^{\alpha} dr} \times \frac{SL^3}{4M_0}$$

lub inaczej

$$/3.26/ \quad \underline{W}_{max} \gg \frac{1}{(-\dot{\underline{T}}_1 + \sum_k \dot{\underline{T}} \Big|_{t_k^1}^{t_{k+1}^1}) \int_0^1 \dot{\underline{T}} dt} \times \frac{\left[\int_0^1 \dot{\underline{W}}_0 \underline{V} r^{\alpha} dr \right]^2}{\int_0^1 \underline{V} r^{\alpha} dr \int_0^1 D(\underline{k}^*) r^{\alpha} dr} \times \frac{SL^3}{4M_0}$$

Należy nadmienić, że wyrażenie ograniczające maksymalne przemieszczenie (3.26) składa się z dwóch członów. Pierwszy zależny jest od funkcji $\dot{\underline{T}}$ a drugi od funkcji \underline{V} . Możemy zatem maksymalizować dolne oszacowanie ze względu na funkcje $\dot{\underline{T}}$, \underline{V} niezależnie.

3/. Optymalizacja ze względu na funkcję \dot{T}

a/. Sformułowanie problemu

Maksymalizując ze względu na funkcję \dot{T} dochodzimy do następującego problemu. Należy wybrać funkcję \dot{T} spełniającą warunek(3.23) tak, aby wyrażenie

$$13.27/ \quad A(\dot{T}) = \frac{1}{(-\ddot{T}_1 - \sum_K \ddot{T} \Big|_{t_k^q}^{t_{k+1}^q}) \int_0^1 \dot{T} dt}$$

osiągało maksimum lub wyrażenie

$$C(\dot{T}) = (-\ddot{T}_1 - \sum_K \ddot{T} \Big|_{t_k^q}^{t_{k+1}^q}) \int_0^1 \dot{T} dt$$

osiągało minimum. Oznaczamy

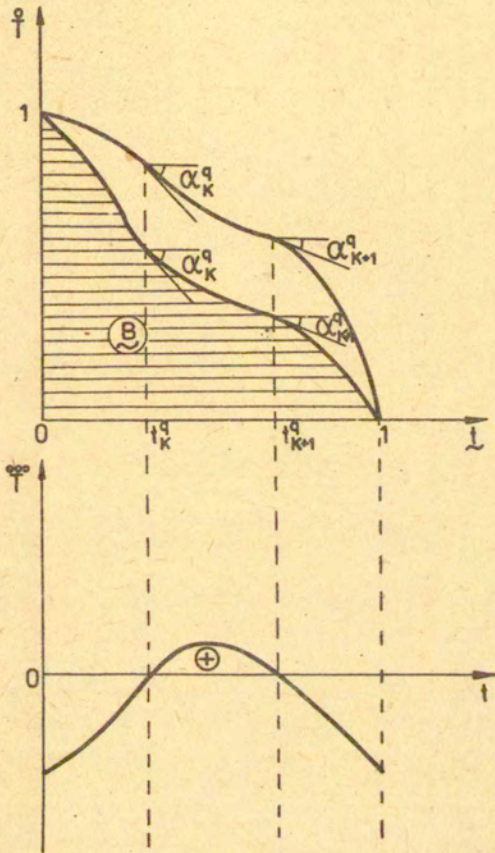
$$\underline{A} = (-\ddot{T}_1 + \sum_K \ddot{T} \Big|_{t_k^q}^{t_{k+1}^q})$$

$$\underline{B} = \int_0^1 \dot{T} dt$$

Na rysunku 1, \underline{B} jest opisane powierzchnią ograniczoną pomiędzy osiami a linią przedstawioną funkcją \dot{T} , natomiast

$$\underline{A} = \sum_K (tg^{\alpha_{k+1}^q} - tg^{\alpha_k^q})$$

Na rysunku 1 pokazano dwie linie, które mają same kąty α_{k+1}^q , α_k^q wtedy mamy samą wartość \underline{A} , natomiast dwie różne wartości \underline{B} , tzn. można zmienić \underline{B} nie zmieniając \underline{A} . Powyższy wynik pozwala traktować \underline{A} , \underline{B} tak jak niezależnie od siebie zmienne.



Rys. 1. Ilustracja niezależności od siebie wielkości $\underline{A}, \underline{B}$

Ostatecznie powyższe zagadnienie (3.27) wprowadzimy do ekstremalnego problemu z warunkami.

Znaleźć $\max_{\Omega} \underline{1}$ lub $\min_{\Omega} \underline{A}, \underline{B}$

Gdzie: Ω obszar należny do płaszczyzny $(\underline{A}, \underline{B})$, jeśli przyjmujemy $\underline{A}, \underline{B}$ niezależne zmienne lub do przestrzeni zmiennych parametrów, jeśli $\underline{A}, \underline{B}$ są przedstawione w formie funkcji zależnych od zmiennych parametrów a_j . Obszar Ω jest określony poprzez warunki wyboru funkcji $\overset{\circ}{T}$ (3.23). Konfiguracja obszaru Ω zależy od konkretnych form klasy funkcji $\overset{\circ}{T}$. Wybór klasy funkcji $\overset{\circ}{T}$ jest dowolny i nie zależy od warunków brzegowych i początkowych, natomiast tylko od warunków otrzymania dolnego oszacowania (3.26). Ogólny opis obszaru Ω dla wszystkich przypadków wyboru klasy funkcji $\overset{\circ}{T}$ nie wydaje możliwy.

Jako ilustrację wybierzmy klasę funkcji $\overset{\circ}{T}$ przedstawioną w formie wielomianu.

$$(3.27) \quad \overset{\circ}{T} = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + \ell$$

Zgodnie z wymaganiami otrzymania oszacowania (3.23) funkcja $\overset{\circ}{T}$ spełnia warunki

$$a) \overset{\circ}{T}(0) = 1, b) \overset{\circ}{T}(1) = 0, c) \overset{\circ\circ}{T}(1) \leq 0, d) \overset{\circ\circ\circ}{T}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

Z założeń a), b), wynika, że $\ell = 1, d = -1 - a - b - c$ i mamy.

$$\overset{\circ}{T} = at^4 + bt^3 + ct^2 - (1+a+b+c)t + 1$$

$$\overset{\circ\circ}{T} = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct - (1+a+b+c)$$

$$\overset{\circ\circ\circ}{T} = 2(6at^2 + 3bt + c)$$

$$T = \int \overset{\circ}{T} dt = \frac{at^5}{5} + \frac{bt^4}{4} + \frac{ct^3}{3} - (1+a+b+c)\frac{t^2}{2} + t + g$$

z założenia c), wynika, że

$$3a + 2b + c - 1 < 0$$

Natomiast z założenia

$$\overset{\circ\circ\circ}{T} = 2(6at^2 + 3bt + c) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

Wynikają następujące nierówności

$$c > 0, \quad 9b^2 - 24ac \leq 0$$

tzn: równanie $6at^2 + 3bt + c = 0$ nie ma żadnego pierwiastka lub dwa równe pierwiastki. Przy powyższym wyborze funkcji

$\overset{\circ}{T}$ otrzymujemy.

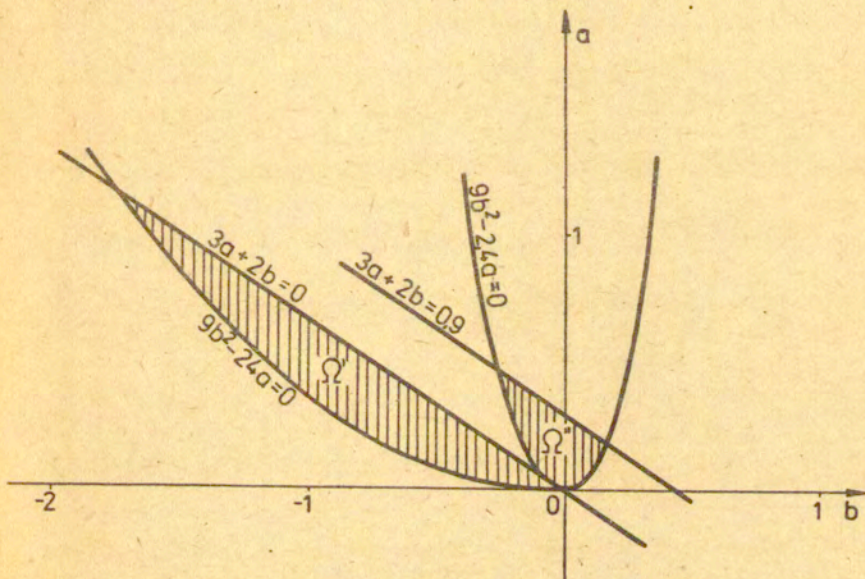
$$\underline{A} \cdot \underline{B} = -\ddot{T}(0)[T(1) - T(0)] = (1+a+b+c)\left(-\frac{3a}{10} - \frac{b}{4} - \frac{c}{6} + 1\right)$$

Ostatecznie dochodzimy do problemu ekstremalnego

$$/3.28/ \quad F_m = \min_{\Omega_1} (1+a+b+c)\left(-\frac{3}{10}a - \frac{b}{4} - \frac{c}{6} + 1\right)$$

$$\text{gdzie: } \Omega_1 = \begin{cases} c \geq 0 \\ 9b^2 - 24ac \leq 0 \\ 3a + 2b + c - \lambda < 0 \end{cases}$$

Opis obszaru Ω_1 pokazany jest na rysunku 2



Rys.2 opis obszaru Ω_1 dla różnych wartości parametru c

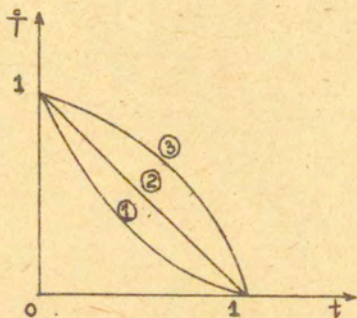
Ω_1' dla $c=1$, Ω_1'' dla $c=0,1$

Dla przypadku $\ddot{T} \leq 0$, $\underline{A} \cdot \underline{B} = -\ddot{T}(1)[T(1) - T(0)]$ w podobny sposób otrzymujemy następujący problem.

$$/3.29/ \quad F_m = \min_{\Omega_2} (1 - 3a - 2b - c) \left(-\frac{3a}{10} - \frac{b}{4} - \frac{c}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{gdzie } \Omega_2 = \begin{cases} c \leq 0 \\ 9b^2 - 24ac \leq 0 \\ 3a + 2b + c - 1 < 0 \end{cases}$$

Charakter funkcji dla przypadków $\overset{\circ}{T} > 0$ i $\overset{\circ}{T} \leq 0$ jest pokazany na rys.3



Rys.3 Opis charakterystyczny funkcji $\overset{\circ}{T}$ dla różnych wartości parametru $q = \text{sign } \overset{\circ}{T}$

- 1) $q = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$ dla problemu (3.28)
- 2) $q = 0 \quad \overset{\circ}{T} = (1-t)$ rozwiązanie Moralesa i Nevilla
- 3) $q = -1 \quad \forall t \in [0, 1]$ dla problemu (3.29)

b/. dyskusja otrzymanych wyników

- Punkt $(a = 0, b = 0, c = 0)$ należy do obszaru Ω i $\frac{A \cdot B}{2} = \frac{1}{2}$ mamy $\overset{\circ}{T} = (1-t)$. Wtedy z wyrażenia (3.25) wynika dolne oszacowanie czasu trwania ruchu podane przez Martina [49].

$$t^* = \frac{9L^2}{M_0} \frac{\int_0^1 \sqrt{W_0} r^\alpha dr}{\int_0^1 D(\underline{k}^*) r^\alpha dr}$$

Z nierówności (3.24) otrzymano dolne oszacowanie ugięć Moralesa i Nevilla [55].

$$W_{\max} > \frac{9L^2}{2M_0} \left[\int_0^1 \underline{W}_0 \sqrt{r^\alpha} dr \right]^2 / \int_0^1 \underline{V} r^\alpha \int_0^1 D(\underline{k}^*) r^\alpha dr$$

Wiadomo, że dolne oszacowanie Moralesa i Newilla nie podlegało optymalizacji. Na innej drodze wykorzystującej wynik oszacowania czasu Martina, otrzymali oni oszacowanie identyczne jak przedstawione oszacowanie optymalne wybierając funkcję $T = (1-t)$

- problemy (3.28), (3.29) posiadają rozwiązanie spełniając warunek $F_m = \min A \cdot B \leq 1/2$. Stąd wynika, że zaproponowana metoda daje możliwość otrzymania dolnego oszacowania ugięć lepszego niż dolne oszacowanie uzyskane przez Moralesa i Newilla.

- Rozpatrzmy szczególne przypadki:

Pierwszy przypadek

$C = 0$ z warunku $9b^2 - 24ac \leq 0$ wynika, że $b = 0$. Dochodzimy do następujących problemów.

$$q = 1 \quad F_m = \min_{\Omega_1} (1+a) \cdot (-3a/10 + 1/2)$$
$$\Omega_1 = \{0 \leq a \leq 1/3\}$$

$$q = -1 \quad F_m = \min_{\Omega_2} (1-3a) \cdot (1/2 - 3a/10)$$
$$\Omega_2 = \{a \leq 0\}$$

gdzie: $q = \text{Sign}(\overset{\circ}{T})$

Mamy rozwiązanie $F_m = 1/2$ w punkcie $a = 0$, $T = (1-t)$

Drugi przypadek

Podobnie $a = 0$, z warunku $9b^2 - 24ac \leq 0$ wynika, że $b = 0$ mamy problem

$$q = 1 \quad F_m = \min_{\Omega_1} (1+c) \cdot (1/2 - c/6)$$
$$\Omega_1 = \{0 \leq c \leq 1\}$$

$$q = -1 \quad F_m = \min_{\Omega_2} (1-c) \cdot (1/2 - c/6)$$
$$\Omega_2 = \{c \leq 0\}$$

Otrzymujemy rozwiązanie $F_m = \frac{1}{2}$ w punkcie $c = 0$ i $\dot{T} = (1-t)$
Z powyższych wyników wskazano, że wybór funkcji \dot{T} przedstawio-
nej w formach $\dot{T} = ct^4 + dt + E$, $\dot{T} = at^4 + dt + E$ nie daje
możliwości otrzymania oszacowania lepszego niż oszacowania Mora-
lesa i Newilla.

Wymaga się pokazać konkretnych klas funkcji T dających
możliwość otrzymania najlepszych oszacowań, co jest dalsze
studium.

4/. Optymalizacja ze względu na funkcję \underline{V}

Poszukując formy ugięcia dochodzimy do problemu

$$\text{Max } \frac{\left[\int_0^1 \dot{W}_0 \underline{V} r^\alpha dr \right]^2}{\underline{V}(r) \int_0^1 \underline{V} r^\alpha dr \int_0^1 D(\underline{K}^*) r dr}$$

Zbadany on zostanie dla przypadku stałej prędkości początkowej
 $\dot{W}|_{t=0} = \dot{W}_0 = \text{const}$, równomiernie rozłożonej na obszarze konstrukcji
W tym przypadku otrzymujemy następujące wymaganie.

Znaleźć:

/3.30/

$$\text{Max } \frac{\int_0^1 \underline{V} r^\alpha dr}{\underline{V}(r) \int_0^1 D(\underline{K}^*) r^\alpha dr}$$

Rozważamy hipotetyczną konstrukcję jednostkową o kształcie
takim jak rozpatrywaną i obciążoną rozłożonym równomiernym
ciężeniem q . Określmy nośność graniczną na drodze kinematycz-
nej przyjmując pole kinematyczne dopuszczalne $\underline{V}(r)$

$$\int_0^1 q_k \underline{V} r^\alpha dr = \int_0^1 D(\underline{K}^*) dr$$

Kinematyczny mnożnik obciążenia jest :

$$/3.31/ \quad q_k = \frac{\int_0^1 D(\underline{k}^*) \underline{r}^n dr}{\int_0^1 \underline{v} \underline{r}^n dr} \gg Q_G$$

który na podstawie twierdzenia o nośności granicznej równa się obciążeniu granicznemu Q_G gdy \underline{v} jest rozwiązaniem dokładnym problemu równowagi granicznej. Otrzymujemy:

$$/3.32/ \quad W_{max} \gg C \max_{\underline{v}(r)} \frac{\int_0^1 \underline{v} \underline{r}^n dr}{\int_0^1 D(\underline{k}^*) \underline{r}^n dr} = C \max q_k$$

gdzie - C współczynnik.

Zatem najlepsze oszacowanie dostaniemy gdy \underline{v} jest polem prędkości w dokładnym rozwiązaniu problemu nośności granicznej. Rozwiązanie nie jest na ogół jednoznaczne jednakże dla każdego z rozwiązań dopuszczalnych otrzymujemy również pewne oszacowanie.

Przykład :

Jako ilustrację teorii rozpatrzmy kołową płytę opartą swobodnie na brzegu i obciążoną rozłożonym równomiernym impulsem prędkości \dot{W}_0 . Otrzymujemy rozwiązanie dokładne problemu równowagi granicznej $\underline{v} = (1-r)$ i obciążenie graniczne $q_k = 6$ natomiast wybierając dopuszczalne pole $\underline{v} = (1-r^2)$ dostaniemy kinematyczny mnożnik obciążenia

$$q_k = \frac{\int_0^1 D(\underline{k}^*) \underline{r}^n dr}{\int_0^1 \underline{v} \underline{r}^n dr} = 8$$

Wybermy dopuszczalne pole prędkości $\dot{W} = (1-t)\underline{v}$. Z wyrażenia (3.32) wynikają odpowiednio następujące oszacowanie.

$$/3.33/ \quad W_{max} \gg \frac{9L^2}{12M_0} = \delta_1 \quad - \text{rozwiązanie optymalne}$$

$$W_{max} \gg \frac{9L^2}{16M_0} = \delta_2 \quad - \text{rozwiązanie nie optymalne}$$

Wiadomo, że $\delta_1 > \delta_2$. [55]

Należy zauważyć, że w pracy chociaż w przykładach Morales i Nevill wybrali rozwiązanie dokładne problemowi równowagi

granicznej, ile na ogół nie pokazali ogólnego sposobu wyboru funkcji formy, żeby dostać najlepsze oszacowanie.

3.5. Ocena dolnych oszacowań znanych w literaturze.

W obecnym rozdziale przedstawimy dla porównania wybory funkcji $\overset{\circ}{T}$ przez autorów i związek oszacowania Wierzbickiego [99] z oszacowaniem Moralesa i Nevilla [55] dla konstrukcji obciążonych idealnym impulsem. Dolne oszacowanie w dużej mierze zależy od wyboru funkcji $\overset{\circ}{T}$. W celu zwiększenia dokładności dolnego oszacowania sprowadzono do różnych wyborów funkcji $\overset{\circ}{T}$ przez autorów. Na przykład w [55] Morales i Nevill wybrali

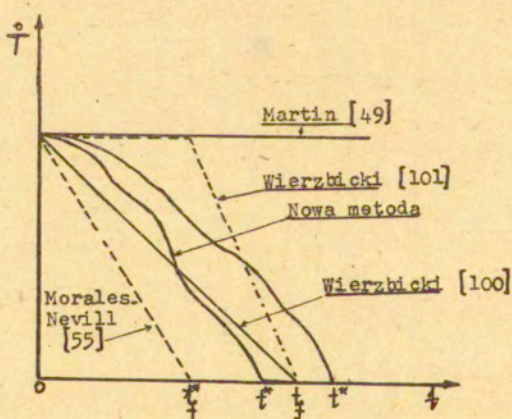
$$\overset{\circ}{T} = \begin{cases} (1 - t/t_f^*) & \text{dla } t \leq t_f^* \\ 0 & \text{dla } t > t_f^* \end{cases}$$

Gdzie: t_f^* dolne oszacowanie czasu Martina
Natomiast w [99] Wierzbicki wybrał

$$\overset{\circ}{T} = (1 - t/t_f)$$

Gdzie: t_f czas trwania rzeczywistego ruchu.

A metoda przedstawiona w tej pracy pozwala na wybór funkcji $\overset{\circ}{T}$ w ogólnej formie. Różnica w wyborze funkcji $\overset{\circ}{T}$ jest pokazana na rysunku 4.



Rys.4 Porównanie wyboru funkcji $\overset{\circ}{T}$ przez różnych autorów

W literaturze dotychczas istnieją dwa sposoby znajdowania dolnego oszacowania. Jeden z nich został przedstawiony w pracy [99].

Uzyskane dolne oszacowanie jest określone wzorem

$$/3.34/ \quad W_{\max} \geq \frac{1}{2} \frac{\int_V \varepsilon v \dot{w}_0^2 dv}{\int_V D(\varepsilon^*) dv} = \delta_1$$

a drugi można znaleźć w pracy [55]. Dolne oszacowanie jest podane wzorem

$$/3.35/ \quad W_{\max} \geq \frac{1}{2} \frac{\left[\int_V \varepsilon v \dot{w}_0 dv \right]^2}{\int_V D(\varepsilon^*) dv \int_V \varepsilon v dv}$$

W celu porównania rozpatrzmy stosunek

$$/3.36/ \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\int_V \varepsilon v \dot{w}_0^2 dv \int_V \varepsilon v dv}{\left(\int_V \varepsilon v \dot{w}_0 dv \right)^2}$$

Wykorzystamy nierówność Cauchjego

$$\left(\int_V f_1 f_2 dv \right)^2 \leq \int_V f_1^2 dv \int_V f_2^2 dv$$

i kładąc $f_1 = \sqrt{\varepsilon v \dot{w}_0}$, $f_2 = \sqrt{\varepsilon v}$ otrzymujemy oszacowanie

$$/3.37/ \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} \geq \frac{\left(\int_V \sqrt{\varepsilon v \dot{w}_0} \cdot \sqrt{\varepsilon v} dv \right)^2}{\left(\int_V \varepsilon v \dot{w}_0^2 dv \right)^2} = 1$$

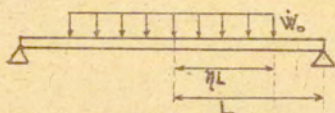
Wynika stąd, że na ogół oszacowanie Wierzbickiego jest lepsze, równość zachodzi gdy $f_1 = c f_2$ gdzie $c = \text{const}$, tzn. gdy

$$/3.38/ \quad \sqrt{\varepsilon v \dot{w}_0^2} = \dot{w}_0 \sqrt{\varepsilon v} = c \sqrt{\varepsilon v}$$

tzn. $\dot{W}_0 = \text{const}$. Stąd oszacowanie Wierzbickiego i Moralesa są równe w dotychczasowych przypadkach, gdyż dotyczyły obciążenia stałego na całej konstrukcji.

Przykład :

Rozpatrzmy belkę przegubowo-zamocowaną i obciążoną idealnym impulsem prędkości $\dot{W}_0 = \text{const}$ w obszarze $(-\eta L; \eta L)$ $\eta < 1$ patrz Rys.5



Rys.5

Wybermy $\underline{v} = (1 - \underline{x})$. Po obliczeniu otrzymujemy
 oszacowanie Wierzbickiego $W_{max} \geq 5\dot{W}_0^2 \eta (1 - \eta/2) L^2 / 2M_0 = \delta_1$
 oszacowanie Moralesa i Nevillea $W_{max} \geq 5\dot{W}_0^2 \eta^2 (1 - \eta/2)^2 L^2 / M_0 = \delta_2$
 Biorąc pod uwagę, że $2\eta(1 - \eta/2) \leq 1$ dostaniemy następujące oszacowanie $\delta_1 \geq \delta_2$

3.5. Płyty anizotropowe

Ten rozdział jest poświęcony zbadaniu możliwości zastosowania twierdzeń szacujących do płyt anizotropowych. Jako ilustrację dolne oszacowanie ugięć anizotropowej płyty obciążonej idealnym impulsem prędkości i przegubowo-opartej na brzegu będzie przedstawione. Będzie pokazany związek otrzymanego rezultatu z rozwiązaniem izotropowego problemu.

Wiadomo, że zbudowane w powyższych rozdziałach twierdzenia oszacujące są oparte na następujących podstawowych założeniach

- istnieje plastyczna energia potencjalna
- powierzchnia plastyczna jest wypukła
- należy wybrać odpowiednio kinematycznie dopuszczalne pole prędkości.

Wymagania a, b, należą do podstaw teorii plastyczności. W odróżnieniu od izotropowego ciała proces plastycznego płynięcia w anizotropowych ciałach jest bardzo złożony. Budowa dokładnej teorii dającej możliwości rozpatrzenia wszystkich realnych

właściwości anizotropowego ciała sprowadza do nierozwiązalnych matematycznych trudności przy zastosowaniu. Tendencje rozwojowe w ostatnich latach skupiają się na budowaniu prostych teorii dających możliwości rozwiązania praktycznych problemów.

Podstawowe badania w tym kierunku są poświęcone uogólnieniu warunków plastyczności Treski, Hubera - Misesa dla izotropowych ciał na przypadek anizotropowego ciała [73], [75], [76], [77]. Punktem wyjścia tych teorii są założenia, że istnieje plastyczna energia potencjalna przedstawiona w postaci $f_K = A_{kij} \epsilon_{ij}$ [61], [73], [75] lub $f = A_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$ [62], [76], [77]. Gdzie: A_{ij}, A_{ijkl} tensory anizotropii plastycznej.

Zbudowana powierzchnia plastyczności spełnia warunek wypukłości. Pokazano, że z tych powierzchni plastycznych otrzymamy znów warunki Treski [73] lub Hubera - Misesa [75] dla izotropowego ciała oraz w konkretnych zagadnieniach z otrzymanego rezultatu wynika rozwiązanie izotropowego problemu. To jest podstawowa zaleta teorii przedstawionej w pracy [73]. Powyżej omówione teorie spełniają wymagania twierdzeń szacujących. Zastosowania twierdzeń szacujących więc wydaje się możliwe dla klasy tych teorii. Nasza uwaga jest poświęcona kierunkowi teorii uogólnienia warunków plastyczności Treski, głównie teorii przedstawionej w pracy [73]. Zbudowana teoria jest oparta na następujących założeniach:

- a/. w każdym punkcie ciała anizotropia plastyczna ma trzy ortogonalne płaszczyzny symetrii. Główne kierunki tensora anizotropii plastycznej, tensora naprężeń i tensora prędkości odkształcenia pokrywają się oraz pozostają ustalone w procesie płynięcia plastycznego.
- b/. Rozpatrywane konstrukcje zbudowane są ze sztywno-plastycznego materiału nieściśliwego.
- c/. Materiał ma tę samą granicę plastyczności na jednoosiowe rozciąganie i ściskanie w każdym głównym kierunku osi anizotropii plastycznej. Granice plastyczności w głównych kierunkach oznaczane są przez $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$ i spełniają warunki:

$$/3.39/ \quad |\gamma_{11}| > \left| \frac{\gamma_{22} + \gamma_{33}}{\gamma_{22} + \gamma_{33}} \right| ; \quad |\gamma_{22}| > \left| \frac{\gamma_{11} \gamma_{33}}{\gamma_{11} + \gamma_{33}} \right| ; \quad |\gamma_{33}| > \left| \frac{\gamma_{11} \gamma_{22}}{\gamma_{11} + \gamma_{22}} \right|$$

d/. Warunek plastyczności, będący funkcją stanu naprężenia i modułów plastyczności przedstawiony jest w postaci układu równań liniowych typu $f = A_{ij} \sigma_{ij} = \text{const}$

Przy powyższych założeniach w przestrzeni głównych naprężeń powierzchnia plastyczna ustalona jest wzorami:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11} - \sigma_{33}) \gamma_{11}^{-1} - (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \gamma_{22}^{-1} = 1 \\ /3.40/ & - (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \gamma_{22}^{-1} + (\sigma_{33} - \sigma_{11}) \gamma_{33}^{-1} = 1 \\ & (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \gamma_{11}^{-1} - (\sigma_{33} - \sigma_{22}) \gamma_{33}^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Założenie (3.39) gwarantuje wypukłość powierzchni plastycznej (3.40) kiedy $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33}$ otrzymujemy znów warunek plastyczności Treski dla izotropowego materiału.

Teoria ta została stosowana do zagadnień z zakresu teorii nośności granicznej płyt, powłok [73] i do zagadnień płyt, powłok obciążonych dynamicznie [72].

Powyższa metoda budowania powierzchni plastyczności została rozwijana dla ortotropowego materiału mającego różne granice na jednoosiowe rozciąganie i ściskanie w każdym głównym kierunku osi ortotropii plastycznej [71].

Inny typ uogólnienia warunku plastyczności Treski można znaleźć w pracach [61], [75] oraz dla ortotropowego materiału mającego różne granice na rozciąganie i ściskanie [92].

Stosujemy powyżej omówioną teorię do dolnego oszacowania ugięcia kołowej płyty obciążonej dynamicznie. Zakładamy, że płyta wykonana jest z materiału początkowo izotropowego o module plastyczności γ oraz promienne i obwodowe kierunki są głównymi ortotropowymi z odpowiednimi modułami plastyczności $\gamma_{\theta} = \beta \gamma$, $\gamma_{\varphi} = \gamma$ ($\beta, \gamma > 1$). Transformacja powierzchni plastycznej trójwymiarowego ośrodka do przestrzeni uogólnionych naprężeń jest spełniona jak w pracy [25] dla izotropowej płyty na podstawie następujących założeń:

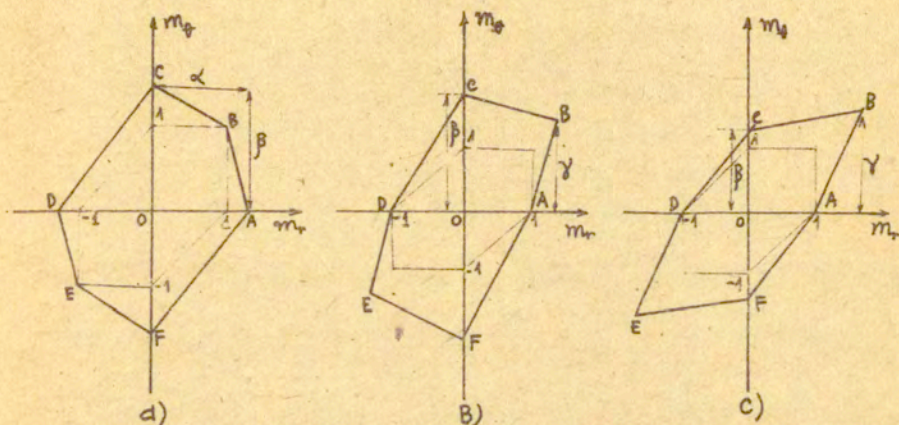
a/. Hipotezą Kirchhoffa o prostych normalnych do powierzchni środkowej

b/. Naprężenie normalne w kierunku grubości jest niewielkie w porównaniu z pozostałymi naprężeniami i może być pominięte.

c/. Odkształcenia styczne w kierunku poprzecznym do grubości mogą być pominięte.

d/. Wpływ bezwładności obrotowej nie będzie uwzględniony w analizie.

Otrzymujemy powierzchnię plastyczną przedstawioną na rysunku 6 i w tabelicy 1.



Rys. 6. Powierzchnia plastyczności dla ortotropowej płyty kołowej.

gdzie : parametry γ, β spełniają warunek $\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} < 1$

Tab.1	Profil	Rys. 6a	Rys. 6b	Rys. 6c
	AB	$\frac{\alpha-1}{\alpha} m_\theta + \frac{1}{\alpha} m_r = 1$	$\frac{\gamma-1}{\gamma} m_\theta - m_r = -1$	$\frac{\gamma-1}{\gamma} m_\theta - m_r = -1$
	BC	$\frac{1}{\beta} m_\theta + \frac{\beta-1}{\beta} m_r = 1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - \frac{\gamma-\beta}{\beta\gamma} m_r = 1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - \frac{\gamma-\beta}{\beta\gamma} m_r = 1$
	CD	$\frac{1}{\beta} m_\theta - \frac{1}{\alpha} m_r = 1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - m_r = 1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - m_r = 1$
	DE	$\frac{\alpha-1}{\alpha} m_\theta + \frac{1}{\alpha} m_r = -1$	$\frac{\gamma-1}{\gamma} m_\theta - m_r = 1$	$\frac{\gamma-1}{\gamma} m_\theta - m_r = 1$
	EF	$\frac{1}{\beta} m_\theta + \frac{\beta-1}{\beta} m_r = -1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - \frac{\gamma-\beta}{\beta\gamma} m_r = -1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - \frac{\gamma-\beta}{\beta\gamma} m_r = -1$
	FA	$\frac{1}{\beta} m_\theta + \frac{1}{\alpha} m_r = -1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - m_r = -1$	$\frac{1}{\beta} m_\theta - m_r = -1$

Jeśli wybrać kinematycznie dopuszczalne pole prędkości w postaci właściwej dla rozdzielania zmiennych $\dot{U}_i^*(x,t) = T(t)\dot{U}_i(x)$ to otrzymujemy wektor prędkości odkształcenia mający stały kierunek w procesie płynięcia plastycznego, więc stan naprężenia nie zależy od czasu. Możemy funkcję dyspacji przedstawić w postaci

$$D(\dot{K}^*) = |T(t)| D(\dot{K}^*)$$

W odróżnieniu od wyrażenia (3.21) funkcja dyspacji $D(\dot{K}^*)$ jest liczona poprzez prawo płynięcia i warunek plastyczności określony wzorami przedstawionymi w tabelicy nr.1 dla ortotropowej płyty. Optymalizujemy dolne oszacowanie podobnie jak w poprzednich rozdziałach, ostatecznie otrzymujemy dla przypadku stałej prędkości początkowej $\dot{W}_0 = \text{const}$ równomiernie rozłożonej na obszarze konstrukcji następujący wynik

$$/3.41/ \quad W_{\max} \geq C_{\max} \frac{\int_0^1 \underline{V} r^\alpha dr}{\int_0^1 D(\dot{K}^*) r^\alpha dr} = C_{\max} \frac{1}{q_k}$$

gdzie: q_k - kinematyczny mnożnik obciążenia dla ortotropowej płyty.

