

Z. Bychawski, W. Olszak
**ENERGETYCZNA INTERPRETACJA
STANÓW KRYTYCZNYCH
W CIAŁACH LEPKOSPĘŻYSTYCH**

2/1967

WARSZAWA



Na prawach rękopisu

Do użytku wewnętrznego

Institut Podstawowych Problemów Techniki PAN.
Nakład 200 egz. Arkuszy wydawniczych 2,7. Arkuszy
drukarskich 3,5. Oddano do druku w grudniu 1967 r.
Druk ukończono w lutym 1968. Zam. 56/0/68.

Warszawska Drukarnia Naukowa, W-wa, ul. Śnia-
deckich 8.

ENERGETYCZNA INTERPRETACJA STANÓW KRYTYCZNYCH W CIAŁACH LEPKOSPĘŻYSTYCH

Z. Bychawski, W. Olszak

1. Uwagi wstępne

Jako stan krytyczny ciała lepkospężystego rozumiemy taki stan, który bezpośrednio poprzedza zmiany jakościowe i związane z nimi zmiany ilościowe w zachowywaniu się ośrodka pod wpływem działań mechanicznych. Oznacza to, na przykład, że ciało lepkospężyste, które do chwili osiągnięcia stanu krytycznego zachowywało się liniowo, przechodzi z chwilą jego osiągnięcia w stan jakościowo różny, opisany nieliniowym równaniem konstytutywnym. Stan krytyczny może oznaczać również stan przejścia ciał lepkospężystych z zakresu procesów nieustalonych do ustalonych i na odwrót, itp.

Zagadnieniom stanów krytycznych ciał lepkospężystych poświęcono, jak dotychczas, mało uwagi. Dotyczy to zarówno prac teoretycznych jak i doświadczalnych. Zagadnienia te są obecnie bardzo aktualne i niezależnie od znaczenia teoretycznego posiadają duży aspekt praktyczny. Sformułowanie odpowiednich kryteriów dla stanów krytycznych ciał lepkospężystych pozwoliło by na określenie czasu osiągnięcia przez te ciała tych stanów drogą prostego doświadczenia w złożonych warunkach zjawisk reologicznych.

Ośrodek lepkospężysty ogólnie uważamy jako ośrodek złożony z dwóch faz: sprężystej i lepkiej. W dotychczasowych sformułowaniach kryteriów stanów krytycznych dla

ciał lepkosprężystych faz tych nie uważa się za równorzędne w sensie odpowiedzialności za przejście ośrodka w stan krytyczny. Pojęcie stanu krytycznego wiąże się mianowicie z fazą sprężystą. Na przykład Reiner i Weissenberg [2] podali koncepcję kryterium stanu krytycznego dla ciał z tarcie wewnętrznym, w myśl której uplastycznienie ośrodka zachodzi wtedy, gdy energia magazynowana w ośrodku osiąga pewną ściśle określoną wielkość. W szczególności Reiner [3] zastosował to kryterium do pewnego typu ośrodka lepkosprężystego /model Poyntinga-Thomsona/.

Wydaje się, że dotychczasowe podejście winno być uzupełnione w tym kierunku, aby obie fazy ciała lepkosprężystego uczynić współodpowiedzialnymi za przejście w stan krytyczny /por. [4] /. Nie ma przesłanek, aby twierdzić, że płynięcie fazy lepkiej w ośrodku lepkosprężystym jest nieograniczone, stwierdzamy bowiem doświadczalnie w pewnych typach ciał tzw. zniszczenie lepkie. Z drugiej strony, istnieją ciała, które w ogóle nie posiadają zdolności do akumulowania energii. Odpowiednie kryteria dla stanów krytycznych takich ciał muszą być związane z energią dysypowaną. Z powyższych faktów wynika wniosek, że w ogólnym przypadku współdziałania obu faz w ośrodku lepkosprężystym należy uważać, przy badaniu stanów krytycznych, fazy te - zgodnie z koncepcją autorów - jako równorzędne.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować zagadnieniem stanów krytycznych dla liniowych ośrodków lepkosprężystych, bazując na odpowiedniej interpretacji modelowej, w której ograniczymy się do dwóch podstawowych elementów składowych, jakimi są linia sprężyna i lepki tłumik.

2. Kryterium energetyczne stanu krytycznego dla liniowych ciał lepkosprężystych

Rozważmy model reologiczny ciała lepkosprężystego o charakterystyce liniowej. Dla modelu tego możemy utworzyć

następujące wyrażenia

$$/2.1/ \quad W_E = 2 \sum_m G_n w_{en}^D, \quad W_D = \sum_m \eta_n Dw_{vn}^D,$$

gdzie G_n i η_n są odpowiednio stałymi sprężystymi i współczynnikami lepkości, w_{en}^D jest energią właściwą postaciową pojedynczego elementu sprężystego n , zaś Dw_{vn}^D - mocą właściwą dysypacji związaną ze zmianą postaci pojedynczego elementu lepkiego n . Tutaj D oznacza operator różniczkowania po czasie $D = d/dt$.

W dalszym ciągu wielkości /2.1/ wprowadzone umownie nazywać będziemy odpowiednio zredukowanymi energiami: sprężystą i dysypowaną, rozumiejąc przez to, że wielkości te są zredukowane wymiarowo.

Zależności /2.1/ utworzone zostały przy założeniu, że składowe energie w_{en}^D i w_{vn}^D wyrażone są przez składowe dewiatora naprężenia s_{ij} .

W analogiczny sposób można utworzyć wielkości /2.1/, wyrażając składowe energie przez składowe dewiatora odkształcenia e_{ij} . Otrzymamy wtedy

$$/2.2/ \quad W_E = \frac{1}{2} \sum_m \frac{1}{G_n} w_{en}^D, \quad W_D = \frac{1}{4} \sum_m \frac{1}{\eta_n} Dw_{vn}^D.$$

W ogólności wielkości /2.1/ i /2.2/ są zależne od współrzędnych przestrzennych, w układzie których rozważamy ośrodek lekosprężysty, przy czym dla ustalonego punktu ośrodka mamy

$$/2.3/ \quad W = W_E + W_D,$$

gdzie W jest całkowitą właściwą energią zredukowaną.

Wprowadzimy dalej pojęcie współczynników rozdziału energii, które zdefiniujemy w następujący sposób;

$$/2.5/ \quad \alpha_E = W_E/W \quad , \quad \alpha_D = W_D/W .$$

Współczynniki /2.5/ są w ogólności bezwymiarowymi funkcjami czasu i spełniają warunek /dla dowolnej chwili czasu t/

$$/2.6/ \quad \alpha_E + \alpha_D = \text{const} = 1 .$$

Rozkład całkowitej energii /2.3/ na dwa składniki $W_E = \alpha_E W$ - energię magazynowaną i $W_D = \alpha_D W$ - energię dysypowaną jest zależny od wewnętrznej struktury ciał lepkosprężystych, to znaczy wynika ze sposobu powiązania elementów faz sprężystej i lepkiej w modelu reprezentującym tę strukturę oraz od ich fizycznych charakterystyk.

Jeżeli utworzymy z kolei stosunki współczynników rozdziału

$$/2.7/ \quad \omega_E = \alpha_E / \alpha_D \quad , \quad \omega_D = \alpha_D / \alpha_E \quad ,$$

to wielkości te stanowią charakterystyki rozmaitych typów ośrodków lepkosprężystych od czysto-sprężystego $\alpha_D = 0$, $\omega_D = 0$ / do czysto-lepkiego $\alpha_E = 0$, $\omega_E = 0$ /. Jest rzeczą oczywistą, że zarówno współczynniki rozdziału /2.5/, jak i charakterystyki /2.7/ muszą się wyrażać przez inne funkcje charakteryzujące ośrodki lepkosprężyste, na przykład funkcje pełzania lub relaksacji. Wynika stąd, że wprowadzone tutaj wielkości będą określały własności ośrodków lepkosprężystych z energetycznego punktu widzenia i będą stanowiły równorzędnie z innymi charakterystyki fizyczne.

Warunek osiągnięcia przez ośrodek lepkosprężysty stanu krytycznego w danym jego punkcie napiszemy w postaci

$$/2.8/ \quad (\alpha_E + \alpha_D) W = k^2 \quad ,$$

gdzie k jest pewną stałą charakteryzującą stan krytyczny. W szczególności dla formy przedstawienia energii zredukowanych /2.1/ k ma znaczenie naprężenia krytycznego, zaś dla formy /2.2/ - odkształcenia krytycznego. Z chwilą osiągnięcia tych wielkości krytycznych następuje jakościowa zmiana w zachowaniu się ośrodka lepkosprężystego.

Sformułowany tutaj warunek /2.8/ posiada tę zaletę, że uwzględnia energetyczny wpływ obu faz sprężystej i lepkiej na stan krytyczny, a w szczególności pozwala na przejście do warunków dla skrajnych przypadków ośrodków czysto-sprężystego i czysto-lepkiego

$$/2.9/ \quad W_E = k_E^2, \quad W_D = k_D^2,$$

gdzie znaczenie stałych k_E i k_D jest oczywiste. Warunki /2.9/ wynikają z /2.8/ jako szczególne przypadki przy założeniu odpowiednio $\alpha_E = 0$ lub $\alpha_D = 0$.

Niezależnie od warunku /2.8/, który wykorzystuje pojęcie energii zredukowanej, można wprowadzić analogiczny warunek dla całkowitej energii "naturalnej" w , to znaczy

$$/2.10/ \quad (h_e + h_v)w = k^2,$$

gdzie

$$/2.11/ \quad w = w_e + w_v, \quad h_e = w_e/w, \quad h_v = w_v/w.$$

Tutaj w_e , w_v są odpowiednio energiami magazynowaną i dysypowaną, zaś h_e , h_v - współczynnikami naturalnymi rozdziału energii. Podobny warunek może dotyczyć również całkowitej mocy

$$/2.12/ \quad (\dot{h}_e + \dot{h}_v)Dw = \dot{k}^2,$$

gdzie

$$/2.13/ \quad Dw = Dw_e + Dw_v, \quad \dot{h}_e = \dot{Dw}_e/Dw, \quad \dot{h}_v = \dot{Dw}_v/Dw.$$

W dalszym ciągu zajmiemy się określeniem wyrażen energetycznych dla charakterystycznych ogólnych typów ośrodków lepkosprężystych.

3. Podstawowe równania energetyczne

Ograniczamy się do rozważenia liniowych ośrodków lepkosprężystych i zakładamy przy tym, że warunki ograniczające wielkość przemieszczeń są spełnione. W konsekwencji tego założenia tensor odkształcenia można uważać za wielkość małą /tensor małych odkształceń/. Ma to o tyle istotne znaczenie, że przemieszczenia w ośrodkach lepkosprężystych mogą osiągać niekiedy znaczne wielkości. Założenie o małości tensora odkształcenia przypadek taki wyklucza.

Dalsze ograniczenie dotyczy ilości ciepła wytwarzanego przez fazę lepka w procesie dysypacji doprowadzanej energii, którą w naszych rozważaniach przyjmujemy jako małą. Należy to rozumieć w ten sposób, że zmiany temperatury wywołane dysypacją energii, a co za tym idzie przyrost entropii, nie mają wpływu na własności mechaniczne ośrodka. Założenie powyższe ogranicza zatem nasze rozważania do zakresu małych tensorów lepkiego płynięcia. Pominięte zostają również wpływy związane z oddziaływaniem sił masowych i sił bezwładności.

