Witold Nowacki

Twierdzenie o zupełności funkcji naprężeń w termosprężystości

1/1967

WARSZAWA 1967

IPPT
PAN

Na prawach rękopisu
Do użytku wewnętrznego

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,5. Ark.druk. 1,25.
Druk ukończono w lipcu 1967 r.

Warszawska Drukarnia Naukowa 604/0/67
Warszawa, ul. Śniadeckich 8

Twierdzenie o zupełności funkcji naprężeń w termosprężystości

Witold Nowacki

1. Wstęp

Rozważymy ciało sprężyste, izotropowe i jednorodne, zajmujące obszar B ograniczony powierzchnią A. Ciało poddane działaniu sił zewnętrznych i ogrzaniu dozna deformacji. W ciele powstanie pole przemieszczeń $\vec{u}(x,t)$ oraz pole temperatury $\theta(x,t)$, zależne od położenia punktu x i czasu t. Pola te opisane są układem równań różniczkowych [1]

$$/1.1/\quad \mu\nabla^2\vec{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}+\vec{X}=\rho\ddot{\vec{u}}+\gamma\,\mathrm{grad}\,\theta,$$

$$/1.2/\quad \nabla^2\theta-\frac{1}{\varkappa}\dot{\theta}-\eta\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}}=-\frac{Q}{\varkappa}.$$

Tutaj $\theta=T-T_0$ jest przyrostem temperatury, T jest temperaturą bezwzględną, T_0 temperaturą stanu naturalnego, w którym tak odkształcenia jak i naprężenia są równe zeru. Przez $\vec{X}$ oznaczono wektor sił masowych, przez ρ - gęstość. Wielkości μ,λ są stałymi Lamégo dla stanu izotermicznego, a $\gamma=3K\alpha_t$, gdzie $K=\lambda+\frac{2}{3}\mu$ jest modułem ściśliwości, a α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności termicznej. Dalej: $\varkappa=\lambda_0/c_\varepsilon$, gdzie λ_0 jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, a c_ε jest ciepłem właściwym przy stałej deformacji. Wreszcie $\eta=\gamma T_0/\lambda_0$ oraz $Q=W/\lambda_0$, gdzie przez W oznaczono ilość ciepła, wytwarzaną w jednostce objętości i w jednostce czasu. Kropka nad funkcją oznacza jej pochodną czasową: $\dot{\theta}=\partial\theta/\partial t$, $\ddot{\vec{u}}=\partial^2\vec{u}/\partial t^2$.

Dokonując dekompozycji wektora przemieszczenia na część potencjalną i solenoidalną

$$/1.3/\quad \vec{u}=\operatorname{grad}\phi+\operatorname{rot}\vec{\chi}\,,\quad \operatorname{div}\vec{\chi}=0,$$

oraz w podobny sposób rozkładając wektor sił masowych

$$/1.4/\quad \vec{X}=\rho(\operatorname{grad}\vartheta+\operatorname{rot}\vec{\sigma}),$$

doprowadzamy układ równań /1.1/ i /1.2/ do postaci [2]

$$/1.5/\quad \square_1^2\phi=m\theta-\frac{1}{c_1^2}\vartheta,$$

$$/1.6/\quad \square_2^2\vec{\chi}=-\frac{1}{c_2^2}\vec{\sigma}.$$

$$/1.7/\quad D\theta-\eta\nabla^2\dot{\phi}=-\frac{Q}{\varkappa}.$$

Wprowadziliśmy tu następujące oznaczenia:

$$/1.8/\quad \square_\alpha^2=\nabla^2-\frac{1}{c_\alpha^2}\frac{\partial_t^2}{\partial t^2}\,,\quad \alpha=1,2\,,\quad D=\nabla^2-\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t},$$
$$c_1=\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2},\quad c_2=\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2},\quad m=\frac{\gamma}{\lambda+2\mu}.$$

Eliminacja temperatury z równań /1.5/ i /1.7/ prowadzi do równań

$$/1.9/\quad \Omega\phi=-\frac{m}{\varkappa}Q-\frac{1}{c_1^2}D\vartheta,$$

$$/1.10/\quad \square_2^2\vec{\chi}=-\frac{1}{c_2^2}\vec{\sigma},$$

gdzie

$$\Omega = \square_1^2 D - m\eta\partial_t\nabla^2, \quad \partial_t = \partial/\partial t.$$

Równanie /1.9/ przedstawia podłużną, a równanie /1.10/ poprzeczną falę termosprężystą.