Najlepsze oszacowanie dostaniemy gdy \underline{V} jest rozwiązaniem dokładnym problemu równowagi granicznej płyty ortotropowej.

Rozpatrzmy kołową płytę opartą swobodnie na brzegu.

Rozwiązanie dokładne problemu równowagi granicznej dane w pracy [73] dla warunku plastyczności na rysunku 6a ma postać

$$\underline{V} = (1 - r^8)$$

Mamy profil naprężenia BC. Wybierzy dopuszczalne pole prędkości

$$/3.42/ \quad \dot{W}^* = (1-t)\underline{V}$$

Ostatecznie z (3.41) wynika następujące najlepsze oszacowanie

$$/3.43/ \quad W_{\max} \geq \frac{9R^2 \dot{w}_0^2}{4(2+\beta)M_0}$$

gdzie: $M_0 = h^2 \gamma / 4$; h - grubość płyty, R promień płyty
 Natomiast dla warunku plastyczności przedstawionego na rysunku
 6b rozwiązanie dokładne problemu równowagi granicznej przyjmuje
 postać,

$$\underline{v} = (1 - \underline{r}^{\beta/\gamma})$$

Wybór dopuszczalnego pola prędkości w postaci (3.41) daje
 najlepsze dolne oszacowanie.

/3.44/

$$W_{\max} \geq \frac{e R^2 \dot{w}_0^2}{4(\alpha + \beta) M_0}$$

Wykorzystując warunek plastyczności przedstawiony na rysunku
 6c dostaniemy znów wynik podobny do (3.43) w sposób zmiany
 parametrów.

Na podstawie warunków plastyczności przedstawionych na rysunku
 6 otrzymujemy różne wyrażenia na oszacowanie ugięć (3.42) i
 (3.43). Drugi z nich zawiera wpływ anizotropii w promiennym
 oraz obwodowym kierunku na najlepsze trwałe ugięcie. Kiedy $\beta = \gamma$
 $= 1$ powyższe wyniki sprowadzą do dolnego oszacowania ugięć
 płyty izotropowej (3.33).

Należy podkreślić, że powyżej omówione problemy dotyczyły
 teorii płyt zbudowanych z materiału anizotropowego, natomiast
 teorię płyt mających charakter anizotropii konstruktywnej można
 znaleźć w pracach [3], [59], [79]. Twierdzenia szacujące
 również mogą być stosowane do klasy tych konstrukcji.
 Z powyższej dyskusji pokazano możliwość zastosowania twierdzeń
 szacujących do anizotropowych konstrukcji obciążonych dynamicznie
 w zakresie dużych ugięć. Dalsze studia w tym kierunku będą
 przedstawione w szóstym dziale.

3.7 - Wnioski końcowe

Na przykładzie analizy geometrycznie liniowej w powyższym rozdziale przedstawiono metodę dolnego oszacowania przemieszczeń która może być przemieniona na problem geometrycznie nieliniowy Ponadto liniowość rozpatrywanych problemów pozwoliła przedyskutować inny problem : optymalizację otrzymanego oszacowania dolnego.

Na podstawie otrzymanych rezultatów teoretycznych można sformułować następujące wnioski :

-Jak wynika z dotychczasowych prac, dotyczących dolnych oszacowań przemieszczeń w impulsowo-obiężonych konstrukcjach sztywno-plastycznych, analogiczne oszacowanie w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych są możliwe, gdy wykorzystana się w tym celu metody nie wykorzystujące oszacowania czasu trwania ruchu. Prezentując taką metodę otwiera się tym samym drogę do ogólnień na przypadek dużych ugięć . Problem ten rozpatrywany będzie w dalszych rozdziałach pracy.

-Wyrażenia szacujące przedstawione w tym rozdziale uwzględniają szeroką klasę kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości , pozwala to na poszukiwanie optymalnych oszacowań. W szczególności wybierając $V = (1-t)$ otrzymuje się oszacowanie czasu Martina i dolne oszacowanie Moralesa i Nevilla .

-W dyskusji dotyczącej dotychczasowych osiągnięć w tej dziedzinie pokazano , że dolne oszacowanie Wierzbickiego jest na ogół lepsze niż oszacowanie Moralesa i Nevilla, i że dotychczas rozwiązane przykłady nie pokazały tego, gdyż przypadkowo dotyczyły problemów dla których oba te oszacowania są identyczne

-Otrzymano dolne oszacowanie przemieszczeń dla płyt ortotropowych .

4. METODA OSZACOWANIA DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ IMPULSOWO - OBciążONYCH KONSTRUKCJI PLASTYCZNYCH

4.1. Charakterystyka problemu

W poprzednim dziale przeprowadzona została dyskusja oraz podana została nowa metoda oszacowania trwałych przemieszczeń jak też omówiono sprawę dolnego oszacowania czasu ruchu konstrukcji w zakresie małych ugięć. Pokazano, że forma twierdzeń oszacujących znanych w literaturze jednak wyklucza możliwość bezpośrednich uogólnień na przypadek dużych ugięć. W tym rozdziale nasza uwaga poświęcona jest uogólnieniu nowej metody oszacowania przedstawionej w poprzednim rozdziale na przypadek dużych ugięć. Należy jednak pokazać oczekiwane trudności spotykane na drodze do tego uogólnienia. Przede wszystkim w ramach teorii dużych ugięć wielu podstawowych problemów związanych z wymaganiami twierdzeń szacujących należy dopiero rozwiązać, np. Drucker w [12] pokazał, że dla dużych odkształceń na ogół materiał nie jest stateczny. Nawet na temat samej definicji stateczności materiału sztywno-plastycznego w zakresie dużych odkształceń nie ma jeszcze jednolitego poglądu i spotyka się w literaturze wielu nieporozumień na ten temat. Dlatego uogólnienia twierdzeń szacujących na przypadek skończonych deformacji nie wydaje się w obecnej chwili możliwe. Pomimo istnienia wielu trudności, można jednak pokazać właściwą drogę rozwojową teorii, bowiem szereg ostatnich badań dotyczących teorii dużych odkształceń sztywno-plastycznych konstrukcji cienkich w opisie przestrzennym Lagrangeowskim [14], [16], [80] doprowadziły do sformułowania następujących ważnych wniosków:

- Można opisywać deformację konstrukcji cienkich w zakresie małych i umiarkowanie dużych przemieszczeń w ramach hipotezy Lowe-Kirchhoffa.
- Dla umiarkowania dużych przemieszczeń zarówno warunków plastyczności, prawo płynięcia jak i definicja uogólnionych naprężeń mogą być przyjęte w tej samej postaci, jak dla przemieszczeń małych. Oznacza to, że dla umiarkowania dużych ugięć można stosować szczególną postać postulatu stateczności Druckera dla inifinityzmalnych deformacji ciała sztywno-idealnie plastycznego.

Na podstawie powyższych wyników Martin i Ponter [53] oraz Wierzbicki [104] dali niezależnie dwie metody znajdowania górnych oszacowań trwałych przemieszczeń dla konstrukcji sztywno - plastycznych. Punktem wyjścia tych metod były postulaty stateczności i zasada mocy wirtualnych w ramach umiarkowania dużych ugięć.

W dowodzie Wierzbickiego korzystając z dowolności wyboru stanów w postulacie Druckera autor przyjmował jako stan pierwszy kompletne rozwiązanie podstawowego problemu dynamicznego, a na drugi stan rozwiązania problemu quasi-statycznego dla identycznego ciała obciążonego pewnymi siłami powierzchniowymi i potem zakładał stałość naprężeń i prędkości odkształceń w porównawczym problemie quasi-statycznym w całym procesie dynamicznym. Stany te są od siebie niezależne i mogą być tak dobrane, aby nieujemna była pewna całka w wyrażeniu zasady mocy wirtualnych. Górne oszacowanie zatem można otrzymać na podstawie znajomości rozwiązania statycznego problemu teorii nośności granicznej pod działaniem obciążenia skupionego w zakresie dużych przemieszczeń.

W dowodzie Martina i Pontera autorzy podali precyzyjną definicję deformacyjnej plastyczności [53], [54], która pozwala traktować plastyczny materiał zależny od drogi obciążenia w ramach koncepcji nieliniowych materiałów sprężystych, potem przedstawili pojęcie "Całkowita energia potencjalna" i nowy warunek stateczności dla konstrukcji wykonanych z materiału niesprężystego. Górne oszacowanie trwałych ugięć może wynikać z warunku minimum całkowitej energii potencjalnej i na podstawie znajomości rozwiązania statycznego problemu dla identycznego ciała pod działaniem obciążenia skupionego w ramach deformacyjnej teorii plastyczności.

Powyżej omówione metody szacujące zawierają jednak niektóre dodatkowe założenia i nieścisłości w dowodach. W roku 1977 Wierzbicki i Ploch [67] usuneli te nieścisłości na przykładzie belki zbudowanej z materiału sztywno-plastycznego. W roku 1979 Ploch [66] dał ogólny dowód dla trójwymiarowego ciała sztywno-plastycznego.

Obecnie wiadomo, że w celu uzyskania górnego oszacowania trwałych przemieszczeń w procesie dynamicznym wystarczy znajomość początkowej energii kinematycznej w danym problemie dynamicznym oraz kompletnego rozwiązania pomocniczego problemu statycznego i w szczególnych przypadkach otrzymujemy prosty wzór na oszacowanie oraz dobrą zgodność oszacowania ze znanymi rozwiązaniami ścisłymi i rezultatami doświadczalnymi. Jest to podstawowa zaleta tych metod górnego oszacowania. W kilku przypadkach należy podkreślić trudności w zastosowaniu wzoru na oszacowanie stosowane do tych metod. Wychodzą one z faktu, że w celu znalezienia górnego oszacowania wymagana jest znajomość rozwiązania statycznego problemu pod działaniem obciążenia skupionego w zakresie dużych przemieszczeń. Tylko konstrukcje cienkościennie dwu i jednowymiarowe mogą przenosić siły punktowe, natomiast dla ciała trójwymiarowego siła punktowa prowadzi do osobliwości. W niektórych przypadkach np: powłoki, brak jest w statycznej teorii rozwiązań dla obciążeń skupionych. Oszacowanie ugięć podać można jedynie dla punktów na zewnętrznej powierzchni ciała i trzeba znać a priori kierunki wektora ugięć w tych punktach. Krytyczną ocenę powyższych metod można znaleźć w pracach [84], [98], [103] .

4.2. Sformułowanie opracowanego zagadnienia

Wiemy, że chociaż słuszność twierdzeń górnego oszacowania potwierdzona została w wielu doświadczeniach i rozwiązaniach ścisłych, to jednak w przypadkach braku danych eksperymentalnych i rozwiązań ścisłych trudno jest określić ich dokładność. W związku z tym, wymaga się budować twierdzenia dające możliwość uzyskania dolnego oszacowania, a miarą dokładności metod szacujących jest wielkość przedziału określonego przez górną i dolną ocenę wartości trwałego przemieszczenia. Analizując dotychczasowe osiągnięcia w tej dziedzinie można stwierdzić, że otwarty jest w literaturze temat dolnego oszacowania trwałych ugięć konstrukcji obciążonych dynamicznie w zakresie skończonych przemieszczeń. Problematyka dolnych oszacowań stanowić będzie przedmiot naszego zainteresowania i zaproponowana zostanie pewna metoda dolnych oszacowań.

Niniejsze rozdziały mają na celu ustalenie twierdzeń dolnego oszacowania trwałych przemieszczeń dynamicznie obciążonych konstrukcji sztywno-plastycznych z materiału nieściśliwego i przy uwzględnieniu zmian geometrii w zakresie umiarkowania dużych ugięć. W pierwszym rzędzie w celu uzyskania możliwości rozpatrywania ogólnych przypadków stosujemy postulat stateczności Druckera i zasadę mocy wirtualnych w opisie Lagrangeowskim dla trójwymiarowego ciała. W dowodzie rozdzielony będzie tensor odkształcenia na część liniową i nieliniową, które traktujemy obecnie jako niezależne od siebie kinematyczne pola odkształceń. Skorzystając z dowolności wyboru stanów w postulacie Druckera przyjmujemy za pierwszy stan, ściśle rozwiązanie problemu, a za drugi stan jeden z powyższych dynamicznych pól. W wyrażeniu zasady mocy wirtualnych posługujemy się postulatem stateczności. Następnie podamy odpowiednie oszacowanie dla nieliniowej części. Stąd wyniknie dolne oszacowanie trwałych ugięć zależnie od wyboru kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości. W dalszych rozdziałach podamy dolne oszacowanie dotyczące cienkościennych konstrukcji a mianowicie powłok, płyt i belek.

Jako ilustrację teorii podane zostaną tytułem przykładów dolne oszacowania ugięć powłoki kulistej i cylindrycznej, płyt kołowych zarówno izotropowych jak i anizotropowych oraz belek obciążonych impulsem początkowej prędkości. Przeprowadzane zostaną porównania z górnym oszacowaniem, rozwiązaniem ścisłym i rezultatami doświadczalnymi.

4.3. Metoda dolnego oszacowania dla ciał trójwymiarowych

4.3.1. Założenia

Teoria dolnego oszacowania trwałych przemieszczeń oparte jest na następujących założeniach:

- 1/. Przemieszczenia są umiarkowanie duże, tzn. przemieszczenia są duże, ale odkształcenia są jeszcze małe w porównaniu do jedności.
- 2/. Rozpatrywane konstrukcje zbudowane są ze sztywno-plastycznego materiału nieściśliwego, który może być opisany przez wypukły warunek plastyczności.

3/. Równania ruchu i zasada mocy wirtualnych opisywane są w początkowej konfiguracji, w której warunek plastyczności jest identyczny jak w teorii małych przemieszczeń oraz, że obowiązuje stowarzyszone prawo płynięcia.

Założenie 1/. oznacza tutaj, że można pominąć zmiany objętości w opisie zasady mocy wirtualnych w początkowej konfiguracji, co pozwala otrzymać wyrażenie zasady mocy wirtualnych podobnie jak w opisie Eulerowskim zmieniając odpowiednio rolę tensorów. Daje to zgodność z nieściśliwością w zachowaniu się materiału. Założenie to jest stosowane w pracach [16], [27], [80], przy budowie układów podstawowych równań dla cienkościennych konstrukcji: belek, płyt i powłok w zakresie skończonych przemieszczeń.

Założenia 1, 2, 3, też zostały stosowane w pracach [53], [66], [104], przy budowaniu teorii górnych oszacowań.

4.3.2. Ogólne sformułowanie teorii dolnego oszacowania dla trójwymiarowych ciał w początkowej konfiguracji.

Rozpatrzmy ciało sztywno-plastyczne mające w początkowej konfiguracji objętość V_0 , regularną powierzchnię S_0 . Dla wygody opisu stosować będziemy następujące oznaczenia: X - oznacza ortogonalny układ współrzędnych w początkowej konfiguracji. Przez $u_i(x,t)$, $\dot{u}_i(x,t)$, $\ddot{u}_i(x,t)$ oznacza się odpowiednio pole wektorowe rzeczywistego przemieszczania, pole wektorowe prędkości i pole wektorowe przyspieszenia. Podobnie $\dot{u}_i^s(x,t)$, $\ddot{u}_i^s(x,t)$ są kinematycznie dopuszczalnymi polami prędkości i przyspieszeń. Całkowita powierzchnia S_0 składa się z części S_{0p} , na której podane są siły powierzchniowe $P_i(x,t)$ oraz z części S_{0s} gdzie zadane są prędkości \dot{u}_i^s lub przemieszczenia u_i^s , poza tym ρ jest masą na jednostkę objętości. Formułując układ podstawowych równań w opisie Lagrangeowskim, tzn. w odniesieniu do konfiguracji nieodkształconej posługiwać się będziemy konsekwentnie symetrycznym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa $T_{\alpha\beta}$ i tensorem odkształcenia Greena $E_{\alpha\beta}$. Dla prostoty siły masowe nie będą uwzględnione w niniejszej analizie.

4.3.3. Podstawowy układ równań

a/. Równania ruchu

Równania opisujące ruch ciała sztywno-plastycznego dla teorii skończonych deformacji w opisie Lagrangeowskim przyjmuje postać:

$$/4.1/ \quad [(\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}) T_{\alpha\beta}]_{,\gamma} = \rho \ddot{u}_{\alpha}$$

gdzie $()_{,\gamma} = \frac{\partial ()}{\partial x_{\gamma}}$, $\delta_{\alpha\beta}$ - delta Kroneckera

b/. Warunki brzegowe

$$/4.2/ \quad P_{\alpha} = [(\delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta}) T_{\gamma\beta}] N_{\gamma} \text{ na } S_{op}$$

$$u_i(x,t) = u_i^S \text{ lub } \dot{u}_i(x,t) = \dot{u}_i^S \text{ na } S_{ou}$$

gdzie: N_{γ} -składowe wektora normalnego do powierzchni S_{op}

c/. Warunek plastyczności

Dla umiarkowania dużych ugięć warunek plastyczności opisany przez symetryczny tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa może być przyjęty w tej samej postaci, jak dla przemieszczeń małych

$$/4.3/ \quad \phi(T_{\alpha\beta}) = 0$$

d/. Prawo płynięcia

Prawo płynięcia jest identyczne jak w teorii małych ugięć. W ogólnym przypadku można opisać w postaci

$$/4.4/ \quad \dot{E}_{\alpha\beta} = \lambda \langle \phi(T_{\alpha\beta}) \rangle \frac{\partial \phi}{\partial T_{\alpha\beta}}, \quad \lambda \geq 0$$

$$\text{gdzie: } \langle \phi(T_{\alpha\beta}) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{kiedy } \phi(T_{\alpha\beta}) = 0 \\ 0 & \text{kiedy } \phi(T_{\alpha\beta}) < 0 \end{cases}$$

e/. Związki geometryczne

Przy powyższych założeniach symetryczne pola tensorowe odkształcenia i prędkości są związane z wektorem przemieszczenia w postaci.

$$/4.5/ \quad E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta})$$

$$\dot{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha} + \dot{u}_{\gamma,\alpha} u_{\gamma,\beta} + u_{\gamma,\alpha} \dot{u}_{\gamma,\beta})$$

g/. Warunki początkowe

$$/4.6/ \quad u_i(x, 0) = \dot{u}_i = 0; \quad \ddot{u}_i(x, 0) = \ddot{u}_i. \quad \forall x \in V_0$$

h/. Zasada mocy wirtualnych

Wyberzemy kinematycznie dopuszczalne pole prędkości \dot{u}_i^* spełniające definicje w rozdziale 3.

Pomnożmy równania (4.1) przez \dot{u}_i^* , całkujemy po całej objętości V_0 i wykorzystujemy warunki brzegowe (4.2) oraz twierdzenie Gaussa. Po wykonaniu operacji otrzymamy.

$$/4.7/ \quad \int_{S_{op}} p_i \dot{u}_i^* ds - \int_{V_0} s \dot{u}_i \dot{u}_i^* dv = \int_{V_0} [(\delta_{ij} + u_{ij}) T_{j\alpha}] \dot{u}_{i,\alpha}^* dv$$

Powyższa tożsamość jest wyrażeniem zasady mocy wirtualnych w opisie Lagrangeowskim.

4.3.4. Uzasadnienie wyrażenia na dolne oszacowanie przemieszczeń
Całkę po prawej stronie (4.7) można przedstawić w postaci

$$/4.8/ \quad \int_{V_0} [(\delta_{ij} + u_{ij}) T_{j\alpha}] \dot{u}_{i,\alpha}^* dv = \int_{V_0} T_{ij} \dot{u}_{ij}^* dv + \int_{V_0} T_{ij} (u_{\alpha,i} \dot{u}_{\alpha,j}^*) dv$$

Biorąc pod uwagę symetrię tensora T_{ij} tożsamość (2.7) przyjmuje następującą postać.

$$/4.9/ \quad \int_{S_{op}} p_{\kappa} \dot{u}_{\kappa}^* ds - \int_{V_0} s \dot{u}_{\kappa} \dot{u}_{\kappa}^* dv = \int_{V_0} T_{ij} \text{Sym}(\dot{u}_{i,j}^*) dv + \int_{V_0} T_{\alpha\beta} \text{Sym}(u_{i,\alpha} \dot{u}_{i,\beta}^*) dv$$

$$\text{gdzie:} \quad \text{Sym}(\dot{u}_{i,j}^*) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*) = \dot{E}_{ij}^*$$

$$\text{Sym}(u_{i,\alpha} \dot{u}_{i,\beta}^*) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,\beta}^* u_{i,\alpha} + u_{i,\alpha} \dot{u}_{i,\beta}^*) = \dot{E}_{ij}^{**}$$

Równość (4.9) wyraża zasadę zachowania energii, lewa strona (4.9) wyraża energię kinetyczną doprowadzoną do ciała. Pierwsza całka po prawej stronie jest wewnętrzną dyspacją bez uwzględnienia zmiany geometrii ciała, natomiast druga całka wyraża wewnętrzną dyspację spowodowaną tylko przez zmiany konfiguracji geometrycznej ciała. W przypadku małych przemieszczeń całka ta jest równa zeru.

Tensory $\dot{\xi}_{ij}^*$, $\dot{\xi}_{ij}^{**}$, traktujemy obecnie jako zupełnie niezależne od siebie kinematycznie dopuszczalne pola prędkości odkształceń, które są zbudowane z dwóch dopuszczalnych pól u_i , \dot{u}_i^* spełniających wszystkie brzegowe warunki problemu.

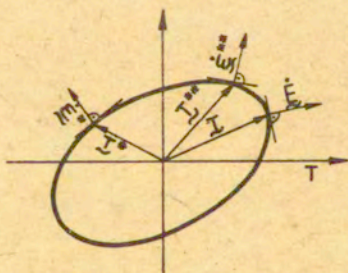
Niech teraz $T_{\alpha\beta}^*$, $T_{\alpha\beta}^{**}$ będą stowarzyszone z $\dot{\xi}_{\alpha\beta}^*$, $\dot{\xi}_{\alpha\beta}^{**}$, tzn. niech istnieją takie dodatnie funkcje λ^* , λ^{**} , żeby :

$$\dot{\xi}_{\alpha\beta}^* = \lambda^* \frac{\partial \phi(T_{\alpha\beta}^*)}{\partial T_{\alpha\beta}^*}, \quad \dot{\xi}_{\alpha\beta}^{**} = \lambda^{**} \frac{\partial \phi(T_{\alpha\beta}^{**})}{\partial T_{\alpha\beta}^{**}}$$

Wykorzystując postulat stateczności Druckera otrzymujemy następujące nierówności:

$$/4.10/ \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^* \dot{\xi}_{\alpha\beta}^* dv \leq \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^* \dot{\xi}_{\alpha\beta}^* dv; \quad \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\xi}_{\alpha\beta}^{**} dv \leq \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\xi}_{\alpha\beta}^{**} dv$$

a interpretacja geometryczna pokazana jest na rysunku 7



Rys. 7 Geometryczna interpretacja zachowania się tensorów $\dot{\xi}_{\alpha\beta}^*$, $\dot{\xi}_{\alpha\beta}^{**}$. Połączenie (4.10) z (4.9) daje oszacowanie

$$/4.11/ \quad \int_{S_{op}} p_k \dot{u}_k^* ds - \int_{V_0} \rho \ddot{u}_k \dot{u}_k^* dv \leq \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^* \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^* dv + \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**} dv$$

Rozpatrzmy całkę

$$/4.12/ \quad \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**} dv$$

W pracy [42] pokazano, że jeżeli warunek plastyczności zawiera początek współrzędnych $T_{\alpha\beta} = 0$, to istnieją dwie stałe χ, ϵ takie, że zachodzą następujące nierówności.

$$/4.13/ \quad \epsilon \|\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\| \leq T_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \leq \chi \|\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\|$$

Stałe te określają wzory:

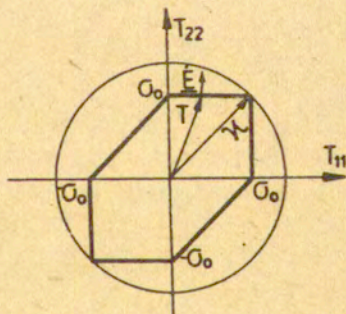
$$/4.14/ \quad \epsilon = \inf \frac{T_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}}{\|\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\|}, \quad \chi = \sup \frac{T_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}}{\|\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\|}$$

Gdzie oznaczono:

$$\|\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\| = (\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta})^{1/2}$$

Wartość stałych ϵ, χ zależy od warunków plastyczności. Przykładowo dla warunku plastyczności Treski i płaskiego stanu naprężeń stała χ jest równa /patrz Rys. 8 /

$$\chi = \sigma_0 \sqrt{2}$$



Rys. 8 . Interpretacja określenia parametra χ

Na podstawie postaci (4.14) możemy wyrażenie podcałkowe w (4.13) oszacować w postaci:

$$/4.15/ \quad T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**} \leq \chi \|\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**}\| = \chi \|\text{Sym}(u_{i,\alpha} \dot{u}_{i,\beta}^*)\|$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek, kiedy tensor $\epsilon_{\alpha\beta}^{**}$ ma zaledwie jedną nierówną zero składową: ϵ_{11}^{**} , wtedy możemy wyrażenie podcałkowe w (4.15) oszacować wzorem

$$/4.16/ \quad T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**} = T_{11}^{**} \dot{\epsilon}_{11}^{**} \leq \max |T_{11}^{**}| \|\dot{\epsilon}_{11}^{**}\| = \chi^* \|\text{Sym}(u_{i,1} \dot{u}_{i,1}^*)\|$$

$$/4.17/ \quad \chi^* = \max |T_{11}^{**}|$$

Wartość parametru χ^* zależy od warunków plastyczności. Przykładowo w płaskim stanie dla warunku Treski $\chi^* = \sigma_0$, natomiast warunku plastyczności Hubera-Misesa $\chi^* = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$

Na podstawie (4.15), (4.16) z całki (4.12) wynika następujące oszacowanie:

$$/4.18/ \quad \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**} dv \leq \chi \int_{V_0} \|\text{Sym}(u_{i,\alpha} \dot{u}_{i,\beta}^*)\| dv$$

gdzie χ jest określone wzorem (4.14) lub (4.17)

Wykorzystując (4.11) i (4.18) otrzymujemy następujące oszacowanie.

$$/4.19/ \quad \int_{S_{op}} p_k \dot{u}_k^* ds - \int_{V_0} s \ddot{u}_k \dot{u}_k^* dv \leq \chi \int_{V_0} \|\text{Sym}(u_{i,\alpha} \dot{u}_{i,\beta}^*)\| dv + \int_{V_0} T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**} dv$$

Oznaczamy przez t^* czas, w którym jednocześnie $\dot{u}_i^*(t^*) = 0$ we wszystkich punktach ciała tzn: czas trwania ruchu dopuszczalnego, który należy określić. Całkowanie (4.19) po czasie od zera do t^* daje

$$/4.20/ \quad \int_0^{t^*} \int_{S_{op}} p_k \dot{u}_k^* ds dt - \int_0^{t^*} \int_{V_0} s \ddot{u}_k \dot{u}_k^* dv dt \leq \int_0^{t^*} \int_{V_0} [T_{\alpha\beta}^{**} \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^{**} + \chi \|\text{Sym}(u_{i,\alpha} \dot{u}_{i,\beta}^*)\|] dv dt$$

Z drugiej całki zmieniając porządek całkowania, wykorzystując całkowanie przez części i warunki początkowe (4.6), po wykonaniu operacji dostaniemy:

$$/4.21/ \int_0^{t^*} \dot{u}_k \ddot{u}_k dt = -\dot{u}_{k0} \ddot{u}_{k0} - \dot{u}_k(t^*) \ddot{u}_k(t^*) + \int_0^{t^*} \dot{u}_k \ddot{u}_k dt$$

Wstawiając równanie (4.21) do (4.20) będzie oszacowanie

$$/4.22/ \int_0^{t^*} \int_{S_{op}} p_k \dot{u}_k^* ds dt + \int_{V_0} \dot{u}_{k0} \ddot{u}_k^* dv - \int_0^{t^*} \int_{V_0} D(\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^*) dv dt \leq - \int_{V_0} \dot{u}_k(t^*) \ddot{u}_k(t^*) dv + \int_0^{t^*} \int_{V_0} \dot{u}_k \ddot{u}_k^* dv dt + \chi \int_0^{t^*} \| \text{Sym}(u_{k,\alpha} \dot{u}_{k,\beta}^*) \| dv dt$$

gdzie: $\dot{u}_{k0} = \dot{u}_k(x, 0)$; $\ddot{u}_{k0} = \ddot{u}_k(x, 0)$

$D(\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^*) = T_{\alpha\beta}^* \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^*$ funkcja dyspacji w przypadku małych ugięć. Po wyborze pewnego kinematycznego pola prędkości \dot{u}_k^* , lewa strona (4.22) zawiera znane wielkości, natomiast prawa strona zawiera jedyną nieznaną wielkość u_k . Dzięki temu z (4.22) można uzyskać dolne oszacowanie, które zależy od wyboru kinematycznego pola prędkości \dot{u}_k^* .

Praktyczna wartość wyrażenia (4.22) ponadto zależy od rozwiązania następujących podstawowych problemów.

1/. Wybór kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości

W celu znalezienia dolnych oszacowań na trwałe ugięcia musimy podać dodatkowe założenia dotyczące wyboru dopuszczalnego pola prędkości \dot{u}_k^* , na przykład by uzyskać oszacowanie składowej K przemieszczenia należy przyjmować kinematycznie dopuszczalne pole tak aby pozostałe składowe były równe zero tzn:

$$\dot{u}_i^*(x, t) = \delta_i^K a(x, t) \quad K \text{ ustalone}$$

$$\ddot{u}_k^*(x, t) \leq 0; \quad \ddot{u}_k^*(x, t) \gg 0$$

Można także przyjąć jak w pracy [55]

$$a(x, t) = \frac{t^* - t}{t^*} V(x)$$

Wtedy $\ddot{a}(x,t) = 0$ i druga całka w prawej stronie nierówności (4.22) znika. Ponieważ dopuszczalne pole budujemy niezależnie od rzeczywistego ruchu, zatem t^* może być dowolne. Wyrażenie szacujące daje więc możliwość optymalizacji ze względu na wielkość t^*

2/. Oszacowanie trzeciej całki w prawej stronie nierówności (4.22)

Należy oszacować tę całkę, aby móc przedstawić ją w postaci

$$\chi \int_0^{t^*} \int_{V_0} \|\text{sym}(U_{k,\alpha} \dot{u}_{k,\beta}^*)\| dv dt \leq C U_{kmax}; k \text{ ustalona.}$$

gdzie: C jest stałą, którą należy określić a jej wartość zależy od wyboru kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości \dot{u}_i^*

W celu otrzymania dolnego oszacowania z wyrażenia (4.22) wymaga się przyjęcia dodatkowych założeń dotyczących pola rzeczywistych przemieszczeń oraz kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości \dot{u}_i^* . W ogólnym przypadku dla trójwymiarowych ciał występują trudności z określeniem stałej C . W następnych punktach pracy omówione będą określenia stałej C w konkretnych przypadkach cienkościennych konstrukcji.

Po rozwiązaniu powyższych problemów ze związku (4.22) wynika następujące oszacowanie

$$U_{kmax} \left(- \int_{V_0} \dot{u}_k^*(t^*) dv + \int_0^{t^*} \int_{V_0} \dot{u}_k^* dv dt + C \right) \geq \int_{S_{op}} p_k \dot{u}_k^* ds dt + \int_{V_0} \dot{u}_{k_0} \dot{u}_{k_0}^* dv - \int_0^{t^*} \int_{V_0} D(\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^*) dv dt \quad (\text{nie sumować } p_0 k)$$

lub

$$W_{kmax} \geq \frac{\int_{S_{op}} p_k \dot{u}_k^* ds dt + \int_{V_0} \dot{u}_{k_0} \dot{u}_{k_0}^* dv - \int_0^{t^*} \int_{V_0} D(\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^*) dv dt}{- \int_{V_0} \dot{u}_k^*(t^*) dv + \int_0^{t^*} \int_{V_0} \dot{u}_k^* dv dt + C} = \delta(t^*)$$

/4.23/

Dobieramy t^* w taki sposób aby wyrażenie na oszacowanie po prawej stronie (4.23) osiągało maksimum więc mamy układ równań, określający wielkość t^*

$$\begin{aligned} & 1) \frac{\partial \delta(t^*)}{\partial t^*} = 0 \\ /4.24/ & \\ & 2) \frac{\partial^2 \delta(t^*)}{\partial t^{*2}} \leq 0 \end{aligned}$$

Wyrażenie (4.23) stanowi istotny element przedstawionej i uzasadnionej metody.