Jako podstawowe równanie energetyczne przyjmujemy prawo zachowania energii, w którym pomijamy niemechaniczne formy energii. Bilans pełniejszy uwzględniony zostanie w oddzielnym studium.

Tensor odkształceń całkowitych ośrodka lepkosprężystego możemy przedstawić w postaci sumy tensora odkształcenia sprężystego i tensora odkształcenia lepkiego

$$/3.1/ \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^v$$

wskaźniki e i v, tutaj i w dalszym ciągu, odnosimy odpowiednio do fazy sprężystej i fazy lepkiej.

Różniczkując wzór /3.1/ względem czasu, otrzymamy analogiczny związek dla tensorów prędkości odkształcenia

$$/3.2/ \quad D\varepsilon_{ij} = D\varepsilon_{ij}^e + D\varepsilon_{ij}^v,$$

gdzie przez D oznaczono operator różniczkowania $D = d/dt$.

Z drugiej strony tensor odkształcenia całkowitego można przedstawić jako sumę tensora kulistego ε i dewiatora odkształcenia e_{ij}

$$/3.3/ \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + e_{ij}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

W dalszym ciągu zakładamy, że deformacja objętości ośrodka lepkosprężystego jest w ogólności funkcją czasu /w szczególności zachodzi identycznie jak dla fazy sprężystej/. Wtedy możemy napisać dewiator odkształcenia całkowitego w postaci

$$/3.4/ \quad e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^v,$$

oraz na podstawie /3.1/

$$/3.5/ \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + e_{ij}^e + e_{ij}^v.$$

Opierając się na odpowiednio uogólnionym modelu mechanicznym ośrodka lepkosprężystego i rozważając stan przestrzennej deformacji tego ośrodka, możemy przedstawić tensor odkształcenia całkowitego przez tensory odkształcenia poszczególnych elementów składowych sprężystych i lepkich tego modelu. Modelem takim może być na przykład uogólniony model Maxwella, składający się z elementów Maxwella połączonych równolegle. Model ten jest z kolei równoważny ciągłowi modeli Kelvina połączonych szeregowo ze sobą oraz z elementem Maxwella. W ten sposób dla n -tego elementu

sprężysto-lepkiego otrzymujemy z warunków kinematycznych związek

$$/3.6/ \quad \varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{en} + \varepsilon_{ij}^{vn} \quad , \quad /n=1,2,\dots,m/,$$

natomiast deformacja całkowita określona jest tensorem

$$/3.7/ \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^n,$$

to znaczy deformacja wszystkich elementów jest identyczna.

Biorąc pod uwagę rozkład tensora /3.5/, możemy wzór /3.7/ przedstawić jeszcze w postaci

$$/3.8/ \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon^n \delta_{ij} + e_{ij}^{en} + e_{ij}^{vn}.$$

Tensor naprężenia w ośrodku lepkosprężystym przedstawimy w postaci sumy tensora kulistego naprężenia σ oraz dewiatora naprężenia s_{ij}

$$/3.9/ \quad \sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + s_{ij} \quad , \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad .$$

Dla n-tego elementu lepkosprężystego przyjętego modelu ośrodka otrzymamy z warunków statycznych

$$/3.10/ \quad \sigma_{ij}^n = \sigma^n \delta_{ij} + s_{ij}^n \quad , \quad \sigma^n = \frac{1}{3} \sigma_{kk}^n \quad ,$$

a naprężenie ogólne dane będzie przez tensor^{x/}.

$$/3.11/ \quad \sigma_{ij} = \sum_m \sigma_{ij}^n = \delta_{ij} \sum_m \sigma^n + \sum_m s_{ij}^n \quad .$$

^{x/} W dalszym ciągu przez sumę \sum_m rozumiemy $\sum_{m=1}^n$

Zgodnie z podanym na wstępie założeniem o prawie zachowania energii, przyjmujemy je w postaci

$$/3.12/ \quad Dw = Dw_e + Dw_v,$$

Prawo to określa moc całkowitą doprowadzoną do ośrodka jako sumę mocy magazynowania przez fazę sprężystą i mocy dysypacji przez fazę lepka. Moc całkowita równa jest mocy naprężeń

$$/3.13/ \quad Dw = \sigma_{ij} D \varepsilon_{ij},$$

Podstawiając do powyższego równania wyrażenia /3.3/ oraz /3.9/, otrzymujemy

$$/3.14/ \quad Dw = 3\sigma D \varepsilon + s_{ij} De_{ij} = Dw^0 + Dw^D,$$

gdzie w^0 oznacza energię związaną ze zmianą objętości, natomiast w^D energię związaną ze zmianą postaci.

Podstawiając z kolei związki /3.8/ i /3.11/ do równania /3.13/ oraz uwzględniając oczywiste równości

$$/3.15/ \quad \varepsilon^n = \varepsilon, \quad \sum_m \sigma^n = \sigma,$$

mamy

$$/3.16/ \quad Dw = 3\sigma D \varepsilon + s_{ij}^n De_{ij}^{en} + s_{ij}^n De_{ij}^{vn}.$$

W wyrażeniu powyższym /i w dalszym ciągu/ przyjmujemy umowę sumacyjną w celu uproszczenia zapisu. Umowa ta odnosi się do wszystkich powtarzających się wskaźników dolnych $i, j = 1, 2, 3$ oraz górnych $n = 1, 2, \dots, m$, przy czym te ostatnie wskaźniki nie są wskaźnikami tensorowymi.

Jeżeli oznaczymy

$$/3.17/ \quad Dw_e^p = s_{ij}^n De_{ij}^{en} \quad , \quad Dw_v^p = s_{ij}^n De_{ij}^{vn} \quad ,$$

jako odpowiednio moc magazynowanej i dysypowanej energii odkształcenia postaciowego, to wówczas zapiszemy /3.16/ w postaci

$$/3.18/ \quad Dw = Dw^o + Dw_e^p + Dw_v^p,$$

Dla uogólnionego modelu Kelvina /połączenie szeregowo elementu Maxwella + m elementów Kelvina/ możemy napisać związki

$$/3.19/ \quad \varepsilon_{ij} = \sum_m \varepsilon_{ij}^n = \delta_{ij} \sum_m \varepsilon^n + \sum_m e_{ij}^n .$$

oraz

$$/3.20/ \quad \sigma_{ij} = \sigma^n \delta_{ij} + s_{ij}^{en} + s_{ij}^{vn} .$$

Wprowadzając powyższe wyrażenia do równania /3.13/, otrzymamy przy uwzględnieniu zależności

$$/3.21/ \quad \varepsilon^n = \sigma, \quad \sum_m \varepsilon^n = \varepsilon ,$$

moc całkowitą w postaci

$$/3.22/ \quad Dw = 3\sigma D\varepsilon + s_{ij}^{en} De_{ij}^{en} + s_{ij}^{vn} De_{ij}^{vn} ,$$

gdzie sumowanie, zgodnie z wprowadzoną umową, rozciąga się na trzy wskaźniki: i, j oraz wskaźnik porządkowy n .

Równanie /3.22/ jest równoważne związkowi /3.16/ wprowadzonymu dla uogólnionego modelu Maxwella.

W ogólności dla dowolnego ośrodka lepkosprężystego równanie /3.13/ można zapisać w formie

$$/3.23/ \quad D w = 3 \zeta D \xi + s_{ij}^{en} D e_{ij}^{en} + s_{ij}^{vn} D e_{ij}^{vn} .$$

Całkowitą energię równą pracy naprężeń otrzymamy całkując równanie /3.23/ po czasie w granicach od 0 do t . Będziemy przy tym zakładać, że w chwili $t = 0$ poziom energetyczny odpowiada energii zamagazynowanej w ośrodku wskutek natychmiastowej deformacji sprężystej wywołanej początkową wartością tensora kulistego naprężenia oraz początkową wartością dewiatora naprężenia

$$/3.24/ \quad \zeta(0) = 0, \quad s_{ij}(0) = 0,$$

tak że

$$/3.25/ \quad w(0) = 0,$$

przedstawia "zerową" energię sprężystą. W ten sposób mamy

$$/3.26/ \quad w = D^{-1} D w = 3 D^{-1} (\zeta D \xi) + D^{-1} (s_{ij}^{en} D e_{ij}^{en}) + D^{-1} (s_{ij}^{vn} D e_{ij}^{vn}),$$

z warunkiem początkowym /3.25/.

Jeżeli oznaczymy

$$/3.27/ \quad w^0 = 3 D^{-1} (\zeta D \xi), \quad w_e^p = D^{-1} (s_{ij}^{en} D e_{ij}^{en}), \quad w_v^p = D^{-1} (s_{ij}^{vn} D e_{ij}^{vn}),$$

to wówczas na podstawie związku /3.26/ możemy napisać

$$/3.28/ \quad w = w^0 + w_e^p + w_v^p ,$$

gdzie pierwszy wyraz prawej strony przedstawia energię zmiany objętości, drugi wyraz energię sprężystą zmiany postaci, a trzeci energię dysypowaną zmiany postaci.

W ogólności w^0 przedstawia sumę energii sprężystej i dysypowanej przy zmianie objętości.

Podane formuły zastosujemy do badania charakterystyk energetycznych określonych typów ośrodków lepkosprężystych.

4. Ogólne typy ośrodków lepkosprężystych i operatorowe formy energii

Zakładać będziemy w dalszym ciągu, że współczynniki fizyczne charakteryzujące fazę sprężystą i fazę lepka ośrodka lepkosprężystego są niezależne od czasu, zaś funkcje pełzenia i relaksacji zależą od różnicy argumentów $(t-\tau)$.

Rozważamy ośrodek, którego całkowita deformacja określona jest tensorem

$$/4.1/ \quad \varepsilon_{ij}^n(t) = \sum_m \varepsilon_{ij}^{nm}(t),$$

gdzie dowolna składowa deformacja dana jest operatorem

$$/4.2/ \quad \varepsilon_{ij}^{nm} = P_c^n (D_\tau \sigma_{ij}), \quad D_\tau = \partial/\partial\tau.$$

Operator ten przyjmujemy w postaci

$$/4.3/ \quad P_c^n f = \int_0^t f(\tau) K_n^c(t-\tau) d\tau.$$

Równanie /4.1/ zapiszemy w postaci operatorowej, a w tym celu wprowadzimy operator

$$/4.4/ \quad P^c f = \sum_m P_c^n f = \int_0^t f(\tau) \sum_m K_n^c(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) K^c(t-\tau) d\tau,$$

gdzie oznaczono

$$/4.5/ \quad K^c(t) = \sum_m K_m^c(t).$$

Wtedy równanie /4.1/ przyjmie postać

$$/4.6/ \quad \epsilon_{ij} = P^c(D_\tau \zeta_{ij}).$$

Jeżeli przyjmiemy warunki początkowe dla tensora naprężenia oraz funkcji K w formie

$$/4.7/ \quad \zeta_{ij}(0) = 0, \quad K^c(0) = 0,$$

to wówczas do operacji /4.6/ stosuje się prawo przemienności

$$/4.8/ \quad \epsilon_{ij} = D(P^c \zeta_{ij}),$$

gdzie

$$/4.9/ \quad DP^c f = D \int_0^t f(\tau) K^c(t-\tau) d\tau.$$

Podstawiając związek /3.9/ do równania /4.6/, otrzymujemy

$$/4.10/ \quad \epsilon_{ij} = P^0(D_\tau \zeta) \delta_{ij}^0 + P(D_\tau \zeta_{ij}),$$

gdzie znaczenie operatorów P^0 i P jest następujące:

$$/4.11/ \quad P^0 f = \int_0^t f(\tau) K^0(t-\tau) d\tau, \quad P f = \int_0^t f(\tau) K(t-\tau) d\tau.$$

