Kazimierz Sobczyk

POLE TERMOSPRĘŻYSTE W PÓŁPRZESTRZENI OGRANICZONEJ POWIERZCHNIĄ NIERÓWNĄ

29/1967

WARSZAWA

2. Założenia i równania

Rozważmy półprzestrzeń termosprężystą $\{-\infty < x, y < +\infty \; ; \; z \geqslant \xi(x)\}$ ograniczoną powierzchnią $z = \xi(x)$. Zakładamy, że

1°. w półprzestrzeni brak jest źródeł ciepła i sił masowych,

2°. półprzestrzeń jest ośrodkiem jednorodnym i izotropowym,

3°. wysokość i krzywizna powierzchni są dostatecznie małe /slightly rough surface/,

4°. granica półprzestrzeni jest wolna od naprężeń, tzn.

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ns} = 0 \quad , \quad \text{dla} \quad z = \xi(x)$$

5°. powierzchnia $z = \xi(x)$ jest nierównomiernie ogrzana, w sposób zależny jedynie od współrzędnej x i czasu t, przy czym zależność od czasu jest harmoniczna, tzn.

$$T(x,z,t)\Big|_{z=\xi(x)} = T_0(x)\, e^{-i\omega t}$$

gdzie $T_0/x/$ jest funkcją daną spełniającą warunki Dirichleta i absolutnie całkowalną w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Należy wyznaczyć pole temperatury i naprężeń wywołane ogrzaniem brzegu.

Modelem matematycznym zagadnienia są następujące sprzężone równania termosprężystości [1].

$$/2.1/ \qquad \begin{cases} \nabla^2 T - \frac{1}{\varkappa} \dot{T} - \eta \nabla^2 \dot{\Phi} = 0 \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = m T \\ \nabla^2 \Psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$/2.2/\qquad \begin{cases} \sigma_{nn} = \sigma_{ns} = 0, \\ T(x,z,t) = T_0(x)\, e^{-i\omega t} \end{cases} \qquad \text{dla} \quad z = \xi(x)$$

gdzie $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ /gdyż pole temperatury i deformacji nie zależą od zmiennej y/, zaś Φ i Ψ są odpowiednio potencjałem skalarnym i jedną ze składowych potencjału wektorowego $\left(\vec{u} = grad\,\Phi + rot\,\vec{\Psi}\right)$.

Rozkład temperatury i naprężeń w półprzestrzeni jest również okresowy w czasie; w związku z tym wygodnie jest wprowadzić oznaczenia: $T(x,z,t) = T(x,z)\,e^{-i\omega t}$,

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(x,z)\,e^{-i\omega t}, \qquad \Psi(x,z,t) = \Psi(x,z)\,e^{-i\omega t},$$

$$\sigma_{ij}(x,z,t) = \sigma_{ij}(x,z)\,e^{-i\omega t}$$ i poszukiwać wielkości $T(x,z)$, $\Phi(x,z)$, $\Psi(x,z)$ i $\sigma_{ij}(x,z)$.

3. Rozwiązanie problemu

Będziemy traktowali działanie nierówności jako małe zaburzenie pola termosprężystego istniejącego w półprzestrzeni ograniczonej płaszczyzną $z = 0$ i znanego z dokładnej teorii [1]. Ograniczymy się tutaj do wyznaczenia pola termosprężystego z dokładnością do pierwszego przybliżenia.

Podobnie jak w pracy [4] przeniesiemy warunki brzegowe /2.2./ /określone na powierzchni $z = \xi(x)$ / na płaszczyznę $z = 0$.

Wprowadzamy nowy układ współrzędnych x_1', x_2', x_3' związany z każdym punktem powierzchni w taki sposób aby oś x_3', była skierowana w kierunku wektora normalnego $\vec{n}$ do powierzchni, zaś oś x_1' była bliska kierunkowi x /oś x_2' pokrywa się z kierunkiem y/.