W klasycznej elastokinetyce przy założeniu procesu adiabatycznego mamy do czynienia z układem równań przemieszczeniowych

$$\mu_s\nabla^2\vec{u} + (\lambda_s + \mu_s)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u} + \vec{X} = \rho\ddot{\vec{u}},$$

/1.11/

$$\theta = -\eta_T m_T \varkappa\,\mathrm{div}\,\vec{u}.$$

Występujące w tych równaniach stałe Lamégo μ_s, λ_s odnoszą się do stanu adiabatycznego, a $\eta_T = \gamma_T T_0/\lambda_0$, $m_T = \gamma_T/(\lambda_T + 2\mu_T)$, $\gamma_T = (3\lambda_T + 2\mu_T)\alpha_t$, gdzie μ_T, λ_T są stałymi Lamégo, mierzonymi w warunkach izotermicznych. Przedstawiając przemieszczenie w postaci /1.3/ otrzymamy następujące równanie falowe:

/1.12/ $$\square_1^2\phi = -\frac{1}{a_1^2}\vartheta, \quad \square_2^2\vec{\chi} = -\frac{1}{a_2^2}\vec{\sigma},$$

gdzie

$$a_1 = \left(\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho}\right)^{1/2}, \quad a_2 = \left(\frac{\mu_s}{\rho}\right)^{1/2}, \quad \mu_s = \mu_T, \quad \lambda_s = \lambda_T + \gamma_T\eta_T\varkappa.$$

C.Somigliana [3] oraz P.Duhem [4] udowodnili, że przedstawienie /1.3/ przy pomocy potencjałów ϕ i $\vec{\chi}$ stanowi zupełne rozwiązanie równań /1.11/. E.Sternberg w pracy [5] przedstawił argumenty, uzasadniające zupełność rozwiązania generalnego sprzężonych równań termosprężystości /1.1/ i /1.2/ dla reprezentacji /1.3/ i założenia, że funkcje ϕ i $\vec{\chi}$ spełniają układ równań /1.9/ i /1.10/. Do sprawy tej powrócimy w p.3 niniejszej pracy.

Układ równań /1.1/ i /1.2/ można również rozdzielić na układ równań niezależnych na innej drodze przez wprowadzenie funkcji wektorowej $\vec{\varphi}$ i funkcji skalarnej ψ, związanych z przemieszczeniem $\vec{u}$ i temperaturą w następującej postaci:

$$\vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Omega\vec{\varphi} - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\mathrm{div}\left(\Gamma\vec{\varphi}\right) + \gamma/\mu\,\mathrm{grad}\,\psi, \tag{/1.13/}$$

$$\theta = \eta\partial_t\,\mathrm{div}\,\Box_2^2\vec{\varphi} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Box_1^2\psi, \tag{/1.14/}$$

gdzie

$$\Gamma = D - \frac{\gamma}{\lambda+\mu}\eta\partial_t.$$

Funkcje $\vec{\varphi}$ i ψ powinny spełniać następujące równania:

$$\Box_2^2\Omega\vec{\varphi} + \frac{\vec{X}}{\lambda+2\mu} = 0, \tag{/1.15/}$$

$$\Omega\psi + \frac{Q\mu}{\varkappa(\lambda+2\mu)} = 0. \tag{/1.16/}$$

Równania /1.15/ i /1.16/ otrzymuje się przez podstawienie /1.13/ i /1.14/ do równań różniczkowych termosprężystości /1.1/ i /1.2/.

Związki /1.13/ i /1,14/ zostały podane najpierw przez S.Kaliskiego [6] , później na innej drodze przez J.S.Podstrigacza [7] i D.Rüdigera [8]

Zauważmy, że związki /1.13/ i /1.14/ są uogólnione na problemy termosprężystości funkcji naprężeń, podanych przez A.Jacovache [10] dla elastooptyki klasycznej. Jednak sposób wyprowadzenia związków /1.13/ i /1.14/, stosowanych w pracach [6, 7, 8] nie zapewnia zupełności rozwiązań. Dowód zupełności rozwiązań dla przedstawienia /1.13/ i /1.14/ jest podany w p.2.