Operator P^0 związany jest z deformacją objętościową, a K^0 jest funkcją pełzania objętościowego, zaś operator P odnosi się do deformacji postaciowej, dla której funkcję pełzania reprezentuje K . Analogicznie jak poprzednio, przyjmujemy warunki początkowe

$$/4.12/ \quad \epsilon(0) = 0, \quad s_{ij}(0) = 0, \quad K^0(0) = 0, \quad K(0) = 0,$$

dla których równanie /2.10/ może być przedstawione w postaci

$$\epsilon_{ij} = D(P^0 \epsilon) \delta_{ij} + D(P s_{ij}).$$

Utworzymy obecnie odpowiednie wyrażenia energetyczne dla rozważanego ośrodka lepkosprężystego. Różniczkując wzór /2.8/ po czasie, mamy

$$/4.14/ \quad D \epsilon_{ij} = D^2 (P^c \epsilon_{ij}).$$

Moc całkowitą naprężeń otrzymamy mnożąc /4.14/ przez tensor naprężenia

$$/4.15/ \quad D w = \epsilon_{ij} D \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} D^2 (P^c \epsilon_{ij}),$$

a stąd przez całkowanie znajdujemy energię całkowitą

$$/4.16/ \quad w = D^{-1} D w = D^{-1} \left[\epsilon_{ij} D^2 (P^c \epsilon_{ij}) \right].$$

Znaczenie operatora występującego w równaniu /4.16/ jest następujące:

$$D^{-1} \left[\epsilon_{ij} D^2 (P^c f) \right] = \int_0^t \left\{ f(t) \int_0^t f(\tau) D^2 K^c(t-\tau) d\tau \right\} dt + D K^c(0) \int_0^t f^2(\tau) d\tau$$

$$= \int_{\infty}^{tt} \int_{\infty}^{tt} f(\tau_1) f(\tau_2) D_{\tau_1}^2 K^c(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + DK^c(0) \int_0^t f^2(\tau) d\tau,$$

/4.17/

gdzie $D_{\tau} = \partial/\partial\tau$, $D_{\tau_1}^2 = \partial^2/\partial\tau_1^2$.

W celu rozdzielenia mocy na moc związaną ze zmianą objętości i moc związaną ze zmianą postaci, podstawiamy /3.9/ do równania /4.15/. Otrzymujemy w ten sposób

$$/4.18/ \quad Dw = \epsilon D^2(P^0\epsilon) + s_{1j} D^2(Ps_{1j}).$$

Stąd, stosując operację odwrotną, znajdujemy energię całkowitą

$$/4.19/ \quad w = D^{-1}[\epsilon D^2(P^0\epsilon)] + D^{-1}[s_{1j} D^2(Ps_{1j})].$$

Tutaj operatory mają następujące znaczenia

$$/4.20/ \quad D^{-1}[\epsilon D^2(P^0\epsilon)] = \int_{\infty}^{tt} \int_{\infty}^{tt} f(\tau_1) f(\tau_2) D_{\tau_1}^2 K^0(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + DK^0(0) \int_0^t f^2(\tau) d\tau,$$

$$/4.21/ \quad D^{-1}[\epsilon D^2(Pf)] = \int_{\infty}^{tt} \int_{\infty}^{tt} f(\tau_1) f(\tau_2) D_{\tau_1}^2 K(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + DK(0) \int_0^t f^2(\tau) d\tau$$

Na podstawie formuł /4.18/ oraz /4.19/ możemy napisać teraz odpowiednie wyrażenia dla mocy i energii związanych z deformacją objętościową i deformacją postaciową

$$/4.22/ \quad Dw^0 = \epsilon D^2 (P^0 \epsilon), \quad w^0 = D^{-1} [\epsilon D^2 (P^0 \epsilon)]$$

$$/4.23/ \quad Dw^p = s_{ij} D^2 (Ps_{ij}), \quad w^p = D^{-1} [s_{ij} D^2 (Ps_{ij})].$$

W celu uzyskania wyrażen dla mocy związanych z deformacją postaciową sprężystą i lepka skorzystamy z zależności /3.22/ oraz /3.23/, gdzie pominiemy człony związane z deformacją objętości.

Uwzględniając powyższe znajdujemy, że moc odniesiona do deformacji postaciowej przyjmuje formę

$$/4.24/ \quad Dw^p = s_{ij}^{en} De_{ij}^n + s_{ij}^{vn} De_{ij}^n,$$

gdzie

$$/4.25/ \quad s_{ij}^{en} = 2G_n e_{ij}^n, \quad s_{ij}^{vn} = 2\eta_n De_{ij}^n.$$

Tutaj G_n , η_n są stałymi fizycznymi dla faz sprężystej i lepkiej. Należy zaznaczyć, że wprowadzona umowa sumacyjna dla wskaźników n nie obowiązuje w przypadku wzoru /4.25/, ponieważ znajdują się one na różnych poziomach.

Podstawiając związki /4.25/ do równania /4.24/, otrzymujemy

$$/4.26/ \quad Dw^p = 2G_n e_{ij}^n De_{ij}^n + 2\eta_n De_{ij}^n De_{ij}^n.$$

Na podstawie /4.2/ oraz /3.20/ możemy napisać

$$/4.27/ \quad e_{ij}^n = P^n (Ds_{ij}),$$

a wtedy moc związana z deformacją postaciową wyrazi się przez całkowity dewiator naprężenia

/4.28/

$$Dw^p = 2G_n P^n(D_{\tau} s_{ij}) D[P^n(D_{\tau} s_{ij})] + 2\eta_n D[P^n(D_{\tau} s_{ij})] D[P^n(D_{\tau} s_{ij})] .$$

Z powyższego wzoru moc związana z deformacją sprężystą ma postać

/4.29/

$$Dw_e^p = 2G_n P^n(D_{\tau} s_{ij}) D[P^n(D_{\tau} s_{ij})] = 2G_n D[P^n(s_{ij})] D^2[P^n(s_{ij})],$$

zaś operacja odwrotna daje energię sprężystą w formie

/4.30/

$$w_e^p = D^{-1} Dw_e^p = G_n D[P^n(s_{ij})] D[P^n(s_{ij})] = G_n [DP^n(s_{ij})]^2 .$$

Ostatni operator wzoru /4.30/ ma następujące znaczenie;

$$\begin{aligned} /4.31/ \\ [DP^n f]^2 = \int_0^t \int_0^t f(\tau_1) f(\tau_2) DK_n(t-\tau_1) DK_n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 . \end{aligned}$$

Dla mocy związanej z deformacją lepka, czyli dla mocy dysypacji, mamy na podstawie wzoru /4.28/

/4.32/

$$Dw^p = 2\eta_n D[P^n(D_{\tau} s_{ij})] D[P^n(D_{\tau} s_{ij})] = 2\eta_n [D^2 P^n(s_{ij})]^2 ,$$

gdzie ostatni operator ma następujące znaczenie:

/4.33/

$$\begin{aligned} [D^2 P^n f]^2 = \int_0^t \int_0^t f(\tau_1) f(\tau_2) D^2 K_n(t-\tau_1) D^2 K_n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + 2DK_n(0) f(t) \int_0^t f(\tau) D^2 K_n(t-\tau) d\tau + [KD_n(0) f(t)]^2 . \end{aligned}$$

Stosując do wzoru /4.32/ operację odwrotną, obliczamy energię dysypowaną

$$/4.34/ \quad w_V^D = D^{-1} D w_V^D = 2\gamma_n D^{-1} [D^2 P^n (s_{1j})]^2,$$

gdzie operator ma postać

$$/4.35/ \quad D^{-1} [D^2 P^n f]^2 = \iiint_{000}^{ttt} f(\tau_1) f(\tau_2) D^2 K_n(t-\tau_1) D^2 K_n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 dt \\ + 2DK_n(0) \iint_{00}^{tt} f(t) f(\tau) D^2 K_n(t-\tau) dt d\tau + [DK_n(0)]^2 \int_0^t f^2(\tau) d\tau.$$

Operatory /4.31/, /4.33/ i /4.35/ należy rozumieć jako sumy operatorów, gdzie sumowanie odbywa się po powtarzającym się górnym wskaźniku $n = 1, 2, \dots, m$.

Rozważymy z kolei ośrodek lepkosprężysty, w którym całkowite naprężenie określone jest tensorem

$$/4.36/ \quad \sigma_{ij}(t) = \sum_m^n \sigma_{ij}^m(t),$$

gdzie dowolny tensor składowy dany jest operatorem

$$/4.37/ \quad \sigma_{ij}^n = Q_c^n (D_\tau \epsilon_{ij}).$$

Operator Q_c^n ma postać

$$/4.38/ \quad Q_c^n f = \int_0^t f(\tau) R_n(t-\tau) d\tau,$$

w którym R_n ma znaczenie funkcji relaksacji.

Biorąc pod uwagę, że

$$/4.39/ \quad Q^C f = \sum_m Q_m^C f = \int_0^t f(\tau) \sum_m R_m^C(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) R^C(t-\tau) d\tau,$$

gdzie

$$/4.40/ \quad R^C(t) = \sum_m R_m^C(t),$$

możemy zapisać równanie /4.36/ w postaci operatorowej

$$/4.41/ \quad \sigma_{ij} = Q^C (D_\tau \varepsilon_{ij}) .$$

Podstawiając związek /3.3/ do równania /4.41/, otrzymujemy

$$/4.42/ \quad \sigma_{ij} = Q^0 (D_\tau \varepsilon) \delta_{ij} + Q (D_\tau e_{ij}) ,$$

w którym operatory mają następujące znaczenia

$$/4.43/ \quad Q^0 f = \int_0^t f(\tau) R^0(t-\tau) d\tau, \quad Qf = \int_0^t f(\tau) R(t-\tau) d\tau .$$

Operator Q^0 związany jest z hydrostatycznym stanem naprężenia, a R^0 jest funkcją relaksacji objętościowej, natomiast operator Q odnosi się do dewiatorowego stanu naprężenia, zaś R jest funkcją relaksacji postaciowej.

Warunki początkowe zakładamy, dla tensorów odkształcenia, dewiatora odkształcenia oraz funkcji relaksacji, w formie

$$/4.44/ \quad \varepsilon_{ij}(0) = 0, \quad \varepsilon(0) = 0, \quad e_{ij}(0) = 0, \\ R^C(0) = \text{const}, \quad R^0 / 0 / = \text{const}, \quad R(0) = \text{const}.$$

Dla powyższych warunków początkowych określimy obecnie odpowiednie wyrażenia energetyczne rozważanego ośrodka lepkosprężystego.