Naprężenia styczne i normalne w nowym układzie współrzędnych wyrażają się przez naprężenia w układzie $/x, y, z/ = /x_1, x_2, x_3/$ w sposób następujący

$$/3.1/ \qquad \sigma'_{3j} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ik} \cos(x'_3, x_i) \cos(x'_j, x_k), \quad j=1,2,3$$

gdzie $\cos /x'_\alpha, x_\beta/$ oznacza cosinus kąta między osią x'_α i x_β

Warunki brzegowe dla naprężeń mają postać

$$/3.2/ \qquad \sigma'_{31} = \sigma'_{33} = 0 \qquad \text{dla} \qquad z = \xi(x)$$

Rozwijamy funkcje $\sigma_{ik}(x, \xi)$ w szereg względem potęg ξ

$$/3.3/ \qquad \sigma_{ik}(x, \xi) = \sigma_{ik}(x, 0) + \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot \xi + \dots$$

Ograniczając się w /3.1/ do małych rzędu pierwszego i podstawiając /3.3/, po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy następujące relacje

$$/3.4/ \qquad \begin{cases} \sigma_{zz}(x, 0) = -\left(\dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot \xi \\ \sigma_{zx}(x, 0) = \left(\sigma_{xx}^{(0)}\right)_{z=0} \dfrac{d\xi}{dx} - \left(\dfrac{\partial \sigma_{xz}^{(0)}}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot \xi \end{cases}$$

Związki /3.4/ wyrażają naprężenia w płaszczyźnie średniej $z = 0$ przez składowe naprężeń termosprężystych znanych z dokładnej teorii dla przypadku płaszczyzny $\left(\sigma_{xx}^{(0)}, \dfrac{\partial \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial z}, \dfrac{\partial \sigma_{xz}^{(0)}}{\partial z}\right)$ i przez własności powierzchni.

W celu określenia warunku brzegowego dla temperatury w płaszczyźnie $z = 0$, funkcję $T(x, \xi)$ również rozwijamy w szereg

$$T(x,\xi) = T(x,0) + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} \xi + \dots$$

Otrzymujemy

$$T(x,0) = T_0(x) - \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)_{z=0} \xi \tag{3.5}$$

Oznaczmy

$$-\left(\frac{\partial \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial z}\right)_{z=0} = \varphi_1(x), \quad -\left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(0)}}{\partial z}\right)_{z=0} = \varphi_2(x), \quad \left(\sigma_{xx}^{(0)}\right)_{z=0} = \varphi_3(x), \quad -\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)_{z=0} = \varphi_4(x)$$

Funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ są znane z dokładnej teorii i wyrażają się wzorami

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(\alpha^2+\nu^2)(A_0\lambda_1 + B_0\lambda_2) - 2C_0\nu i\alpha\right] e^{-i\alpha x} d\alpha, \\ \varphi_2(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[2i\alpha(\lambda_1 A_0 + \lambda_2 B_0) + C_0 \nu s^2\right] e^{-i\alpha x} d\alpha, \\ \varphi_3(x) = -\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(2\lambda_1^2 + s^2)A_0 + (2\lambda_2^2 + s^2)B_0 + 2C_0\nu i\alpha\right] e^{-i\alpha x} d\alpha, \\ \varphi_4(x) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[n_1\lambda_1 A_0 + n_2\lambda_2 B_0\right] e^{-i\alpha x} d\alpha \end{cases} \tag{3.6}$$

W powyższych wyrażeniach wprowadzono oznaczenia

$$\begin{cases} p^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad s^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad \nu = (\alpha^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_{1,2} = (\alpha^2 - k_{1,2}^2)^{\frac{1}{2}} \\ k_1^2 + k_2^2 = q(1+\varepsilon) + p^2, \\ k_1^2 k_2^2 = q p^2, \qquad q = \frac{i\omega}{\eta}, \quad \varepsilon = m\gamma\eta, \quad n_{1,2} = p^2 - k_{1,2}^2 \end{cases} \tag{3.7}$$

"Stałe" A_0, B_0, C_0 zależą od parametru transformacji Fouriera. i wyrażają się wzorami

$$
/3.8/ \quad \begin{cases}
A_0 = \dfrac{m\left[(\alpha^2+\gamma^2)^2 - 4\gamma\alpha^2\lambda_2\right]}{\Delta}\,\widetilde{T}_0(\alpha) \\[2ex]
B_0 = \dfrac{m\left[(\alpha^2+\gamma^2)^2 - 4\gamma\alpha^2\lambda_1\right]}{\Delta}\,\widetilde{T}_0(\alpha) \\[2ex]
C_0 = \dfrac{2i\alpha m(\alpha^2+\gamma^2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\Delta}\,\widetilde{T}_0(\alpha)
\end{cases}
$$

gdzie $\widetilde{T}_0(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} T_0(x)\, e^{-i\alpha x}dx, \quad \Delta = (\alpha^2+\nu^2)^2(k_1^2-k_2^2)+4\nu\alpha^2(n_1\lambda_2-n_2\lambda_1)$