5. ZASTOSOWANIE METODY OKRESLENIA DOLNYCH OSZACOWAŃ UMIARKOWANIE DUŻYCH TRWAŁYCH PRZEMIESZCZEŃ CIENKICH KONSTRUKCJI

5.1. Założenia teorii dolnego oszacowania dla cienkich konstrukcji

Techniczna teoria cienkich konstrukcji opiera się na transformacji równań ośrodka trójwymiarowego do dwuwymiarowej przestrzeni opisującej konstrukcję powierzchniową i wymaga przyjęcia szeregu dodatkowych założeń. Dla cienkich konstrukcji, w których stosunek grubości do promienia krzywizny jest mały w porównaniu do jedności $2h/R \ll 1$, tensory uogólnionych naprężeń $M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}, Q_\alpha$ są symetryczne ($\alpha, \beta = 1, 2$) liczba niewiadomych sił wewnętrznych, które w procesie dynamicznym są funkcjami czasu wynosi 6. Tensor prędkości odkształceń powierzchni środkowej określony jest przez 6 składowych.

W zakresie problemów geometrycznie nieliniowej plastyczności podstawowe badania prowadzone w opisie Lagrangeowskim dotyczyły:

- a/. Ustalenia związków geometrycznych,
- b/. Sposobu uzyskania równania równowagi
- c/. Opisu powierzchni plastyczności w fizycznej przestrzeni uogólnionych naprężeń

W analizie przyjmowane były następujące założenia:

- a/. Hipoteza- Kirchhoffa o prostych normalnych do powierzchni środkowej,
- c/. Pomijalność wpływu składowych tensora naprężeń o kierunku normalnym do powierzchni środkowej na uplastycznienie.

Badania dotyczące powyższych problemów można znaleźć w pracach [16], [17], [80], [81], [95]. Przedstawiamy dotychczas podstawowe wyniki w rozpatrywanej dziedzinie. W wyniku systematycznych badań głównie: Duszek, Sawczuka i Jonesa ustalona została klasyfikacja różnych uproszczeń w związkach kinematycznych [16], [17], [80], [27], podany został również sposób uzyskiwania równań równowagi zgodnych z przyjętym stopniem aproksymacji dla związków geometrycznych. Wykazano też konieczność uwzględnienia geometrycznie nieliniowych wyrazów w równaniach równowagi lub ruchu i związkach geometrycznych [14], [15], [28], [34], [80], [81], [82]. Ważnym wnioskiem z tych prac jest twierdzenie, że dla umiarkowanie dużych ugięć, prawo płynięcia i definicja uogólnionych naprężeń mogą być przyjęte w tej samej postaci jak dla przemieszczeń małych. Uzupełnień wymagają natychmiast równania dynamicznej równowagi i związku geometryczne. Powyższe wyniki pozwalają na wykorzystanie wypukłości powierzchni plastyczności i normalności wektora prędkości uogólnionych odkształceń w fizycznej przestrzeni uogólnionych naprężeń oraz wyników w zakresie małych przemieszczeń przy formułowaniu metod odnoszących się do umiarkowania dużych przemieszczeń.

Opis powierzchni plastyczności w fizycznej przestrzeni uogólnionych naprężeń na podstawie warunków plastyczności Treski i Hubera-Misesa dla izotropowych ciał przedstawiony został w pracach [13], [22], [23], [24], [63], [64]. Natomiast opis powierzchni plastyczności dla anizotropowych ciał, głównie płyt i powłok można znaleźć w pracach [58], [61], [71], [73], [77]. W pracy [78] Sawczuk dał pogląd krytyczny o tej dziedzinie.

Postulat stateczności w dowolnym punkcie powierzchni środkowej konstrukcji został podany w ogólnej postaci [103]

$$(M_{\alpha\beta}^* - M_{\alpha\beta})\dot{K}_{\alpha\beta}^* + (N_{\alpha\beta}^* - N_{\alpha\beta})\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^* \geq 0$$

Na podstawie powyższych osiągnięć w niniejszych punktach przedstawiona będzie teoria dolnych oszacowań dla konkretnych konstrukcji zbudowanych z materiału izotropowego.

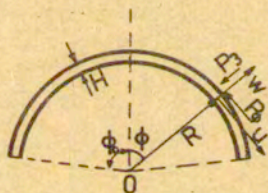
5.2. Dolne oszacowanie na trwałe przemieszczanie powłok kulistych.

5.2.1. Wstęp

Powłoki kuliste były tematem szeregu prac zarówno w zakresie statycznych problemów teorii nośności granicznej jak i zagadnień dynamicznych. Wyniki związane z określeniem obciążenia granicznego przedstawione zostały w pracach [13], [22], [64], natomiast uwzględnienie zmian geometrii w kulistej powłoce o małej wyniosłości poświęcona jest praca Duszek [15]. Uzyskane dotychczasowe rezultaty podane w zakresie dynamicznej plastyczności odnosiły się do małych przemieszczeń [70], [95], dla dużych ugięć natomiast omawiane były w [95]. Poniżej w celu uzyskania dolnego oszacowania trwałych ugięć z uwzględnieniem zmiany geometrii konstrukcji stosujemy układ podstawowych równań przedstawiony w pracy [95].

Rozpatrzmy powłokę kulistą o grubości H , promieniu R i gęstości ξ . Założmy, że w chwili początkowej powłoka jest poddana działaniu powierzchniowego obciążenia osiowo symetrycznego (P_ϕ, P_3) .

Układ współrzędnych jest przedstawiony na rysunku 9



Rys. 9 Interpretacja układu współrzędnych powłoki

5.2.2. Układ podstawowych równań

1/. Związki geometryczne wyrażone w prędkościach

$$\dot{\xi}_\theta = \frac{1}{R}(\dot{u} \operatorname{ctg} \phi + \dot{w}); \dot{\xi}_\phi = \frac{1}{R}(\dot{u}' + \dot{w}' + \frac{\dot{w}'\dot{w}'}{R})$$

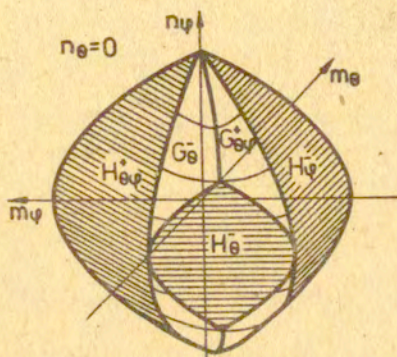
$$\ddot{\xi}_\theta = \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \phi (\ddot{u} - \ddot{w}'); \ddot{\xi}_\phi = \frac{1}{R^2} (\ddot{u} - \ddot{w}''), \text{ gdzie } ()' = \frac{\partial ()}{\partial \phi}$$

2/. Powierzchnia plastyczności i prawo płynięcia.

Ogólna powierzchnia warunku plastyczności Treski dla powłoki izotropowej była przedstawiona przez Onata i Pragera [64] w zależności od parametrów

/5.2/
$$p = -\dot{\epsilon}_\phi / \dot{\kappa}_\phi ; r = -\dot{\epsilon}_\theta / \dot{\kappa}_\theta ; q = \frac{1}{4} (\dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\phi) / (\dot{\kappa}_\theta + \dot{\kappa}_\phi)$$

i jest pokazana w tabelicy 2 oraz na rysunku 10



Rys. 10 Powierzchnia plastyczności Treski dla powłok

gdzie: $m_\phi = \frac{M_\phi}{M_o}$; $m_\theta = \frac{M_\theta}{M_o}$; $n_\phi = \frac{N_\phi}{N_o}$; $n_\theta = \frac{N_\theta}{N_o}$, $M_o = \frac{\sigma_o H^2}{4}$, $N_o = \sigma_o H$

/5.3/ σ_o -granica plastyczności materiału na jednoosiowe rozciąganie i ściskanie

Tablica 2

	Powierzchnie	Warunek plastyczności	Prędkości odkształcen'
$q = r$	H_θ^\pm	$m_\theta = \pm(1 - n_\theta^2)$	$\dot{\epsilon}_\theta : \dot{\kappa}_\theta = \pm 2n_\theta \dot{\epsilon}_\phi = \dot{\kappa}_\phi = 0$
$p = q$	H_ϕ^\pm	$m_\phi = \pm(1 - n_\phi^2)$	$\dot{\epsilon}_\phi : \dot{\kappa}_\phi = \pm 2n_\phi \dot{\epsilon}_\theta = \dot{\kappa}_\theta = 0$
$p = r$	$H_{\phi\theta}^\pm$	$m_\theta - m_\phi = \pm(1 - (n_\theta - n_\phi)^2)$	$\dot{\epsilon}_\theta : \dot{\kappa}_\theta = \pm 2(n_\theta - n_\phi) \dot{\epsilon}_\phi = -\dot{\epsilon}_\theta$ $\dot{\kappa}_\phi = -\dot{\kappa}_\theta$

Wektor prędkości odkształceń jest określony w postaci

$$\bar{q} = (\dot{\epsilon}_\phi, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{K}_\phi, \dot{K}_\theta) = \mu [-4p(q-r); -4p(q-r); q-r; p-q].$$

oraz możemy stosować także warunki przedstawione w przybliżonej postaci [13] [22]

Dla regularnych części powierzchni plastyczności prędkość odkształcenia spełniają stowarzyszone prawo płynięcia

$$15.4/ \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial N_\theta}; \quad \dot{\epsilon}_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial N_\phi}; \quad \dot{K}_\theta = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial M_\theta}; \quad \dot{K}_\phi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial M_\phi}$$

3/. Równania ruchu

$$R \sin \phi (P_\phi - S \ddot{u}) - N_\theta \cos \phi + (N_\phi \sin \phi)' + \frac{1}{R} (M_\phi \sin \phi)' - \frac{1}{R} M_\theta \cos \phi = 0$$

15.5/

$$R \sin \phi (P_\phi - S \ddot{w}) - N_\phi \sin \phi - N_\theta \sin \phi + \frac{1}{R} (N_\phi \sin \phi w)' + \\ + \frac{1}{R} (M_\phi \sin \phi)'' - \frac{1}{R} (M_\theta \cos \phi)' = 0$$

$$Q_\phi = \frac{t g \phi}{R} (M_\theta - M_\phi) - \frac{1}{R} M_\phi'$$

Związki (5.5) różnią się od stosowanych m.in. w pracy [70] dla teorii małych ugięć czwartym członem w drugim równaniu równowagi.

4/. Warunki brzegowe i początkowe

$$u(\phi_0, t) = w(\phi_0, t) = \dot{u}(\phi_0, t) = \dot{w}(\phi_0, t) = 0$$

15.6/

$$u(\phi, 0) = w(\phi, 0) = 0; \quad \dot{u}(\phi, 0) = \dot{u}_0; \quad \dot{w}(\phi, 0) = \dot{w}_0$$

$$\dot{w}^*(\phi_0, t) = \dot{u}^*(\phi_0, t) = 0; \quad \dot{w}^*(\phi, t^*) = \dot{u}^*(\phi, t^*) = 0$$

Powyższe warunki brzegowe są uogólnione dla powłok przegubowo i sztywno-zamocowanych.

5/. Wyrażenie na oszacowanie

Zakładamy, że (\dot{u}^*, \dot{w}^*) jest wektorem prędkości wirtualnych przemieszczenia. Oznaczamy przez t^* czas, w którym jednocześnie $\dot{u}(\phi, t^*) = \dot{w}(\phi, t^*) = 0 \quad \forall \phi \in [-\phi_0, \phi_0]$. Pomnożmy pierwsze równanie (5.5) przez \dot{u}^* , a drugie przez \dot{w}^* . Całkowanie po całej powierzchni środkowej daje wyrażenie zasady mocy wirtualnych w postaci

$$\begin{aligned} /5.7/ \quad & \int_0^{\phi_0} R \sin \phi (P_\phi \dot{u}^* + P_3 \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \rho R \sin \phi (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} (N_\theta \cos \phi \dot{u}^* + \\ & + \frac{M_\theta}{R} \cos \phi \dot{u}^* + N_\phi \sin \phi \dot{w}^* + N_\theta \sin \phi \dot{w}^*) d\phi + \int_0^{\phi_0} (N_\phi \sin \phi + \frac{M_\phi}{R} \sin \phi) \dot{u}^* d\phi + \\ & + \frac{1}{R} \int_0^{\phi_0} (N_\phi \rho \sin \phi \dot{w}^* - M_\theta \cos \phi) \dot{w}^* d\phi + \int_0^{\phi_0} \frac{1}{R} (M_\phi \rho \sin \phi) \dot{w}^* d\phi = 0 \end{aligned}$$

Całkujemy trzy ostatnie czony równania (5.7) przez części i wykorzystując warunki brzegowe (5.6) i po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów powyższy związek przyjmuje postać

$$\begin{aligned} /5.8/ \quad & \int_0^{\phi_0} \rho \sin \phi (P_\phi \dot{u}^* + P_3 \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \rho \sin \phi (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \sin \phi \left[\frac{N_\theta}{R} x \right. \\ & \left. + (\text{ctg} \phi \dot{u}^* + \dot{w}^*) + \frac{N_\theta}{R} (\dot{u}^* + \dot{w}^*) + \frac{M_\theta}{R^2} \text{ctg} \phi (\dot{u}^* - \dot{w}^*) + M_\phi \frac{\dot{u}^*}{R^2} \right] d\phi - \\ & - \left(-\frac{M_\theta \dot{w}^*}{R} \right)_{\phi=0} - \int_0^{\phi_0} \frac{N_\phi}{R^2} \sin \phi \dot{w}^* d\phi - \int_0^{\phi_0} \frac{M_\phi \sin \phi}{R^2} \dot{w}^* d\phi = 0 \end{aligned}$$

Założenia stosowane w obliczeniu są przedstawione w dodatku.

W ogólnym przypadku możemy wybrać dopuszczalne pole prędkości (\dot{u}^*, \dot{w}^*) tak, aby składowa \dot{w}^* miała skok na okręgach ϕ_k tzn: $[\dot{w}^*]_{\phi_k} \neq 0, k=1, 2, \dots, N$. Dzielimy obszar $(0, \phi_0)$ na podzbiory (ϕ_k, ϕ_{k+1}) w których \dot{w}^* jest ciągłe. Całkowanie członu czwartego w (5.8) przez części daje

$$\begin{aligned} /5.9/ \quad & \int_0^{\phi_0} \frac{M_\phi \sin \phi}{R^2} \dot{w}^* d\phi = - \sum_k \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} M_\phi \sin \phi \frac{\dot{w}^*}{R^2} d\phi + (M_\phi \sin \phi \frac{\dot{w}^*}{R^2})_{\phi=\phi_0} + \\ & - \sum_k M_\phi(\phi_k) \sin \phi_k \left[\frac{\dot{w}^*}{R^2} \right]_{\phi_k} \end{aligned}$$

Wstawiając (5.9) do (5.8) i po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 /5.10/ \quad & \int_{\phi_0}^{\phi_0} \sin\phi (P_\phi \dot{u}^* + P_3 \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \sin\phi (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) d\phi - \left[\sum_k^N \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} \left[\frac{N_\theta}{R} (\text{ctg} \phi \dot{u}^* + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \dot{w}^*) + \frac{M_\phi (\dot{u}^* - \dot{w}^*)}{R^2} + \frac{N_\phi (\dot{u}^* + \dot{w}^*)}{R} + \frac{M_\theta \text{ctg} \phi (\dot{u}^* - \dot{w}^*)}{R^2} \right] \sin\phi d\phi + \right. \\
 & \left. + (-M_\theta \frac{\dot{w}^*}{R})_{\phi_0} + (M_\phi \sin\phi \frac{\dot{w}^*}{R^2})_{\phi=\phi_0} + \sum_k^N M_\phi(\phi_k) \sin\phi_k \left[-\frac{\dot{w}^*}{R^2} \right]_{\phi_k} \right] - \\
 & - \int_0^{\phi_0} N_\phi \frac{W' \dot{w}^*}{R^2} \sin\phi d\phi = 0
 \end{aligned}$$

Z warunku $\dot{w}(\phi_0, t) = 0$ czwarty człon w (5.10) znika.

Na podstawie wyniku (5.10) wyciągnąć można następujące wnioski
 a/. Biorąc pod uwagę związki geometryczne (5.1) wyrażenie podcałkowe członu trzeciego, czwarty i piąty człon wyrażają wewnętrzną dyspację spowodowaną tylko przez liniową część tensora całkowitego odkształcenia. To jest właściwie wewnętrzna dyspacja w przypadku małych przemieszczeń, kiedy wybierzemy kinematycznie dopuszczalne pole prędkości (\dot{u}^*, \dot{w}^*) tak, aby składowa \dot{w}^* miała przestrzenną pochodną \dot{w}^* nieciągłą na okręgach ϕ_k

Dla prostoty oznaczamy go przez wyrażenie

$$N_\theta \dot{\epsilon}_\theta^* + N_\phi \dot{\epsilon}_\phi^* + M_\theta \dot{K}_\theta^* + M_\phi \dot{K}_\phi^*$$

gdzie: dla $\phi \in [\phi_k, \phi_{k+1}]$.

$$\dot{\epsilon}_\phi^* = \frac{1}{R} (\dot{u}^* + \dot{w}^*); \quad \dot{\epsilon}_\theta^* = \frac{1}{R} (\dot{u}^* \text{ctg} \phi + \dot{w}^*)$$

$$\dot{K}_\phi^* = \frac{1}{R^2} (\dot{u}^* - \dot{w}^*); \quad \dot{K}_\theta^* = \frac{1}{R^2} \text{ctg} \phi (\dot{u}^* - \dot{w}^*)$$

$$\text{dla } \phi = \phi_k, \quad \dot{\epsilon}_\phi^* = 0, \quad \dot{\epsilon}_\theta^* = 0; \quad \dot{K}_\theta^* = 0, \quad \dot{K}_\phi^* = \left[\frac{\dot{w}^*}{R^2} \right]_{\phi_k}, k=1, \dots, n.$$

b/. Wpływ zmiany geometrycznej konfiguracji powłoki jest określony przez ostatnią całkę.

c/. Nieliniowa część tensora odkształcenia ma zaledwie jedną nierówną zeru składową $W' \dot{w}^*$, dlatego możemy stosować

oszacowanie (4.16) w czwartym dziale.

d/. W powyższej nieliniowej analizie przez ostatnią całkę rozpatrzmy efekt siły membranowej N_ϕ na proces uplastycznienia

Możemy związek (5.10) napisać w postaci

$$\begin{aligned} /5.11/ \quad & \int_0^{\phi_0} \sin\phi (P_\phi \dot{U}^* + P_3 \dot{W}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \xi \sin\phi (\ddot{U} \dot{U}^* + \ddot{W} \dot{W}^*) d\phi - \\ & - \int_0^{\phi_0} (N_\theta \dot{E}_\theta^* + N_\phi \dot{E}_\phi^* + M_\theta \dot{K}_\theta^* + M_\phi \dot{K}_\phi^*) \sin\phi d\phi - \int_0^{\phi_0} N_\phi \frac{W \dot{W}'}{R^2} \sin\phi d\phi = 0 \end{aligned}$$

Wykorzystując postulat stateczności dla stanów $(\dot{E}_\theta^*, \dot{E}_\phi^*, \dot{K}_\theta^*, \dot{K}_\phi^*)$ $(0, \dot{W}, \dot{W}', 0, 0)$ i $(N_\theta, N_\phi, M_\theta, M_\phi)$ oraz całkując (5.11) po czasie w przedziale $(0, t^*)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} /5.12/ \quad & \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin\phi (P_\phi \dot{U}^* + P_3 \dot{W}^*) d\phi dt - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \xi \sin\phi (\ddot{U} \dot{U}^* + \ddot{W} \dot{W}^*) d\phi dt - \\ & - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} D(\dot{E}^*) \sin\phi d\phi dt - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \frac{N_\phi}{R^2} W' \dot{W}' \sin\phi d\phi dt \leq 0 \end{aligned}$$

gdzie: $D(\dot{E}^*) = N_\theta^* \dot{E}_\theta^* + N_\phi^* \dot{E}_\phi^* + M_\theta^* \dot{K}_\theta^* + M_\phi^* \dot{K}_\phi^*$

Siły wewnętrzne $(N_\theta^*, N_\phi^*, M_\theta^*, M_\phi^*)$; $(N_\theta^{**}, N_\phi^{**}, M_\theta^{**}, M_\phi^{**})$ są związane odpowiednio z prędkościami odkształceń $(\dot{E}_\theta^*, \dot{E}_\phi^*, \dot{K}_\theta^*, \dot{K}_\phi^*)$; $(0, \dot{W}, \dot{W}', 0, 0)$ przez prawo płynięcia.

Z drugiej całki zmieniając porządek całkowania, wykorzystując całkowanie przez części warunki początkowe i końcowe $\dot{W}(\phi, t^*) = \dot{U}(\phi, t^*) = 0$ dostaniemy

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin\phi (P_\phi \dot{U}^* + P_3 \dot{W}^*) d\phi dt + \int_0^{\phi_0} \xi \sin\phi (\dot{U}_0 \dot{U}_0^* + \dot{W}_0 \dot{W}_0^*) d\phi + \\ & + \int_0^{\phi_0} \xi \sin\phi [U(t^*) \dot{U}^*(t^*) + W(t^*) \dot{W}^*(t^*)] d\phi - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \xi \sin\phi (U \ddot{U} + W \ddot{W}) d\phi dt - \\ & - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin\phi D(\dot{E}^*) d\phi dt - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \frac{N_\phi}{R^2} W' \dot{W}' \sin\phi d\phi dt \leq 0. \end{aligned}$$

lub

$$/5.13/ \quad - \int_0^{\phi_0} \xi \sin \phi [u(t^*) \ddot{u}^*(t^*) + w(t^*) \ddot{w}^*(t^*)] d\phi + \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \xi \sin \phi (u \ddot{u}^* + w \ddot{w}^*) d\phi dt + \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} N_{\phi}^{**} \frac{w' \dot{w}^{*'}}{R^2} \sin \phi d\phi dt \gg \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin \phi (P_{\phi} \ddot{u}^* + P_3 \ddot{w}^*) d\phi dt + \int_0^{\phi_0} \sin \phi (\dot{u}_0 \ddot{u}_0^* + \dot{w}_0 \ddot{w}_0^*) d\phi - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin \phi D(\dot{\epsilon}^*) d\phi dt$$

Rozpatrzmy trzecią całkę w (5.13)

$$/5.14/ \quad \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} N_{\phi}^{**} \frac{w' \dot{w}^{*'}}{R^2} \sin \phi d\phi dt$$

Możemy wyrażenie podcałkowe w (5.14) oszacować

$$/5.15/ \quad N_{\phi}^{**} \frac{w' \dot{w}^{*'}}{R^2} \sin \phi \leq \text{Max} |N_{\phi}^{**}| \left| \frac{w' \dot{w}^{*'}}{R^2} \right| \sin \phi$$

Na podstawie powierzchni plastyczności pokazanej w tablicy 2 oraz na rys. 10 dostaniemy $\text{Max} |N_{\phi}^{**}| = N_0$.

Z wyrażenia (5.15) wynika następujące oszacowanie

$$/5.16/ \quad \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} N_{\phi}^{**} \frac{w' \dot{w}^{*'}}{R^2} \sin \phi d\phi dt \leq \frac{N_0}{R^2} \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} |w' \dot{w}^{*'}| \sin \phi d\phi dt$$

Wstawiając (5.16) do wyrażenia (5.13) otrzymujemy oszacowanie

$$/5.17/ \quad - \int_0^{\phi_0} \xi \sin \phi [u(t^*) \ddot{u}^*(t^*) + w(t^*) \ddot{w}^*(t^*)] d\phi + \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \xi \sin \phi (u \ddot{u}^* + w \ddot{w}^*) d\phi dt + \frac{N_0}{R^2} \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} |w' \dot{w}^{*'}| \sin \phi d\phi dt \gg \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin \phi (P_{\phi} \ddot{u}^* + P_3 \ddot{w}^*) d\phi dt + \int_0^{\phi_0} \sin \phi (\dot{u}_0 \ddot{u}_0^* + \dot{w}_0 \ddot{w}_0^*) d\phi - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin \phi D(\dot{\epsilon}^*) d\phi dt.$$

Wyrażenie (5.17) stanowi istotny element dający możliwość otrzymania dolnego oszacowania na trwałe ugięcie powłoki.

W celu uzyskania dolnego oszacowania składowej należy przyjąć kinematycznie dopuszczalne pole prędkości $\dot{W}^* = 0, \dot{W}^{*'} \neq 0$ i założyć, że W' ma stały znak np: $W'(\phi, t) \leq 0 \forall \phi, t \in (0, \phi_0), (0, t^*)$ przy tym musimy wybrać \dot{W}^* tak, aby $\ddot{W}^*(t^*) \leq 0, \ddot{W}^*(\phi, t) \geq 0, \dot{W}^{*'}(\phi, t) \leq 0, \dot{W}^{*'}(\phi, t) \leq 0 \forall \phi \in (0, \phi_0)$, tzn: \dot{W}^* ma ciągle pochodne czasowe i przestrzenne pochodne nieciągłe w indywidualnych punktach ϕ_k . Ten przypadek istnieje np. kiedy wybierzemy modalne dopuszczalne pole prędkości.

Przy powyższych założeniach mamy $W' \dot{W}^{*'} \geq 0$. Wykorzystując warunki brzegowe (5.6) całkowanie trzeciego członu w (5.17) przez części daje:

$$\begin{aligned} /5.18/ \quad \frac{N_0}{R^2} \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin \phi |W' \dot{W}^{*'}| d\phi dt &= \frac{N_0}{R^2} \int_0^{t^*} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} \sin \phi W' \dot{W}^{*'} \right] dt = \\ &= - \int_0^{t^*} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \sin \phi_k W|_{\phi_k} [\dot{W}^{*'}]_{\phi_k} + \sum_{k=0}^N \int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}} W (\cos \phi \dot{W}^{*'} + \sin \phi \ddot{W}^{*'}) d\phi \right] dt \end{aligned}$$

Zakładamy, że $\phi_0 \leq \frac{\pi}{2}$, $W_{\max} = \max_{\phi, t} W(\phi, t)$ Biorąc pod uwagę $\dot{W}^{*'} \leq 0, \dot{W}^{*''} \leq 0$, z wyrażenia (5.18) wynika następujące oszacowanie

$$/5.19/ \quad \frac{N_0}{R^2} \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin \phi |W' \dot{W}^{*'}| d\phi dt \leq -W_{\max} \frac{N_0}{R^2} \int_0^{t^*} \sin \phi_0 \dot{W}^{*'} |_{\phi_0} dt$$

Na podstawie związków (5.17), (5.19) oraz założeń wyboru \dot{W}^* otrzymujemy następujące oszacowanie dolne składowej w

$$\begin{aligned} /5.20/ \quad W_{\max} &\geq \left[\int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \rho_3 \dot{W}^* \sin \phi d\phi dt + \int_0^{\phi_0} \xi \dot{W}_0 \dot{W}_0^* \sin \phi d\phi - \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} D(\dot{\epsilon}^*) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \phi d\phi dt \right] / \left[- \int_0^{\phi_0} \xi \ddot{W}^*(t^*) \sin \phi d\phi + \int_0^{t^*} \int_0^{\phi_0} \xi \ddot{W}^* \sin \phi d\phi dt + C \right] \\ \text{gdzie: } C &= - \frac{N_0}{R^2} \int_0^{t^*} \sin \phi_0 \dot{W}^{*'} |_{\phi_0} dt. \end{aligned}$$

Na podstawie otrzymanego wyniku (5.20) wyciągnąć można następujące wnioski:

a/. W rozważanej klasie problemów dynamicznych pole prędkości przemieszczenia zmienia się i jest ogólnie funkcją cząstki i czasu t . Przy założeniu nieliniowych związków geometrycznych składowe tensora prędkości odkształcania wyrażają się przez odpowiednie pochodne wektora prędkości przemieszczenia (\dot{u}, \dot{w}) i ich iloczyn (5.1). Efekt nieliniowej części tensora prędkości odkształcania sprowadza do obliczenia wpływu siły membranowej N_ϕ na dolne oszacowanie trwałych przemieszczeń, który jest określony poprzez stałą C w (5.20).

b/. Prawa strona (5.20) jest funkcją parametrów $P_3, \phi_0, \dot{w}_0, t^*$. Parametr t^* jest określony z warunku maksimum (4.24), a więc przy wyborze pewnego dopuszczalnego pola prędkości spełniającego powyżej omówione warunki. Wartość otrzymanego oszacowania trwałych ugięć zależy od konfiguracji powłoki /przez parametr ϕ_0 / oraz energii kinetycznej doprowadzonej do powłoki.

Wprowadźmy zmianę $\underline{t} = \frac{t}{t^*}$, wtedy $\frac{\partial^n(\cdot)}{\partial t^n} = \frac{1}{t^{*n}} \frac{\partial^n(\cdot)}{\partial \underline{t}^n} = \frac{1}{t^{*n}} (\nabla \cdot \nabla)$

$n = 1, 2, \dots, N$. Przy tym możemy oszacowanie (5.20) napisać w postaci

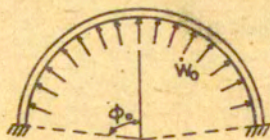
$$W_{max} \approx \left[t^* \int_0^1 \int_0^{\phi_0} P_3 \dot{w}^* \sin \phi d\phi d\underline{t} + \int_0^{\phi_0} S \dot{w}_0 \dot{w}_0^* \sin \phi d\phi - t^* \int_0^1 \int_0^{\phi_0} D(\dot{\epsilon}^n)_x \times \sin \phi d\phi d\underline{t} \right] / \left[\frac{1}{t^{*n}} \left(\int_0^1 \int_0^{\phi_0} \dot{w}^* \sin \phi d\phi d\underline{t} + \int_0^{\phi_0} S \sin \phi \dot{w}^*(1) d\phi \right) + C t^* \right].$$

/5.21/

gdzie: $C = -\frac{N_0}{R_2} \int_0^1 \sin \phi_0 \dot{w}^* |_{\phi_0} d\phi$.

5.2.3. Przykład

W celu ilustracji teorii rozpatrzmy kulistą powłokę obciążoną od wewnątrz symetrycznym impulsem prędkości \dot{w}_0 o kierunku zewnętrznie normalnego wektora do powierzchni środkowej /patrz rys. 11/. W tym przypadku przeczywiste pole prędkości spełnia warunek $\dot{w}' \geq 0 \quad \forall \phi \in [0, \phi_0]$.