2. Twierdzenie o zupełności rozwiązań

Niech $\vec{u}(x,t)$ i $\theta(x,t)$ będą rozwiązaniem układu równań /1.1/ i /1.2/ w obszarze B dla $-\infty < t < \infty$. Wtedy istniej taka funkcja wektorowa $\vec{\varphi}$ i funkcja skalarna ψ, że przemieszczenie $\vec{u}(x,t)$ i temperatura $\theta(x,t)$ są przedstawione przez /1.13/ i /1.14/, a funkcje $\vec{\varphi}$ i ψ spełniają równania falowe /1.15/ i /1.16/.

Na podstawie rozwiązania Stokesa-Helmholtza istnieją takie funkcje $\phi(x,t)$ i $\vec{\chi}(x,t)$, że

$$\vec{u}(x,t) = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot}\vec{\chi}, \quad \operatorname{div}\vec{\chi} = 0. \tag{2.1}$$

Wstawmy /2.1/ do układu równań różniczkowych termosprężystości /1.1/ i /1.2/. W rezultacie otrzymamy następujące równanie:

$$\operatorname{grad}\square_1^2\phi + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{rot}\square_2^2\vec{\chi} + \frac{\vec{X}}{\lambda+2\mu} = m\operatorname{grad}\theta, \tag{2.2}$$

$$D\theta - \eta\partial_t\nabla^2\phi = -\frac{Q}{\varkappa}. \tag{2.3}$$

Wyeliminujmy z tych równań temperaturę θ i posługując się równaniem /1.16/ otrzymamy w ten sposób równanie

$$\operatorname{grad}(\Omega\phi) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{rot}(D\square_2^2\vec{\chi}) + \frac{D\vec{X}}{\lambda+2\mu} - \frac{\varkappa}{\mu}\operatorname{grad}(\Omega\psi) = 0 \tag{2.4}$$

Zdefiniujmy obecnie funkcję $\vec{\varphi}$ za pomocą funkcji skalarnej ξ oraz funkcji wektorowej $\vec{\eta}$

$$\vec{\varphi} = \operatorname{grad}\xi + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{rot}\vec{\eta}. \tag{2.5}$$

Następnie wstawmy /2.5/ do równania /1.15/ i dokonajmy na tym równaniu operacji różniczkowej D . Otrzymamy w rezultacie równanie

/2.6/ $$\operatorname{grad}\left(D\Omega\Box_2^2\xi\right)+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{rot}\left(D\Omega\Box_2^2\vec{\eta}\right)+\frac{D\vec{X}}{\lambda+2\mu}=0.$$

Z porównania równań /2.2/ i /2.6/ wynika, że funkcje ξ i $\vec{\eta}$ powinny spełniać następujące równania różniczkowe:

/2.7/ $$D\Box_2^2\xi=\phi-\frac{\gamma}{\mu}\psi,$$

/2.8/ $$\Omega\vec{\eta}=\vec{\chi}$$

Wykonajmy na związku /2.7/ operację Ω i uwzględnijmy równanie /2.8/:

/2.9/ $$\Omega\vec{\varphi}=\operatorname{grad}\left(\Omega\xi\right)+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\operatorname{rot}\vec{\chi}.$$

Wstawmy $\operatorname{rot}\vec{\chi}$ z równania /2.9/ do związku /2.1/. Otrzymamy w ten sposób równanie przemieszczenia $\vec{u}$ przez funkcje ψ , $\vec{\varphi}$ i ξ :

/2.10/ $$\vec{u}=\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Omega\vec{\varphi}+\frac{\gamma}{\mu}\operatorname{grad}\psi+\operatorname{grad}\left(D\Box_2^2-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Omega\right)\xi.$$

Zważywszy, że

/2.11/ $$\Box_1^2\xi=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\Box_2^2\xi+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2\xi,$$

przekształcimy operator przy ξ w związku /2.10/ do postaci

$$\left(D\Box_2^2 - \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Omega\right)\xi = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(D - \frac{\gamma\eta\partial_t}{\lambda+\mu}\right)\nabla^2\xi$$

/2.12/ $$= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\Gamma\nabla^2\xi.$$

Wstawiając /2.12/ do /2.10/ i uwzględniając wynikającą z /2.5/ zależność

/2.13/ $$\mathrm{div}\,\vec{\varphi} = \nabla^2\xi,$$

doprowadzimy /2.10/ do postaci

/2.16/ $$\vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Omega\vec{\varphi} - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\mathrm{div}(\Gamma\vec{\varphi}) + \frac{\gamma}{\mu}\,\mathrm{grad}\,\psi,$$

zgodnej ze związkiem /1.13/.