Warunki brzegowe /3.4/ i /3.5/ przyjmują postać

$$
/3.9/ \quad \begin{cases}
\sigma_{zz}(x,0) = f_1(x) \\
\sigma_{xz}(x,0) = f_2(x) \\
T(x,0) = f_3(x) = T_0(x) + T_1(x)
\end{cases}
$$

gdzie

$$
/3.10/ \quad f_1(x) = \varphi_1(x)\cdot\xi(x), \quad f_2(x) = \varphi_2(x)\cdot\xi(x) + \varphi_3(x)\frac{d\xi}{dx}, \quad T_1(x) = \varphi_4(x)\,\xi(x)
$$

Tak więc, zamiast jednorodnych warunków brzegowych dla naprężeń i warunku $T_0(x)$ dla temperatury /2.2/ otrzymaliśmy w płaszczyźnie średniej naprężenia $f_1/x/$ i $f_2/x/$ oraz dodatkową zmianę temperatury $T_1/x/$, których rząd wielkości jest równy ξ.

W celu wyznaczenia pola temperatury i naprężeń w półprzestrzeni należy teraz rozwiązać układ równań /2.1/ z warunkami brzegowymi /3.9/.

Uwzględniając harmoniczną zależność od czasu i stosując transformację Fouriera względem zmiennej x otrzymujemy trzy równania różniczkowe zwyczajne, których rozwiązania /po dokonaniu transformacji odwrotnej/ mają postać /por. [1]/

$$/3.11/\quad \begin{cases} \Phi(x,z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(A e^{-\lambda_1 z} + B e^{-\lambda_2 z}\right) e^{-i\alpha x}\, d\alpha \\ \Psi(x,z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-\nu z - i\alpha x}\, d\alpha \\ T(x,z) = \dfrac{1}{m\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(n_1 A e^{-\lambda_1 z} + n_2 B e^{-\lambda_2 z}\right) e^{-i\alpha x}\, d\alpha \end{cases}$$

Stałe A, B, C /zależne od parametru transformacji α / wyznaczamy z warunków brzegowych /3.9/. Otrzymujemy następujący układ równań

$$/3.12/\quad \begin{cases} (\alpha^2+\nu^2)A + (\alpha^2+\nu^2)B - 2i\alpha\nu C = \dfrac{\tilde{f}_1(\alpha)}{\mu} \\ 2i\alpha\lambda_1 A + 2i\alpha\lambda_2 B + (\alpha^2+\nu^2)C = \dfrac{\tilde{f}_2(\alpha)}{\mu} \\ n_1 A + n_2 B = m\tilde{f}_3(\alpha) \end{cases}$$

gdzie $\tilde{f}_1(\alpha)$, $\tilde{f}_2(\alpha)$, $\tilde{f}_3(\alpha)$ są transformatorami Fouriera funkcji $f_1/x/$, $f_2/x/$, $f_3/x/$

$$\tilde{f}_i(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) e^{i\alpha x} dx, \qquad i = 1, 2, 3.$$

o których zakładamy tutaj, że istnieją /funkcje $f_1/x/$, $f_2/x/$, $f_3/x/$ muszą w tym celu spełniać znane warunki/

Rozwiązując układ /3.12/ otrzymujemy

$$/3.13/\quad \begin{cases} A = \dfrac{m\left[(\alpha^2+\nu^2)^2 - 4\alpha^2\nu\lambda_2\right]}{\Delta}\tilde{f}_3(\alpha) - \dfrac{2i\alpha\nu n_2}{\mu\Delta}\tilde{f}_2(\alpha) - \dfrac{(\alpha^2+\nu^2)n_2}{\mu\Delta}\tilde{f}_1(\alpha) \\ B = -\dfrac{m\left[(\alpha^2+\nu^2)^2 - 4\alpha^2\nu\lambda_1\right]}{\Delta}\tilde{f}_3(\alpha) + \dfrac{2i\alpha\nu n_1}{\mu\Delta}\tilde{f}_2(\alpha) + \dfrac{(\alpha^2+\nu^2)n_1}{\mu\Delta}\tilde{f}_1(\alpha) \\ C = \dfrac{2i\alpha m(\alpha^2+\nu^2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\Delta}\tilde{f}_3(\alpha) + \dfrac{(\alpha^2+\nu^2)(k_2^2-k_1^2)}{\mu\Delta}\tilde{f}_2(\alpha) + \dfrac{2i\alpha(\lambda_1 n_2 - \lambda_2 n_1)}{\mu\Delta}\tilde{f}_1(\alpha) \end{cases}$$

gdzie Δ wyraża się tak jak we wzorach /3.8/, zaś $\tilde{f}_3(\alpha) = \tilde{T}_0(\alpha) + \tilde{T}_1(\alpha)$.