Rys. 11 powłoka kulista obciążona impulsem

Wyberzmy dopuszczalne pole prędkości spełniające wszystkie warunki otrzymania dolnego oszacowania (5.21) w postaci

$$/5.22/ \quad \dot{W}^* = \frac{(1-t)(\cos \phi - \cos \phi_0)}{1 - \cos \phi_0}; \quad \dot{u}^* \equiv 0$$

mamy więc składowe tensora prędkości uogólnionych odkształceń

$$/5.23/ \quad \dot{\epsilon}_{\theta}^* = \dot{\epsilon}_{\phi}^* = \frac{(1-t)(\cos \phi - \cos \phi_0)}{R(1 - \cos \phi_0)}$$

$$\dot{\kappa}_{\theta}^* = \dot{\kappa}_{\phi}^* = \frac{(1-t)\cos \phi}{R(1 - \cos \phi_0)}$$

Według Onata i Pragera [64], profil naprężeń ma postać

$$\text{dla } 0 \leq \phi \leq \phi_1; \quad N_{\theta} = N_{\phi} = N_0; \quad M_{\phi} = M_{\theta} = 0.$$

gdzie: kąt ϕ_1 jest określony z wyrażenia

$$/5.24/ \quad \cos \phi_1 = \frac{2 \cos \phi_0}{2 - R/H}$$

funkcja dyspacji ma postać

$$/5.25/ \quad D_1 = \frac{2N_0(1-t)(\cos \phi - \cos \phi_0)}{R(1 - \cos \phi_0)}$$

$$\text{dla } \phi_1 \leq \phi \leq \phi_0.$$

$$N_{\theta} = N_{\phi} = \frac{2R \cdot N (\cos \phi - \cos \phi_0)}{H \cos \phi}$$

$$M_{\theta} = M_{\phi} = M_0 \left[1 - \frac{4R (\cos \phi - \cos \phi_0)^2}{H \cos \phi} \right]$$

funkcja dyspacji jest określona wzorem

$$/5.26/ \quad D_2 = (1 - \xi) \left[\frac{2 N_0 (\cos \phi - \cos \phi_0)}{H \cos (\phi - \cos \phi_0)} + \frac{2 M_0 \cos \phi}{R^2} \right]$$

$$\text{dla } \phi = \phi_0 \quad /5.27/ \quad D_3 = (1 - \xi) \frac{M_0}{R} \sin \phi_0$$

Wstawiając wyrażenia (5.22), (5.25), (5.26), (5.27) do (5.21) otrzymujemy następujące oszacowanie

$$/5.28/ \quad W_{\max} \gg \left\{ \int_0^{\phi_0} \xi \dot{W}_0 \sin \phi (\cos \phi - \cos \phi_0) d\phi - t^* \int_0^1 (1-t) dt \right\} \left\{ \int_0^1 \frac{2N}{R} x \right. \\ \left. (\cos \phi - \cos \phi_0) \sin \phi d\phi + \int_{\phi_1}^{\phi_0} \left[\frac{2N_0 (\cos \phi - \cos \phi_0)^2}{H \cos \phi} + \frac{2M_0 \cos \phi}{R^2} \right] \right. \\ \left. \sin \phi + \frac{M_0}{R^2} \sin \phi_0 \right\} / \left\{ \frac{\xi}{t^*} \int_0^{\phi_0} \sin \phi (\cos \phi - \cos \phi_0) d\phi + N_0 t^* \int_0^1 \frac{1-t}{R^2} \sin^2 \phi dt \right\}$$

lub

$$/5.29/ \quad W_{\max} \gg (\xi \dot{W}_0 A - B t^*) / (\xi \frac{A}{t^*} + D t^*)$$

$$\text{gdzie: } B = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2N_0}{R} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi_1 - \cos \phi_0 \right) (1 - \cos \phi_1) + \frac{2N_0}{H} \left[\frac{1}{2} (\cos \phi_1 - \right. \right. \\ \left. \left. \cos \phi_0) (\cos \phi_1 + 5 \cos \phi_0) - \cos^2 \phi_1 \ln \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi_1} + \frac{M_0}{R^2} (\cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_0) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{M_0 \sin^2 \phi_0}{R^2} \right\} \gg 0$$

$$A = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi_0)^2; \quad D = \frac{N_0}{2R^2} (1 - \cos^2 \phi_0).$$

Wyrażenie z prawej strony (5.28) osiągnie maksimum, dla

$$\dot{t}^* = \frac{B}{D\dot{W}_0} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\dot{W}_0^2 \cdot A \cdot D}{B}} \right)$$

Ostatecznie otrzymujemy dolne oszacowanie dla przedstawionego przypadku w postaci:

$$\begin{aligned} /5.30/ \quad W_{max} > \frac{B}{D} \frac{\frac{\dot{W}_0^2 \cdot A \cdot D}{B^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\dot{W}_0^2 \cdot A \cdot D}{B^2}} \right) - \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\dot{W}_0^2 \cdot A \cdot D}{B^2}} \right)^2}{\frac{\dot{W}_0^2 \cdot A \cdot D}{B^2} + \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\dot{W}_0^2 \cdot A \cdot D}{B^2}} \right)^2} \end{aligned}$$

Związek (5.29) wyraża nieliniową zależność największego trwałego przemieszczenia od prędkości impulsu doprowadzonej do powłoki w początkowej chwili.

5.2.4. Szczególny przypadek ($\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$)

z (5.24), (5.29) wynikają wartości

$$/5.31/ \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{N_0}{2R} (1 + H/4R), \quad D = N_0/2R$$

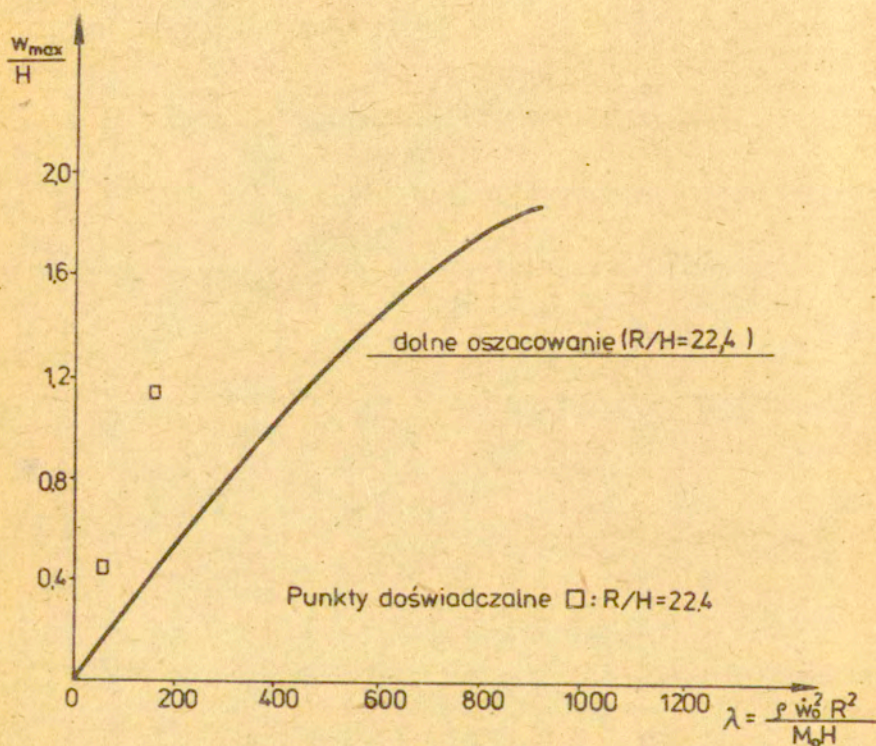
Wstawiając (5.31) do wyrażenia (5.30) dostaniemy

$$\begin{aligned} /5.32/ \quad \frac{W_{max}}{H} > \frac{R}{H} \left(1 + \frac{H}{4R} \right) \frac{\frac{\dot{W}_0^2}{N_0 \left(1 + \frac{H}{4R} \right)^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\dot{W}_0^2}{N_0 \left(1 + \frac{H}{4R} \right)^2}} \right) - \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\dot{W}_0^2}{N_0 \left(1 + \frac{H}{4R} \right)^2}} \right)^2}{\frac{\dot{W}_0^2}{N_0 \left(1 + \frac{H}{4R} \right)^2} + \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\dot{W}_0^2}{N_0 \left(1 + \frac{H}{4R} \right)^2}} \right)^2} \end{aligned}$$

Porównania powyższego oszacowania z rezultatami doświadczalnymi w pracy [30] jest przedstawione na rysunku 12.

Należy podkreślić, że w nieliniowej analizie kulistej powłoki sztywno-plastycznej brak jest górnego oszacowania, rozwiązania ścisłego oraz rezultatu doświadczalnego. Sądzi się, że dokładność dolnego oszacowania może być sprawdzona przez porównanie z rozwiązaniem sprężysto-plastycznym, otrzymanym przy pomocy metod różnic lub elementów skończonych [105]

W wyniku analizy sytuacji przedstawionej na rys.12 pokazano, że wpływ zmiany geometrii na trwałe ugięcia dla $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ jest mały, kiedy parametr λ należy do przedziału $(0, 600)$ i największe trwałe ugięcie leży w przedziale $(0; 1,6 H)$. Duży wpływ istnieje kiedy $\phi_0 \ll \frac{\pi}{2}$.



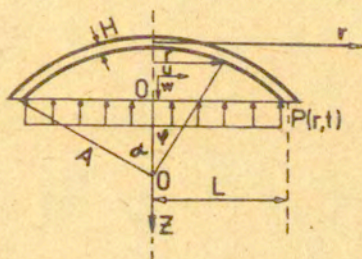
Rys. 12. Porównanie dolnego oszacowania trwałych ugięć powłoki kulistej z rezultatami doświadczalnymi.

5.3. Powłoka kulista o małej wyniosłości

5.3.1. Sformułowanie problemu

Powłoka kulista o małej wyniosłości w ramach umiarkowanie dużych ugięć rozpatrywana została w pracy Duszek [15] dla problemu nośności granicznej, a w pracy Kaliszkyego [41] dla zagadnień dynamicznych. Obecny rozdział poświęcony jest zagadnieniom dolnego oszacowania największego trwałego ugięcia. W celu budowania twierdzenia dolnego oszacowania będziemy stosować układ podstawowych równań i oznaczenia, przedstawione w pracy [15].

Rozpatrzmy kulistą powłokę o grubości H , promieniu A , gęstości ρ na jednostkę powierzchni środkowej i w początkowej chwili obciążoną impulsem osiowo-symetrycznym $P = P(r, t)$ w kierunku osi z rys. 13



Rys. 13. Powłoka kulista o małej wyniosłości obciążona impulsem.

Stosowane są następujące oznaczenia.

$$n_q = \frac{N_q}{N_0} ; \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{N_0} ; \quad N_0 = \sigma_0 H$$

$$/5.33/ \quad m_q = \frac{M_q}{M_0} ; \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0} ; \quad M_0 = \sigma_0 H^2 / 4$$

$$p = \frac{P \cdot A}{N_0} \quad \rho^* = \frac{P A^2}{N_0}$$

$$w = \frac{W}{A}, \quad u = \frac{U}{A}, \quad h = \frac{H}{4A}, \quad c = \sin \alpha = \frac{L}{A}; \quad r = \frac{L}{A} = \sin \varphi.$$

gdzie: σ_0 jest granicą plastyczności materiału na jednoosiowe rozciąganie i ściskanie.

Układ podstawowych równań opisujących przedstawiony problem ma postać

1/ Równanie ruchu

$$\begin{aligned} & (rm_\varphi)' - m_\varphi - \rho^* r \ddot{u} = 0 \\ /5.34/ \quad & h[(rm_\varphi)' - m_\varphi]' + [rn_\varphi(r+w)'] + rP - \rho^* r \ddot{u} = 0 \\ & h[(rm_\varphi)' - m_\varphi] = rq_\varphi. \end{aligned}$$

$$\text{gdzie: } ()' = \frac{\partial ()}{\partial r}$$

2/ Związki geometryczne

$$/5.35/ \quad \dot{\alpha}_\varphi = -h\dot{w}', \quad \dot{\alpha}_\theta = -h\frac{\dot{w}'}{r}, \quad \dot{\lambda}_\varphi = \frac{\dot{u}}{r}, \quad \dot{\lambda}_\theta = \dot{u} + r\dot{w}' + w'\dot{w}'$$

3/ Franc płynięcia

$$/5.36/ \quad \dot{\alpha}_\varphi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial m_\varphi}; \quad \dot{\alpha}_\theta = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial m_\theta}, \quad \dot{\lambda}_\varphi = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n_\varphi}; \quad \dot{\lambda}_\theta = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial n_\theta}$$

4/ Warunki początkowe, końcowe i brzegowe

$$\begin{aligned} & u(r,0) = w(r,0) = 0, \quad \dot{w}(r,0) = \dot{u}_0, \quad \dot{u}(r,0) = u_0 \\ /5.37/ \quad & \dot{u}(r,t^*) = \dot{w}(r,t^*) = 0, \quad \dot{u}^*(r,t^*) = \dot{w}^*(r,t^*) = 0 \\ & \dot{u}(c,t) = \dot{w}(c,t) = 0; \quad \dot{u}^*(c,t) = \dot{w}^*(c,t) = 0 \end{aligned}$$

Powyżej pisany warunki dla pól rzeczywistych i dopuszczalnych

gdzie: t^* rzeczywisty czas trwania ruchu

t^* czas trwania ruchu odnosi się do procesu dopuszczalnego

Z uwagi na definicję w rozdziale trzecim, dla dopuszczalnych pól warunki początkowe (5.37a) nie muszą być spełnione. Warunki kinematycznie brzegowe, pisane wzorem (5.37c) odpowiadają przypadkowi powłok przegubowo opartych ($m_\varphi = 0$) lub sztywno zamocowanych

($m_q = 1$) na brzegu. W przypadku materiału sztywno-plastycznego podstawowa różnica pomiędzy nimi jest istnieniem przegubu plastycznego na brzegu, który musi być uwzględniony w obliczeniu funkcji dysypacji. Ponadto warunki naprężeniowe brzegowe nie mają wpływu na wybór kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości, dlatego nie pisamy ich w (5.37). Sprawę tę omówimy szczegółowo w obliczeniu funkcji dysypacji

5.3.2 Wyrażenie na dolne oszacowanie

W celu uzyskania oszacowania na składową \dot{W} wybierzmy kinematycznie dopuszczalne pole prędkości $\dot{u}^* = 0, \dot{w}^* \neq 0$. Ze względu na równania ruchu wyrażenie zasady mocy wirtualnych ma postać

$$/5.38/ \quad \int_0^c \{ h[(rm_q)' - m_\phi]' + [rn_\phi(r+w')] \}' \dot{w}^* dr + \int_0^c (p - \beta \dot{w}^*) \dot{w}^* r dr = 0$$

W ogólnym przypadku możemy wybrać \dot{w}^* tak, aby pochodna \dot{w}^* miała skok na okręgach o promieniu r_k , tzn. $[\dot{w}^*]'_{r_k} \neq 0, k=1, \dots, N$. Dzielimy obszar $(0, c)$ na podzbiory (r_k, r_{k+1}) w których \dot{w}^* jest ciągle. Po całkowaniu pierwszej całki w (5.38) przez części i wykorzystując warunek $\dot{w}^*(c) = c$ i trzecie równanie ruchu (5.34c) wynika następująca równość

$$\int_0^c \{ h[(rm_q)' - m_\phi]' + [rn_\phi(r+w')] \}' \dot{w}^* dr = \\ - \sum_{k=1}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} h(rm_q)' \dot{w}^* dr - \sum_{k=1}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} [m_\phi (-\frac{h\dot{w}^*}{r}) + n_\phi(r\dot{w}^*)] r dr - \int_0^c n_\phi \dot{w}^* r dr$$

Całkując pierwszy człon w prawej stronie przez części i uwzględniając nieciągłości \dot{w}^* w punktach r_k powyższa równość ma postać

$$\int_0^c \{ h[(rm_q)' - m_\phi]' + [rn_\phi(r+w')] \}' \dot{w}^* dr = \\ = - \sum_{k=1}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} [m_\phi (-\frac{h\dot{w}^*}{r}) + m_\phi (-h\dot{w}^*) + n_\phi(r\dot{w}^*)] r dr - \\ - \sum_{k=2}^{N-2} r_k m_\phi(r_k) [-h\dot{w}^*]'_{r_k} - c m_\phi(c) \dot{w}^*(c) - \int_0^c n_\phi \dot{w}^* r dr$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (5.38) otrzymujemy

$$(5.39) \quad - \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left[m_\phi (-h \dot{w}^*) + m_\phi (-h \dot{w}^*) + n_\phi (r \dot{w}^*) \right] r dr + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{N-2} r_k m_\phi(r_k) \left[h \dot{w}^* \right]_{r_k} + c m_\phi \dot{w}^* \Big|_c \right\} - \int_0^c n_\phi \dot{w} \dot{w}^* r dr + \int_0^c (p - p^* \dot{w}) r dr = 0$$

Uwzględniając związki geometryczne (5.35) wyrażenie $[m_\phi (-h \dot{w}^*) + m_\phi (-h \dot{w}^*) + n_\phi (r \dot{w}^*)]$ wyraża funkcję dysypacji w punktach $r \in (r_k, r_{k+1})$; $k=1, \dots, N$, natomiast człony $m_\phi(r_k) [h \dot{w}^*]_{r_k}$; $m_\phi \dot{w}^* \Big|_c$ wyraża funkcję dysypacji w punktach r_k , tzn. w przegubach plastycznych. Stąd widać, że pierwszy, drugi i trzeci człon w (5.39) daje całkowitą wewnętrzną dysypację powłoki, spowodowaną przez liniową część tensora prędkości odkształceń, kiedy wybierzemy dopuszczalne pole prędkości \dot{w}^* tak, aby pochodna \dot{w}^* miała skok w okręgach o promieniu r_k $k=1, \dots, N$. Ponadto przypadki powłok przegubowo-opartych i sztywno-zamocowanych różnią się trzecim członem w (5.39), dla warunku przegubowo-opartego $r_\phi = 0$ ten człon znika.

Oznaczmy:

$$\dot{\lambda}_\phi^* = -h \dot{w}^*, \quad \dot{\lambda}_\phi^* = -\frac{h \dot{w}^*}{r}, \quad \dot{\lambda}_\phi^* = 0; \quad \dot{\lambda}_\phi^* = r \dot{w}^* \quad r \in (r_k, r_{k+1}) \\ \dot{\lambda}_\phi^* = [-h \dot{w}^*]_{r_k} \quad r = r_k \quad k = 1, \dots, N$$

Możemy wyrażenie (5.39) napisać przez symboliczne oznaczenie

$$(5.40) \quad - \int_0^c [m_\phi \dot{\lambda}_\phi^* + m_\phi \dot{\lambda}_\phi^* + n_\phi \dot{\lambda}_\phi^*] r dr - \int_0^c n_\phi \dot{w} \dot{w}^* r dr + \int_0^c (p - p^* \dot{w}) r dr = 0$$

Biorąc pod uwagę, że nieliniowa część tensora odkształceń posiada zaledwie jedną nierówną zero składową $\dot{w} \dot{w}^*$, przy tym efekt siły membranowej n_ϕ jest uwzględniony w analizie przez trzecią całkę w (5.40)

Całkując (5.40) po czasie w przedziale $(0, t^*)$ i wykorzystując postulat stateczności otrzymujemy

$$(5.41) \quad \int_0^{t^*} \int_0^c p \dot{w} \dot{w}^* r dr dt - \int_0^{t^*} \int_0^c D(\dot{\epsilon}^*) r dr dt \leq \int_0^{t^*} \int_0^c p^* \dot{w} \dot{w}^* r dr dt + \int_0^{t^*} \int_0^c n_\phi^* \dot{w} \dot{w}^* r dr dt$$

gdzie: $D(\dot{\xi}^*) = m_{\varphi}^* \dot{\xi}_{\varphi}^* + m_{\psi}^* \dot{\xi}_{\psi}^* + n_{\varphi}^* \dot{\xi}_{\varphi}^*$.

Sily wewnętrzne (n_{φ}^* , m_{φ}^* , m_{ψ}^*) (n_{φ}^{**}) są odpowiednio związane z uogólnionymi prędkościami odkształceń ($\dot{\xi}_{\varphi}^*$, $\dot{\xi}_{\psi}^*$, $\dot{\xi}_{\varphi}^{**}$), ($w'w''$) przez prawo płynięcia (5.36). Z pierwszego członu w prawej stronie (5.41) zmieniając porządek całkowania, całkując przez części po czasie oraz wykorzystując warunki brzegowe $\dot{w}(r,0) = \dot{w}(r,c) = 0$ i warunek $\dot{w}(r,t^*) = 0$ wynika następujące wyrażenie

/5.42/
$$\int_0^c \left[\int_0^{t^*} \dot{w} \dot{w}' dt \right] r dr = \int_0^c \left[-\dot{w}_t \dot{w}'_t - w_t \dot{w}''_t + \int_0^{t^*} w \ddot{w}'' dt \right] r dr$$

gdzie: $\dot{w}_t = \dot{w}(r,t^*)$, $w_t = w(r,t^*)$, $\dot{w}''_0 = \dot{w}''(r,0)$

Rozpatrzmy ostatnią całkę w (5.41)

/5.43/
$$\int_0^c \int_0^{t^*} n_{\varphi}^{**} w' \dot{w}'' r dr dt$$

Możemy wyrażenie podcałkowe w (5.43) oszacować

/5.44/
$$n_{\varphi}^{**} w' \dot{w}'' \leq \max |n_{\varphi}^{**}| |w' \dot{w}''|$$

Na podstawie powierzchni plastyczności pokazanej w tablicy 2 i rys. 10 dostaniemy $\max |n_{\varphi}^{**}| = 1$. Wstawiając (5.44) do (5.43) mamy następujące oszacowanie

/5.45/
$$\int_0^c \int_0^{t^*} n_{\varphi}^{**} w' \dot{w}'' r dr dt \leq \int_0^c \int_0^{t^*} |w' \dot{w}''| r dr dt$$

Łącząc się (5.45) (5.42) oraz (5.44) i po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów otrzymujemy oszacowanie

/5.46/
$$\begin{aligned} & - \int_0^c w_t \dot{w}''_t r dr + \int_0^c \int_0^{t^*} \dot{w} \ddot{w}'' r dr dt + \int_0^c \int_0^{t^*} |w' \dot{w}''| r dr dt \gg \\ & \gg \int_0^c \int_0^{t^*} r P \dot{w}'' dr dt + \int_0^c r \dot{w}''_0 \dot{w}''_0 dr - \int_0^c \int_0^{t^*} D(\dot{\xi}^*) r dr dt \end{aligned}$$

Wyrażenie (5.46) stanowi istotny element dający możliwość otrzymania dolnego oszacowania na trwałe ugięcie powłoki. W celu uzyskania dolnego oszacowania należy założyć, że w' posiada stały znak, np. gdy $w'(r,t) \gg 0 \forall r \in [0,c], [0,t^*]$, należy wybrać w tak, aby $\dot{w}'' > 0$, $\dot{w}''_0 > 0$, $[\dot{w}''_0] > 0 \quad K=1, \dots, N$, $\ddot{w}''(r,t) \gg 0$, $\ddot{w}'' \leq 0$

$\forall t, r \in [0, c] \times [0, t]$. Przy powyższych założeniach $W' \dot{W}^2 > 0$ oraz wykorzystując warunki $W(c, t) = c$, $\dot{W}^2(c, t) = 0$ całkowanie trzeciego członu w (5.46) przez części daje

$$\int_0^t \int_0^c |w' \dot{w}^2| r dr dt = \int_0^t \int_0^c w' \dot{w}^2 r dr dt =$$

$$/5.47/ \quad = - \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} w (\dot{w}^2 + r \dot{w}^2)' dr + \sum_{k=2}^{N-2} (r w) \left[\dot{w}^2 \right]_{r_k} \right\} dt$$

Przyjmujemy założenie takie jak w rozdziale trzecim, że rzeczywiste przemieszczenia są monotonicznie rosnącą funkcją czasu. Wtedy mamy

$$\text{Max}_{r, t \in [0, c] \times [0, t]} [-W(r, t)] \geq \text{Max}_{r, t \in [0, c] \times [0, t]} [-W(r, 0)]$$

niezależnie od tego czy $t_1 \leq \frac{t}{2}$ czy $t_1 \geq \frac{t}{2}$. Z wyrażenia (5.47) wynika oszacowanie

$$\int_0^t \int_0^c |w' \dot{w}^2| r dr dt \leq W_{\max} \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} (r w^2)' dr + \sum_{k=2}^{N-2} [r w^2]_{r_k} \right\} dt$$

Po całkowaniu wyrażenia w prawej stronie otrzymujemy

$$\int_0^t \int_0^c |w' \dot{w}^2| r dr dt \leq W_{\max} \int_0^t \left\{ (r w^2)' - \sum_{k=2}^{N-2} [r w^2]' + \sum_{k=2}^{N-2} [r w^2]_{r_k} \right\} dt$$

lub

$$/5.48/ \quad \int_0^t \int_0^c |w' \dot{w}^2| r dr dt \leq W_{\max} \int_0^t \left[c \dot{w}^2 \right]_{r=c} dt$$

gdzie: $W_{\max} = \text{Max}_{r, t \in [0, c] \times [0, t]} [-W(r, t)]$

Z wyrażenia (5.46) i (5.48) wynika następujące oszacowanie

$$/5.49/ \quad W_{\max} \geq \frac{\int_0^t \int_0^c r p dr dt + \int_0^t \int_0^c \dot{w}^2 \dot{w}^2 r dr dt - \int_0^t \int_0^c D(\dot{E}^2) r dr dt}{\int_0^t \int_0^c \dot{w}^2 \dot{w}^2 r dr dt - \int_0^t \int_0^c r \dot{w}^2 \dot{w}^2 r dr dt + \int_0^t \left[c \dot{w}^2 \right]_{r=c} dt}$$

Wprowadźmy zmienną bezwymiarową $\xi = \frac{t}{\tau}$, wtedy możemy napisać

oszacowanie(5.49) w postaci

$$/5.50/ \dot{W}_{max} \gg \frac{t^* \int_0^c \int_0^1 n_p \dot{w}^* dr dt + \int_0^c \int_0^1 \dot{w}^* \dot{w}_0^* ndr - t^* \int_0^c \int_0^1 D(\dot{\epsilon}^*) ndr dt}{\frac{1}{t^*} \left[\int_0^c \int_0^1 \dot{w}_i^* ndr - \int_0^c \int_0^1 \dot{w}^* ndr dt \right] + t^* \int_0^c \dot{w}^* |_{r=c} dt}$$

gdzie: $\dot{w}^* = \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial t^*}$; $\dot{w}^* = \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial t^*}$; $\dot{w}_i^* = \dot{w}^*(r, 1)$

5.3.3- Przykład

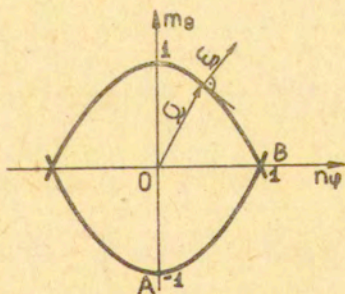
Jako ilustrację teorii rozpatrzmy powłokę przegubowo opartą na brzegu i obciążoną idealnym impulsem prędkości $\dot{w}_0 = \text{const}$ w chwili początkowej. Wybierzmy $\dot{w}^* = -(1-t)(c-r)$. Odpowiadająca mu część liniowa uogólnionych prędkości odkształceń ma postać

$$/5.51/ \quad 0 < r \leq c \quad \dot{\lambda}_\phi^* = 0, \quad \dot{\lambda}_r^* = r(1-t), \quad \dot{\alpha}_\phi^* = -h \frac{(1-t)}{r}, \quad \dot{\alpha}_r^* = 0$$

W celu określenia funkcji dysypacji dla liniowej części tensora prędkości odkształceń(5.51) tylko należy rozpatrzeć problem w płaszczyźnie (n_ψ, m_ϕ) , a więc warunek plastyczności jest określony wzorem

$$/5.52/ \quad \begin{aligned} F_1 &= m_\phi - 1 + n_\psi^2 = 0 \\ F_2 &= -m_\phi - 1 + n_\psi^2 = 0 \end{aligned}$$

Przy tym prawo płynięcia jest przedstawione na rysunku 14



Rys.14 Warunek plastyczności powłoki w płaszczyźnie (m_ϕ, n_ψ)

Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku drugi i trzeci człon w (5.39) znika, poza tym całkowita wewnętrzna dysypacja jest określona przez pierwszą całkę w (5.39)

Uwzględniając $\lambda_{\varphi} \gg 0$, $\dot{\alpha}_{\varphi} \leq 0$ mamy profil naprężenia AB. Dla regularnej części powierzchni plastyczności rys.14 z prawa płynięcia (5.36) otrzymujemy

$$\lambda = \frac{h(1-t)}{r}, \quad n_{\varphi} = \frac{r^2}{2h}, \quad m_{\varphi} = \frac{r^4}{4h^2} - 1$$

Pod warunkiem $|n_{\varphi}| \leq 1$, $|m_{\varphi}| \leq 1$ powyższe wyrażenia są tylko dla $r < \sqrt{2h}$, mamy więc stany naprężenia dla wszystkich punktów powłoki

$$\begin{aligned} 0 \leq r < \sqrt{2h} & \quad n_{\varphi} = \frac{r^2}{2h}; \quad m_{\varphi} = \frac{r^4}{4h^2} - 1 \\ r \geq \sqrt{2h} & \quad n_{\varphi} = 1 \quad m_{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Całkowita dysypacja powłoki wyraża się wzorem

$$D = \int_0^1 (1-t) dt \int_0^{\sqrt{2h}} \left[n_{\varphi} \frac{r^2}{2h} + (1 - \frac{r^4}{4h^2}) \frac{t}{r} \right] r dr + \int_{\sqrt{2h}}^C n_{\varphi} r dr = \frac{1}{2} \left[\frac{8h\sqrt{2h}}{15} + \frac{C^3}{3} \right]$$

Z wyrażenia (5.50) po wykonaniu operacji wynika dolne oszacowanie

$$/5.53/ \quad W_{\max} \gg \frac{A}{H} \cdot \frac{\rho^* t^* B - D t^{*2}}{\int \rho^* E + G t^{*2}}$$

$$\text{gdzie: } B = \frac{W_0 C^3}{6A}; \quad E = \frac{C^3}{6}; \quad G = \frac{C}{2}; \quad D = \frac{1}{2} \left[\frac{8h\sqrt{2h}}{15} + \frac{C^3}{3} \right]$$

Parametr t^* określony poprzez warunek maksymalizacji wyrażenia na oszacowanie (5.53) ma postać

$$/5.54/ \quad t^* = \frac{ED}{BG} \left(-1 + \sqrt{1 + \rho^* \frac{B^* G}{D^2 E}} \right)$$

Wstawiając (5.54) do (5.53) otrzymujemy dolne oszacowanie

$$/5.55/ \quad \frac{W_{\max}}{H} \gg \frac{AD}{HG} \cdot \frac{\lambda(-1 + \sqrt{1 + \lambda}) - (-1 + \sqrt{1 + \lambda})^2}{\lambda + (-1 + \sqrt{1 + \lambda})^2}$$

$$\text{gdzie: } \lambda = \frac{\rho^* B^* G}{D^2 E}$$

Szczególny przypadek :

$$c = 0,2, \quad A/H = 25 \text{ lub } h = 0,01$$

Parametry w (5.55) są określone wzorami

$$B = \frac{\dot{W}_0}{A} \cdot \frac{0,004}{3}, \quad E = \frac{0,004}{3}, \quad G = 0,1, \quad D = c, 00171$$

Wstawiając powyższe wielkości do (5.55) dostaniemy następujące oszacowanie

$$/5.56/ \quad \frac{W_{max}}{H} \gg \frac{\lambda [-1 + \sqrt{1 + \lambda}] - [-1 + \sqrt{1 + \lambda}]^2}{\lambda + [-1 + \sqrt{1 + \lambda}]^2}$$

gdzie: $\lambda = 1,828 \cdot \frac{\rho \dot{W}_0^2 A}{N_0 H}$

W celu porównania rozpatrzmy dolne oszacowanie na składową W w zakresie małych ugięć, które w ogólnym przypadku ma postać [84]

$$W_{max} \gg \frac{(\int \rho^* \dot{w}_0 \phi_c dr)^2}{2 \int \rho^* \phi_c dr \int D(\epsilon_c) dr}$$

Kiedy $\dot{W}_0 = \text{const}$ $\forall r \in [0, C]$ otrzymujemy

$$W_{max} \gg \frac{\rho^* \dot{w}_0^2 \int_0^C \phi_c r dr}{2 \int_0^C D(\epsilon_c) r dr}$$

Wyberzmy $\phi_c = (c - r)$, przy tym całkowita dysypacja jest określona wzorem

$$\int_0^C D(\epsilon_c) r dr = \int_0^{\frac{\sqrt{0,2}}{2h}} [r \cdot \frac{r^2}{2h} + (1 - \frac{r^4}{4h^2}) \frac{h}{r}] dr + \int_{\frac{\sqrt{0,2}}{2h}}^c r^2 dr = [\frac{8h\sqrt{2h}}{15} + \frac{c^3}{3}]$$

Stąd wynika dolne oszacowanie

$$W_{max} \gg \frac{\rho^* \dot{w}_0^2 c^3}{[\frac{8h\sqrt{2h}}{5} + c^3]}$$

Uwzględniając $\rho^* = \frac{\rho A^2}{N_0}$, $w = \frac{W}{A}$; $h = 0,01$, $c = 0,2$ mamy

$$W_{max} \gg \frac{A}{H} \cdot \frac{\rho \dot{W}_0^2 c^3}{4 [\frac{8h\sqrt{2h}}{5} + c^3]} = \frac{1}{5,1312} \cdot \frac{\rho \dot{W}_0^2 A}{N_0 H}$$

Porównanie uzyskanego dolnego oszacowania (5.56) z rozwiązaniem Kaliszkyego [41] oraz dolnym oszacowaniem w zakresie teorii małych ugięć zilustrowane jest na rysunku 14

5.3.4 - Wnioski i uwagi

- dolne oszacowanie trwałych ugięć środka powłoki o małej wyniosłości (5.50) jest podane na podstawie wykorzystania dokładnej powierzchni granicznej Treski [64]. Ono również obowiązuje dla powłok symetrycznie obciążonych impulsem prędkości ($\dot{W}_0 = \dot{W}_0(r)$, $P = 0$) lub ciśnienia ($P = P(r, t)$). Wykorzystując oszacowanie $\text{Max} |n_{\varphi}^{**}|$ także można otrzymać pewne dolne oszacowanie dla dowolnych warunków plastyczności, opisujących sztywno-plastyczne ciało izotropowe lub anizotropowe

-Wyrażenie na dolne oszacowanie (5.50) jest uogólnione dla powłok przegubowo-opartych i sztywno-zamocowanych na brzegu. Przypadki te różnią się trzecim członem w (5.39), dla warunku przegubowo-opartego ($m_{\varphi} = 0$) ten człon znika.