Należy jeszcze udowodnić słuszność wzoru /1.14/. W tym celu dokonajmy na równaniu /1.1/ operację diwergencji i wykorzystajmy związek $\mathrm{div}\,\vec{u} = \nabla^2\phi$, wynikający z /2.1/. W rezultacie otrzymamy

/2.17/ $$\Box_1^2\nabla^2\phi + \frac{1}{\lambda+2\mu}\,\mathrm{div}\,\vec{X} = \frac{\gamma}{\lambda+2\mu}\nabla^2\Theta.$$

Następnie wyeliminujmy z równań /2.3/ i /2.17/ fznkcję ϕ , wykorzystując równanie /1.16/. W rezultacie otrzymamy równanie

/2.18/ $$\Omega\Theta + \frac{\eta}{\lambda+2\mu}\partial_t\,\mathrm{div}\,\vec{X} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Box_1^2\Omega\psi$$

Dokonajmy wreszcie na równaniu /1.16/ operacji diwergencji, co prowadzi do związku

/2.19/ $$\frac{1}{\lambda+2\mu}\operatorname{div}\vec{X} = -\operatorname{div}(\square_2^2 \Omega \vec{\varphi}).$$

Wstawiając /2.19/ do /2.18/ i wykonując na tym przekształconym równaniu operację Ω^{-1}, dochodzimy do związku

/2.20/ $$\Theta = \eta \partial_t \operatorname{div} \square_2^2 \vec{\varphi} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \psi,$$

zgodnego z przedstawieniem /1.14/. W ten sposób dowód zupełności został zakończony.

Szczególnym przypadkiem termosprężystości sprzężonej jest tzw.techniczna teoria naprężeń cieplnych, w której poznaje się sprzężenie równań /1.1/ i /1.2/ przez pominięcie wyrazu $\eta \operatorname{div} \dot{\vec{u}}$ w równaniu przewodnictwa cieplnego. Łatwo wykazać przyjmując $\eta = 0$ w równaniach /1.13/ do /1.16/ i wprowadzając funkcję $\vec{G} = D\vec{\varphi}$, że prawdziwe są następujące związki:

/2.21/ $$\vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \vec{G} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div} \vec{G} + \frac{\nu}{\mu} \operatorname{grad} \psi,$$

/2.22/ $$\Theta = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \square_1^2 \psi.$$

Funkcje $\vec{G}$ i ψ powinny spełniać równania

/2.23/ $$\square_1^2 \square_2^2 \vec{G} + \frac{\vec{X}}{\lambda+2\mu} = 0,$$

/2.24/ $$D \square_1^2 \psi + \frac{Q\mu}{\varkappa(\lambda+2\mu)} = 0.$$

Wreszcie w przypadku szczególnym elastooptyki klasycznej mamy

/2.25/ $\vec{u} = \frac{\lambda_1+2\mu_1}{\mu_1}\Box_1^2\vec{G} - \frac{\lambda_1+\mu_1}{\mu_1}\operatorname{div}\vec{G}$, $\theta = -\eta_T m_T \varkappa \operatorname{div}\vec{u}$

gdzie funkcja $\vec{G}$ spełnia równanie bifalowe

/2.26/ $\Box_1^2\Box_2^2\vec{G} + \frac{\vec{X}}{\lambda_1+2\mu_1} = 0.$

Związki /2.25/ i /2.26/ zostały podane przez M.Jacovache [10], a twierdzenie o zupełności tego rozwiązania przez E.Sternberga i R.A.Eubanksa [11].