Moc całkowitą otrzymamy, jeżeli utworzymy następujące wyrażenie

$$/4.45/ \quad Dw = \sigma_{1j} D \epsilon_{1j} = D \epsilon_{1j} Q^c (D_\tau \epsilon_{1j}),$$

zaś energia całkowita będzie równa

$$/4.46/ \quad w = D^{-1} Dw = D^{-1} [D \epsilon_{1j} Q^c (D_\tau \epsilon_{1j})].$$

Ostatni operator ma postać

$$/4.47/ \quad D^{-1} [f Q^c f] = \int_0^t \int_0^t f(\tau_1) f(\tau_2) R^c(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

W celu rozdzielenia mocy całkowitej na moc związaną z deformacją objętości oraz na moc związaną ze zmianą postaci, podstawiamy /3.3/ do równania /4.45/. Mamy w ten sposób

$$/4.48/ \quad Dw = D \epsilon Q^o (D_\tau \epsilon) + D e_{1j} Q (D_\tau e_{1j}).$$

Stąd, stosując operację odwrotną, znajdujemy energię

$$/4.49/ \quad w = D^{-1} [D \epsilon Q^o (D_\tau \epsilon)] + D^{-1} [D e_{1j} Q (D_\tau e_{1j})],$$

gdzie operatory są następujące:

$$/4.50/ \quad D^{-1} [f Q^o f] = \int_0^t \int_0^t f(\tau_1) f(\tau_2) R^o(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

$$/4.51/ \quad D^{-1} [f Q f] = \int_0^t \int_0^t f(\tau_1) f(\tau_2) R(t_1 - t_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Na podstawie otrzymanych wyrażeń /4.48/ i /4.49/ możemy teraz napisać odpowiednie formuły dla mocy oraz dla energii związanych z deformacją objętościową i deformacją postaciową. Mamy w ten sposób odpowiednio

$$/4.52/ \quad Dw^0 = D\varepsilon Q^0(D_\tau \varepsilon), \quad w^0 = D^{-1}[D\varepsilon Q^0(D_\tau \varepsilon)]$$

$$/4.53/ \quad Dw^P = De_{ij} Q(D_\tau e_{ij}), \quad w^P = D^{-1}[De_{ij} Q(D_\tau e_{ij})]$$

W celu uzyskania z kolei odpowiednich wyrażeń dla mocy magazynowania i mocy dysypacji związanych z deformacją postaciową, rozważmy formuły /3.22/ lub /3.23/, pomijając człony objętościowe. Uwzględniając, że moc związana z deformacją postaci ma formę

$$/4.54/ \quad Dw^P = s_{ij}^n De_{ij}^{en} + s_{ij}^n De_{ij}^{vn},$$

gdzie

$$/4.55/ \quad De_{ij}^{en} = \frac{1}{2G_n} Ds_{ij}^n, \quad De_{ij}^{vn} = \frac{1}{2\eta_n} \dot{s}_{ij}^n.$$

/tutaj G_n oraz η_n są stałymi fizycznymi dla faz, odpowiednio, sprężystej i lepkiej/, otrzymujemy

$$/4.56/ \quad Dw^P = \frac{1}{2G_n} s_{ij}^n Ds_{ij}^n + \frac{1}{2\eta_n} \dot{s}_{ij}^n s_{ij}^n.$$

Wyrażenie powyższe przedstawia moc naprężeń dla deformacji postaciowej określoną przez odpowiednie formy kwadratowe składowych dewiatorów naprężenia.

Na podstawie /4.37/ oraz /3.8/ możemy napisać

$$/4.57/ \quad s_{ij}^n = Q^n(D_\tau e_{ij}),$$

a wtedy moc związana z deformacją postaciową wyrazi się przez całkowity dewiator prędkości odkształcenia

/4.58/

$$Dw^p = \frac{1}{2G_n} Q^n(D_{\tau} e_{ij}) DQ^n(D_{\tau} e_{ij}) + \frac{1}{2\eta_n} Q^n(D_{\tau} e_{ij}) Q^n(D_{\tau} e_{ij}) .$$

Stąd dla mocy związanej z deformacją sprężystą mamy

$$/4.59/ \quad Dw_e^p = \frac{1}{2G_n} Q^n(D_{\tau} e_{ij}) DQ^n(D_{\tau} e_{ij}) ,$$

zaś przez operację odwrotną znajdujemy samą energię magazynowaną

$$/4.60/ \quad w_e^p = \frac{1}{4G_n} Q^n(D_{\tau} e_{ij}) Q^n(D_{\tau} e_{ij}) = \frac{1}{4G_n} [Q^n(D_{\tau} e_{ij})]^2 .$$

Ostatni operator ma tutaj postać

$$/4.61/ \quad [Q^n f]^2 = \int_0^t \int_0^t f(\tau_1) f(\tau_2) R_n(t-\tau_1) R_n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 .$$

Dla mocy dysypacji mamy z kolei na podstawie wzoru /2.58/

$$/4.62/ \quad Dw_v^p = \frac{1}{2\eta_n} Q^n(D_{\tau} e_{ij}) Q^n(D_{\tau} e_{ij}) = \frac{1}{2\eta_n} [Q^n(D_{\tau} e_{ij})]^2 ,$$

skąd przez operację odwrotną znajdujemy energię dysypowaną

$$/4.63/ \quad w_v^p = \frac{1}{2\eta_n} D^{-1} [Q^n(D_{\tau} e_{ij})]^2 ,$$

gdzie operator posiada następujące znaczenie

$$/4.64/ \quad D^{-1} [Q^n f]^2 = \iiint_{ooo} f(\tau_1) f(\tau_2) R_n(t-\tau_1) R_n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 dt .$$

Podane powyżej wyrażenia energetyczne dla mocy i energii obliczone w dwóch zasadniczych przypadkach ośrodków lepkosprężystych: ośrodka pełzającego i ośrodka relaksującego, stanowią fizykalną charakterystykę tych ośrodków. Ze względu na to, że przy wyprowadzeniu tych wyrażen opieraliśmy się na modelach reologicznych o nieciągłych dystrybucjach czasów opóźnienia i czasów relaksacji, wyrażenia energetyczne mają również nieciągły charakter.

5. Operatorowe formy energii przy dowolnej dystrybucji czasów opóźnienia i czasów relaksacji

W celu określenia form energii w przypadkach ośrodków pełzającego i relaksującego, rozważonych w paragrafie 4, przy dowolnym rozkładzie czasów opóźnienia i czasów relaksacji, dokonamy przejścia granicznego w prawach konstytutywnych tych ośrodków, zakładając, że ilość elementów reprezentujących ich własności wzrasta nieograniczenie.

Pełna deformacja dla dyskretnego układu uogólnionego modelu Kelvina dana jest wzorem sumacyjnym /4.1/. W dalszym ciągu ograniczymy się do rozważenia wyłącznie deformacji postaciowej; wtedy zamiast równania /4.1/ możemy napisać

$$/5.1/ \quad e_{ij}(t) = \sum_m e_{ij}^m(t),$$

gdzie deformacje składowe dane są operatorami typu /4.27/.

W celu scharakteryzowania dowolnego rozkładu czasów opóźnienia k posłużymy się następującymi związkami:

$$/5.2/ \quad \Delta_n J(k) = \Delta_n M(k) / M^{(m)} \quad M^{(m)} = \sum_m \Delta_n M, \quad \Delta_n M = M(k_n) - M(k_{n-1}).$$

Przechodząc do granicy przy liczbie elementów rosnącej nieograniczenie ($n \rightarrow \infty$) otrzymamy na podstawie wzoru /5.2./ związki

$$/5.3/ \quad dJ(k) = dM(k)/M, \quad M = \int_{k_a}^{k_b} dM(k),$$

gdzie założono, że funkcja M określona jest w przedziale zmienności $k \in [k_a, k_b]$. Na funkcję J nakładamy jeszcze warunek normalizacji

$$/5.4/ \quad \int_{k_a}^{k_b} dJ(k) = 1.$$

Przy przejściu od czasu opóźnienia k_{n-1} do czasu opóźnienia $k_n = k_{n-1} + \Delta_n k$ równanie dla n -tego elementu przy dowolnym rozkładzie czasów opóźnienia ma postać

$$/5.5/ \quad \Delta_n M(k) s_{ij}(t) = \Delta_n e_{ij}(t, k) + k_n \Delta_n D e_{ij}(t, k)$$

lub przy przejściu do granicy ($n \rightarrow \infty$)

$$/5.5a/ \quad dM(k) s_{ij}(t) = d e_{ij}(t, k) + k \cdot d D e_{ij}(t, k),$$

Dla ciągłej dystrybucji czasów opóźnienia /5.5a/ przechodzi w równanie ($\partial_k = \partial/\partial k$, $d_k = d/dk$)

$$/5.6/ \quad d_k M(k) s_{ij}(t) = \partial_k e_{ij}(t, k) + k \partial_k D e_{ij}(t, k).$$

dla zmiany czasu opóźnienia od k do $k+dk$.

Przy przejściu od dyskretnego do dowolnego rozkładu czasów opóźnienia równanie /5.1/ winno być przedstawione w postaci [patrz równanie /5.5/]

$$/5.7/ \quad e_{ij}^m(t, k) = \sum_m \Delta_n e_{ij}(t, k),$$

gdzie

$$/5.8/ \quad \Delta_n e_{ij}(t, k) = e_{ij}(t, k_n) - e_{ij}(t, k_{n-1}) .$$

Równanie /5.7/ uważamy za całkową sumę Stieltjesa. Jeżeli przez $\Delta_n k$ oznaczymy elementarny przedział

$$/5.9/ \quad \Delta_n k = k_n - k_{n-1} \quad , \quad \Delta_n k \in [k_a, k_b] \quad ,$$

to przechodząc do granicy, otrzymamy

$$/5.10/ \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \Delta_n k \rightarrow 0}} e_{ij}^m(t, k) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \Delta_n k \rightarrow 0}} \sum_m \Delta_n e_{ij}(t, k) = \int_{k_a}^k de_{ij}(t, k) .$$

Ostatnia całka jest całką Stieltjesa.

Jeżeli funkcja podcałkowa w całości /5.10/ jest różniczkowana i posiada całkowalną pochodną, to całka ta przechodzi w całkę Riemanna

$$/5.11/ \quad e_{ij}(t) = \int_{k_a}^{k_b} \partial_k e_{ij}(t, k) dk .$$

Rozwiązując równanie /5.6/ ze względu na $\partial_k e_{ij}$, otrzymujemy

$$/5.12/ \quad \partial_k e_{ij} = P_k^* (D_\tau s_{ij}) \quad ,$$

gdzie P_k^* jest operatorem o postaci

$$/5.13/ \quad P_k^* f = \int_0^t f(\tau) K_k^*(t-\tau, k) d\tau \quad ,$$

przy czym podobnie jak w paragrafie 4 przyjmujemy warunki początkowe w formie /4.12/. Funkcja K_k^* jest funkcją peźzania dla elementarnej zmiany ciągłej dystrybucji czasów opóźnienia i ma postać

$$/5.14/ \quad K_k^* (t, k) = d_k M(k) (1 - e^{-t/k}) .$$

Mnożąc równanie /5.6/ przez $\partial_k De_{ij}$ obustronnie, otrzymujemy

$$/5.15/ \quad s_{ij}(t) \partial_k De_{ij}(t, k) = \frac{1}{d_k M(k)} \partial_k e_{ij}(t, k) \partial_k De_{ij}(t, k) + \\ + \frac{k}{d_k M(k)} \partial_k De_{ij}(t, k) \partial_k De_{ij}(t, k) .$$

Jak widać z wzoru /5.15/ prawa jego strona przedstawia sumę mocy magazynowania i mocy dysypacji dla elementarnej zmiany dystrybucji ciągłej czasów opóźnienia. Tak więc

$$/5.16/ \quad \partial_k Dw_e^p = \partial_k e_{ij}(t, k) \partial_k De_{ij}(t, k) \frac{1}{d_k M(k)}$$

$$/5.17/ \quad \partial_k Dw_v^p = \partial_k De_{ij}(t, k) \partial_k De_{ij}(t, k) \frac{k}{d_k M(k)}$$

a zatem

$$/5.18/ \quad \partial_k Dw^p = s_{ij}(t) \partial_k De_{ij}(t, k) = \partial_k Dw_e^p + \partial_k Dw_v^p .$$