Podstawiając /3.13/ do /3.11/ otrzymujemy ogólne wyrażenia dla potencjałów przemieszczeniowych i temperatury. Mając potencjały ze znanych wzorów obliczamy składowe pola naprężeń σ_{zz}, σ_{xz}, σ_{xx}.

Przedstawiając

$$A = A_0 + A_1 \quad , \qquad B = B_0 + B_1 \quad , \qquad C = C_0 + C_1 \quad ,$$

gdzie A_0, B_0, C_0 wyrażają się wzorami /3.8/, natomiast

$$\text{/3.14/} \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{m[(\alpha^2+\nu^2) - 4\alpha^2\nu\lambda_2]}{\Delta}\tilde{T}_1(\alpha) - \dfrac{(\alpha^2+\nu^2)n_2}{\mu\Delta}\tilde{f}_1(\alpha) - \dfrac{2i\alpha\nu n_2}{\mu\Delta}\tilde{f}_2(\alpha) \\[2ex] B_1 = -\dfrac{m[(\alpha^2+\nu^2)^2 - 4\alpha^2\nu\lambda_1]}{\Delta}\tilde{T}_1(\alpha) - \dfrac{(\alpha^2+\nu^2)n_1}{\mu\Delta}\tilde{f}_1(\alpha) + \dfrac{2i\alpha\nu n_1}{\mu\Delta}\tilde{f}_2(\alpha) \\[2ex] C_1 = \dfrac{(\alpha^2+\nu^2)(k_2^2-k_1^2)}{\mu\Delta}\tilde{f}_2(\alpha) + \dfrac{2i\alpha(\lambda_1 n_2 - \lambda_2 n_1)}{\mu\Delta}\tilde{f}_1(\alpha) + \dfrac{2i\alpha m(\alpha^2+\nu^2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\Delta}\tilde{T}_1(\alpha) \end{cases}$$

potencjały i temperatura /3.11/ przyjmują postać

$$\text{/3.15/} \quad \Phi(x,z) = \Phi^0 + \Phi^1 , \quad \Psi(x,z) = \Psi^0 + \Psi^1 , \quad T(x,z) = T^0 + T^1$$

W przypadku kiedy nierówności powierzchni znikają /wtedy w warunkach brzegowych /3.9/ $f_1/x/ \equiv 0$, $f_2/x/ \equiv 0$, $T_1/x/ \equiv 0$ /

$$\Phi = \Phi^0 , \quad \Psi = \Psi^0 , \quad T = T^0 .$$

i wzory /3.11/ określają ścisłe i znane rozwiązanie problemu dla półprzestrzeni ograniczonej płaszczyzną /zerowe przybliżenie/.

Człony Φ^1, Ψ^1, T^1 spowodowane są warunkami brzegowymi

$f_1(x)$, $f_2(x)$ i $T_1(x)$ i opisują wpływ nierówności brzegu półprzestrzeni /w pierwszym przybliżeniu/.

4. Rozważania probabilistyczne

Przeanalizujemy teraz sformułowane w punkcie 2 zagadnienie przyjmując najpierw, że rozkład temperatury $T_0(x)$ na brzegu jest funkcją losową, a następnie, że powierzchnia ograniczająca półprzestrzeń jest powierzchnią losową. Losową temperaturę na brzegu oznaczymy przez $T_0(x,w)$, w jest elementem zbioru zdarzeń elementarnych W, na którym określona jest miara probabilistyczna /prawdopodobieństwo/ P. Dla ustalonego x, $T_0/x,w/$ jest zmienną losową /funkcją mierzalną względem miary P/; dla konkretnego zdarzenia elementarnego $w_0 \in W$, $T_0(x,w_0)$ jest realizacją funkcji losowej $T_0(x,w)$ – funkcją rzeczywistą x. Temperatura na brzegu jest więc schatakteryzowana przez rodzinę funkcji $T_0(x,w)$ zależnych od parametru w.

Założymy tutaj, że $T_0(x,w)$ jest funkcją losową rzędu drugiego o znanej wartości przeciętnej $m_{T_0}(x)$ i funkcji korelacyjnej $K_{T_0}(x',x'')$.

Wyznaczymy wartości przeciętne i funkcje korelacyjne pola termosprężystego w półprzestrzeni.

4.1. Półprzestrzeń ograniczona płaszczyzną

W tym przypadku potencjały przemieszczeniowe i temperatura wyrażają się wzorami /3.11/ z których

$A = A_0$, $B = B_0$, $C = C_0$.