3. Związki między potencjałami $\phi, \vec{\chi}$ a funkcjami $\vec{\varphi}, \psi$.

Rozpatrzmy jednorodny układ równań /1.1/ i /1.2/. Przez wprowadzenie wzorów /1.13/ i /1.14/ doprowadzamy ten układ równań do równań falowych

/3.1/ $\Box_2^2\Omega\vec{\varphi} = 0,$

/3.2/ $\Omega\psi = 0.$

Zauważmy, że w myśl twierdzenia T.Boggio [12], rozwiązanie równania /3.1/ przedstawić można w postaci

/3.3/ $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}' + \vec{\varphi}'',$

przy czym funkcje $\vec{\varphi}'$, $\vec{\varphi}''$ powinny spełniać równania

/3.4/ $\Omega\vec{\varphi}' = 0,$

/3.5/ $\Box_2^2 \vec{\varphi}'' = 0.$

Wstawiając /3.3/ do równania /1.13/ oraz uwzględniając równania /3.4/ i /3.5/ otrzymamy

/3.6/ $$\vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Omega\vec{\varphi}'' - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\mathrm{grad\,div}\,\Gamma(\vec{\varphi}'+\vec{\varphi}'') + \frac{\mu'}{\mu}\,\mathrm{grad}\,\psi.$$

Przekształćmy obecnie wyrażenie $\Omega\vec{\varphi}''$, zważywszy, że $\Omega = \Box_1^2 D - m\eta\partial_t\nabla^2$ i biorąc pod uwagę związek /3.5/. Po prostych przekształceniach przy uwzględnieniu związku /2.11/ otrzymamy

/3.7/ $$\Omega\vec{\varphi}'' = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(\nabla^2\Gamma\vec{\varphi}''\right).$$

W ten sposób biorąc pod uwagę zależności /3.7/ przedstawimy równanie /3.6/ w postaci

/3.8/ $$\vec{u} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left[\nabla^2\Gamma\vec{\varphi}'' - \mathrm{grad\,div}\,\Gamma(\vec{\varphi}'+\vec{\varphi}'')\right] + \frac{\mu'}{\mu}\,\mathrm{grad}\,\psi.$$

zważywszy że

$$\mathrm{grad\,div}\,(\Gamma\vec{\varphi}'') = \nabla^2(\Gamma\vec{\varphi}'') + \mathrm{rot\,rot}\,(\Gamma\vec{\varphi}''),$$

otrzymamy z /3.8/:

/3.9/ $$\vec{u} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\left[-\mathrm{rot\,rot}\,(\Gamma\vec{\varphi}'') - \mathrm{grad\,div}\,(\Gamma\vec{\varphi}')\right] + \frac{\mu'}{\mu}\,\mathrm{grad}\,\psi.$$

Łatwo już obecnie sprowadzić związek /3.9/ do postaci Stokesa - - Helmholtza

/3.10/ $$\vec{u} = \mathrm{grad}\,\phi + \mathrm{rot}\,\vec{\chi},$$

Porównanie równań /3.9/ i /3.10/ prowadzi do następującej transformacji:

/3.11/ $$\phi = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div}(\Gamma \vec{\varphi}') + \frac{\gamma}{\mu}\varphi,$$

/3.12/ $$\vec{\chi} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{rot}(\Gamma \vec{\varphi}''),$$

która wiąże funkcje $\phi, \vec{\chi}$ z funkcjami $\vec{\varphi}, \psi$.

Wykonajmy następnie operację D na wzorze /1.14/. Otrzymamy po wykorzystaniu równania /3.5/ następujący związek:

/3.13/ $$D\Theta = \eta \partial_t \operatorname{div}(D\Box_2^2 \vec{\varphi}') + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} D\Box_1^2 \psi.$$

Przekształćmy równanie /3.4/, które możemy również zapisać w postaci:

/3.14/ $$\Box_1^2 D\vec{\varphi}' - m\eta\partial_t \nabla^2 \vec{\varphi}' = 0.$$

Wykorzystując związek /2.11/ otrzymamy

/3.15/ $$D\Box_2^2 \vec{\varphi}' = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \nabla^2 \Gamma \vec{\varphi}'.$$

Wstawiając /3.15/ do /3.13/ i uwzględniając równanie /3.2/ dochodzimy do równania

/3.16/ $$D\Theta = \eta\partial_t \nabla^2 \left[-\frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div}(\Gamma\vec{\varphi}') + \frac{\gamma}{\mu}\psi\right].$$

Ale wyrażenie w nawiasach kwadratowych równa się ze względu na /3.11/ funkcji ϕ . Mamy zatem

$$/3.17/ \quad D\Theta - \eta \partial_t \nabla^2 \phi = 0.$$

Równanie to jest jednorodnym równaniem przewodnictwa cieplnego /1.7/.