Całkując wyrażenie /5.12/ w przedziale zmienności k , otrzymujemy przy uwzględnieniu /5.11/

$$/5.19/ \quad e_{ij}(t) = \int_{k_a}^{k_b} P_k^*(D_\tau s_{ij}) dk = P_k(D_\tau s_{ij}) = DP_k s_{ij} ,$$

gdzie nowy operator ma postać

$$/5.20/ \quad P_k f = \int_0^t f(\tau) K_k(t-\tau) d\tau.$$

W ostatnim wzorze K_k jest funkcją pełzania rozważanego ośrodka

$$/5.21/ \quad K_k(t) = \int_{k_a}^{k_b} d_k M(k) \left(1 - e^{-t/k}\right) dk.$$

Związek /5.19/ wynika z uwzględnienia warunków początkowych w formie analogicznej do /4.12/

$$/5.22/ \quad s_{ij}(0) = 0, \quad K_k(0) = 0.$$

Wykonując operację różniczkowania na wyrażeniu /5.19/,

$$/5.23/ \quad D e_{ij} = D^2 P_k s_{ij},$$

oraz mnożąc tak otrzymany związek przez s_{ij} , znajdujemy moc naprężeń dewiatorowych

$$/5.24/ \quad D w^D = s_{ij} D e_{ij} = s_{ij} D^2 P_k s_{ij}.$$

Chcąc wyrazić moc całkowitą związaną z deformacją postaciową przez składowe dewiatora odkształcenia, całkujemy równanie /5.15/ w granicach zmienności k

$$/5.25/ \quad D w^D = s_{ij} D e_{ij} = \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_k M(k)} \partial_k e_{ij} \partial_k D e_{ij} dk +$$

$$+ \int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_k^M(k)} \partial_k D e_{ij} \partial_k D e_{ij} dk .$$

Korzystając z zależności /5.12/ można wzór /5.25/ przedstawić jeszcze w postaci

$$/5.26/ \quad D w^D = \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_k^M(k)} D P_{k^{s_{ij}}}^* D^2 P_{k^{s_{ij}}}^* dk + \int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_k^M(k)} [D^2 P_{k^{s_{ij}}}^*]^2 dk .$$

Jak wynika z powyższych wyrażeń

$$/5.27/ \quad D w^D = D \int_{k_a}^{k_b} \partial_k w^D dk = D \int_{k_a}^{k_b} \partial_k w_e^D dk + D \int_{k_a}^{k_b} \partial_k w_v^D dk =$$

$$= D w_e^D + D w_v^D ,$$

gdzie

$$/5.28/ \quad D w_e^D = \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_k^M(k)} D P_{k^{s_{ij}}}^* D^2 P_{k^{s_{ij}}}^* dk ,$$

$$/5.29/ \quad D w_v^D = \int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_k^M(k)} [D^2 P_{k^{s_{ij}}}^*]^2 dk .$$

Z ostatnich wzorów obliczymy energie, stosując operacje odwrotne

$$/5.30/ \quad w_e^D = \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_k^M(k)} D^{-1} [D P_{k^{s_{ij}}}^* D^2 P_{k^{s_{ij}}}^*] dk ,$$

$$/5.31/ \quad w_{\nu}^p = \int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_k^M(k)} D^{-1} \left[D^2 P_k^* s_{ij} \right]^2 dk ,$$

Operatory występujące w równaniach /5.28/-/5.31/ mają postać analogiczną do operatorów podanych dla ośrodka o dyskretnym rozkładzie czasów opóźnienia w paragrafie 4.

Przeprowadzając podobne rozumowanie jak wyżej, można znaleźć analogiczne wyrażenia energetyczne dla ośrodka relaksującego o dowolnej dystrybucji czasów relaksacji.

I tak, pełna naprężenie dla dyskretnego układu uogólnionego modelu Maxwella dane jest tensorem /4.36/. Ograniczając się w dalszym ciągu do rozważenia wyłącznie składowej dewiatorowej stanu naprężenia, możemy napisać

$$/5.32/ \quad s_{ij}(t) = \sum_m s_{ij}^m(t) ,$$

gdzie naprężenia składowe dane są operatorami typu /4.33/.

Dowolny rozkład czasów relaksacji l określamy związkami

$$/5.33/ \quad \Delta_n I(l) = \Delta_n N(l) / N^{(m)}, \quad N^{(m)} = \sum_m \Delta_n N, \quad \Delta_n N = N(l_n) - N(l_{n-1}).$$

Dla dowolnego rozkładu czasów relaksacji, otrzymamy stąd przy n

$$/5.34/ \quad dI(l) = dN(l) / N, \quad N = \int_{l_a}^{l_b} dN(l),$$

gdzie funkcja I określona jest w przedziale zmienności $l \in [l_a, l_b]$ oraz spełnia warunek normalizacji

$$/5.35/ \quad \int_{l_a}^{l_b} dI(l) = 1 .$$

Przy przejściu od czasu relaksacji l_{n-1} do czasu relaksacji $l_n = l_{n-1} + \Delta_n l$ równanie dla n-tego elementu przy dowolnym rozkładzie czasów relaksacji

$$/5.36/ \quad \Delta_n N(l) De_{ij}(t) = \Delta_n Ds_{ij}(t, l) + \frac{1}{l_n} \Delta_n s_{ij}(t, l)$$

przechodzi przy ciągłej dystrybucji czasów relaksacji w równanie $(\partial_l = \partial/\partial l, \quad d_l = d/dl)$

$$/5.37/ \quad d_l N(l) De_{ij}(t) = \partial_l Ds_{ij}(t, l) + \frac{1}{l} \partial_l s_{ij}(t, l)$$

dla zmiany czasu relaksacji od l do $l + dl$,

Przedstawiając równanie /5.32/ w postaci

$$/5.38/ \quad s_{ij}^{(m)}(t, l) = \sum_m \Delta_n s_{ij}(t, l) ,$$

gdzie

$$\Delta_n s_{ij}(t, l) = s_{ij}(t, l_n) - s_{ij}(t, l_{n-1}) ,$$

przechodząc w granicy do całki Stieltjesa a następnie do całki Riemanna, znajdujemy

$$/5.40/ \quad s_{ij}(t) = \int_{l_a}^{l_b} \partial_l s_{ij}(t, l) dl .$$

znajdujemy dalej rozwiązanie równania /5.37/ w formie

$$/5.41/ \quad \partial_t s_{ij} = Q_t^*(D_\tau e_{ij}) ,$$

gdzie

$$/5.42/ \quad Q_t^* f = \int_0^t f(\tau) R_1^*(t-\tau, l) d\tau ,$$

przy warunkach początkowych analogicznych do /4.44/. Funkcja R_1^* jest funkcją relaksacji dla elementarnej zmiany ciągłej dystrybucji czasów relaksacji

$$/5.43/ \quad R_1^*(t, l) = d_l N(l) e^{-t/l} ,$$

Równanie /5.37/ mnożymy obustronnie przez $\partial_t \Delta_{ij}$ i w ten sposób otrzymujemy

/5.44/

$$\begin{aligned} \partial_t s_{ij}(t, l) D e_{ij}(t) &= \frac{1}{d_l N(l)} \partial_t D s_{ij}(t, l) \partial_t s_{ij}(t, l) + \\ &+ \frac{1}{l d_l N(l)} \partial_t s_{ij}(t, l) \partial_t s_{ij}(t, l) . \end{aligned}$$

Prawa strona równania /5.44/ przedstawia sumę mocy magazynowania i mocy dysypacji dla elementarnej zmiany dystrybucji ciągłej czasów relaksacji. W ten sposób otrzymujemy

$$/5.45/ \quad \partial_t D w_e^p = \frac{1}{d_l N(l)} \partial_t D s_{ij}(t, l) \partial_t s_{ij}(t, l) ,$$

$$/5.46/ \quad \partial_t D w_v^p = \frac{1}{l d_l N(l)} \partial_t s_{ij}(t, l) \partial_t s_{ij}(t, l) ,$$

a zatem

$$/5.47/ \quad \partial_t D w^p = \partial_t s_{ij}(t, l) D e_{ij}(t) = \partial_t D w_e^p + \partial_t D w_v^p$$

Całkując wyrażenie /5.41/ w granicach zmienności l , otrzymujemy przy uwzględnieniu /5.40/

$$/5.48/ \quad s_{ij}(t) = \int_{l_a}^{l_b} Q_l^* (D_\tau e_{ij}) dl = Q_l (D_\tau e_{ij}),$$

gdzie ostatni operator ma następujące znaczenie:

$$/5.49/ \quad Q_l f = \int_0^t f(\tau) R_l(t-\tau) d\tau$$

W ostatnim operatorze R jest funkcją relaksacji rozważanego ośrodka

$$/5.50/ \quad R_l(t) = \int_{l_a}^{l_b} d_l N(l) e^{-t/l} dl.$$

Mnożąc wyrażenie /5.48/ przez De_{ij} , znajdujemy moc naprężeń dewiatorowych

$$/5.51/ \quad Dw^r = s_{ij} De_{ij} = De_{ij} Q_l (D_\tau e_{ij}).$$

Z drugiej strony, moc tę wyrażoną przez składowe dewiatora naprężeń otrzymamy, całkując równanie /5.44/ w granicach zmienności

$$/5.52/ \quad Dw^p = \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{d_l N(l)} \partial_l Ds_{ij} \partial_l s_{ij} dl + \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{l d_l N(l)} \partial_l s_{ij} \partial_l s_{ij} dl.$$

Korzystając z zależności /5.41/ można wzór /5.52/ zapisać jeszcze w formie

$$/5.53/ \quad Dw^p = \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{d_l N(l)} DQ_l^* (D_\tau e_{ij}) Q_l^* (D_\tau e_{ij}) dl + \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{l d_l N(l)} Q_l^* (D_\tau e_{ij}) Q_l^* (D_\tau e_{ij}) dl.$$

Z powyższych wyrażeń otrzymujemy zatem moc całkowitą jako sumę mocy związanych z deformacją sprężystą i lepka

$$/5.54/ \quad \int_{l_a}^{l_b} w^p dl = D \int_{l_a}^{l_b} \partial_l w_e^p dl + D \int_{l_a}^{l_b} \partial_l w_v^p dl = Dw_e^p + Dw_v^p \quad ,$$

gdzie

$$/5.55/ \quad Dw_e^p = \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{d_l N(l)} DQ_l^*(D_\tau e_{ij}) Q_l^*(D_\tau e_{ij}) dl \quad ,$$

$$/5.56/ \quad Dw_v^p = \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{l d_l N(l)} [Q_l^*(D_\tau e_{ij})]^2 dl$$

Z powyższych wzorów obliczymy energie sprężystą i dysypowaną przez operacje odwrotne

$$/5.57/ \quad w_e^p = \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{d_l N(l)} D^{-1} [DQ_l^*(D_\tau e_{ij}) Q_l^*(D_\tau e_{ij})] dl \quad ,$$

$$/5.58/ \quad w_v^p = \int_{l_a}^{l_b} \frac{1}{l d_l N(l)} D^{-1} [Q_l^*(D_\tau e_{ij})]^2 dl \quad .$$

Operatory występujące w równaniach /5.52/-/5.58/ mają postać analogiczną do operatorów rozważonych w paragrafie 4 dla ośrodka relaksującego o dyskretnym rozkładzie czasów relaksacji.