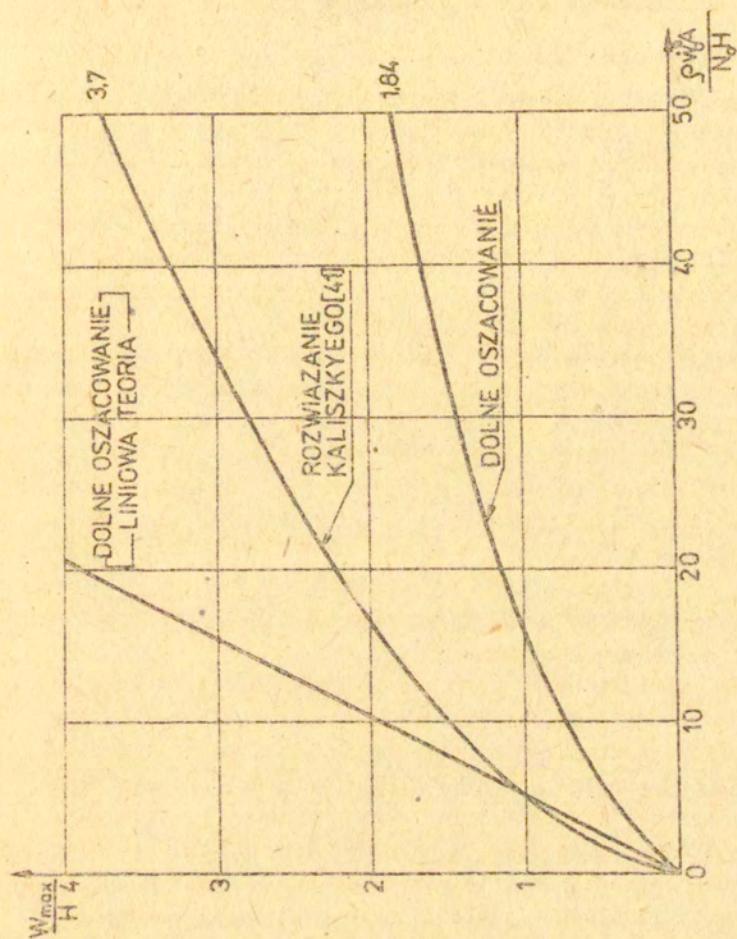
-Wyrażenie na dolne oszacowanie (5.50) daje możliwość wyboru dopuszczalnych pól prędkości w postaci modalnej lub niemodalnej, spełniających warunki

a/ Pochodne czasowe są ciągłe

b/ Pochodne przestrzenne są nieciągłe na indywidualnych okręgach o promieniu r_k

Przy tym zaproponowana metoda szacująca pozwala uwzględniać złożony proces płynięcia plastycznego powłoki, w którym występują stacjonarne przeguby plastyczne na okręgach o promieniu r_k . Funkcja dysypacji w przegubach plastycznych jest określona drugim członem w (5.39). Dolne oszacowanie ze względu na ruchowe przeguby plastyczne (tzn. nieciągłe pochodne czasowe, dopuszczalnych pól prędkości) będzie przedstawione w dalszym studio.

- W przykładzie powłoki obciążonej impulsem prędkości w chwili początkowej $t = 0$ dopuszczalne pole prędkości jest wybrane w postaci $\dot{W}^* = (1-\xi)(C-r)$, $\dot{u}^* = 0$, oraz $h = 0,01$, $C = 0,2$ otrzymaliśmy dosyć dobrą zgodność uzyskanego dolnego oszacowania z rozwiązaniem Kaliszkyego [41] (rys. 14). Wiadomo, że dokładność dolnego oszacowania w stosunku do rozwiązania ścisłego zależy od wyboru dopuszczalnych pól prędkości, dlatego można jeszcze zwiększyć dokładność otrzymanych oszacowań.



Rys.15

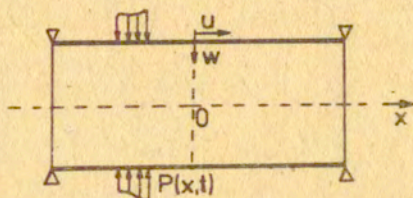
Porównanie dolnego oszacowania z rozwiązaniem Kaliszkyego

5.4. Dolne oszacowanie na trwałe ugięcia powłok cylindrycznych

5.4.1. Układ podstawowych równań

Powłoki cylindryczne rozpatrywane były w pracy [28] w zakresie dużych ugięć, a górna ocena na maksymalne ugięcia środka powłoki krótkiej była podana w pracy [66]. W tym rozdziale przedstawimy metodę pozwalającą na ocenę od dołu trwałego ugięcia.

Rozpatrzmy powłokę cylindryczną o grubości H , długości L i promieniu R . Założymy, że w chwili początkowej powłoka poddana jest obciążeniu $p(x,t)$ rys 16.



Rys. 16. Powłoka cylindryczna obciążona dynamicznie

Układ podstawowych równań opisujący przedstawiony problem ma postać [27].

1/. Równania ruchu

$$/5.57/ \quad N'_x - \xi \ddot{u} = 0 \quad Q_x = -M'_x$$

$$-M''_x + (N_x W')' + \frac{N_\theta}{R} + p - \xi \ddot{w} = 0$$

$$\text{gdzie: } ()' = \frac{\partial ()}{\partial x}, \quad (\dot{\cdot}) = \frac{\partial ()}{\partial t}$$

2/. Związki geometryczne

$$/5.58/ \quad \dot{\lambda}_x = \dot{u}' + W' \dot{w}', \quad \dot{\lambda}_\theta = -\frac{\dot{w}}{R}, \quad \dot{K}_x = \dot{w}''$$

3/. Stowarzyszone prawo płynięcia

$$/5.59/ \quad \dot{\lambda}_\theta = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial N_\theta}, \quad \dot{\lambda}_x = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial N_x}, \quad \dot{K}_x = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial M_x}$$

4/. Warunki brzegowe i początkowe:

$$15.60 \quad W(-L,t) = W(L,t) = 0; \dot{W}(-L,t) = \dot{W}(L,t) = 0; \ddot{U}(-L,t) = \ddot{U}(L,t) = 0 \\ U(x,0) = \dot{U}(x,0) = W(x,0) = 0; \dot{W}(x,0) = \ddot{W}_0; \ddot{W}(-L,t) = \ddot{W}(L,t) = 0; \ddot{U}(-L,t) = \ddot{U}(L,t) = 0$$

gdzie: N_x, N_θ - odpowiednio podłużna i obwodowa w powłoce
 M_x - zginający moment podłużny
 $\dot{E}_x, \dot{E}_\theta$ - prędkość wydłużeń podłużnych i obwodowych
 \dot{K}_x - prędkość krzywizny

5/. Wyrażenie zasady mocy wirtualnych ma postać:

$$15.61 \quad \int_{-L}^L P \dot{W}^* dx - \int_{-L}^L \rho (\ddot{U} \dot{U}^* + \ddot{W} \dot{W}^*) dx + \int_{-L}^L \frac{N_\theta}{R} \dot{W}^* dx + \int_{-L}^L [N_x' \dot{U}^* + (N_x W')' \dot{W}^* - M_x'' \dot{W}^*] dx = 0$$

5.4.2. Wyrażenia na oszacowanie

W ogólnym przypadku można wybrać dopuszczalne pole prędkości (\dot{U}^*, \dot{W}^*) tak, aby składowa \dot{W}^{**} miała skok w punktach x_k tzn. $[\dot{W}^*]'_{x_k} \neq 0, k=1, 2, \dots, N$. Dzielimy obszar $(-L, L)$ na podzbiory $[x_k, x_{k+1}]$ w których \dot{W}^{**} jest ciągłe. Całkując ostatni człon w (5.61) przez części i wykorzystując warunki brzegowe (5.60) otrzymujemy równość

$$15.62 \quad \int_{-L}^L P \dot{W}^* dx - \int_{-L}^L \rho (\ddot{U} \dot{U}^* + \ddot{W} \dot{W}^*) dx - \sum_K \int_{L_K}^{L_{K+1}} \left\{ -\frac{N_\theta}{R} \dot{W}^* + N_x \dot{U}^* + M_x \dot{W}^{**} \right\} dx + \\ + [M_x \dot{W}^*]_{-L}^L - \sum_{k=2}^{N-1} M_x(x_k) [\dot{W}^*]_{x_k} - \int_{-L}^L N_x W' \dot{W}^* dx = 0.$$

Dla powłoki podpartej przegubowo nieprzesuwanie na końcach ($M_x(L) = 0$) czwarty człon w (5.62) znika. Biorąc pod uwagę związki geometryczne (5.58), trzeci, czwarty i piąty człon wyraża wewnętrzną dyspację spowodowaną przez liniową część tensora prędkości odkształcenia, a więc możemy wyrażenie (5.62) napisać w postaci

$$15.63 \quad \int_{-L}^L P \dot{W}^* dx - \int_{-L}^L \rho (\ddot{U} \dot{U}^* + \ddot{W} \dot{W}^*) dx - \int_{-L}^L (N_\theta \tilde{\lambda}_\theta^* + N_x \tilde{\lambda}_x^* + M_x \dot{K}_x^*) dx - \int_{-L}^L N_x W' \dot{W}^* dx = 0$$

gdzie: $\tilde{\lambda}_\theta^* = -\frac{\dot{W}^*}{R}; \dot{K}_x^* = \dot{W}^{**}; \tilde{\lambda}_x^* = \dot{U}^*; \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\tilde{\lambda}_\theta^* = 0; \tilde{\lambda}_x^* = 0; \dot{K}_x^* = [\dot{W}^{**}]_{x_k}, \forall x = x_k, k=1, 2, \dots, N.$$

Należy podkreślić, że nieliniowa część tensora prędkości odkształceń uogólnionych posiada zaledwie jedną nierówną zeru składową.

Wykorzystując postulat stateczności Druckera otrzymujemy nierówność:

$$15.64/ \int_{-L}^L P \dot{W}^* dx - \int_{-L}^L \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) dx - \int_{-L}^L D(\dot{E}^*) dx - \int_{-L}^L N_x^{**} \dot{W}' \dot{W}^* dx \leq 0$$

$$\text{gdzie: } D(\dot{E}^*) = \dot{\lambda}_\theta^* N_\theta^* + \dot{\lambda}_x^* N_x^* + \dot{K}_x^* M_x^*$$

Siły wewnętrzne $(N_\theta^*, N_x^*, M_x^*)$, (N_x^{**}) są związane z uogólnionymi prędkościami odkształceń $(\dot{\lambda}_\theta^*, \dot{\lambda}_x^*, \dot{K}_x^*)$, (\dot{W}', \dot{W}^{**}) przez prawo płynięcia. Całkując nierówność (5.64) po czasie w przedziale $(0, t^*)$ i wykorzystując warunki początkowe (5.60) i $\dot{u}^*(x, t) = \dot{w}^*(x, t) = 0$ mamy oszacowanie:

$$15.65/ \int_0^{t^*} \int_{-L}^L P \dot{W}^* dx dt + \int_{-L}^L \left[\rho (\dot{u}_0 \dot{u}_0^* + \dot{w}_0 \dot{w}_0^* + u(x, t^*) \ddot{u}(x, t^*) + w(x, t^*) \ddot{w}(x, t^*)) \right] dx - \int_0^{t^*} \int_{-L}^L \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) dx dt + \int_0^{t^*} \int_{-L}^L D(\dot{E}^*) dx dt - \int_0^{t^*} \int_{-L}^L N_x^{**} \dot{W}' \dot{W}^* dx dt \leq 0.$$

Rozpatrzymy ostatnią całkę w (5.65)

$$15.66/ \int_0^{t^*} \int_{-L}^L \dot{W}' \dot{W}^{**} N_x^{**} dx dt$$

Możemy podcałkowe wyrażenie w (5.66) oszacować:

$$15.67/ N_x^{**} \dot{W}' \dot{W}^{**} \leq \text{Max} |N_x^{**}| |\dot{W}' \dot{W}^{**}| = \chi |\dot{W}' \dot{W}^{**}|$$

$$\text{gdzie: } \chi = \text{Max} |N_x^{**}|$$

Z wyrażenia (5.66) wynika następujące oszacowanie:

$$15.68) \int_0^{t^*} \int_{-L}^L W' \ddot{W}' N_x dx dt \leq \alpha \int_0^{t^*} \int_{-L}^L |W' \ddot{W}'| dx dt$$

Zakładamy, że $p(-x, t) = p(x, t)$, ponadto W' posiada stały znak w przedziale $(0, L)$ na przykład $W' \leq 0 \forall x, t \in (0, L), [0, t^*]$. W celu uzyskania dolnego oszacowania na składową W należy wybrać dopuszczalne pole prędkości $\ddot{U} = 0, \ddot{W} \neq 0$, spełniające warunki:

$$\ddot{W}(x, t) \leq 0, \ddot{W}(x, t) \geq 0, \ddot{W}' \leq 0, \ddot{W}'(x, t) \leq 0, \ddot{W}'(-x, t) = \ddot{W}'(x, t), [\ddot{W}']_{x_k} \leq 0 \\ \forall x, t \in [0, L], [0, t^*], k = 1, 2, \dots, N; (x_1 = 0)$$

Przy powyższych założeniach $W' \ddot{W}' > 0$ i możemy prawą stronę w (5.68) całkować:

$$15.69) \alpha \int_0^{t^*} \int_{-L}^L |W' \ddot{W}'| dx dt = 2\alpha \int_0^{t^*} \int_0^L W' \ddot{W}' dx dt = \\ = 2\alpha \int_0^{t^*} \left\{ \ddot{W}' W' \Big|_0^L - \sum_{k=2}^{N-1} W' \Big|_{x_k} [\ddot{W}']_{x_k} - \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} W \ddot{W}'' dx \right\} dt$$

Wykorzystując warunki brzegowe (5.60) i powyższe założenia z wyrażen (5.68), (5.69) wynika następujące oszacowanie:

$$15.70) \alpha \int_0^{t^*} \int_{-L}^L |W' \ddot{W}'| dx dt \leq 2\alpha W_{\max} \left(- \int_0^{t^*} \ddot{W}' \Big|_{x=L} dt \right)$$

$$\text{gdzie: } W_{\max} = \max_{x,t} |W|, \forall x, t \in [0, L], [0, t^*]$$

Ostatecznie z nierówności (5.70), (5.65) po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów dostaniemy następujące dolne oszacowanie:

$$15.71) \frac{\int_0^L \int_0^{t^*} P \ddot{W}'' dx dt + \int_0^L \int_0^{t^*} \rho \ddot{W}' \ddot{W}' dx - \int_0^L \int_0^{t^*} D(\dot{E}''') dx dt}{W_{\max} \gg}$$

$$- \int_0^L \rho \ddot{W}''(t^*) dx + \int_0^L \int_0^{t^*} \rho \ddot{W}'' dx dt + C$$

$$\text{gdzie: } C = - \alpha \int_0^{t^*} \ddot{W}' \Big|_{x=L} dt.$$

Wprowadźmy zmienne bezwymiarowe $\underline{t} = \frac{t}{t^*}$, $\underline{x} = \frac{x}{L}$ i wybierzmy \dot{w}^* w znormalizowanej postaci. Przy tym dolne oszacowanie (5.71) przyjmuje:

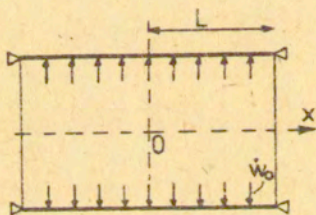
$$15.72/ \quad W_{\max} \gg \frac{t^* \int_0^1 \int_0^1 \rho \dot{w}^* d\underline{x} d\underline{t} - \int_0^1 \rho \dot{w}_0^* d\underline{x} - t^* \int_0^1 \int_0^1 \rho (\dot{\epsilon}^*) d\underline{x} d\underline{t}}{- \int_0^1 \frac{\nabla}{t^*} W^{(1)} d\underline{x} - \frac{1}{t^*} \int_0^1 \int_0^1 \nabla \nabla W d\underline{x} d\underline{t} + \zeta t^*}$$

gdzie: $\zeta = -\frac{1}{L} \chi \int_0^1 (\dot{w}_{,x}^*)_{x=1} d\underline{t}$

$$(\cdot)_{,x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \underline{x}}; \quad (\nabla) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \underline{t}}; \quad (\nabla \nabla) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \underline{t}^2}$$

5.4.3. Przykład

W celu ilustracji teorii rozpatrzmy powłokę podpartą przegubowo nieprzesuwanie na końcach. Załóżmy, że w chwili początkowej powłoka jest obciążona od wewnątrz symetrycznym impulsem prędkości \dot{w}_0 . rys. 17.



Rys.17 Cylindryczna powłoka obciążona impulsem

Wybierzmy kinematycznie dopuszczalne pole prędkości spełniające wszystkie wymagania otrzymanego wyrażenia na oszacowanie (5.72)

$$\dot{w}^* = 0; \quad \dot{w}^* = -(1-\underline{t})(1-\underline{x})$$

Liniowa część tensora prędkości odkształceń ma postać:
dla $0 < \underline{x} \leq 1$

$$\dot{\lambda}_{\underline{x}}^* = \frac{\dot{U}}{L} \underline{x} = 0, \dot{\lambda}_{\theta}^* = \frac{1}{R} (1 - \underline{t})(1 - \underline{x}), \dot{K}_{\underline{x}}^* = 0$$

dla $\underline{x} = 0$

$$\dot{\lambda}_{\underline{x}}^* = 0; \dot{\lambda}_{\theta}^* = \left. \frac{\dot{W}^*}{R} \right|_{\underline{x}=0} = -\frac{1}{R} (1 - \underline{t}); \dot{K}_{\underline{x}}^* = \left[\frac{\dot{W}^*}{L} \underline{x} \right]_{\underline{x}=0} = \frac{1 - \underline{t}}{L}$$

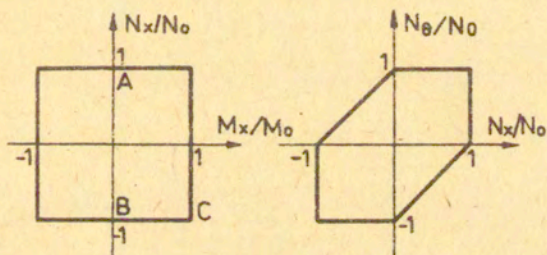
Stosujemy powierzchnię plastyczności zaproponowaną dla powłoki cylindrycznej przez Druckera i Shielda [13], która określona jest wzorem i przedstawiona na rys. 18

$$\text{Max}(|n_{\theta}|, |m_x|) = 1$$

/5.73/

$$\text{Max}(|n_x|, |m_x|) = 1$$

$$\text{Max}(|n_x|, |n_{\theta}|, |n_x - n_{\theta}|) = 1.$$



Rys. 18 Powierzchnia plastyczności dla powłok cylindrycznych

gdzie: $n_x = N_x/N_0$; $n_{\theta} = N_{\theta}/N_0$; $m_x = M_x/M_0$; $N_0 = \sigma_0 H$; $M_0 = \sigma_0 H^2/4$

funkcja dyspacji odpowiednia liniowej części tensora uogólnionych prędkości odkształceń przybierze postać

dla $0 < \underline{x} \leq 1$

$$D_1(\dot{\underline{\epsilon}}^*) = \frac{1}{R} N_0 (1 - \underline{t})(1 - \underline{x})$$

dla $\underline{x} = 0$

$$D_2 = \frac{N_0}{R}(1-\underline{t}) + \frac{M_0}{L}(1-\underline{t})$$

Całkowitą dyspację otrzymujemy całkując funkcję dyspacji po całej powierzchni środkowej

$$\int_0^1 \int_0^1 D(\underline{t}^*) d\underline{x} d\underline{t} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{N_0}{R}(1-\underline{t})(1-\underline{x}) d\underline{x} + \frac{M_0}{L^2}(1-\underline{t}) + \frac{N_0}{R}(1-\underline{t}) \right\} dt = \frac{3N_0}{4R} + \frac{M_0}{2L^2}$$

/5.74/

Na podstawie powierzchni plastyczności (5.73) możemy określić stałą

$$\lambda = \text{Max} |N_x^*| = N_0$$

Z wyrażenia (5.72) na podstawie powyższych zależności otrzymujemy

$$/5.75/ \quad W_{\max} = \frac{S \dot{W}_0 L^2 t^* - t^{*2} (M_0 + 3N_0 L^2 / 2R)}{S L^2 + N_0 t^{*2}}$$

Wyrażenie z prawej strony (5.75) osiągnie maksimum, gdy

$$t^* = \frac{H}{2\dot{W}_0} \left[-1 + \left(1 + \frac{4 S \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2 \left(\frac{1}{2} + 3L^2 / HR \right)^2} \right)^{1/2} \right] \left(\frac{1}{2} + 3L^2 / HR \right)$$

Rozpatrzmy szczególny przykład kiedy $2L^2 / HR = 1$. Wówczas wielkość t^* jest określona wzorem:

$$t^* = \left(\frac{H}{\dot{W}_0} \right) \left[-1 + \left(1 + S \dot{W}_0^2 L^2 / N_0 H^2 \right)^{1/2} \right]$$

Wstawiając otrzymane wyrażenie na czas do nierówności (5.75) dostaniemy dolne oszacowanie

/5.76/

$$W_{\max} \geq H \frac{\frac{S \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{S \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2}} \right) - \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{S \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2}} \right)^2}{\frac{S \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2} + \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{S \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2}} \right)^2}$$

Porównanie dolnego oszacowania (5.76) z rozwiązaniem Jonesa [28] i górnym oszacowaniem Płocha [66] jest przedstawione na rys. 19.

5.4.4. Uwagi końcowe

W ogólnym przypadku dolne oszacowanie Moralesa [55] ma postać:

$$\frac{W_{max}}{H} \gg \frac{1}{H} \frac{\left(\int_0^L \xi \dot{w}_0 \phi^c dx \right)^2}{2 \int_0^L \xi \phi^c dx \int_0^L D(\dot{\epsilon}_c) dx}$$

gdzie: $\dot{w} = (1 - \frac{x}{L}) \phi^c(x)$

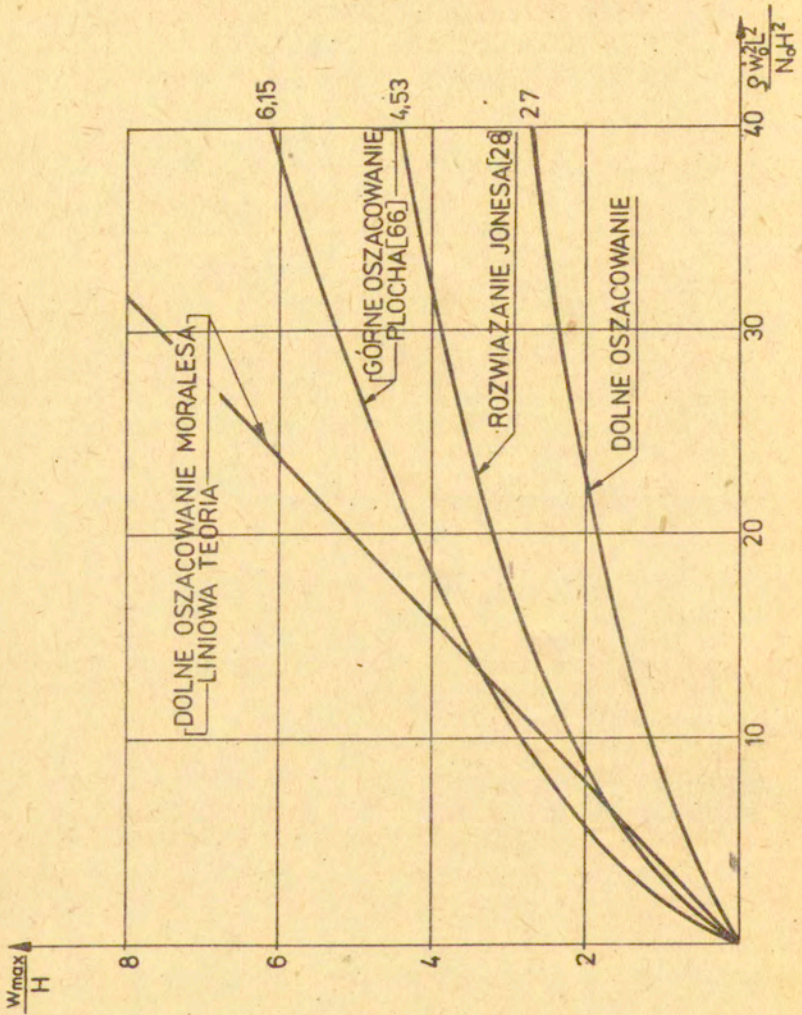
Wyberzmy $\phi^c = (1 - \frac{x}{L})$

Po wykonaniu operacji wynika następujące oszacowanie:

$$\frac{W_{max}}{H} \gg \frac{\xi R \dot{w}_0^2}{2 H N_0 (3 + HR/2L^2)}$$

W szczególnym przypadku $HR/2L^2 = 1$ dostaniemy

$$\frac{W_{max}}{H} \gg \frac{\xi \dot{w}_0^2 L^2}{4 N_0 H^2}$$



Rys.19

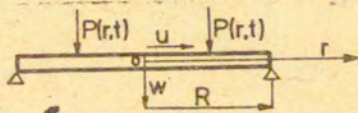
Porównanie dolnego oszacowania z rozwiązaniami znanymi w literaturze .

5.5 - Dolne oszacowanie trwałego ugięcia płyty kołowej

5.5.1 - Sformułowanie problemu

Kołowe płyty obciążone dynamicznie rozpatrywane były w pracach [24], [65], [96], w zakresie małych przemieszczeń, natomiast w pracach [27], [31], [39], [104], [105] w zakresie dużych ugięć. Rezultaty doświadczalne są dane w pracy Florencea [20]. W celu uzyskania dolnego oszacowania trwałych ugięć ze względu na zmiany geometrii stosujemy układ podstawowych równań, przedstawionych w pracy [27].

Rozpatrzmy cienką płytę kołową o promieniu R , grubości H i gęstości na jednostkę powierzchni środkowej ρ . Płyta jest wykonana z materiału sztywno-plastycznego o granicy σ_0 . Załóżmy, że w chwili początkowej płyta jest poddana działaniu powierzchniowego obciążenia symetrycznego $P(r, t)$ /rys.20/



Rys.20 Kołowa płyta obciążona dynamicznie

Układ podstawowych równań opisujących powyższy problem składa się z następujących zależności

1/- Równania ruchu

$$[M_\phi - (rM_r)'] + (rN_r \dot{w})' + rP - \rho r \ddot{w} = 0$$

15.77/

$$(rN_r)' - N_\phi - \rho r \ddot{u} = 0; rQ = M_\phi - (rM_r)'$$

2/- Związki geometryczne

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{u} + w' \dot{w}; \dot{\epsilon}_\phi = \frac{\dot{u}}{r}; \dot{K}_r = \dot{w}'; \dot{K}_\phi = \frac{\dot{w}}{r}$$

15.78/

$$\text{gdzie: } (') = \frac{\partial(\)}{\partial r}; (\dot{\ }) = \frac{\partial(\)}{\partial t}$$

N_r, N_ϕ - siła podłużna i obwodowa w płycie

M_r, M_ϕ - zginający moment podłużny i obwodowy

$\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\phi$ - prędkości wydłużeń podłużnych i obwodowych

\dot{K}_r, \dot{K}_ϕ - podłużna i obwodowa prędkość krzywizny

3/- Prawo pływnięcia

$$/5.79/ \quad \dot{\epsilon}_r = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial N_r}; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial N_\theta}; \quad \dot{K}_r = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial M_r}; \quad \dot{K}_\theta = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial M_\theta};$$

4/- Warunki początkowe, brzegowe i końcowe

Nasza uwaga jest poświęcona warunkom kinematycznie brzegowym, natomiast naprężeniowe warunki brzegowe omówimy szczegółowo w obliczeniu funkcji dysypacji. W ogólnym przypadku płyt sztywno-zamocowanych, przegubowo i swobodnie podpartych warunki kinematycznie brzegowe dla rzeczywistych i dopuszczalnych pól można pisać w ogólnej postaci

$$/5.80/ \quad W(-R,t) = W(R,t) = \dot{W}(-R,t) = \dot{W}(R,t) = 0, \quad \dot{W}^*(-R,t) = \dot{W}^*(R,t) = 0$$

$$W(r,0) = \dot{U}(r,0) = 0; \quad \dot{W}(r,0) = \dot{W}_0, \quad \dot{U}(r,0) = 0; \quad \dot{W}^*(r,t) = 0$$

5.5.2- Wyrażenie na oszacowanie

Uwzględniając równania ruchu wyrażenie zasady mocy wirtualnych ma postać

$$/5.81/ \quad \int_0^R \{ (rN_r)' \dot{u}^* + [M_\theta - (rM_r)'] \dot{w}^* + (rN_r W')' \dot{w}^* \} dr +$$

$$+ \int_0^R N_\theta \dot{u}^* dr + \int_0^R P \dot{w}^* r dr - \int_0^R \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) r dr = 0$$

Całkowanie pierwszego członu w (5.81) przez części daje

$$/5.82/ \quad \int_0^R \{ (rN_r)' \dot{u}^* + [M_\theta - (rM_r)'] \dot{w}^* + (rN_r W')' \} dr = (rN_r \dot{u}^*)_0^R +$$

$$+ [M_\theta - (rM_r)'] \dot{w}^* \Big|_0^R + (rN_r W^* W') \Big|_0^R - \int_0^R (N_r \dot{u}^* + M_\theta \dot{w}^*) r dr +$$

$$+ \int_0^R (rM_r)' \dot{w}^* dr - \int_0^R r N_r W' \dot{w}^* dr = 0$$

Z uwagi, że $N_r|_R = 0$ dla swobodnie opartej płyty, natomiast $\dot{u}^*|_R = 0$ dla przegubowo i sztywno zamocowanych płyt, a więc we wszystkich przypadkach mamy $(rN_r \dot{u}^*)_0^R = 0$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych i trzeciego równania układu (5.77) trzy pierwsze człony z prawej strony wyrażenia (5.82) znikają. Wstawiając równanie (5.82) do wyrażenia (5.81) otrzymujemy zależność:

$$/5.83/ \quad - \int_0^R (N_r \dot{u}^* + M_\theta \frac{\dot{w}^*}{r} + N_\theta \frac{\dot{u}^*}{r}) r dr + \int_0^R (r M_r)' \dot{w}^* dr - \int_0^R r N_r w' \dot{w}^* dr - \int_0^R \rho r (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) dr + \int_0^R P \dot{w}^* r dr = 0$$

W ogólnym przypadku możemy wybrać dopuszczalne pole prędkości (\dot{u}^*, \dot{w}^*) tak, aby składowa \dot{w}^* miała skok w punktach r_k tzn: $[\dot{w}^*]_{r_k} \neq 0, k=0, 1, \dots, N$. Dzielimy wtedy przedział $(0, R)$ na odcinki (r_k, r_{k+1}) , w których \dot{w}^* jest ciągłe, następnie całkujemy drugi człon w (5.83) przez części w odcinkach (r_k, r_{k+1}) i po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów, (5.83) przyjmuje postać:

$$/5.84/ \quad \int_0^R P \dot{w}^* r dr - \int_0^R \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) r dr - \sum_k \int_{r_k}^{r_{k+1}} (N_r \dot{u}^* + N_\theta \frac{\dot{u}^*}{r} + M_\theta \frac{\dot{w}^*}{r} + M_\theta \frac{\dot{w}^*}{r}) r dr - \sum_k r_k M_r |_{r_k} [\dot{w}^*]_{r_k} + (r M_r \dot{w}^*) \Big|_0^R - \int_0^R r N_r w' \dot{w}^* dr = 0$$

Dla płyty swobodnie lub przegubowo podpartej piąty człon w (5.84) znikają ($M_r|_{r=R} = 0$). Wracając do związków geometrycznych (5.78) widać, że nieliniowa część tensora uogólnionych prędkości odkształceń posiada zaledwie jedną nierówną zeru składową $(\dot{w} \dot{w}^*)$, że trzeci, czwarty i piąty człon w (5.84) wyraża wewnętrzną dyspację spowodowaną przez liniową część tensora uogólnionych prędkości odkształceń jeśli wybierzemy dopuszczalne pole prędkości \dot{w}^* mające pochodną przestrzenną nieciągłą w punktach r_k , a więc oznaczając $\dot{\epsilon}_r^* = \dot{u}^*, \dot{\epsilon}_\theta^* = \frac{\dot{u}^*}{r}, \dot{k}_\theta^* = \frac{\dot{w}^*}{r}, \dot{k}_r^* = \dot{w}^* \forall r \in (r_k, r_{k+1})$ $\dot{k}_r^* = [\dot{w}^*]_{r_k}$ dla $r = r_k$ możemy przedstawić (5.84) w postaci

$$/5.85/ \quad \int_0^R P \dot{w}^* r dr - \int_0^R \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) r dr - \int_0^R (N_r \dot{\epsilon}_r^* + N_\theta \dot{\epsilon}_\theta^* + M_\theta \dot{k}_\theta^* + M_r \dot{k}_r^*) r dr - \int_0^R r N_r w' \dot{w}^* dr = 0$$

Wykorzystując postulat stateczności dla stanów $(\dot{\epsilon}_\theta^*, \dot{\epsilon}_r^*, \dot{K}_\theta^*, \dot{K}_r^*)$, $(N_\theta, N_r, M_\theta, M_r)$ i $(0, w, \dot{w}^*, 0, 0)$ oraz całkując (5.85) po czasie w przedziale $(0, t^*)$ otrzymujemy następującą ^{nie} równość

$$/5.86/ \int_0^{t^*} \int_0^R P \dot{w}^* r dr - \int_0^{t^*} \int_0^R s (\ddot{u} \dot{u}^* + \dot{w} \dot{w}^*) r dr dt - \int_0^{t^*} \int_0^R D(\dot{\epsilon}^*) r dr dt - \int_0^{t^*} \int_0^R r N_r^{**} w' \dot{w}^* dr dt \leq 0$$

$$\text{gdzie: } D(\dot{\epsilon}^*) = N_\theta^* \dot{\epsilon}_\theta^* + N_r^* \dot{\epsilon}_r^* + M_\theta^* \dot{K}_\theta^* + M_r^* \dot{K}_r^*$$

Siły wewnętrzne $(N_\theta^*, N_r^*, M_\theta^*, M_r^*)$, (N_r^{**}) są związane odpowiednio z uogólnionymi prędkościami odkształceń $(\dot{\epsilon}_\theta^*, \dot{\epsilon}_r^*, \dot{K}_\theta^*, \dot{K}_r^*)$, $(w' \dot{w}^*)$ przez prawo płynięcia (5.79).