Pozostaje jeszcze sprawdzić, czy funkcje $\phi, \vec{\chi}$, wyrażone przez funkcje $\vec{\varphi}$ i ψ spełniają jednorodne równania falowe /1.9/ i /1.10/

$$/3.18/ \quad \Omega \phi = 0 \ , \quad \Box_2^2 \vec{\chi} = 0$$

Łatwo sprawdzić, że

$$/3.19/ \quad \Omega \phi = \frac{\gamma}{\mu} \Omega \psi - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div}(\Gamma \Omega \vec{\varphi}') = 0 ,$$

a to ze względu na /3.2/ oraz /3.4/.
Również i

$$/3.20/ \quad \Box_2^2 \vec{\chi} = - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{rot}(\Gamma \Box_2^2 \vec{\varphi}'') = 0,$$

ze względu na równanie /3.5/.

W przypadku teorii naprężeń cieplnych, w której poznaje się sprzężenie pola temperatury i pola przemieszczeń, otrzymuje się zamiast transformacji /3.11/ i /3.12/ następującą:

$$/3.21/ \quad \phi = - \frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{div} \vec{G} + \frac{\gamma}{\mu} \psi ,$$

/3.22/ $\vec{\chi} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \operatorname{rot} \vec{G} \; , \quad \vec{G} = D\vec{\varphi}.$

Przemieszczenia $\vec{u}$ i temperatura θ określone są tu przez związki /2.21/ i /2.22/ i winny spełniać równania jednorodne

/3.23/ $\square_1^2 \square_2^2 \vec{G} = 0 \; , \quad D\square_1^2 \psi = 0.$

Łatwo też wykazać, że funkcje $\phi, \vec{\chi}$ określone związkami /3.21/ i /3.22/ spełniają równania

/3.24/ $\square_1^2 \phi = m\theta \; , \quad \square_2^2 \vec{\chi} = 0 \; , \quad D\theta = 0.$

W przypadku klasycznej elastooptyki wzory /3.21/ i /3.22/ przechodzą w

/3.25/ $\phi = -\frac{\lambda_s+\mu_s}{\mu} \operatorname{div} \vec{G},$

/3.26/ $\vec{\chi} = -\frac{\lambda_s+\mu_s}{\mu} \operatorname{rot} \vec{G}.$

zgodnie z wynikiem otrzymanym przez E. Sternberga [5] .

References

1. M.A.Biot, Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, J.Appl.Phys.,27/1956/.
2. W.Nowacki, Some dynamic problems in thermoelasticity, Arch. Mech.Stos., 1, 11 /1959/.
3. C.Somigliana, Sulle espressioni analitiche generali dei movimenti oscillatori, Atti Reale Accad. Linc. Roma Ser.5, 1 /1892/, 111.
4. P.Duhem, Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch, J.Math.Pures et Appl., 6 /1900/, 215.
5. E.Sternberg, On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity, Arch.Rat.Mech.Analysis, 1, 6 /1960/.
6. S.Kaliski, Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych, Warszawa, PWN, 1957.
7. J.S.Podstrigacz, Podstawowe rozwiązanie nieustalonego zagadnienia termosprężystego /w jęz.ukraińskim/, Prikł.Mech., 2, 6 /1960/.
8. D.Rudiger, Bemerkung zur Integration der thermo-elastischen Grundgleichungen, Österr.Ing.Arch., 1-2, 18 /1964/.
9. B.Galerkin, Contribution à la solution générale du probleme de la théorie dans le cas de trois dimensions, C.R.Acad.Sci., Paris, 190 /1930/, 1047.
10. M.Jacovache, O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuaţiilor elasticităţii, Bul.stiint.Acad.Rep.Pap. Romane, Ser.A, 1 /1949/, 593.

11. E.Sternberg, R.A.Eubanks, On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation, Quart.Appl.Math., 15 /1957/, 149.

12. T.Boggio, Sull integratione di alcuma equasioni lineari alle derivate parziali, Ann.Math.Ser.III, 8 /1903/, 181.