Opierając się na uzyskanych w tym paragrafie wyrażeniach energetycznych dla ośrodków lepko-sprężystych pełzającego i relaksującego, możemy przejść obecnie do wyzna-

czenia rozmaitych form współczynników energetycznych rozdziału oraz do określenia ich związku z funkcjami pełzania i relaksacji.

6. Współczynniki rozdziału form energii

W paragrafie 2 wprowadziliśmy pojęcie współczynników rozdziału form energii magazynowanej i dysypowanej, które to współczynniki charakteryzowały ośrodek pod względem energetycznym a jako wielkości fizyczne były pomocne do określenia pewnych krytycznych stanów ośrodka.

Współczynniki rozdziału form energii mogą być zdefiniowane w sposób umowny lub w sposób naturalny /patrz. par. 2/.

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia^{x/}

$$/6.1/ \quad W_E = \frac{1}{2} \sum_m \frac{1}{G_n} w_{en}, \quad W_D = \sum_m \frac{1}{\eta_n} D w_{vn} \frac{1}{4}, \quad W = W_E + W_D,$$

dla energii wyrażonej przez składowe dewiatora odkształcenia oraz

$$/6.2/ \quad W_E = 2 \sum_m G_n w_{en}, \quad W_D = \sum_m \eta_n D w_{vn}, \quad W = W_E + W_D,$$

dla energii wyrażonej przez składowe dewiatora naprężenia. Tutaj, w_{en} , w_{vn} przedstawiają odpowiednio energie magazynowane i dysypowane w elementach składowych sprężystych i lepkich przyjętego modelu ośrodka.

Dla pierwszego, rozważonego w paragrafie 4, ośrodka pełzającego mamy na podstawie /4.30/ dla energii sprężystej związek

$$/6.3/ \quad w_e = \sum_m w_{en} = G_n \left[DP^n(s_{ij}) \right]^2,$$

^{x/} W dalszym ciągu rozważymy jedynie formy energii i mocy związane z deformacją postaciową i dlatego konsekwentnie opuszczamy górny indeks p wprowadzony dla energii postaciowej w paragrafach poprzednich.

a stąd, zgodnie z wzorem /4.2/, możemy napisać

$$/6.4/ \quad W_E = 2G_n^2 [DP^n(s_{ij})]^2 .$$

Dla mocy dysypacji otrzymujemy z wyrażenia /4.32/

$$/6.5/ \quad Dw_v = \sum_m Dw_{vn} = 2\eta_n [D^2P^n(s_{ij})]^2$$

oraz na podstawie wzoru /6.2/

$$/6.6/ \quad W_D = 2\eta_n^2 [D^2P^n(s_{ij})]^2 .$$

Sumując wyrażenia /6.4/ oraz /6.6/, mamy

$$/6.7/ \quad W = W_E + W_D = 2 \left\{ G_n^2 [DP^n(s_{ij})]^2 + \eta_n^2 [D^2P^n(s_{ij})]^2 \right\} .$$

W paragrafie 2 wprowadziliśmy z kolei współczynniki rozdziału energii określone w sposób umowny jako stosunki odpowiednich energii zredukowanych do całkowitej energii zredukowanej danej wzorem /6.7/. Tak więc,

$$/6.8/ \quad \alpha_E = \frac{W_E}{W} , \quad \alpha_D = \frac{W_D}{W} , \quad \alpha_E + \alpha_D = 1 .$$

Na podstawie wzorów /6.4/, /6.6/ oraz /6.7/ możemy /6.8/ przedstawić w postaci

$$/6.9/ \quad \alpha_E = \left\{ 1 + \left[\frac{\eta_n D^2 P^n(s_{ij})^2}{G_n DP^n(s_{ij})} \right]^2 \right\}^{-1} ,$$

$$/6.10/ \quad \alpha_D = \left\{ 1 + \left[\frac{G_n DP^n(s_{ij})^2}{\eta_n D^2 P^n(s_{ij})} \right]^2 \right\}^{-1} .$$

W szczególnym przypadku dla $s_{ij} = s_{ij}(0^+) = s_{ij}^o$,

współczynniki rozdziału energii mają formę

$$/6.11/ \quad \alpha_E^o = \left\{ 1 + \left[\frac{\eta_n D^2 P^n(1)}{G_n D P^n(1)} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad \alpha_D^o = \left\{ 1 + \left[\frac{G_n D P^n(1)}{\eta_n D^2 P^n(1)} \right]^2 \right\}^{-1}.$$

Tutaj operatory nałożone na funkcję jednostkową mają następujące znaczenia:

$$/6.12/ \quad DP^n(1) = \int_0^t DK_n(t-\tau) d\tau = - \int_0^t D_\tau K_n(t-\tau) d\tau = K_n(t),$$

$$/6.13/ \quad D^2 P^n(1) = D \int_0^t DK_n(t-\tau) d\tau = -D \int_0^t D_\tau K_n(t-\tau) d\tau = DK_n(t),$$

a zatem wyrażają się wprost przez funkcję pełzania oraz jej pochodną.

Podstawiając znaczenia operatorów /6.12/, /6.13/ do wzorów /6.11/, znajdujemy

$$/6.14/ \quad \alpha_E^o = \left[1 + \left(\frac{\sum_m \eta_n DK_n}{\sum_m G_n K_n} \right)^2 \right]^{-1}, \quad \alpha_D^o = \left[1 + \left(\frac{\sum_m G_n K_n}{\sum_m \eta_n DK_n} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Jak widać z formuł /6.14/ współczynniki rozdziału energii wyrażają się w przypadku niezależnego od czasu dewiatora naprężenia przez ilorazy form kwadratowych funkcji pełzania i ich pochodnych.

W szczególności dla pojedynczego elementu Kelvina mamy przy stałym naprężeniu

$$/6.15/ \quad \alpha_E^1 = \left[1 + \left(\frac{\eta_{DK}}{GK} \right)^2 \right]^{-1}, \quad \alpha_D^1 = \left[1 + \left(\frac{GK}{\eta_{DK}} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Biorąc pod uwagę warunki początkowe dla funkcji pełzania i jej pochodnych

$$/6.16/ \quad K^n(0) = 0, \quad DK^n(0) = \text{const},$$

otrzymujemy dla przypadków /6.14/ i /6.15/ następujące wartości początkowe współczynników rozdziału :

$$/6.17/ \quad \alpha_E(0) = 0, \quad \alpha_D(0) = 1.$$

Uwzględniając natomiast wartości asymptotyczne funkcji pełzania i ich pochodnych

$$/6.18/ \quad K(\infty) = \text{const}, \quad DK(\infty) = 0,$$

znajdujemy

$$/6.19/ \quad \alpha_E(\infty) = 1, \quad \alpha_D(\infty) = 0.$$

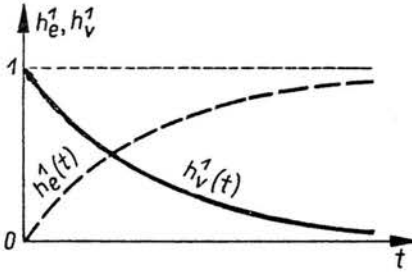
Wartości współczynników rozdziału energii w sposób poglądowy wskazują na udział fazy sprężystej i fazy lepkiej w ogólnym bilansie doprowadzonej do ośrodka energii w dowolnej chwili czasu. Zgodnie z postacią funkcji pełzania przebieg współczynników rozdziału w zależności od czasu ma charakter wykładniczy /rys. 1/.

Zależności /6.15/ dają bezpośredni związek pomiędzy funkcją pełzania i współczynnikami rozdziału. Związek ten ma postać następujących równań różniczkowych:

$$/6.20/ \quad \left(\frac{DK}{K} \right)^2 = \left(\frac{G}{\eta} \right)^2 \frac{1 - \alpha_E}{\alpha_E}, \quad \left(\frac{DK}{K} \right)^2 = \left(\frac{G}{\eta} \right)^2 \frac{\alpha_D}{1 - \alpha_D}.$$

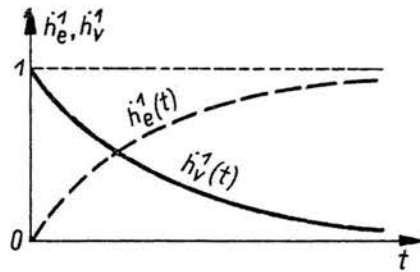
Całkując powyższe równania w granicach od t_0 do t , otrzymujemy

$$/6.21/ \quad K(t) = K(t_0) \exp \left[\frac{G}{\eta} \int_{t_0}^t \left(\frac{1 - \alpha_E}{\alpha_E} \right)^{\frac{1}{2}} dt \right],$$



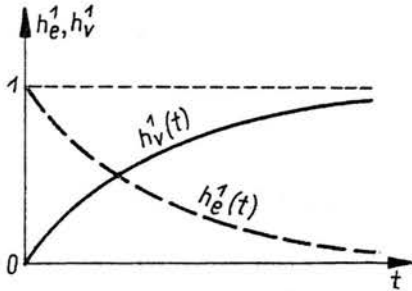
Rys.1

Zmienność w czasie naturalnych współczynników rozdziału energii dla pojedynczego elementu Kelvina w przypadku $S_{ij} = \text{const.}$



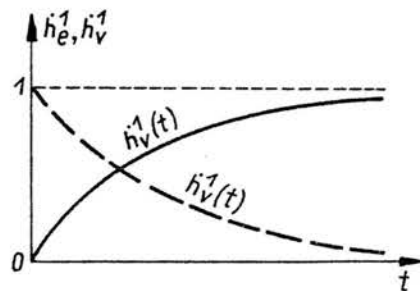
Rys.2

Zmienność w czasie naturalnych współczynników rozdziału mocy dla pojedynczego elementu Kelvina w przypadku $S_{ij} = \text{const.}$



Rys.3

Zmienność w czasie naturalnych współczynników rozdziału energii dla pojedynczego elementu Maxwella w przypadku $De_{ij} = \text{const.}$



Rys.4

Zmienność w czasie naturalnych współczynników rozdziału mocy dla pojedynczego elementu Maxwella w przypadku $De_{ij} = \text{const.}$

przy czym spełniony jest warunek

$$/6.21/ \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0} K = 0$$

oraz

$$/6.22/ \quad K(t) = K(t_0) \exp \left[\frac{G}{\eta} \int_{t_0}^t \left(\frac{\alpha_D}{1-\alpha_D} \right)^{\frac{1}{2}} dt \right]$$

z warunkiem /6.21/.

Jak widać z powyższych rezultatów, funkcja pełzania wyraża się przez funkcje wykładnicze współczynników rozdziału energii.

Przejdziemy z kolei do wyznaczenia współczynników rozdziału dla ośrodka relaksującego, danego równaniem /4.41/.