Rozpatrzmy ostatnią całkę w (5.86)

$$/5.87/ \int_0^{t^*} \int_0^R r N_r^{**} w' \dot{w}^* dr dt$$

Możemy podcałkowe wyrażenie w (5.87) oszacować

$$r N_r^{**} w' \dot{w}^* \leq \text{Max} |N_r^{**}| r |w' \dot{w}^*| = X r |w' \dot{w}^*|$$

$$\text{gdzie } X = \text{Max} |N_r^{**}|$$

przy tym z (5.87) wynika następujące oszacowanie

$$/5.88/ \int_0^{t^*} \int_0^R r N_r^{**} w' \dot{w}^* dr \leq X \int_0^{t^*} \int_0^R r |w' \dot{w}^*| dr$$

Całkując drugi człon w (5.86) po czasie przez części i wykorzystując warunki początkowe oraz nierówność (5.88), po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów z zależności (5.86) wynika następujące oszacowanie

$$/5.89/ - \int_0^R s [u(t^*) \ddot{u}^*(t^*) + w(t^*) \ddot{w}^*(t^*)] r dr + \int_0^{t^*} \int_0^R s (u \ddot{u}^* + w \ddot{w}^*) r dr dt + X \int_0^{t^*} \int_0^R r |w' \dot{w}^*| dr dt > \int_0^{t^*} \int_0^R P \dot{w}^* r dr dt + \int_0^R s (\dot{u}_0 \dot{u}^* + \dot{w}_0 \dot{w}^*) r dr - \int_0^{t^*} \int_0^R r D(\dot{\epsilon}^*) dr dt$$

Zakładamy, że W' posiada stały znak, np: $W' \leq 0 \forall r \in (0, R)$. W celu znalezienia dolnego oszacowania na składową w należy przyjąć kinematycznie dopuszczalne pole prędkości $\dot{W}^* = 0, \dot{W}^* \neq 0$, spełniające warunki $\ddot{W}(t^*) \leq 0, \ddot{W}^* > 0, \dot{W}^{*'} \leq 0, \dot{W}^{*''} \leq 0, [\dot{W}^*]_{r_k} \leq 0$. Przy powyższych założeniach możemy całkować trzeci człon w (5.89)

$$/5.90/ \quad \chi \int_0^{t^*} \int_0^R r |W' \dot{W}^{*'}| dr dt = \chi \int_0^{t^*} \int_0^R r W' \dot{W}^{*'} dr dt = \chi \int_0^{t^*} \left\{ (r W \dot{W}^{*'})_R - \sum_{k=1}^{N-1} (r W)_k [\dot{W}^{*'}]_k - \sum_{k=0}^N \int_{r_k}^{r_{k+1}} W (\dot{W}^{*'} + r \dot{W}^{*''}) dr \right\} dt$$

Wykorzystując warunki brzegowe i powyższe założenia z (5.90) Wynika następujące oszacowanie

$$/5.91/ \quad \chi \int_0^{t^*} \int_0^R r |W' \dot{W}^{*'}| dr dt \leq -\chi R \int_0^{t^*} \dot{W}^{*'} \Big|_{r=R} dt \cdot W_{\max}$$

gdzie: $W_{\max} = \max_{r,t} W(r,t), \forall r,t \in (0,R), (0,t^*)$

Na podstawie nierówności (5.91), (5.89) dostaniemy dolne oszacowanie na trwałe ugięcia

$$/5.92/ \quad W_{\max} \geq \frac{\int_0^{t^*} \int_0^R P \dot{W}^* r dr dt + \int_0^R S \dot{W}_0 \dot{W}^* r dr - \int_0^{t^*} \int_0^R D(\dot{E}^*) r dr dt}{\int_0^R S r \ddot{W}^*(t^*) dr + \int_0^{t^*} \int_0^R r \ddot{W}^* dr dt + C}$$

gdzie: $C = -\chi R \int_0^{t^*} \dot{W}^{*'} \Big|_{r=R} dt$.

Wprowadzmy zmienne bezwymiarowe $\xi = \frac{t}{t^*}, \underline{r} = \frac{r}{R}$ i wybierzemy \dot{W}^* w znormalizowanej postaci, przy tym dolne oszacowanie (5.92) przyjmuje postać:

$$/5.93/ \quad W_{\max} \geq \frac{\int_0^1 \int_0^1 \underline{r} P \dot{W}^* dr dt + \int_0^1 S \dot{W}_0 \dot{W}^* \underline{r} dr - \int_0^1 \int_0^1 D(\dot{E}^*) \underline{r} dr dt}{-\int_0^1 \frac{S}{t^*} \underline{r} \ddot{W}^*(1) dr + \int_0^1 \int_0^1 S \ddot{W}^* \underline{r} dr dt + C t^*}$$

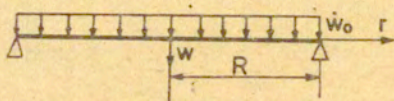
gdzie:

$$C_{\tilde{x}} = -\frac{\alpha}{R} \int_0^1 \dot{W}_{,r}^* \Big|_{r=1} dt_{\tilde{x}}, \quad \alpha = \max |N_r^{**}|$$

$$\overset{\Delta}{W}^* = \frac{\partial \dot{W}^*}{\partial t_{\tilde{x}}}; \quad \overset{\Delta \Delta}{W}^* = \frac{\partial^2 \dot{W}^*}{\partial t_{\tilde{x}}^2}; \quad \dot{W}_{,r}^* = \frac{\partial \dot{W}^*}{\partial r}$$

5.4.4. przykład

W celu ilustracji teorii rozpatrzmy płytę przegubowo-podpartą. Założmy, że w chwili początkowej dana jest jednorodna prędkość \dot{W}_0 wszystkich punktów płyty rys.21



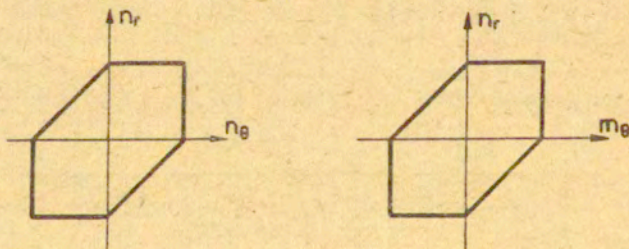
Rys. 21

Stosujemy powierzchnię plastyczności zaproponowaną przez Hodgea [22], która określona jest wzorem i przedstawiona na rys. 22

15.94/

$$\text{Max}(|m_r|, |m_\theta|, |m_r - m_\theta|) = 1$$

$$\text{Max}(|n_r|, |n_\theta|, |n_r - n_\theta|) = 1, \quad \text{Max}(|m_i|, |m_j|) = 1, \quad i, j = r, \theta$$



Rys.22 Powierzchnia plastyczności Tréski dla płyty
gdzie:

$$n_r = \frac{N_r}{N_0}, \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{N_0}, \quad m_r = \frac{M_r}{M_0}, \quad N_0 = \sigma_0 H, \quad M_0 = \sigma_0 H^2/4$$

Z powyższej powierzchni plastyczności można określić stałą χ

$$\chi = \text{Max} |N_{rr}^{**}| = N_0$$

przy tym możemy dolne oszacowanie (5.93) napisać

$$/5.95/ \quad W_{\max} \geq \frac{t^* \int_0^1 \int_0^1 \rho \dot{w}^* dr dt + \int_0^1 \dot{w}_0^* \dot{w}_0^* \rho dr - \int_0^1 \int_0^1 \rho (\dot{\epsilon}^*) r dr dt}{- \frac{1}{t^*} \int_0^1 \int_0^1 \rho \dot{w}(1) r dr + \int_0^1 \int_0^1 \rho \dot{w} r dr dt - t^* \frac{N_0}{R^2} \int_0^1 \dot{w}_0^* \Big|_{r=1} dt}$$

Wyberzmy dopuszczalne pole prędkości

$$\dot{u}^* = 0, \dot{w}^* = (1-\xi)(1-\zeta)$$

Odpowiadające mu uogólnione prędkości odkształceń mają postać

$$\dot{\epsilon}_r^* = 0, \dot{\epsilon}_\theta^* = 0, \dot{\kappa}_r^* = 0, \dot{\kappa}_\theta^* = -\frac{1}{R^2} (1-\xi)$$

Z (5.95) oraz po uwzględnieniu zadanego pola prędkości odkształceń uzyskujemy wyrażenie na dolne oszacowanie

$$/5.95*/ \quad W_{\max} \geq \frac{5R^2 \dot{w}_0^* t^{*2} - 3M_0 t^{*2}}{5R^2 + 3N_0 t^{*2}}$$

Wyrażenie z prawej strony wyrażenia (5.96) osiągnie maksimum dla

$$/5.97/ \quad t^* = H / 4\dot{w}_0^* \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{45R^2 \dot{w}_0^*{}^2}{3M_0 H}} \right)$$

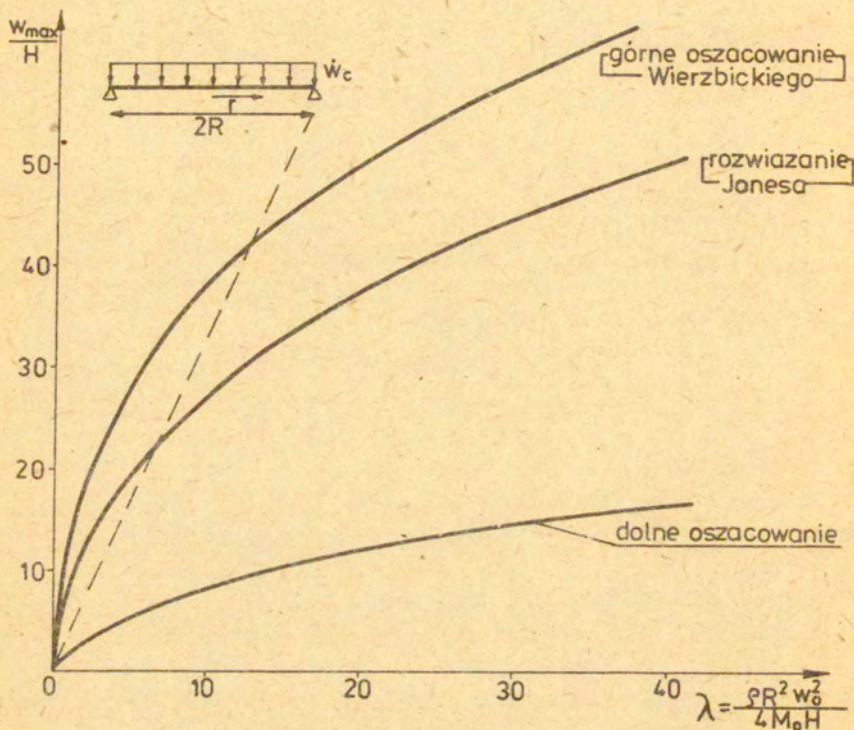
Wprowadzając (5.97) do (5.96) otrzymujemy w rezultacie najlepsze dolne oszacowanie

$$/5.98/ \quad W_{\max} \geq \frac{\frac{45R^2 \dot{w}_0^*{}^2}{3M_0 H} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{45R^2 \dot{w}_0^*{}^2}{3M_0 H}} \right) - \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{45R^2 \dot{w}_0^*{}^2}{3M_0 H}} \right)^2}{\frac{45R^2 \dot{w}_0^*{}^2}{3M_0 H} + \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{45R^2 \dot{w}_0^*{}^2}{3M_0 H}} \right)^2}$$

Porównanie powyższego oszacowania z górnym oszacowaniem z pracy [104] i rezultatami doświadczalnymi z pracy [20] jest przedstawione na rys. 23

5.4.5 Uwaga końcowa :

Dolne oszacowanie (5.93) obowiązuje dla wszystkich warunków brzegowych, które w obliczeniu funkcji dysypacji różnią się piątym członem w (5.84) dla przegubowo i swobodnie płyt ten człon znika.



Rys. 23 Porównanie dolnego oszacowania na trwałe ugięcia płyty kołowej z rozwiązaniami znanymi w literaturze

----- : Dolne oszacowanie Moralesa i Nevilla (teoria liniowa)

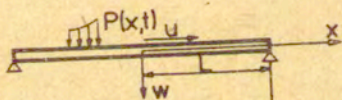
5.6. Dolne oszacowanie trwałych ugięć silnie odkształconych belek

5.6.1. Sformułowanie problemu

Belki obciążone dynamicznie były tematem szeregu prac w ostatnich latach. Podstawowe studia nad belkami obciążonymi dynamicznie w zakresie umiarkowania dużych ugięć możemy znaleźć w pracach Jonesa [27], [34], Symondsa i Mentela [87]. Wyniki oszacujące na trwałe ugięcia są przedstawione przez Plocha [66], Martina i Pontera [53]. Rezultaty doświadczalne podane są w pracach Humphreya [26], Symondsa i Jonesa [88], Florencea i Firtha [19], Jonesa i innych [29]. W celu uzyskania dolnego oszacowania na trwałe ugięcia z uwzględnieniem zmiany geometrii belki stosujemy układ podstawowych równań przedstawionych w pracy [27].

Rozpatrzmy belkę o długości $2L$, grubości H i gęstości ρ . Belka wykonana jest z materiału sztywno-plastycznego o granicy plastyczności σ_0 . Załóżmy ponadto, że w chwili początkowej belka jest poddana działaniu obciążenia symetrycznego $P(x,t)$

rys. 24



Rys. 24

Układ równań opisujących powyższy problem dynamiczny przyjmuje postać:

1/. Równania ruchu

$$|5.99| \quad N' - \xi \ddot{u} = 0; \quad M'' - (NW')' - \rho + \xi \ddot{w} = 0; \quad Q = -M'$$

2/. Związki geometryczne

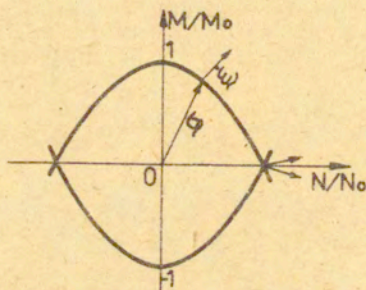
$$|5.100| \quad \dot{\xi} = \dot{u}' + w' \dot{w}'; \quad \dot{\kappa} = \dot{w}''$$

gdzie: $(\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{\partial x}; \quad (\quad)^{\cdot} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$

N, M - siła podłużna i zginający moment w belce
 $\dot{\epsilon}, \dot{\kappa}$ - prędkość wydłużenia i prędkość krzywizny
 3/. Powierzchnia plastyczności i prawo płynięcia
 Przyjmujemy poniższą postać warunku plastyczności

$$/5.101/ \quad \begin{aligned} f_1(m, n) &= m - 1 + n^2 = 0 \\ f_2(m, n) &= -m + 1 + n^2 = 0 \end{aligned}$$

Przy tym prawo płynięcia jest pokazane na rys. 25



Rys. 25 Warunek plastyczności dla belki

Gdzie: $N_0 = \sigma_0 H$, $M_0 = \sigma_0 H^2/4$

4/. Warunki brzegowe i początkowe

$$/5.102/ \quad \begin{aligned} W(-L, t) = W(L, t) = 0, \dot{W}(L, t) = \dot{W}(-L, t) = 0, \ddot{W}(-L, t) = \ddot{W}(L, t) = 0 \\ W(x, 0) = \dot{U}(x, 0) = 0; \dot{W}(x, 0) = \dot{W}_0; \ddot{U}(x, 0) = \ddot{U}_0, \ddot{W}(x, t) = \ddot{U}(x, t) = 0 \end{aligned}$$

5.6.2. Wyrażenie na oszacowanie

Z uwagi na równania ruchu wyrażenie zasady mocy wirtualnych przyjmuje postać:

$$\cdot \int_{-L}^L [N' \dot{u}^* - M' \dot{w}^* + (NW')' \dot{w}^*] dx + \int_{-L}^L P \dot{w}^* dx - \int_{-L}^L \xi (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) dx = 0$$

/5.103/

Całkując pierwszy człon w tożsamości (5.103) przez części i wykorzystując warunki brzegowe (5.102) możemy ją przedstawić w postaci

$$/5.104/ \int_{-L}^L M' \dot{w}^* dx - \int_{-L}^L N \dot{u}^* dx - \int_{-L}^L N w \dot{w}' dx + \int_{-L}^L P \dot{w}^* dx - \int_{-L}^L \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \dot{w} \dot{w}^*) dx = 0$$

W ogólnym przypadku możemy wybrać dopuszczalne pole prędkości (\dot{u}^*, \dot{w}^*) tak, aby składowa \dot{w}^* miała skok w punktach x_k , tzn.

$[\dot{w}^*]_{x_k} \neq 0$ $k = 0, \dots, N$. Dzielimy wtedy przedział $[-L, L]$ na odcinki (x_k, x_{k+1}) w których \dot{w}^* jest ciągle. Całkując pierwszy człon w wyrażeniu (5.104) przez części otrzymujemy

$$/5.105/ \left[M \dot{w}^* \right]_{-L}^L - \sum_{k=1}^{N-1} M(x_k) [\dot{w}^*]_{x_k} - \sum_{k=0}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} (N \dot{u}^* + M \dot{w}^*) dx - \int_{-L}^L N w \dot{w}' dx + \int_{-L}^L P \dot{w}^* dx - \int_{-L}^L \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \dot{w} \dot{w}^*) dx = 0$$

Dla belki swobodnie lub przegubowo podpartej $M|_{-L} = M|_L = 0$ pierwszy człon w wyrażeniu (5.105) znika. Biorąc pod uwagę związki geometryczne (5.100) widać, że pierwszy, drugi i trzeci człon w (5.105) wyraża wewnętrzną dysypację spowodowaną przez liniową część tensora uogólnionych prędkości odkształceń, jeżeli wybierzemy dopuszczalne pole prędkości \dot{w}^* mające pochodną przestrzenną nieciągłą w punktach x_k , a więc oznaczając $\dot{\xi}^* = \dot{u}^*$, $\dot{\kappa}^* = \dot{w}^* \forall x \in (x_k, x_{k+1})$; $\dot{\kappa}^* = [\dot{w}^*]_{x_k}$ w punktach x_k , możemy wyrażenie (5.105) napisać w postaci

$$/5.106/ \int_{-L}^L P \dot{w}^* dx - \int_{-L}^L \rho (\ddot{u} \dot{u}^* + \dot{w} \dot{w}^*) dx - \int_{-L}^L N w \dot{w}' dx - \int_{-L}^L (N \dot{\xi}^* + M \dot{\kappa}^*) dx = 0$$

Wykorzystując postulat stateczności dla stanów $(\dot{\xi}^*, \dot{\kappa}^*)$ ($\dot{w}^*, 0$) (N, M) , oraz całkując (5.106) po czasie w przedziale $(0, t^*)$ otrzymujemy następującą nierówność

$$\int_0^{t^*} \int_{-L}^L P \dot{w}^* dx dt - \int_0^{t^*} \int_0^L \varepsilon (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) dx dt - \int_0^{t^*} \int_{-L}^L N^{**} w' \dot{w}^* dx dt - \int_0^{t^*} \int_0^L D(\dot{\varepsilon}^*) dx dt \leq 0$$

/5.107/

gdzie: $D(\dot{\varepsilon}^*) = N^{**} \dot{\varepsilon}^* + M \dot{K}^*$

Siły wewnętrzne N^* , M^* , N^{**} są odpowiednio związane z prędkościami uogólnionymi $\dot{\varepsilon}^*$, \dot{K}^* , $w' \dot{w}^*$ przez prawo płynięcia. Po uwzględnieniu symetrii obciążenia $P(x, t)$, całkując drugi człon w (5.107) po czasie oraz wykorzystując warunki początkowe i po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów otrzymujemy w rezultacie oszacowanie

$$\int_0^{t^*} \int_0^L P \dot{w}^* dx dt + \int_0^L (\dot{u}_0 \dot{u}_0^* + \dot{w}_0 \dot{w}_0^*) dx - \int_0^{t^*} \int_0^L D(\dot{\varepsilon}^*) dx dt \leq - \int_0^{t^*} \int_0^L [\dot{u}(t^*) \dot{u}^*(t^*) + w(t^*) \dot{w}^*(t^*)] dx + \int_0^{t^*} \int_0^L \varepsilon (u \ddot{u}^* + w \ddot{w}^*) dx dt + \int_0^{t^*} \int_0^L N^{**} w' \dot{w}^* dx dt$$

/5.108/

Założmy teraz, że $w' \leq 0 \forall x \in (0, L)$. W celu uzyskania dolnego oszacowania na składową W należy przyjąć kinematycznie dopuszczalne pole prędkości $\dot{u}^* = 0, \dot{w}^* \neq 0$, spełniające warunki $\dot{w}^*(t^*) \leq 0, \dot{w}^* > 0, \dot{w}^* \leq 0, \dot{w}^* \leq 0$ i $[\dot{w}^*] \leq 0 \forall x, t \in [0, L], [0, t^*], x_0 = 0, x_N = L$. Przy powyższych założeniach $w' \dot{w}^* > 0$, rozpatrzmy ostatnią całkę w (5.108)

$$\int_0^{t^*} \int_0^L N^{**} w' \dot{w}^* dx dt$$

/5.109/

Możemy podcałkowe wyrażenie oszacować

$$N^{**} w' \dot{w}^* \leq \text{Max} |N^{**}| |w' \dot{w}^*|$$

Na podstawie warunku plastyczności (5.101) mamy :

$$\text{Max} |N^{**}| = N_0$$

Z wyrażenia (5.109) wynika następujące oszacowanie

$$\int_0^{t^*} \int_0^L N^{**} w' \dot{w}^* dx dt \leq -N_0 \int_0^{t^*} \left(\int_0^L w' \dot{w}^* dx \right) dt$$

/5.110/

Całkując prawą stronę (5.110) po x przez części i wykorzystując warunki brzegowe otrzymujemy:

$$N_0 \int_0^{t^*} \int_0^L W' \dot{W}^{*'} dx dt = N_0 \int_0^{t^*} \left[-W \dot{W}^{*'} \Big|_{x=0} - \sum_{k=1}^{N-1} W(x_k) [\dot{W}^{*'}] - \sum_{x_k}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} W \dot{W}^{*'} dx \right] dt$$

Przy powyższych założeniach wyboru \dot{W}^* wynika następujące oszacowanie

$$N_0 \int_0^{t^*} \int_0^L W' \dot{W}^{*'} dx dt \leq -N_0 \int_0^{t^*} \dot{W}^{*'} \Big|_{x=L} dt W_{\max}$$

lub

$$/5.111/ \int_0^{t^*} \int_0^L N^{**} W' \dot{W}^{*'} dx dt \leq -N_0 \int_0^{t^*} \dot{W}^{*'} \Big|_{x=L} dt W_{\max}$$

gdzie:

$$W_{\max} = \max_{x,t} W(x,t) \quad \forall x, t \in [0, L], [0, \frac{t^*}{2}]$$

Po wykorzystaniu (5.111), (5.108) i założeń wyboru \dot{W}^* otrzymujemy dolne oszacowanie na składową W .

$$W_{\max} \geq \frac{\int_0^{t^*} \int_0^L \xi \dot{W}^* dx dt + \int_0^L \xi \dot{W}_0^* dx - \int_0^{t^*} \int_0^L D(\dot{\xi}^*) dx dt}{-\int_0^L \xi \ddot{W}^*(t^*) dx + \int_0^{t^*} \int_0^L \xi \ddot{W}^* dx dt + C}$$

/5.112/

$$gdzie: \quad C = -N_0 \int_0^{t^*} \dot{W}^{*'} \Big|_{x=L} dt$$

Wprowadźmy zmienne bezwymiarowe $\underline{t} = \frac{t}{t^*}$, $\underline{x} = \frac{x}{L}$ i wybierzemy dopuszczalne pole prędkości \dot{W}^* w znormalizowanej postaci, wtedy wyrażenie na dolne oszacowanie (5.112) przy nowych zmiennych ma postać:

$$/5.113/ \quad W_{\max} \geq \frac{t^* \int_0^1 \int_0^1 P \dot{W}^* d\underline{x} d\underline{t} + \int_0^1 \xi \dot{W}_0^* d\underline{x} - t^* \int_0^1 \int_0^1 D(\dot{\xi}^*) d\underline{x} d\underline{t}}{-\int_0^1 \frac{\xi}{t^*} \ddot{W}^*(1) d\underline{x} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\xi}{t^*} \ddot{W}^* d\underline{x} d\underline{t} + C t^*}$$

gdzie:

$$\underline{C} = -\frac{N_0}{L^2} \int_0^1 \dot{W}_{, \underline{x}}^* dt, \quad D(\dot{\underline{E}}^*) = M^* \dot{K}^*; \quad \dot{K}^* = \frac{\dot{W}_{, \underline{x}\underline{x}}^*}{L^2}$$

$$\dot{W}_{, \underline{x}}^* = \frac{\partial \dot{W}^*}{\partial \underline{x}}, \quad \dot{W}_{, \underline{x}\underline{x}}^* = \frac{\partial^2 \dot{W}^*}{\partial \underline{x}^2}; \quad \dot{W}^* = \frac{\partial \dot{W}^*}{\partial t}, \quad \dot{W}^* = \frac{\partial^2 \dot{W}^*}{\partial t^2}$$

5.6.3. Przykład

Jako ilustrację rozpatrzmy belkę przegubowo podpartą. Założmy, że w chwili początkowej dana jest jednorodna prędkość $\dot{W}_0 = \text{const}$ wszystkich punktów belki. Wybierzemy dopuszczalne pole prędkości

$$\dot{W}^* = (1 - \underline{t})(1 - \underline{x}); \quad \dot{u}^* = 0$$

Odpowiadające mu uogólnienie prędkości odkształceń określone są wzorem:

$$0 < \underline{x} \leq 1, \quad \dot{\underline{E}}^* = 0, \quad \dot{K}^* = 0$$

$$\underline{x} = 0, \quad \dot{\underline{E}}^* = 0; \quad \dot{K}^* = -\frac{1 - \underline{t}}{L^2}$$

$$\underline{C} = \frac{N_0}{L^2} \int_0^1 (1 - \underline{t}) dt = \frac{N_0}{2L^2}$$

Na podstawie wyrażenia (5.113) oraz po uwzględnieniu powyższego pola prędkości odkształceń otrzymujemy oszacowanie:

$$/5.114/ \quad W_{\max} \gg \frac{L^2 \dot{W}_0 t^* - M_0 t^{*2}}{eL^2 + N_0 t^{*2}}$$

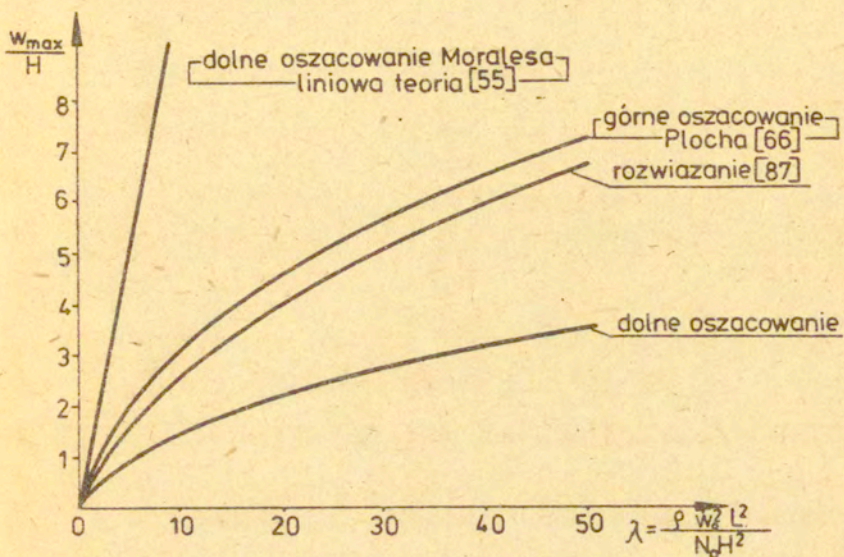
Wyrażenie z prawej strony oszacowania (5.114) osiągnie maksimum gdy:

$$t^* = \frac{H}{4\dot{W}_0} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16 e \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2}} \right)$$

Ostatecznie najlepsze oszacowanie dostaniemy po stosowaniu t^* do wyrażenia (5.114)

$$\frac{W_{\max}}{H} \gg \frac{1}{4} \frac{\frac{16 \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16 \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2}} \right) - \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16 \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2}} \right)^2}{\frac{16}{N_0 H^2} e \dot{W}_0^2 L^2 + \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16 \dot{W}_0^2 L^2}{N_0 H^2}} \right)^2}$$

Porównanie powyższego oszacowania z górnym oszacowaniem z pracy [66] i rozwiązaniem z pracy [87] jest przedstawione na rys. 26

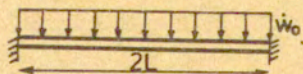


Rys. 26 Porównanie dolnego oszacowania trwałych ugięć belki z rozwiązaniami znanymi w literaturze.

5.6.4. Uwaga szczegółowa

W powyższych punktach stosowaliśmy założenie o wyborze kinematycznie dopuszczalne pole prędkości tak, aby $\dot{W}^{*''} \leq 0$ dla wszystkich punktów ciała. Założenie to ogranicza możliwość wyboru dopuszczalnego pola prędkości. Pokażemy, że w szczególnych przypadkach możemy pominąć powyższe założenie i z ogólnego wzoru szacującego otrzymujemy dolne oszacowanie na składową W .