Na podstawie wzoru /4.60/ mamy energię sprężystą /postaciową/ w formie

$$/6.23/ \quad w_e = \frac{1}{4G_n} \left[Q^n (De_{ij}) \right]^2$$

oraz na podstawie /4.2/ znajdujemy dla energii zredukowanej

$$/6.24/ \quad w_E = \frac{1}{2} \left[Q^n (De_{ij}) \right]^2.$$

Dla mocy dysypowanej otrzymujemy z wzoru /4.62/

$$/6.25/ \quad Dw_v = \frac{1}{2\eta_n} \left[Q^n (De_{ij}) \right]^2$$

oraz na podstawie /4.2/

$$/6.26/ \quad w_D = \frac{1}{2} \left[Q^n (De_{ij}) \right]^2.$$

Sumując /6.24/ i /6.26/, otrzymujemy całkowitą energię zredukowaną

$$/6.27/ \quad W = W_E + W_D = \left[Q^n(De_{ij}) \right]^2 .$$

W danym przypadku otrzymujemy stałe wartości współczynników rozdziału energii

$$/6.28/ \quad \alpha_E = \alpha_D = 1/2 ,$$

co wskazuje na jednakowe energetyczne zaangażowanie obu faz sprężystej i lepkiej w procesie odkształcenia.

W szczególnym przypadku, gdy tensor prędkości odkształcenia jest stały $De_{ij} = (De_{ij})^0 = \text{const}(t)$, możemy na podstawie /6.24/ i /6.26/ napisać

$$/6.29/ \quad W_E^0 = \frac{1}{2} \left[(De_{ij})^0 Q^n(1) \right]^2, \quad W_D = \frac{1}{2} \left[(De_{ij})^0 Q^n(1) \right]^2 ,$$

gdzie operator na funkcji jednostkowej ma postać

$$/6.30/ \quad Q^n(1) = \int_0^t R^n(t-\tau) \, d\tau .$$

W danym przypadku słuszne są również zależności /6.28/.

Określenia naturalnych współczynników rozdziału energii i mocy dokonamy w oparciu o następujące formuły:

$$/6.31/ \quad h_e = \frac{w_e}{w}, \quad h_v = \frac{w_v}{w}, \quad h_e + h_v = 1,$$

$$/6.32/ \quad \dot{h}_e = \frac{Dw_e}{Dw}, \quad \dot{h}_v = \frac{Dw_v}{Dw}, \quad \dot{h}_e + \dot{h}_v = 1 ,$$

gdzie kropki mają znaczenie symboliczne.

Dla ośrodka typu /4.1/ mamy wtedy, zgodnie z wzora-

rami /4.30/ i /4.34/, następujące wartości wymienionych współczynników :

$$/6.33/ \quad h_e = \left\{ 1 + 2 \frac{\eta_n D^{-1} [D^2 P^n(s_{ij})]^2}{G_n [DP^n(s_{ij})]^2} \right\}^{(-1)},$$

$$/6.34/ \quad h_v = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{G_n [DP^n(s_{ij})]^2}{\eta_n D^{-1} [D^2 P^n(s_{ij})]^2} \right\}^{(-1)}$$

oraz na podstawie formuł /4.29/ i /4.32/

$$/6.35/ \quad \dot{h}_e = \left\{ 1 + 2 \frac{\eta_n [D^2 P^n(s_{ij})]^2}{G_n D [DP^n(s_{ij})]^2} \right\}^{(-1)},$$

$$/6.36/ \quad \dot{h}_v = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{G_n D [DP^n(s_{ij})]^2}{\eta_n [D^2 P^n(s_{ij})]^2} \right\}^{(-1)}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $s_{ij} = s_{ij}^0 = \text{const } (t)$, wzory powyższe przyjmują postać odpowiednio do formuł /6.33/, /6,34/

$$/6.37/ \quad h_e^0 = \left\{ 1 + 2 \frac{\eta_n D^{-1} [D^2 P^n(1)]^2}{G_n DP^n 1^2} \right\}^{(-1)},$$

$$h_v^0 = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{G_n [DP^n(1)]^2}{\eta_n D^{-1} [D^2 P^n(1)]^2} \right\}^{(-1)}.$$

gdzie operatory są następujące:

$$/6.38/ \quad D^{-1} [D^2 P^n(1)]^2 = \int_0^t DK^n DK^n d\tau,$$

$$/6.39/ \quad [DP^n(1)]^2 = K^n(t)K^n(t).$$

W tym samym przypadku wzory /6.35/, /6.36/ dają

/6.40/

$$\dot{h}_e = \left\{ 1 + 2 \frac{\eta_n [D^2 P^n(1)]^2}{D [DP^n(1)]^2} \right\}^{(-1)}, \quad \dot{h}_v = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{G_n [DP^n(1)]^2}{\eta_n [D^2 P^n(1)]^2} \right\}^{(-1)},$$

gdzie znaczenia operatorów są następujące:

/6.41/

$$[D^2 P^n(1)]^2 = DK^n DK^n, \quad D [DP^n(1)]^2 = 2K^n DK^n.$$

Dla pojedynczego elementu Kelvina mamy według formuły /4.37/ naturalne współczynniki rozdziału energii /rys.1/

$$/6.42/ \quad h_e^1 = \left[1 + 2 \frac{\int_0^t (DK)^2 d\tau}{G K^2(t)} \right]^{(-1)}, \quad h_v^1 = \left[1 + \frac{1}{2} \frac{G}{\eta} \frac{K^2(t)}{\int_0^t (DK)^2 dt} \right]^{(-1)}.$$

Analogicznie znajdujemy współczynniki rozdziału mocy według wzoru /6.40/ /rys.2/

$$/6.43/ \quad \dot{h}_e^1 = \left[1 + 2 \frac{DK}{G K(t)} \right]^{(-1)}, \quad \dot{h}_v^1 = \left[1 + \frac{G}{\eta} \frac{K(t)}{DK} \right]^{(-1)}.$$

Równania /6.41/ oraz /6.43/ podają zależność współczynników rozdziału energii i mocy dla pojedynczego elementu Kelvina od jego funkcji pełzania K . Stąd możemy z kolei wyrazić funkcję pełzania przez wymienione współczynniki. I tak, z równań /6.42/ znajdujemy nieliniowe równania różniczkowe ze względu na tę funkcję o postaci

$$/6.44/ \quad y^2 - H_e(t) K(t) y - \frac{1}{2} D H_e K^2(t) = 0, \quad ,$$

$$y^2 - H_v(t) K(t) y + \frac{1}{2} D H_v K^2(t) = 0, \quad ,$$

gdzie oznaczają

$$/6.45/ \quad y = DK, \quad H_e = \frac{G}{\eta} \frac{1-h_e^1}{h_e^1}, \quad H_v = \frac{G}{\eta} \frac{h_v^1}{1-h_v^1},$$

Z równań tych obliczamy odpowiednio

$$/6.46/ \quad y = \frac{1}{2}K(t) \left[H_e(t) + \sqrt{\Delta_e} \right], \quad \Delta_e = H_e^2(t) + 2DH_e,$$

$$/6.47/ \quad y = \frac{1}{2}K(t) \left[H_v(t) + \sqrt{\Delta_v} \right], \quad \Delta_v = H_v^2(t) + 2DH_v.$$

Wierwiastki ujemne obu powyższych równań algebraicznych, nie spełniające warunku $y = DK > 0$, odrzucamy.

Rozwiązanie równań /6.44/, /6.45/ przedstawić można ostatecznie w postaci

$$/6.48/ \quad K(t) = K(t_0) \exp \left[\frac{1}{2} \int_{t_0}^t (H_e + \sqrt{\Delta_e}) dt \right], \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0} K = 0,$$

$$/6.49/ \quad K(t) = K(t_0) \exp \left[\frac{1}{2} \int_{t_0}^t (H_v + \sqrt{\Delta_v}) dt \right], \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0} K = 0.$$

Wartości początkowe i asymptotyczne naturalnych współczynników rozdziału energii są według /6.42/ następujące

$$/6.50/ \quad h_e^1(0) = 0, \quad h_v^1(0) = 1,$$

$$h_e^1(\infty) = 1, \quad h_v^1(\infty) = 0.$$

W analogiczny sposób obliczamy z kolei zależności dla funkcji pełzania wyrażonych przez współczynniki rozdziału mocy. Mamy tutaj odpowiednio

$$/6.51/ \quad K(t) = K(t_0) \exp \frac{G}{\eta} \int_{t_0}^t \frac{1 - \dot{h}_e}{\dot{h}_e} dt, \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0} K = 0,$$

$$/6.52/ \quad K(t) = K(t_0) \exp \frac{G}{\eta} \int_{t_0}^t \frac{\dot{h}_v}{1 - \dot{h}_v} dt, \quad \lim_{t_0 \rightarrow 0} K = 0.$$

Wartości początkowe i asymptotyczne współczynników rozdziału mocy są według /6.43/ następujące:

$$/6.53/ \quad \dot{h}_e^1(0) = 0, \quad \dot{h}_v^1(0) = 1,$$

$$\dot{h}_e^1(\infty) = 0, \quad \dot{h}_v^1(\infty) = 1.$$

Znajdziemy, analogicznie jak dla ośrodka pełzającego, wartości naturalnych współczynników rozdziału energii i mocy dla ośrodka relaksującego, rozważonego w paragrafie 2. Na podstawie wzorów /6.31/, /6.32/ znajdujemy

$$/6.54/ \quad h_e = \left\{ 1 + 2 \frac{\frac{1}{\eta_n} D^{-1} [Q^n(De_{ij})]^2}{\frac{1}{G_n} [Q_n(De_{ij})]^2} \right\}^{(-1)},$$

$$/6.55/ \quad h_v = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{G_n} [Q^n(De_{ij})]^2}{\frac{1}{\eta} D^{-1} [Q^n(De_{ij})]^2} \right\}^{(-1)},$$

oraz

$$/6.56/ \quad \dot{h}_e = \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{\eta_n} [Q^n(De_{ij})]^2}{\frac{1}{G_n} Q^n(De_{ij}) D Q^n(De_{ij})} \right\}^{(-1)},$$

/6.57/

$$\dot{h}_v = \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{G_n} Q^n(De_{ij}) DQ^n(De_{ij})}{\frac{1}{\gamma_n} [Q^n(De_{ij})]^2} \right\}^{(-1)}$$

W szczególnym przypadku, gdy $De_{ij} = De_{ij}(0^+) = (De_{ij})^0$, wzory powyższe przyjmują kolejno postać

/6.58/

$$h_e^0 = \left\{ 1 + 2 \frac{\frac{1}{\gamma_n} D^{-1} [Q^n(1)]^2}{\frac{1}{G_n} [Q^n(1)]^2} \right\}^{(-1)}, \quad h_v^0 = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{G_n} [Q^n(1)]^2}{\frac{1}{\gamma_n} D^{-1} [Q^n(1)]^2} \right\}^{(-1)}$$

gdzie operatory mają następujące znaczenia

$$/6.59/ \quad D^{-1} [Q^n(1)]^2 = \iiint_{ooo}^{ttt} R^n(t-\tau_1) R^n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 dt,$$

$$/6.60/ \quad [Q^n(1)]^2 = \iint_{oo}^{tt} R^n(t-\tau_1) R^n(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

oraz

$$/6.61/ \quad \dot{h}_e^0 = \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{\gamma_n} [Q^n(1)]^2}{\frac{1}{G_n} Q^n(1) DQ^n(1)} \right\}^{(-1)}, \quad \dot{h}_v^0 = \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{G_n} Q^n(1) DQ^n(1)}{\frac{1}{\gamma_n} [Q^n(1)]^2} \right\}^{(-1)},$$

gdzie operatory są

$$/6.62/ \quad Q^n(1) DQ^n(1) = R^n(t) \int_0^t R^n(t-\tau) d\tau,$$

oraz $[Q^n(1)]^2$ zgodnie z wzorem /6.60/.

Dla pojedynczego modelu Maxwella mamy na podstawie formuł /6.58/ /rys.3/

$$/6.63/ \quad h_e^1 = \left\{ 1 + 2 \frac{G}{\eta} \frac{D^{-1} [Q(1)]^2}{[Q(1)]^2} \right\}^{(-1)}, \quad h_v^1 = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{G} \frac{[Q(1)]^2}{D^{-1} [Q(1)]^2} \right\}^{(-1)},$$

gdzie operatory są typu /6.59/ i /6.60/,
oraz zgodnie z wzorami /6.61/ /rys.4/.

$$/6.64/ \quad h_e^1 = \left\{ 1 + \frac{G}{\eta} \frac{[Q(1)]^2}{Q(1) DQ(1)} \right\}^{(-1)}, \quad h_v^1 = \left\{ 1 + \frac{\eta}{G} \frac{Q(1) DQ(1)}{[Q(1)]^2} \right\}^{(-1)},$$

przy czym operatory mają formę /6.62/.

Równania /6.63/ i /6.64/ podają zależność współczynników rozdziału energii i mocy od funkcji relaksacji ośrodka. Możemy stąd z kolei wyrazić funkcję relaksacji przez wymienione współczynniki. I tak, z równań /5.63/ znajdujemy szukane zależności w formie nieliniowych równań całkowych.

Ze związków /6.63/, po podstawieniu znaczenia operatorów, otrzymujemy następujące równania

$$/6.65/ \quad D \int_0^t \left[\int_0^t R(t-\tau) d\tau \right]^2 dt - 2V_i(t) \int_0^t \left[\int_0^t R(t-\tau) d\tau \right]^2 dt = 0, (i=e,v),$$

$$/6.66/ \quad v_e(t) = \frac{G}{\eta} \frac{1-h_e^1}{h_e^1}, \quad v_v(t) = \frac{G}{\eta} \frac{h_v^1}{1-h_v^1}.$$

Stąd obliczamy

$$/6.67/ \quad \int_0^t \left[\int_0^t R(t-\tau) d\tau \right]^2 dt = C \exp 2 \left[\int_0^t v_i(t) dt \right], (i=e,v),$$

gdzie C jest stałą

$$/6.68/ \quad C = \int_0^{t_0} \left[\int_0^{t_0} R(t_0-\tau) d\tau \right]^2 dt.$$

Różniczkując wyrażenia /6.67/ dwukrotnie, obliczamy ostatecznie

$$/6.69/ \quad R(t) = \left[2V_i(t) \right]^{\frac{1}{2}} \left[DV_i(t) + 2V_i^2(t) \right] \exp \int_0^t V_i(t) dt, \quad (i=e, v).$$

Wyrażenia powyższe podają szukaną zależność funkcji relaksacji od naturalnych współczynników rozdziału energii.

W analogiczny sposób znajdujemy ze związków /6.64/

$$/6.70/ \quad R(t) = C \dot{V}_i(t) \exp \left[\int_{t_0}^t \dot{V}_i(t) dt \right], \quad \dot{V}_e = \frac{G}{\eta} \frac{h_e^1}{1-h_e^1},$$

$$\dot{V}_v = \frac{G}{\eta} \frac{1-h_v^1}{h_v^1}, \quad (i=e, v).$$

Początkowe i asymptotyczne wartości współczynników naturalnych rozdziału energii i mocy znajdujemy z wzorów /6.63/ i /6.64/

$$/6.71/ \quad h_e^1(0) = 1, \quad h_v^1(0) = 0,$$

$$h_e^1(\infty) = 0, \quad h_v^1(\infty) = 1,$$

oraz

$$\dot{h}_e^1(0) = 1, \quad \dot{h}_v^1(0) = 0,$$

$$\dot{h}_e^1(\infty) = 0, \quad \dot{h}_v^1(\infty) = 1.$$

7. Współczynniki rozdziału dla ciał lepkosprężystych o dowolnych dystrybucjach charakterystyk

Wykorzystamy wprowadzone w p. 2 pojęcia współczynników rozdziału energii magazynowanej i energii dysypowanej dla ośrodków lepkosprężystych o dowolnych dystrybucjach czasów retardacji i czasów relaksacji.

Rozważymy szczególny przypadek pełzania w warunkach stałego w czasie dewiatora naprężenia $s_{ij}(0^+) = s_{ij}^0$ oraz określimy związki pomiędzy funkcją pełzania ośrodka a współczynnikami rozdziału dla zredukowanych energii sprężystej i dysypowanej zgodnie z wzorami /6.8/.

Energie zredukowane w postaci analogicznej do formuł /6.1/

$$/7.1/ \quad W_E = M_e w_e \quad , \quad W_D = M_v Dw_v \quad , \quad W = W_E + W_D \quad ,$$

gdzie

$$/7.2/ \quad M_e = \int_{k_a}^{k_b} \frac{dk}{d_k M(k)} \quad , \quad M_v = \int_{k_a}^{k_b} \frac{k dk}{d_k M(k)} \quad .$$

Wyrażenia dla energii magazynowanej w_e oraz dla mocy dysypowanej Dw_v przyjmują zgodnie z wzorami /5.40/ oraz /5.29/ postać

$$/7.3/ \quad w_e = \frac{1}{2} \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_k M(k)} K_k^*{}^2(t, k) dk \quad ,$$

$$/7.4/ \quad \dot{w}_v = \int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_k M(k)} [DK_k^*{}^2(t, k)]^2 dk \quad ,$$

a w tedy współczynniki rozdziału energii zredukowanych według wzorów /6.8/ wyrażają się następująco

$$/7.5/ \quad \alpha_E = \left\{ 1 + \frac{\int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_{k^M}(k)} [DK_k^*(t,k)]^2 dk}{\int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_{k^M}(k)} K_k^{*2}(t,k) dk} \right\}^{(-1)}$$

$$/7.6/ \quad D = \left\{ 1 + \frac{\int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_{k^M}(k)} \cdot K_k^2(t,k) \cdot dk}{\int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_{k^M}(k)} \cdot [DK_k^*(t,k)]^2 dk} \right\}^{(-1)}$$

Związki /7.5/ oraz /7.6/ można przekształcić do postaci dwóch równań niezależnych dla funkcji pełzania K_k , jeśli dane są współczynniki rozdziału energii α_E i α_D .

I tak kolejno otrzymujemy

/7.7/

$$\int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_{k^M}(k)} [DK_k^*(t,k)]^2 dk - \frac{1-\alpha_E}{\alpha_E} \frac{M_e}{M_v} \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_{k^M}(k)} K_k^{*2}(t,k) dk = 0,$$

/7.8/

$$\int_{k_a}^{k_b} \frac{k}{d_{k^M}(k)} [DK_k^*(t,k)]^2 dk - \frac{\alpha_D}{1-\alpha_D} \frac{M_e}{M_v} \int_{k_a}^{k_b} \frac{1}{d_{k^M}(k)} K_k^{*2}(t,k) dk = 0.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że funkcja pełzania K_k^* dana wzorem /5.14/ wyraża się przez funkcję dystrybucji czasów retardacji $M(k)$ oraz uwzględniając znaczenia wielkości M_e , M_v według wzorów /7.2/, możemy uważać związki /7.7/, /7.8/ za równania, z których przy danych współczynnikach rozdzi-
 łu α_E, α_D możemy określić funkcję $M(k)$. Równania te wyrażone w sposób jawny przez funkcję $M(k)$ mają postać

$$\int_{k_a}^{k_b} \int_{k_a}^{k_b} \frac{k_1}{d_k M(k_1)} \frac{d_k M(k_2)}{k_2} e^{-2t/k_2} dk_1 dk_2 -$$

$$/7.9/ - \frac{1-\alpha_E}{\alpha_E} \int_{k_a}^{k_b} \int_{k_a}^{k_b} \frac{d_k M(k_2)}{d_k M(k_1)} (1 - e^{-t/k_2})^2 dk_1 dk_2 = 0,$$

$$\int_{k_a}^{k_b} \int_{k_a}^{k_b} \frac{k_1}{d_k M(k_1)} \frac{d_k M(k_2)}{k_2} e^{-2t/k_2} dk_1 dk_2 -$$

$$/7.10/ - \frac{\alpha_D}{1-\alpha_D} \int_{k_a}^{k_b} \int_{k_a}^{k_b} \frac{d_k M(k_2)}{d_k M(k_1)} (1 - e^{-t/k_2})^2 dk_1 dk_2 = 0.$$

W podobny sposób można uzyskać odpowiednie równania dla funkcji $N(t)$ jako ciągłej dystrybucji czasów relaksacji w przypadku ośrodka lepkosprężystego o własnościach relaksacyjnych, który został rozważony w paragrafie 5.

W obu przypadkach forma równań jest skomplikowana, tak że nie będziemy się zajmować w tym miejscu metodami ich

rozwiązania.

8. Uwagi końcowe

Przeprowadzone w paragrafach poprzednich rozważania dotyczące charakterystyk energetycznych liniowych ciał lepkościowych /typu boltzmanowskiego, to znaczy o stałych współczynnikach fizycznych/ pozwalają na określenie własności tych ciał na bazie energetycznej. Sposób ten polega zatem na podaniu współczynników rozdziału energii i mocy, magazynowanej i dysypowanej, w tych ciałach, które w sposób jednoznaczny charakteryzują zachowanie się materiałów w warunkach pełzania i relaksacji. Ze względu na to, że współczynniki rozdziału energii i mocy wyrażają się przez charakterystyki procesów pełzania i relaksacji /funkcje pełzania i funkcje relaksacji/, można je uważać za równorzędne charakterystyki fizyczne materiałów.

Tak więc formy charakterystyki liniowych ośrodków lepkościowych mogą być następujące:

- 1/ równanie różniczkowe o stałych współczynnikach, ogólnie biorąc n -tego rzędu, które wiąże zależność pomiędzy składowymi tensora odkształcenia i ich pochodnymi względem czasu oraz składowymi stanu naprężenia i ich pochodnymi względem czasu. Równanie takie, zapisane w formie operatorowej, ma postać

$$L_1 \epsilon = L_2 \sigma,$$

gdzie L_1 i L_2 są liniowymi operatorami różniczkowymi, odpowiednio n -tego i m -tego rzędu.

- 2/ Równanie całkowe liniowe, które, w zależności od swej postaci, stanowi rozwiązanie równania różniczkowego albo ze względu na składowe stanu odkształcenia /jeżeli szukamy naprężeń/, albo ze względu na składowe stanu naprężenia /jeżeli szukamy odkształceń/.

- 3/ Funkcje pełzania i funkcje relaksacji, które stanowią charakterystyki ciał w szczególnych warunkach jednostkowego naprężenia lub jednostkowego odkształcenia (stałych w czasie).
- 4/ Współczynnikami rozdziału energii i mocy /naturalnymi i umownymi/, które w warunkach stałego naprężenia lub stałego odkształcenia można bezpośrednio wyrazić przez funkcje pełzania i relaksacji.

Literatura

1. W. Olszak, Les critères de transition en élasto-visco-plasticité, Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. 14, 1966, No 1, 29-46.
2. M. Reiner, K. Weissenberg, Rheology Leaflet, 1939, No 10, 12-20.
3. M. Reiner, Plastic yielding in anelasticity, Journ. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, 1960, No. 4, 255-261.
4. Z. Bychawski, A criterion of creep failure for visco-elastic materials /praca niepublikowana/.