Jako ilustrację powyższego omówienia, rozpatrzmy belkę sztywno-zamocowaną na końcach. Załóżmy ponadto, że w chwili początkowej $t=0$ dana jest jednorodna prędkość \dot{w} wszystkich punktów belki. rys. 27



Rys. 27

Wybermy dopuszczalne pole prędkości $\dot{u}^* = 0$, $\dot{w}^*(x,t) = (1-x^2)(1-t)$.
Z wyrażenia (5.108) po wstawieniu zadanego pola prędkości otrzymujemy

(5.115)

$$\int_0^1 \int_0^1 \dot{w}_0 \dot{w}_0^* dx dt - t^* \int_0^1 \int_0^1 D(\dot{\epsilon}^*) dx dt \leq \frac{S}{t^*} \int_0^1 W(1) \dot{W}(1) dx + \frac{t^* N_0}{L^2} \int_0^1 \int_0^1 |w_{,x} \dot{w}_{,x}| dx dt$$

gdzie:

$$\dot{W}^* = \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial t}, \quad \dot{w}_{,x}^* = \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial x}$$

$$0 < x < 1, \quad \dot{\epsilon}_{,z}^* = 0, \quad \dot{K}^* = -\frac{4}{L^2}(1-t)(1-3x^2)$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad \dot{\epsilon}_{,z}^* = 0, \quad \dot{K}^* = 0$$

$$\dot{w}_{,x}^* = -4(1-t)(1-x^2)x \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$\dot{w}_{,xx}^* = -4(1-t)(1-3x^2)$$

Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń i plastycznej powierzchni przedstawionej na rys. 25 drugi człon w wyrażeniu (5.115) jest określony w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 D(\dot{\epsilon}^*) dx dt &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{4M_0}{L^2}(1-t)(1-3x^2) dx + \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{4M_0}{L^2}(1-t)(3x^2-1) dx \right\} dt \\ &= \frac{8M_0}{3\sqrt{3}L^2} \end{aligned}$$

Całkując ostatni człon w wyrażeniu (5.115) przez części mamy

$$\int_0^1 \int_0^1 |w_{,x} \cdot \dot{w}_{,x}^*| dx dt = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 +(-w_{,x})(1-t)x(1-x^2) dx \right\} dt =$$

$$= \int_0^1 4(1-t) \left[-w \cdot x(1-x^2) \right]_0^1 + \int_0^1 w(1-3x^2) dx dt = 4 \int_0^1 \int_0^1 w(1-3x^2) dx dt$$

|5.116|

Wykorzystując twierdzenie o wartości średniej dla całki o postaci: $\int_a^b f(x)g(x) dx$, dla której $f(x)$ jest monotoniczne w przedziale $[a, b]$ a $g(x)$ jest ciągle w tym przedziale, to istnieje taki punkt $c \in [a, b]$ spełniający następującą równość: $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^c g(x) dx + f(b) \int_c^b g(x) dx$$

Dokonując w wyrażeniu (5.116) $f(x)=w$, $g(x)=(1-3x^2)$ otrzymujemy postać:

$$\int_0^1 \int_0^1 |w_{,x} \cdot \dot{w}_{,x}^*| dx dt = 4 \int_0^1 (1-t) \left[w(0,t) \int_0^c (1-3x^2) dx + w(1,t) \int_c^1 (1-3x^2) dx \right] dt$$

$$c \in [0, 1]$$

Biorąc pod uwagę warunki brzegowe dostaniemy oszacowanie

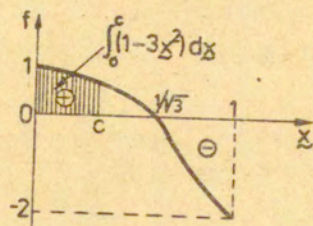
|5.117|

$$\int_0^1 \int_0^1 |w_{,x} \cdot \dot{w}_{,x}^*| dx dt \leq 2W_{\max} \int_0^1 (1-3x^2) dx = 2W_{\max} \int_0^1 (1-3x^2) dx$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}} W_{\max}$$

/patrz rys. 28 /

*Zobacz: Fichtengolc G.M. Kurs differencjalnego i integralnego isicislenija. Tom II Moskwa 1951 stron.137



Rys. 28 interpretacja oszacowania całki $\int_0^c (1-3x^2) dx$

Z wyrażenia (5.115) po wstawieniu zależności (5.117) wynika natychmiast następujące oszacowanie

$$/5.118/ \quad W_{max} \gg \frac{\varepsilon \dot{W}_0 L^2 t^* - (5/\sqrt{3}) M_0 t^{*2}}{\varepsilon L^2 + (5/2\sqrt{3}) M_0 t^{*2}}$$

Wyrażenie z prawej strony oszacowania (5.118) osiągnie maksimum, dla

$$t^* = \frac{H}{2\dot{W}_0} \left[-1 + \sqrt{1 + (2\sqrt{3} \varepsilon \dot{W}_0^2 L^2) / 5 M_0 H} \right]$$

Wstawiając powyższy wynik do prawej strony oszacowania (5.118) mamy najlepsze oszacowanie na składową w

/5.119/

$$W_{max} \gg \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2\sqrt{3} \varepsilon \dot{W}_0^2 L^2}{5 M_0 H} (-1 + \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3} \varepsilon \dot{W}_0^2 L^2}{5 M_0 H}}) - (-1 + \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3} \varepsilon \dot{W}_0^2 L^2}{5 M_0 H}})^2}{\frac{2\sqrt{3} \varepsilon \dot{W}_0^2 L^2}{5 M_0 H} + (-1 + \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3} \varepsilon \dot{W}_0^2 L^2}{5 M_0 H}})^2}$$

Porównanie powyższego oszacowania z rozwiązaniem z pracy [87] i rezultatami doświadczanymi z prac [19], [26], [88] oraz górnym oszacowaniem [67] jest przedstawione na rys. 29

5.6.5. Porównanie z teorią liniową

W ogólnym przypadku można oszacowanie Moralesa przedstawić w postaci

$$\frac{W_{max}}{H} \gg \frac{\left(\int_0^L \xi \dot{w}_0 \phi^c dx \right)^2}{2H \int_0^L \xi \phi^c dx \int_0^L D(\underline{\kappa}^c) dx}$$

lub

$$\frac{W_{max}}{H} \gg \frac{L^2 \left(\int_0^1 \xi \dot{w}_0 \phi^c d\underline{x} \right)^2}{2H \int_0^1 \xi \phi^c d\underline{x} \int_0^1 D(\underline{\kappa}^c) d\underline{x}}$$

Wyberzemy $\phi^c = (1 - \underline{x}^2)^2$. Po operacji wynika następujące oszacowanie.

$$\frac{W_{max}}{H} \gg \frac{\sqrt{3} \xi \dot{w}_0^2 L^2}{20 M_0 H} \quad \left(\int_0^1 D(\underline{\kappa}^c) d\underline{x} = 16 M_0 / 3 \sqrt{3} L^2 \right)$$

Na rys. 29 pokazano, że krzywa ograniczająca (5.119) przebiega blisko punktów doświadczalnych. Ponadto dokładność dolnego oszacowania rośnie ze wzrostem poziomu energii kinetycznej doprowadzonej do belki w chwili początkowej. Jednocześnie pokazano, że dolne oszacowanie w ramach teorii małych ugięć nie zgodzi się z rezultatami doświadczalnymi.

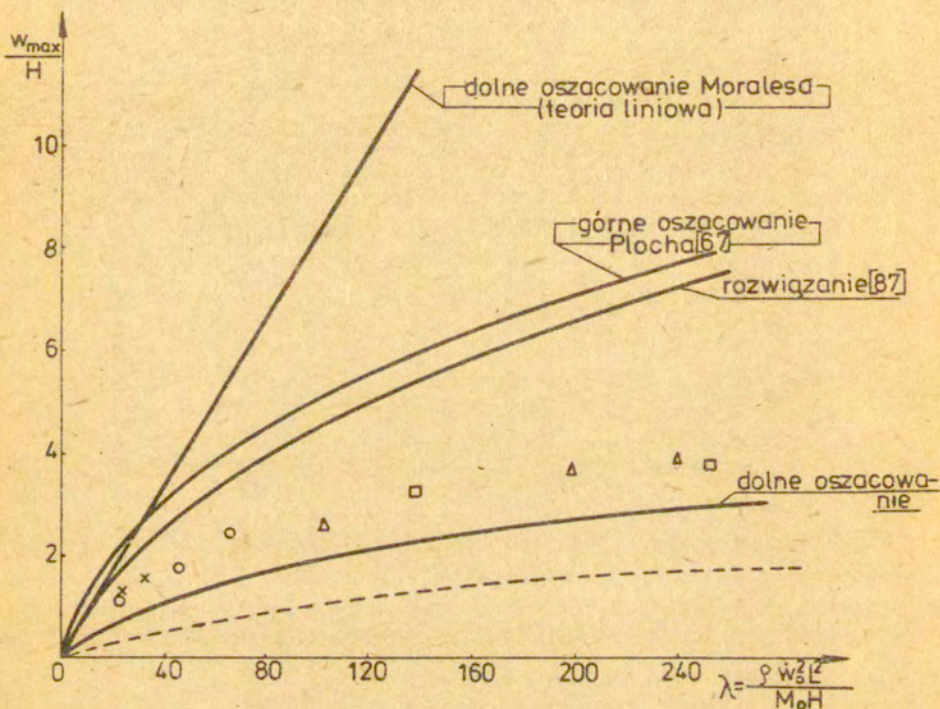
5.6.6- Wnioski

-Dolne oszacowanie(5.112) lub(5.113) jest uogólnione dla wszystkich warunków brzegowych, które w obliczeniu funkcji dysypacji różnią się pierwszym członem w (5.105). Dla przegubowo-i swobodnie opartych **belek** ten człon znika.

-Wybierając dopuszczalne pole prędkości $\dot{w}^* = (1 - \underline{x}^2)^2 (1 - t)$ otrzymujemy dolne oszacowanie lepsze niż dolne oszacowanie uzyskane przez wybór $\dot{w}^* = (1 - x)(1 - t)$. Stąd wynika, że można wyeliminować niektóre dodatkowe założenia o wyborze dopuszczalnych pól prędkości, to pozwala zwiększyć dokładność otrzymanego dolnego oszacowania.

-W przypadku belek sztywno-zamocowanych otrzymujemy dobrą

zgodność uzyskanego dolnego oszacowania z rezultatami doświadczalnymi. Jednocześnie pokazano, że dolne oszacowanie w ramach małych ugięć nie zgadza się z rezultatami doświadczalnymi.



----- : Dolne oszacowanie uzyskane przez wybór $\dot{w}^* = (1-x)(1-t)$

Rys. 29 . Porównanie dolnego oszacowania na największe trwałe ugięcia środka belki z rozwiązaniami znanymi w literaturze

Funkty doświadczalne:

○	- 2L/H= 54,4	,	H = 0.0922in.
△	- 2L/H= 45,75	,	H = 0.1097in.
○	- 2L/H= 31,7	,	H = 0.1582in.
x	- 2L/H= 26,38	,	H = 0.1902in.

6. OSZACOWANIE DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ KONSTRUKCJI OBCIĄŻONYCH IMPULSEM SKOŃCZONYM

6.1. Sformułowanie problemu.

W poprzednim rozdziale podane zostały ogólne wzory szacujące trwałe ugięcia cienkich konstrukcji poddanych obciążeniu impulsem o nieskończenie krótkim oraz skończonym czasie trwania, w zakresie teorii umiarkowanie dużych ugięć. W konkretnych przypadkach były rozpatrywane cienkie konstrukcje obciążone impulsem prędkości. Kolejny rozdział poświęcony jest zagadnieniom dolnych oszacowań na ugięcia konstrukcji obciążonych impulsem skończonym. W szczególności rozpatrywane jest jednoparametrowe obciążenie dane wzorem $P_2(x,t) = P(t) \cdot P_1(x)$.

W ogólnym przypadku postać funkcji $P(t)$ jest dowolna i ona spełnia warunek $P(t_1) > P(t_2)$ kiedy $t_1 < t_2$. Szczególna postać mogła interesować autorów w literaturze:

$$6.1) \quad p(t) = \delta_{p_0} \begin{cases} \delta = 1 & 0 < t \leq t_0 \\ \delta = 0 & t > t_0 \end{cases}$$

gdzie: $P_0 \gg P_c$ P_c -statycznie graniczna nośność
 $t_0 \leq t_f$ t_f -czas trwania rzeczywistego ruchu konstrukcji

ozn: ociążenie spełnia się przed czasem, w którym ustaje ruch ciała. W tym przypadku warunki początkowe ma postać:
w chwili $t = 0$ $u_{i0} = 0, \dot{u}_{i0} = 0$

Studia nad konstrukcjami obciążonymi impulsem skończonym były tematem szeregu prac w zakresie małych ugięć [21], [40], [56], [86], [106], [107], [108], a w zakresie dużych ugięć [39], [41]. Uzyskane dotychczas rezultaty w tej dziedzinie zdają się wskazywać, że końcowa postać trwałych przemieszczeń zależy od wielkości całkowitego impulsu $I = \int_0^{t_f} P(t) dt$ przekazanego konstrukcji. Ponadto duży wpływ ma historia obciążenia $P(t)$. Wpływ zmienności obciążenia w czasie na wielkości trwałych przemieszczeń kulistej powłoki o małej wyniesłości oraz płyty kołowej, przy $P(t) = P_0 = \text{const}$ badany był w pracach Kaliszkyego [29], [31]. Pokazano, że wprowadzenie pewnych parametrów w dużym stopniu pozwala uwzględnić historie obciążenia. W niniejszych punktach rozpatrywany będzie wpływ zmienności obciążenia w czasie na trwałe przemieszczenia

cienkich konstrukcji w ramach teorii umiarkowanie dużych ugięć, przy $P/t/ = P_0 = \text{const}$ (6.1)

6.2. Belka przegubowo-podparta

Rozpatrzmy belkę o długości $2L$, grubości H , gęstości S , przegubowo-zamocowana na końcach i obciążona impulsem ciśnienia $P(x,t) = P_0 = \text{const}$ o skończonym czasie trwania $(0, t_0)$, $(t_0 \leq t_f)$

$$P(x,t) = \begin{cases} P_0 = \text{const} & t \in (0, t_0) \quad x \in (-L, L) \\ 0 & t > t_0 \quad x \in (-L, L) \end{cases}$$

Z ogólnego wzoru (5.113) wynika następujące oszacowanie

$$/6.2/ \quad W_{\max} \gg \left[t^* \int_0^1 P_0 \dot{W}^* dx dt - t^* \int_0^1 \int_0^1 D(\ddot{\xi}^*) dx dt \right] / \left[- \int_0^1 \frac{S}{t^*} \dot{W}^*(1) dx + \int_0^1 \int_0^1 \frac{S}{t^*} \dot{W}^* dx dt \right]$$

gdzie: $\underline{c} = \frac{N_0}{L^2} \int_0^1 \dot{W}_1^* dx \Big|_{x=1} dx$

Obecnie wybierzmy dopuszczalne pole prędkości $\dot{U}^* = 0, \dot{W}^* = (1-t)(1-x)$

Na podstawie wyrażenia (6.2) oraz po uwzględnieniu powyższego pola prędkości otrzymujemy oszacowanie

$$/6.3/ \quad W_{\max} \gg \frac{P_0 t_0 L^2 t^* - P_0 t_0^2 L^2 / 2 - M_0 t^{*2}}{S L^2 + N_0 t^{*2}}$$

Najlepsze dolne oszacowanie dostaniemy dla wielkości t^* obliczonej z warunku maksimum prawej strony wyrażenia (6.3)

$$t^* = \frac{SH}{4I} \left\{ \left(\frac{\lambda}{M} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{M} - 1 \right)^2 + 4\lambda} \right\}$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{I^2 L^2}{5HM_0} ; I = P_0 t_0, \mu = \frac{P_0}{P_c}$$

$P_c = 2M_0/L^2$ - statycznie graniczna nośność.

Powyższy związek wyraża nieliniową zależność czasu trwania ruchu, który należy określić od intensywności obciążenia P_0 i czasu obciążenia t_0 , a więc końcowa postać najlepszego oszacowania będzie wynosiła:

$$\frac{W}{H} \max_{\lambda} = \frac{\lambda \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right)^2 + 4\lambda} \right] - \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right)^2 + 4\lambda} \right]^2}{4\lambda + \left[\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right)^2 + 4\lambda} \right]^2} = \delta(\mu)$$

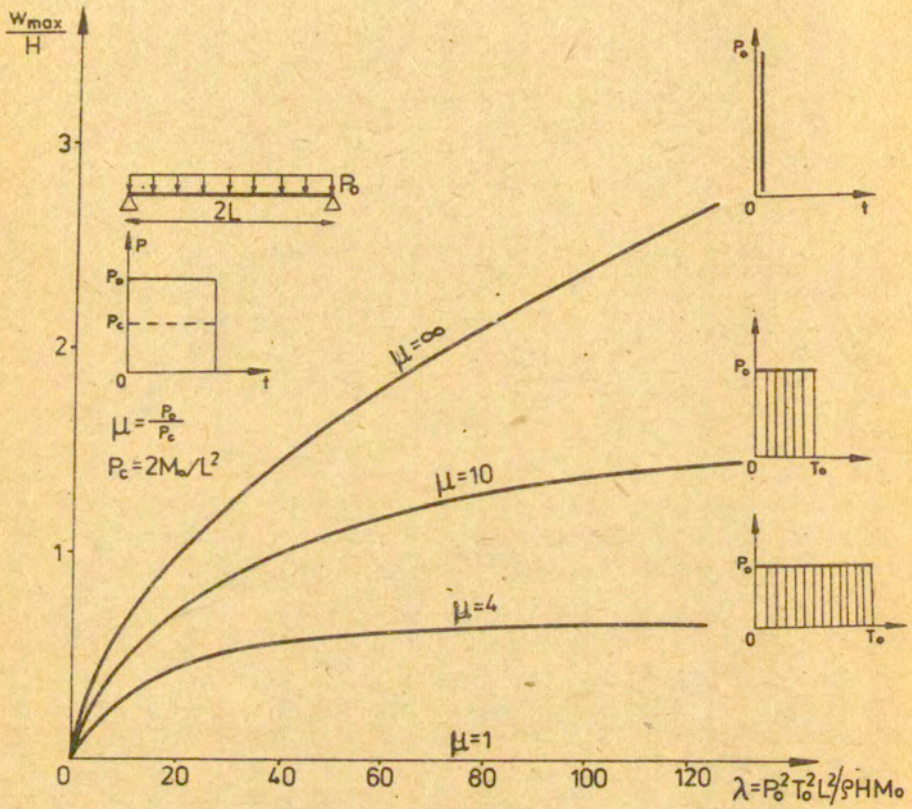
$$\delta(1) = 0, \delta(\infty) = \frac{\lambda(1 + \sqrt{1 + 4\lambda}) - \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{1 + 4\lambda})^2}{4\lambda + (-1 + \sqrt{1 + 4\lambda})^2}$$

Dolne oszacowanie (6.4) obliczone dla różnych wartości parametrów μ jest przedstawione na rys. 30

Z analizy otrzymanego związku (6.4) i rysunku. Wynikają następujące wnioski:

a/. uwzględnienie nieliniowej części tensora prędkości odkształcenia sprowadza do nieliniowej zależności największego trwałego ugięcia od parametrów λ, μ

b/. Parametry μ, I mają równoważny wpływ na trwałe ugięcia. Dla $\mu \leq 4, \lambda > 40$, trwałe ugięcie nie zależy od parametru I . W tym obszarze proces płynięcia plastycznego jest rozpatrywany przez parametr μ . Natomiast dla $\mu > 15$ można pominąć wpływ tego parametru.



RYS. 30

Wpływ historii obciążenia na trwałe ugięcia belek.

6.3. Kołowa płyta przegubowo-podparta

Rozpatrzmy kołową płytę o grubości H , gęstości ρ , promieniu R i obciążona impulsem ciśnienia $P(r, t) = P_0 = \text{const}$ o skończonym czasie trwania $(0, t_0)$ ($t_0 \leq t_f$)

$$P(r, t) = \begin{cases} P_0 = \text{const} & t \in (0, t_0) \quad \forall r \in (-R, R) \\ 0 & t > t_0 \quad \forall r \in (-R, R) \end{cases}$$

Z ogólnego wzoru (5.95) wynika następujące oszacowanie

$$|6.5| \quad W_{\max} \approx \frac{t^* \int_0^1 \int_0^{t^*/t} P_0 r \dot{w}^* dr dt - \int_0^1 \int_0^1 D(\dot{E}^*) r dr dt}{-\int_0^1 \frac{\rho}{t^*} r \dot{w}^*(1) dr + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho}{t^*} \dot{w}^* r dr dt + C}$$

$$\text{gdzie: } C = -\frac{N_0}{R^2} \int_0^1 \dot{w}^* r \Big|_{r=1} dr$$

Obecnie wybierzmy dopuszczalne pole prędkości $\dot{w}^* = (1-t)(1-r)$ dla $t \leq 1, \dot{w}^* = 0$ dla $t > 1$. Na podstawie (6.5) oraz po uwzględnieniu powyższego pola prędkości otrzymujemy oszacowanie

$$|6.6| \quad W_{\max} \approx \frac{P_0 R^2 t_0^* - P_0 R^2 t_0^* / 2 - 3M_0 t^{*2}}{5R^2 + 3N_0 t^{*2}}$$

Najlepsze oszacowanie dolne mamy dla wielkości t^* obliczonej z warunku maksimum prawej strony wyrażenia (6.6)

$$t^* = \frac{5H}{4I} \left[\left(-1 - \frac{\lambda}{3M} \right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{3M} \right)^2 + \frac{4}{3}\lambda} \right]$$

gdzie: $\lambda = I^2 R^2 / \rho H M_0$, $I = P_0 t_0$, $M = P_0 / \rho c$

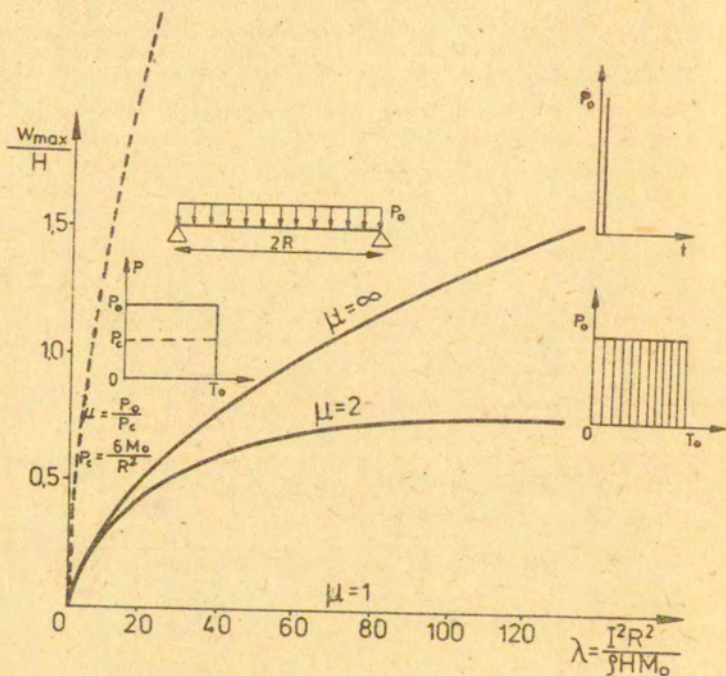
$\rho c = 6M_0 / R^2$ - statycznie graniczna nośność.

Należy podkreślić, że w odróżnieniu od twierdzeń szacujących w ramach liniowej teorii [40], [56] tutaj zależność czasu trwania ruchu od intensywności obciążenia P_0 i czasu obciążenia P_0 jest nieliniowa.

a więc końcowa postać najlepszego oszacowania będzie wynosiła

$$|6.7| \quad \frac{W_{max}}{H} \gg \frac{1}{4} \frac{\frac{4}{3}\lambda \left[\left(-1 + \frac{\lambda}{3\mu}\right) + \sqrt{\left(-1 + \frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 + \frac{4}{3}\lambda} \right] - \frac{4}{3}\lambda \left[\left(-1 - \frac{\lambda}{3\mu}\right) + \sqrt{\left(-1 - \frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 + \frac{4}{3}\lambda} \right]}{4 \frac{\lambda}{3} + \left[\left(-1 + \frac{\lambda}{3\mu}\right) + \sqrt{\left(-1 + \frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 + \frac{4}{3}\lambda} \right]^2}$$

Dolne oszacowanie (6.7) dla różnych wartości parametrów jest przedstawione na rys. 31



--- : Rozwiązanie Kaliszkego [39], [41] $\mu = \infty$

Rys. 31. Wpływ historii obciążenia na trwałe ugięcia płyty kołowej.

Z analizy rysunku 31 pokazano, że

- parametry $I = P_0 I_0$, $\mu = \frac{P_0}{P_c}$ mają równoważny wpływ na trwałe ugięcia. Dla $\mu \leq 2, \lambda \gg 80$ można pominąć wpływ parametru I , natomiast dla $\mu > 10$ parametr I gra ważną rolę w procesie płynięcia plastycznego, oraz wpływ parametru μ może być nie uwzględniony w analizie. Powyższe wyniki zgadzają się z przewidywaniami Kaliszkyego przedstawionymi w [39].

- Otrzymane dolne oszacowanie jest oddalone od rozwiązania Kaliszkyego [39], a więc wymaga się zwiększyć dokładność metody szacującej przez odpowiedni wybór dynamicznie dopuszczalnych pól prędkości, co jest dalsze badanie.

6.4. Powłoka kulista

Rozpatrzmy kulistą powłokę o grubości H , gęstości S , promieniu R , zamocowana na obwodzie i obciążona od wewnątrz symetrycznym impulsem ciśnienia w kierunku promienia $P(\phi, t) = P_0 = \text{const}$, o skończonym czasie trwania $(0, t_0)$.

$$P(\phi, t) = \begin{cases} P_0 & t \in (0, t_0) & \phi \in (-\phi_0, \phi_0) \\ 0 & t > t_0 & \phi \in (-\phi_0, \phi_0) \end{cases}$$

Z ogólnego wzoru (5.21) wynika następujące oszacowanie

$$\begin{aligned} /6.8/ \quad W_{\max} & \geq \frac{t^* \int_0^{t^*/t_0} \int_0^{\phi_0} P_0 \dot{W}^* \sin \phi d\phi dt - t^* \int_0^1 \int_0^{\phi_0} D(\dot{\xi}^*) \sin \phi d\phi dt}{\frac{S}{t^*} \int_0^1 \int_0^{\phi_0} \dot{W}^* \sin \phi d\phi dt - \frac{S}{t^*} \int_0^{\phi_0} \dot{W}^*(1) \sin \phi d\phi + Ct} \\ \text{gdzie: } C & = -\frac{N_0}{R^2} \int_0^1 \sin \phi \dot{W}^{*'} |_{\phi_0} dt \end{aligned}$$

- Obecnie wybierzmy dopuszczalne pole prędkości

$$\dot{W}^* = \frac{(1-t)(\cos \phi - \cos \phi_0)}{1 - \cos \phi_0} \quad \text{dla } t \leq 1, \dot{W}^* = 0 \quad \text{dla } t > 1$$

Z wyrażenia (6.8) po wstawieniu zadanego pola prędkości do (6.8) otrzymujemy oszacowanie

$$/6.9/ \quad W_{\max} \approx \left[AP_0 t_0 t^* - AP_0 t_0^2 / 2 - B t^{*2} \right] / \left[SA + D t^{*2} \right]$$

Stałe A, B, D są obliczone przez wzory przedstawione w poprzednim rozdziale

Wyrażenie z prawej strony (6.9) osiągnie maksimum, dla

$$t^* = \frac{(P_0 t_0 D - 2SB) + \sqrt{(DP_0 t_0 - 2SB)^2 - 4SADP_0^2 t_0^2}}{2DP_0 t_0}$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$

W tym przypadku stałe A, B, D i statycznie graniczna nośność w pracy [64] są określone przez następujące wzory

$$A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{N_0}{2R} (1 + H/4R)$$

$$D = N_0/2R; \quad P_c = \frac{2N_0}{R} (1 + H/4R)$$

Podstawiając te wartości do wyrażenia określonego wielkości t^* otrzymujemy

$$t^* = \frac{SH}{I} \left\{ \frac{\lambda R}{4HM \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right)} - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right) + \sqrt{\left[\frac{\lambda R}{4 \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right) HM} - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right) \right]^2 + \frac{RA}{H}} \right\}$$

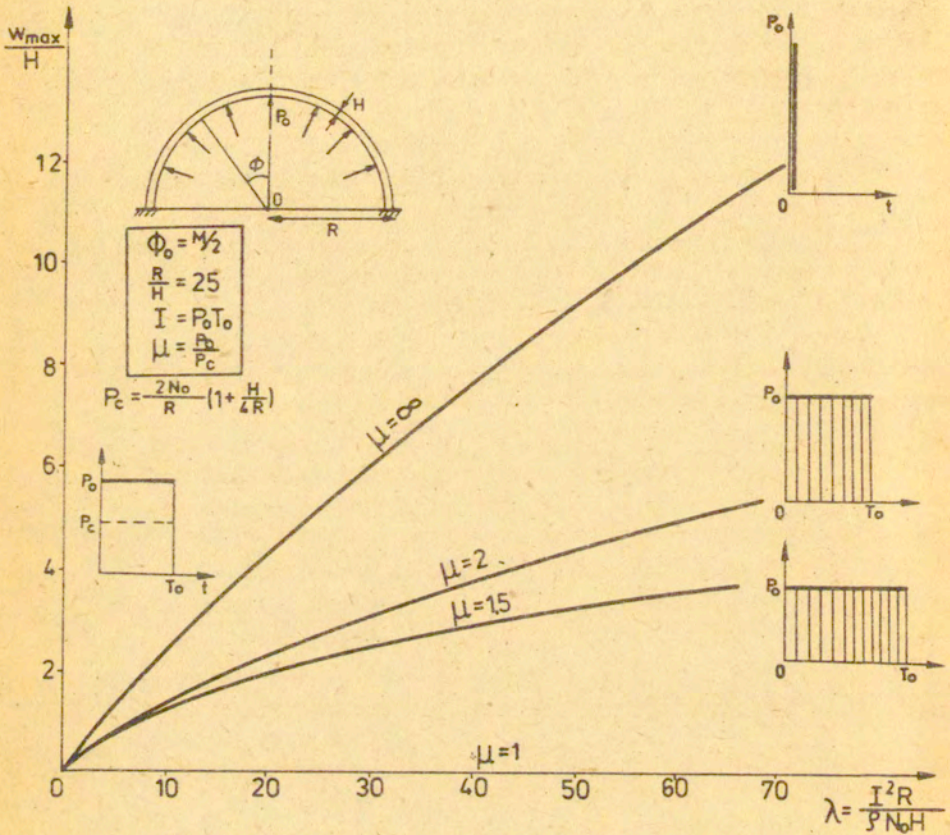
gdzie: $\lambda = I^2 R / SH N_0$, $I = P_c t_0$, $M = \frac{P_0}{P_c}$

Powyższy związek daje nieliniową zależność czasu trwania ruchu od parametrów I, M.

Ostatecznie dostaniemy dolne oszacowanie dla przedstawionego przypadku:

$$\begin{aligned} \frac{W}{H} \max \geq & \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right) \left[\frac{R\lambda}{H(R/H + 1/4)} \left\{ \frac{R\lambda}{4\mu H(R/H + 1/4)} - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right) \sqrt{\frac{R\lambda}{4\mu H(R/H + 1/4)}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{R\lambda}{H} \right\} - \frac{R^2\lambda^2}{4\mu H^2(R/H + 1/4)^2} - \left\{ \frac{R\lambda}{4\mu H(R/H + 1/4)} - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\left[\frac{R\lambda}{4\mu H(R/H + 1/4)} - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right)^2 + \lambda R/H \right]^2} \right] \right] / \left[\lambda R/H + \left\{ \frac{R\lambda}{4\mu H(R/H + 1/4)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right) + \sqrt{\left[\frac{R\lambda}{4\mu H(R/H + 1/4)} - \left(\frac{R}{H} + \frac{1}{4} \right)^2 + \lambda R/H \right]^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

Dolne oszacowanie obliczone dla różnych wartości μ jest przedstawione na rys. 32



Rys. 32

Wpływ historii obciążenia na trwałe ugięcia powłoki kulistej

7 - WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Wykorzystując możliwość otrzymania dolnego oszacowania przemieszczeń bez oszacowywania czasu trwania deformacji, metoda dolnego oszacowania dla problemów liniowych zbudowana została w trzecim rozdziale. Metoda ta była w następnych rozdziałach rozszerzona na problemy nieliniowe. Ogólne sformułowanie zaproponowanej metody zastało przedstawione w konsekwentnym opisie materialnym, tzn. stosując tensor naprężeń Pioli-Eirchhafa oraz tensor odkształceń Greena. W dowodzie rozdzielony został tensor odkształceń na część liniową i nieliniową, które zatem traktowaliśmy jako niezależne od siebie kinematyczne pola odkształceń. Na podstawie dowolności wyboru stanów w postulacie stateczności przyjmowaliśmy za pierwszy stan ścisłe rozwiązanie problemu, a za drugi jeden z powyższych dynamicznych pól. W wyrażeniu zasady mocy wirtualnych wykorzystaliśmy prawo płynięcia oraz postulat stateczności w małym, wynikający z przyjęcia wypukłego warunku plastyczności w przestrzeni naprężeń, następnie daliśmy odpowiednie oszacowanie dla nieliniowej części. Stąd wynikało dolne oszacowanie trwałych ugięć konstrukcji. Zaproponowana powyżej metoda posiada następujące cechy charakterystyczne:

- Przez podział nieliniowych związków geometrycznych na część liniową i nieliniową a następnie przez oddzielne oszacowanie odpowiadających tym częściom całek, przedstawiona metoda pozwala wykorzystać sposoby dynamiki liniowej, związane z dolnym oszacowaniem przemieszczeń.

- Jest to metoda efektywna, pozwalająca w wielu konkretnych przypadkach otrzymać zamknięte wyrażenie dające dolną ocenę przemieszczeń dynamicznie obciążonych konstrukcji.

- Może być stosowana zarówno w przypadkach obciążeń impulsem o nieskończenie krótkim jak i o skończonym czasie trwania. Daje to możliwość badania wpływu podstawowych parametrów obciążenia (np. historii obciążenia) na dolne oszacowanie przemieszczeń (a w konsekwencji i na same przemieszczenie) dynamicznie obciążonych konstrukcji w ramach teorii umiarkowanie dużych ugięć.

- Zbudowana powyżej metoda dolnego oszacowania jest oparta na następujących podstawowych założeniach:

- a/-Istnieje plastyczna energia potencjalna
- b/-Powierzchni plastyczności jest wypukła
- c/-Należy wybrać odpowiednio kinematycznie dopuszczalne pole prędkości.

Wymagania a/,b/ należą do podstaw teorii plastyczności . Przy tym zaproponowana metoda obowiązuje dla dowolnych warunków plastyczności , opisujących sztywno-plastyczne ciało izotropowe i anizotropowe.

W celu uzyskania dolnego oszacowania należy wybrać dopuszczalne pole prędkości w postaci modalnej lub niemodalnej , spełniające warunki :

- a/-Pochodne czasowe są ciągłe
- b/-Pochodne przestrzenne są nieciągłe w indywidualnych punktach dla belek , na indywidualnych okręgach dla powłok

Na podstawie tych założeń przedstawiona metoda pozwala uwzględnić złożony proces , w których występują stacjonarne przeguby lub linie załamów. We wszystkich przykładach tej pracy wybraliśmy dopuszczalne pole prędkości w postaci właściwej dla rozdzielania zmiennych $\dot{U}_i^* = (1 - t) U_i(x)$. Ponadto dolne oszacowanie są podane przy wykorzystaniu powierzchni granicznej Treski [64] [13]. Również można otrzymać pewne dolne oszacowanie dla innych warunków plastyczności oraz dla innych postaci dopuszczalnych pól prędkości .

Analizując konkretne rezultaty przedstawione w powyższych rozdziałach można wyciągnąć następujące wnioski :

- a/ -Przypadek konstrukcji obciążonych impulsem prędkości
Dla belek sztywno-zamocowanych na brzegu z rys.29 widać, że krzywa ograniczająca(5.119) przebiega blisko punktów doświadczalnych,ponadto dokładność dolnego oszacowania rośnie ze wzrostem poziomu energii kinematycznej (tj. parametr λ)
Dla przypadków powłok cylindrycznych i belek wyznaczony metodą szacującą ^{obozar} w których znajduje się rozwiązanie ścisłe , jest dosyć mały (rys. 19,26,29) . Jednocześnie pokazano, że wpływ zmian geometrii na trwałe ugięcie jest duży oraz dolne oszacowanie w ramach teorii małych ugięć nie zgodzi się z rezultatami doświadczalnymi (rys.29) ,górnym oszacowaniem i rozwiązaniami

ścisłymi (rys. 19, 23, 26).

b/- Przypadek konstrukcji obciążonych impulsem ciśnienia. Proces płynięcia plastycznego jest rozpatrywany przez wprowadzenie parametrów $\mu = \frac{P_0}{P_c}$; $I = P_0 T_0$ gdzie P_0 - stałe obciążenie jest dane na powierzchni konstrukcji, T_0 jest czasem trwania obciążenia P_0 , P_c jest obciążeniem granicznym konstrukcji. Z otrzymanych wyników pokazano, że parametry μ, I mają równoważny wpływ na trwałe ugięcie np. w przypadku płyty (rys. 31) dla $\mu \leq 2$ $\lambda \geq 80$ na ogół trwałe ugięcie nie zależy od parametr I , natomiast dla $\mu > 10$ parametr I gra ważną rolę oraz można pominąć wpływ parametru μ . Kiedy $\mu \rightarrow \infty$ dostaniemy dolne oszacowanie ugięć konstrukcji obciążonych impulsem prędkości. Podobne wnioski również wyciągnąć dla belki i powłoki kulistej (rys. 30, 32). Należy tu zauważyć, że we wzorach (5.113), (5.95), (5.21), które są podstawami do otrzymania (6.2), (6.5), (6.8) występuje całka $\int \dot{w} \dot{w}^* dv$. Całka ta nie jest uwzględniona w naszej analizie. Otóż dolne oszacowanie w teorii liniowej przebiegały dwuetapowo [18] i w drugim etapie obejmowały również tę całkę. W pierwszym etapie, etapie przyspieszenia konstrukcji szacuje się tą całką $\int \dot{w} \dot{w}^* dv$ gdzie \dot{w}_0 jest polem prędkości na końcu tego etapu a \dot{w}_1 jest polem kinematycznych prędkości. W tym etapie szacuje się też przemieszczenie. Przyrosty dodatkowe przemieszczeń, powstające w etapie opóźnienia ruchu, tj. po zdjęciu obciążenia, szacuje się tak jak przy obciążeniu idealnym impulsem z tym, zamiast całki $\int \dot{w} \dot{w}^* dv$ wykorzystują się uzyskane poprzednio oszacowania. Ostateczna granica była sumą oszacowań z obu tych etapów. Nasze postępowanie ograniczające się do jednego etapu również daje dolne oszacowanie to sądzi się jednak, że jest ono znacznie gorsze niż to które uzyskałoby się w dwóch etapach (to widać z porównania otrzymanego dolnego oszacowania z rozwiązaniem Kaliszkiwego rys. 31). Niemniej w przypadku problemów nieliniowych taki dwuetapowy sposób postępowania będzie niewatliwie trudniejszy i to również jest dalsze studio.

W celu ustalenia zakresu zastosowania obecnej metody należy zauważyć, że wymaganie dotyczące stałości znaku \dot{w} (tj. pochodna przestrzenna rzeczywistego przemieszczenia) ogranicza klasę warunków brzegowych i obciążeń dla których może być ono spełnione. W tym sensie prezentowana wyżej metoda dolnego oszacowania nie

ma charakteru zupełnie ogólnego , Ona może być jednak zastosowana w wielu sytuacjach szczególnych .

Ostatecznie należy podkreślić, że w zakresie teorii umiarkowanie dużych ugięć cienkich konstrukcji nieliniowa część tensora uogólnionych prędkości odkształceń posiada zaledwie jedną nierówną zero składową , daje to możliwość otrzymania dosyć prostego wyrażenia na oszacowanie , z którego wynikają konkretne rezultaty zgodne z praktyką .

Na podstawie powyższej dyskusji wynika , że potrzebne są dalsze badania w tych kierunkach :

- Zwiększyć dokładność dolnego oszacowania przez wybór dopuszczalnych pól prędkości. Wiadomo, że działanie dynamicznego obciążenia na konstrukcji wykonanej z materiału sztywno-plastycznego wywołuje w jej obszarze przeguby plastyczne lub linie załamów , które są na ogół zmienne w czasie . Wówczas na tych przegubach plastycznych lub liniach załamów występują nieciągłości pochodnych czasowych i przestrzennych pola przemieszczeń . Dlatego w metodach szacujących należy uwzględnić wybór dopuszczalnych pól prędkości mających nieciągłe pochodne czasowe i przestrzenne .

- Wyeliminować niektóre dodatkowe założenia o wyborze dopuszczalnych pól prędkości , nawet założenie o stałości znaku W' , jeżeli to może być .

- W przypadku konstrukcji obciążonych impulsem ciśnienia należy uwzględnić dwuetapowy sposób postępowania .

- Uwzględnić własności lepkie materiału i anizotropię spowodowaną dużymi odkształceniami .

ZAKOŃCZENIE:

Autor dziękuje również p. Dr. Stolarskiemu za rady pomocne przy opracowywaniu rozprawy .

LITERATURA CYTOWANA W PRACY

- [1] S. ANANTHA RAMU, K. J. IYENGAR plastic response of orthotropic spherical shells under blast loading. *Nud. Eng. Design.* 55 1979 P. 363-371.
- [2] A. BIRON. limit analysis of cylindrical shells with longitudinal rib reinforcement. *Int. J. Solids structures* 6 1970 P. 893-908.
- [3] A. BIRON, A. SAWCZUK. plastic analysis of rib-reinforced cylindrical shells. *J. Appl. Mech.* 34 1967 P. 37-42.
- [4] G. BAK Metoda kinematyczna w dynamice konstrukcji sztywno-plastycznych. *Rozp. Inz.* vol 3, 1977 P. 495-511.
- [5] G. BAK, D. NIEPOSTYN, T. WIERZBICKI Metody rozwiązań w dynamice plastycznych konstrukcji powłokowych. *Symposium nt. "Konstrukcje powłokowe"* Kraków 1974 r.
- [6] M. CAPURSO Minimum principles in the dynamic of isotropic rigid-plastic and rigid-viscoplastic continuous media *Meccanica* 2 1972r P. 92-97.
- [7] M. CAPURSO A displacement bounding principle in the shake-down of structures subjected to cycle load. *Int. J. Sol. Struct.* vol 10, 1974, P. 77-92.
- [8] M. CAPURSO Displacement bounding principle in the dynamic of elasto-plastic continua. *J. Struct. Mech* 3 1974/75 P. 259-281.
- [9] C. T. CHON, P. S. SYMONDS. large dynamic plastic deflection of plates by mode method. *J. Eng. Mech. Div* vol. 103, 1977 P. 169-187
- [10] N. CRISTESCU Dynamic plasticity. *Appl. Mech. Reviews* vol. 21, 1968 P. 659-668.
- [11] S. DOROSZ Metoda szacowania ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznych w stanie przystosowania. *Prace IPPT* 65/1977.
- [12] D. G. DRUCKER. On the postulat of stability of material in the mechanics of continua. *J. de Mec* vol. 3 1964 P. 235-249.
- [13] D. G. DRUCKER, R. T. SHIELD limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution. *J. Appl. Mech.* vol. 26, 1959 P. 61-68.
- [14] M. DUSZEK Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections. *Arch. Mech.* vol. 5 N218, 1966 P. 599-614.
- [15] M. DUSZEK Plastic analysis of shallow shells at moderately large deflections. *Proc. IUTAM Symp. Copenhagen* 1967 P. 374-388
- [16] M. DUSZEK Równania teorii dużych ugięć powłok plastycznych *Prace IPPT* 13/1971.

- [17] M. DUSZEK, A. SAWCZUK. O związkach podstawowych teorii powłok plastycznych. Rozp.Inż.18 1970 P.715-731.
- [18] M.I. ERKHOV Teoria idealno-plastycznych tarcz i konstrukcji. Moskwa "Nauka" 1978.
- [19] A.L. FLORENCE, R.D. FIRTH Rigid-plastic beams uniformly distributed impulses. J.Appl.Mech.vol.123, 1965 P.481-488.
- [20] A.L. FLORENCE Circular plate under uniformly distributed impulse. Int.J.Sol.Struct.vol2 1966 P.37-47.
- [21] P.G. HODGE The influence of blast characteristics on the final deformation of circular cylindrical shells. J.Appl. Mech. vol23 1956 P.617-624.
- [22] P.G. HODGE Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells. Prentice-Hall 1963.
- [23] P.G. HODGE The Mises condition of rotationally symmetric shells. Quart.Appl.Math. vol18, 1961 P.259-267.
- [24] H.G. HOPKINS, W. PRAGER O the dynamic of plastic circular plates. ZAMP vol5, 1954 P.137-150.
- [25] H.G. HOPKINS, W. PRAGER .The load carrying capacities of circular plates. J.Mech.Phys.Solids.vol2 1953 P.1-13.
- [26] J.S. HUMPHREYS Plastic deformation of impulsively loaded straight clamped beams. J.Appl.Mech.vol32 1965 P.7-10.
- [27] N. JONES Consistent equations for large deflections of structures. Bull.Mech.Engng.Educ.vol10, 1971 P.9-20.
- [28] N. JONES The influence of large deflections on the behaviour of rigid-plastic cylindrical shells loaded impulsively. J.Appl.Mech.vol37, 1970 P.416-424.
- [29] N. JONES, R.N. GRIFFIN, R.E. VAN DUZER An experimental study into the dynamic plastic behaviour of wide beams and rectangular plates. Int.J.Mech.Sci.vol13, 1971 P.721-725.
- [30] N. JONES, R.M. WALTERS A comparison of theory and experiments on the dynamic plastic behavior of shells. Arch.Mech.vol24, 1972 P.701-714.
- [31] N. JONES Impulsive loading of a simply supported rigid-plastic circular plate. J.Appl.Mech. vol.35 1968 P.59-65.
- [32] N. JONES Recent progress in the dynamic plastic behavior of structures. Part I vol.10, N:9, 1978 P.21-35; Part II vol.10, N:10, 1978 P.13-19. The Shock and Vibration Digest.
- [33] N. JONES A literature review of the dynamic plastic response of structures. The Shock and Vibration Digest vol.7 1975 P.89-105.

- [34] N.JONES A theoretical study of the dynamic plastic behavior of beams and plates with finite deflections. *Int. J. Sol. Struct.* vol.7 1971 P.1007-1029.
- [35] N.JONES . Response of structures of dynamic loading .*Int. Phys. Conf. Ser. N:47* 1979 P.254-275.
- [36] N.JONES. Dynamic plastic response of structures. *Recent Advances in Structural Dynamics*. vol2 1980 P.677-689.
- [37] N.JONES, T.WIERZBICKI A study of the higher model dynamic plastic response of beams. *Int. J. Mech. Sci* vol18 1976 P.533-592.
- [38] N.JONES, C.G. SOARES Higher model dynamic plastic behavior of beams loaded impulsively. *Int. J. Mech. Sci* vol20 1978 P.135-147.
- [39] S.KALISZKY Large deflections of rigid-viscoplastic structures under impulsive and pressure loading. *J. Struct. Mech.* vol.1, 1973, P.295-317,
- [40] S.KALISZKY Approximate solutions for impulsively loaded inelastic structures and continua. *Int. J. Non-linear Mech.* vol.5, 1970, P.143-158.
- [41] S.KALISZKY Kinematic approach to impulsive and pressure loading. *Course on Dynamics of Plastic Structures CISM Udine Italy* 1979.
- [42] J.A. KONIG Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych. *Prace IPPT* 24/1974.
- [43] L.S.S.LEE Moder responses of dynamically loaded structures. *J. Appl. Mech.* vol.39, 1972, P.904-910.
- [44] L.S.S.LEE , J.B. MARTIN Approximate solutions of impulsively loaded structures of a rate sensitive materials. *ZAMM* vol.21, 1970, P.1011-1032.
- [45] L.S.S.LEE, C.M.NI Minimum principle in the dynamic of elastic-plastic continua at finite deformation. *Arch. Mech.* vol.25, 1973, P.457-468.
- [46] G.MAIER, L.CORRADI Upper bounds on dynamic deformations of elasto-plastic continua. *Meccanica* 9 1974 P.30-35.
- [47] J.B.MARTIN Extremum principles for a class of dynamic rigid-plastic problems. *Int. J. Solids. Struct.* vol.8 1972, P.1185-
- [48] J.B. MARTIN A displacement bound principle for inelastic continua subjected to certain classes of dynamic loading. *J. Appl. Mech.* vol.32, 1965 P.1-6.

- [49] J.B. MARTIN Impulsively loading theorems for rigid-plastic continua. *J.Eng.Mech.Div.* vol.10, 1964 P.27-42.
- [50] J.B. MARTIN Extended displacement bound theorems for workhardening continua subjected to impulsive loading. *Int.J. Solids Struct.* 2, 1966 P.9-26.
- [51] J.B. MARTIN, P.S. SYMONDS Mode approximations for impulsively loaded rigid-plastic structures. *J.Eng.Mech. Div.* vol.92 1966 P.43-66.
- [52] J.B. MARTIN Extremal principles and Convergence in plastic structural dynamics. *CISM Conise Dynamics of Plastic Structures Udine* 1979.
- [53] J.B. MARTIN, A.R.S. PONTER Bounds for impulsively loaded plastic structures. *J.Eng.Mech.Div.* vol.98, 1972, P.107-119.
- [54] J.B. MARTIN, A.R.S. PONTER Some extremal properties and energy theorems for inelastic materials and their relationship to the deformation theory of plasticity. *J.Mech. Phys.Solids.* vol.20, 1972 P.281-
- [55] W.J. MORALES, G.E. NEVILL Lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua. *AIAA Journal* vol.8, 1970, P.2043-2046.
- [56] W.J. MORALES Displacement bounds for blast loaded structures *J.Eng.Mech.Div.* Vol.98, 1972, P.965-973.
- [57] W.J. MORALES Lower bound theorem for dynamically loaded rigid-viscoplastic structures. *Arch.Mech.Stoso.* vol.25 1973 P.491-500.
- [58] Z. MRÓZ The load carrying capacity of orthotropic shells. *Arch.Mech.Stos.* 12 1960 P.85-107.
- [59] Yu.V. NEMIROWSKI Load carrying capacities of circular rib reinforced plates /in Russian/ *Izv.AN SSSR OTN Mech.Mach.* 1963 P.163-168.
- [60] Yu.V. NEMIROWSKI, Yv.N. RABOTNOV Limit analysis of ribbed plates and shells. *Non-Classical Shell Problems North-Holland* 1964 P.786-807.
- [61] D. NIEPOSTYK The limit analysis of an orthotropic cylinder *Arch.Mech.Stos.* 8 1956 P.565-580.
- [62] W. OLSZAK, W. URBANOWSKI the plastic potential generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic plastic bodies. *Arch.Mech.Stoso.* 8 1956 P.671-694.
- [63] W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK i inni. *Teoria plastyczności* PWN Warszawa 1965.

- [64] E.T. ONAT, W. PRAGER Limit analysis of shells of revolution Proc. Roy. Neth. Acad. Sci. B57, 1954 P.534
- [65] P. PERZYNA Dynamic load carrying capacity of circular plate Arch. Mech. Stos. vol. 10, 1958, P.636-647.
- [66] J. PLOCH Oszacowania dużych przemieszczeń w ciałach sztywno-plastycznych poddanych działaniu obciążenia impulsowego Prace IPPT 3/1979.
- [67] J. PLOCH, T. WIERZBICKI Oszacowanie dużych niesprężystych deformacji dynamicznie obciążonych konstrukcji. III Symp. Dyn. i Stat. Konst. RZESZÓW 1976.
- [68] A.R.S. FONTER An upper bound on the small displacement of elastic perfectly plastic structures. J. Appl. Mech. vol. 39, 1972, P.959-963.
- [69] D.N. ROBINSON A displacement bound principle for elastic plastic structures subjected to blast loading. J. Mech. Phys. Solids vol. 18, 1970 P.65-80.
- [70] R. SANKARANARAYANAN On the dynamic of plastic spherical shells. J. Appl. Mech. 30 1963 P.87-90.
- [71] R. SANKARANARAYANAN, W. OLSZAK The load carrying capacities of plates and shells. Non-Classical Shell Problems North-Holland 1964 P.842-866.
- [72] R. SANKARANARAYANAN, A. SAWCZUK A note on behaviour of plastically anisotropic structures under blast loading. Arch. Mech. Stos. 14 1962 P.797-809.
- [73] A. SAWCZUK linear theory of plasticity of anisotropic bodies and its application to problems of limit analysis. Arch. Mech. vol. 11 1959 P.541-557.
- [74] A. SAWCZUK. On the theory of anisotropic plates and shells. Arch. Mech. Stos. 13 1961 P.455-465.
- [75] A. SAWCZUK Some problems of load carrying capacities of orthotropic and Non-homogeneous plates. Arch. Mech. Stos. vol. 8 1956 P.549-563.
- [76] A. SAWCZUK. Yield condition for anisotropic shells. Bull. Ac. Pol. Sc. Ser. Sc. Techn. vol. 8 1960 P.273-277.
- [77] A. SAWCZUK. On limit analysis of anisotropic plastic shells. Non-Classical Shell Problems. North-Holland 1964 P.909-917.
- [78] A. SAWCZUK Yield Surfaces. Tech Note N^o 1 March 1971 University of Waterloo Canada.
- [79] A. SAWCZUK, W. J. O'DONNELL, J. PORCWSKI plastic analysis of perforated plates for orthotropic yield criteria. Int. J. Mech. Sci. 17 1975 P.411-417.

- [80] A. SAWCZUK .Zagadnienia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok sztywno-plastycznych.Mech.Teor.Stos.9 1971 P.336-354.
- [81] A. SAWCZUK. Large deflections of rigid plastic plates. Proc.IIth.Cong of Appl Mech.Munich 1964 P.224-228.
- [82] A. SAWCZUK. On initiation of themembrane action in rigid -plastic plates.J.Mec. 2 1964 P.15-23.
- [83] H. STOLARSKI Zasada ekstremalna dla oceny przemieszczeń dynamicznie obciążonych konstrukcji sztywno-plastycznych. Prace IPPT 22/1979.
- [84] P.S. SYMONDS Approximation technique for impulsively loaded plastic structures.Course on Dynamic of plastic structures CISM Udine Italy 1979.
- [85] P.S. SYMONDS The optymal mode in the mode approximation technique.Mech.Reasearch Communications vol.7/1/, 1980 P.1-6.
- [86] P.S. SYMONDS Dynamic load characteristics in plastic bending of beams. J.Appl.Mech.vol.20,1953 P.475-481.
- [87] P.S. SYMONDS ,J.I. MENDEL Impulsive loading of plastic beams with axial constraints.J.Mech.Phys.Solids.vol.6 1958 , P.186-202.
- [88] P.S. SYMONDS, N.JONES Impulsive loading of fully clamped beams with finite plastic deflection and strain-rate sensitivity.Int.J.Mech.Sci.vol.4, 1972, P.49-70.
- [89] P.S. SYMONDS, O.T.CHON On dynamic plastic mode form solutions J.Mech.Phys.Solids vol.26, 1978 P.21-35.
- [90] P.S. SYMONDS, T.WIERZBICKI On an extremum principle for mode form solutions in plastic structural dynamic. J.Appl.Mech. vol.24, 1975 P.630-640.
- [91] W.F. TAMUZ Ob odnom minimalnom principle dinamikie zesto-plasticeskiego tiela. PMM vol.26 1962 P.715-722.
- [92] B.VENKATRAMAN , R.SANKARANARAYANAN. Colloapse loads of orthotropic cylindrical shells under radial pressure. J.Frankl.Inst.vol.278 1964 P.183-194.
- [93] B. VENKATRAMAN, S.A. PATEL . Dynamic response of orthotropic plastic cylindrical shells under radial pressures. J.Frankl.Inst.vol.282 1966 P.171-178.
- [94] E. VITIELLO Upper bounds to plastic strain in shakedown of structures subjected to cyclic loads.Meccanica 7 1979, P.205-213.
- [95] R.M.WALTERS, N.JONES An approximate theoretical study of the dynamic plastic behavior of shells.Int.J.Non-linear Mech. vol.7, 1972 P.255-273.

- [96] A.J. WANG The parament deflection of a plastic plate under blast loading. J.Appl.Mech.vol.22, 1955 P.355-376.
- [97] T. WIERZBICKI. Direst variational approach to dynamic plastic mode solutions .Bull.Ac.Pol.Ser.Sce.Tech.23 1975 P.299-305.
- [98] T. WIERZBICKI Duże ugięcia konstrukcji obciążonych dynamicznie. Przegląd krytyczny stosowanych metod. Rozp.Inż.vol.24, 1976, P.405-432.
- [99] T. WIERZBICKI. Lower bounds on^o deformations in impulsively loading problems. Bull de L Acad .Pol.Sci.vol.19 1971. P.291-296.
- [100] T. WIERZBICKI .Comment on Lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua. AIAA Journal vol.10, 1972 P.363-365.
- [101] T. WIERZBICKI. Imprewed lower bound theorem for impulsively loaded continua. Arch.Mech.vol.23 1971 P.423-425.
- [102] T. WIERZBICKI. Wariacyjna metoda oszacowania ugięć dynamicznie obciążonych konstrukcji. Prace IPPT 2/1971.
- [103] T. WIERZBICKI. Liniowa teoria lepkoplastycznych konstrukcji Prace IPPT 29/1971.
- [104] T. WIERZBICKI. Bounds on large deformations of structures J.Eng.Mech.Div. vol.96, EM3, 1970, P.267-276.
- [105] G.A. WITMER, H.A. BALMER, J.W. LECH, T.H.H. PIAN .Large dynamic deformations of beams, circular rings, circular plates and shells . AIAA Journal vol.1, 1963, P.1848-1857.
- [106] C.K. YOUNGDAHL .Influence of pulse shape on the final plastic deformation of circular plate. Int.J.Sol.Struct. vol.7, 1971, P.1127-1142.
- [107] C.K. YOUNGDAHL .The equivalence of dynamic loads for the final plastic deformation of a tube. Ith.Int.Conf.Press Vess.Tech.1969 Part I Design and Analysis vol.1.P.89-100.
- [108] C.K. YOUNGDAHL. Corrlation parameters for eliminating the effect of pulse sha pe on dynamic plastic deformation. J.Appl.Mech.vol.37, 1970, P.744-752.

DODATEK

W tym dodatku przedstawione są sposób otrzymania wzoru (5.8) i założenia zastosowane w tym rozdziale oraz w dalszych rozdziałach.

Należy zauważyć, że wyrażenia podcałkowe w (5.7) zawierają rzeczywiste pola przemieszczeń (U, W) i naprężeń ($N_\phi, N_\psi, M_\phi, M_\psi$) oraz dopuszczalne pole prędkości (\dot{U}^*, \dot{W}^*). Wartości całek w (5.7) zależą od charakteru tych pól, który na ogół jest bardzo złożony np. dla sztywno-plastycznych konstrukcji obciążonych dynamicznie ich lokalne nieciągłości istnieją w wyniku występowania ruchowych plastycznych przegubów lub ruchowych linii załomów.

Nieciągłości pól przemieszczeń, prędkości i naprężeń zostały rozpatrywane w pracy [82] określając wpływ membranowej siły na graniczną nośność płyt sztywno-plastycznych przy pomocy podejścia kinematycznego. W analizie przyjmowane były następujące założenia:

- /1/ - przemieszczenie W jest ciągle i posiada pierwszą pochodną ciągłą
- uogólnione naprężenia są ciągłe
 - prędkość W jest ciągła i ma pierwszą przestrzenną pochodną nieciągłą na pewnych liniach C_k

Metoda przybliżona w [82] rozwijana była na przypadek płyt [34] i powłok [95] obciążonych dynamicznie w zakresie dużych ugięć. W tych pracach analizowano możliwe nieciągłości wewnętrznych sił, przemieszczeń, prędkości przemieszczeń oraz ich pochodnych pojawiających w procesie całkowania otrzymanych równań. Autorzy zakładali, że działanie dynamicznego obciążenia na konstrukcję wywołuje w jej obszarze ruchowe linie załomów C_k które przemieszczają się z prędkością V na kierunku normalnym. W obszarach ograniczonych pomiędzy liniami załomów wewnętrzne siły, przemieszczenia i ich pochodne są ciągłe. Nieciągłości występujące na liniach załomów C_k są opisane wzorami

$$/2/ \quad [M_k] = [N_k] = [Q_k] = 0$$

$$- \left[\frac{\partial W}{\partial s} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial \dot{W}}{\partial s} \right] = 0 \text{ jeżeli } V = 0 \text{ lub } V \neq 0.$$

$$- \left[\frac{\partial W}{\partial n} \right] = 0 \text{ lub } \left[\frac{\partial W}{\partial n} \right] \neq 0 \text{ i } N = 0.$$

$$- \text{jeżeli } V \neq 0 \quad \left[\frac{\partial \dot{W}}{\partial n} \right] = -\frac{1}{V} [\dot{W}].$$

$$\text{jeżeli } V = 0 \quad [\ddot{w}] = 0 \quad \left[\frac{\partial \dot{w}}{\partial n} \right] = 0$$

gdzie :

(n, s) jest lokalnym układem wyznaczającym odpowiednio kierunek normalny i styczny do linii załomów.

W jest składową wektora przemieszczenia w kierunku normalnym do powierzchni środkowej .

W [34] pokazano, że w sensie problemu statycznego dwie grupy założeń (1),(2) sprowadzają do samego rezultatu . Należy podkreślić, że w [34], [95] rozwiązując konkretne zagadnienia autorzy rozpatrywali tylko przypadek $V = 0$. Rozwiązanie problemu w przypadku $V = 0$ pozostaje nadal sprawą otwartą .

Metoda dolnego oszacowania dla cienkich konstrukcji zbudowana jest na podstawie założeń(2) w przypadku $V = 0$. Zakładamy, że składowa W wektora przemieszczenia na kierunku normalnym do powierzchni środkowej jest wielka w porównaniu z pozostałym składowym U , że składowa U i jej pochodne są ciągłe w całym obszarze konstrukcji . Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa o prostych normalnych do powierzchni środkowej przemieszczenie W i dopuszczalna prędkość \dot{w}^* muszą być ciągłe . Rozpatrzmy powłoki obciążone symetrycznie, wtedy linie załomów są kołami o promieniu $r_k = R \sin \phi_k$

Na podstawie założeń (2) całkując trzy ostatnie człony w (5.7) przez części i wykorzystując warunki brzegowe(5.6) mamy

$$\begin{aligned} & \int_0^{\phi_0} \sin \phi (P_\phi \dot{u}^* + P_\phi \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \rho \sin \phi (\ddot{u} \dot{u}^* + \ddot{w} \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \dot{w} \sin \phi \cdot \\ /3/ & \left[\frac{N_\phi}{R} (\cotg \phi \dot{u}^* + \dot{w}^*) + \frac{N_\phi}{R} (\dot{u}^* + \dot{w}^*) + M_\phi \frac{\cotg \phi}{R^2} (\dot{u}^* + \dot{w}^*) + M_\phi \frac{\dot{u}^*}{R^2} \right] d\phi \\ & + \left(\frac{M_\phi}{R} \dot{w}^* \right) - \sum_{\phi=0}^{\phi_k} \frac{1}{R} (\sin \phi \dot{w}^*) \left[M'_\phi \right]_{\phi_k} - \frac{1}{R^2} \left[\int_0^{\phi_0} \sin \phi \dot{w}^* + (M_\phi \sin \phi)' \right] \dot{w}^* d\phi = 0 \end{aligned}$$

Uwzględniając trzecie z równań ruchu (5.5) otrzymujemy

$$\left[M'_\phi \right]_{\phi_k} = \cotg \phi_k \left[M_\phi \right]_{\phi_k} = 0$$

Stąd piąty w (3) znika i z (3) dostaniemy wzór (5.8) .

$$\int_0^{\phi_0} \sin\phi (P_\phi \dot{u}^* + P_3 \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \rho \sin\phi (\ddot{u} \dot{u}^* + \dot{w} \dot{w}^*) d\phi - \int_0^{\phi_0} \sin\phi \left[\frac{N_\phi}{R} \cdot (\cot\phi \dot{u}^* + \dot{w}^*) + \frac{N_\phi}{R} (\dot{u}^* + \dot{w}^*) + M_\phi \frac{\cot\phi}{R^2} (\dot{u}^* - \dot{w}^*) + M_\phi \frac{\dot{u}^*}{R^2} \right] d\phi + \left(\frac{M_\phi}{R} \dot{w}^* \right)_{\phi=0} - \int_0^{\phi_0} \frac{N_\phi}{R^2} \sin\phi \dot{w} \dot{w}^* d\phi - \int_0^{\phi_0} (M_\phi \sin\phi) \frac{\dot{w}^*}{R^2} d\phi = 0$$

Wyniki w dalszych rozdziałach otrzymujemy także na podstawie założeń (2) w przypadku $V = 0$ i w powyżej podobny sposób .

S P I S T R E Ś C I

1. WSTĘP	3
1.1. - Charakterystyka problemu.	3
1.2. - Charakterystyka istniejących metod.	4
1.3. - Konieczność uwzględnienia zmian geometrii.	8
2. CEL I ZAKRES PRACY	9
2.1. - Cel pracy.	9
2.2. - Szczegółowa tematyka pracy.	10
3. DOLNE OSZACOWANIE UGIĘĆ W DYNAMICIE LINICWEJ NIE WYKORZYSTUJĄCE OSZACOWANIA CZASU.	12
3.1. - Wprowadzenie.	12
3.2. - Ogólne sformułowanie problemu dolnego oszacowania przemieszczeń dla ciała trójwymiarowego.	14
3.3. - Zastosowanie oszacowania do konstrukcji.	20
3.4. - Dyskusja otrzymanych wyników.	22
3.5. - Ocena dolnych oszacowań znanych w literaturze.	32
3.6. - Płyty anizotropowe.	34
3.7. - Wnioski.	40
4. METODA OSZACOWANIA DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ IMPULSOWO-OBciążONYCH KONSTRUKCJI PLASTYCZNYCH.	41
4.1. - Charakterystyka problemu.	41
4.2. - Sformułowanie opracowywanego zagadnienia.	42
4.3. - Metoda dolnego oszacowania dla ciał trójwymiarowych.	44
5. ZASTOSOWANIE METODY OKREŚLENIA DOLNYCH OSZACOWAŃ UMIARKOWANIE DUŻYCH TRWAŁYCH PRZEMIESZCZEŃ CIENKICH KONSTRUKCJI.	54
5.1. - Założenia teorii dolnego oszacowania dla cienkich konstrukcji.	54
5.2. - Dolne oszacowanie na trwałe przemieszczenia powłok kulistych.	56
5.3. - Dolne oszacowanie trwałych ugięć powłok kulistych o małej wyniosłości.	69
5.4. - Dolne oszacowanie na trwałe ugięcia powłok cylindrycz- nych.	81

5.5.	- Dolne oszacowanie trwałego ugięcia płyty kołowej.	90
5.6.	- Dolne oszacowanie trwałych ugięć silnie odkształconych belek.....	98
6.	OSZACOWANIE DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ KONSTRUKCJI OBCIĄŻONYCH IMPULSEM SKOŃCZONYM.....	110
6.1.	- Sformułowanie problemu.....	110
6.2.	- Belka przegubowo - zamocowana obciążona impulsem skończonym.....	111
6.3.	- Kołowa płyta obciążona impulsem skończonym.....	114
6.4.	- Powłoka kulista obciążona impulsem skończonym.....	116
7.	WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE.....	120
	LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE.....	124