Wprowadzając oznaczenia

$$/4.1/ \qquad a(\alpha) = \frac{m[(\alpha^2+\nu^2)^2 - 4\nu\alpha^2]\lambda_2}{\Delta}, \quad b(\alpha) = \frac{-m[(\alpha^2+\nu^2)^2 - 4\nu\alpha^2]\lambda_1}{\Delta}$$

$$C(\alpha) = \frac{2i\alpha m(\alpha^2+\nu^2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\Delta}$$

wzory /3.8/ zapiszemy w postaci

/4.2/ $$A_0 = a(\alpha)\widetilde{T}_0(\alpha,w),\; B_0 = b(\alpha)\widetilde{T}_0(\alpha,w),\; C_0 = c(\alpha)\widetilde{T}_0(\alpha,w)$$

Wyrażenia /3.11/ można zapisać następująco

/4.3/ $$\begin{cases} \Phi(x,z,w) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1(\alpha,x,z)\,\widetilde{T}_0(\alpha,w)\,d\alpha \\ \Psi(x,z,w) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2(\alpha,x,z)\,\widetilde{T}_0(\alpha,w)\,d\alpha \\ T(x,z,w) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_3(\alpha,x,z)\,\widetilde{T}_0(\alpha,w)\,d\alpha \end{cases}$$

gdzie

/4.4/ $$\begin{cases} g_1(\alpha,x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha x}\left[a(\alpha)e^{-\lambda_1 z} + b(\alpha)e^{-\lambda_2 z}\right] \\ g_2(\alpha,x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha x}\left[c(\alpha)e^{-\nu z}\right] \\ g_3(\alpha,x,z) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha x}\left[n_1 a(\alpha)e^{-\lambda_1 z} + n_2 b(\alpha)e^{-\lambda_2 z}\right] \end{cases}$$

Istnienie całek stochastycznych /4.3/ zależy od funkcji korelacyjnej funkcji losowej $\widetilde{T}_0(\alpha,w)$ [6]. Ze wzorów /4.3./ widać, że własności statystyczne potencjałów i temperatury będą wyrażały się przez odpowiednie charakterystyki funkcji losowej $\widetilde{T}_0(\alpha,w)$. Wartość przeciętna i funkcja korelacyjna transformaty $\widetilde{T}_0(\alpha,w)$ wyrażają się przez $m_{T_0}/x/$ i $K_{T_0}/x',x''/$ następująco

/4.5/ $$E\left[\widetilde{T}_0(\alpha,w)\right] = m_{\widetilde{T}_0}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} m_{T_0}(x)\,e^{i\alpha x}\,dx = \widetilde{m}_{T_0}(\alpha)$$

$$/4.5''/ \quad K_{\widetilde{T}_0}(\alpha',\alpha'') = E\left[\widetilde{T}_0(\alpha',w)\,\widetilde{T}_0^{*}(\alpha'',w)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{T_0}(x',x'')\, e^{i(\alpha'x'-\alpha''x'')}\,dx'dx''$$

gdzie $m_{\widetilde{T}_0}(\alpha)$ jest transformatą Fouriera wartości przeciętnej $m_{T_0}(x)$.

Wartości przeciętne i funkcje korelacyjne funkcji losowych /4.3/ wyrażają się wzorami

$$/4.6/ \quad m_{(-)}(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(\alpha,x,z)\, m_{\widetilde{T}_0}(\alpha)\, d\alpha$$

jeżeli $i = 1$, to m_{Φ}

$i = 2$, to m_{Ψ}

$i = 3$, to m_{T}

$$/4.7/ \quad K_{(-)}(x',z';x'',z'') = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{\widetilde{T}_0}(\alpha',\alpha'')\, g_i(\alpha',x',z')\, g_i^{*}(\alpha'',x'',z'')\, d\alpha' d\alpha''$$

$i = 1$, to K_{Φ}

$i = 2$, to K_{Ψ}

$i = 3$, to K_{T}

gdzie $*$ oznacza wartość zespoloną sprężoną.

Wzory /4.5/, /4.6/ i /4.7/ dają rozwiązanie postawionego zagadnienia dla przypadku półprzestrzeni ograniczonej płaszczyzną.

4.2. Półprzestrzeń ograniczona powierzchnią nierówną

W tym przypadku potencjały i temperatura wyrażają się wzorami /3.11/ w których $A = A_0 + A_1$, $B = B_0 + B_1$, $C = C_0 + C_1$. Rozwiązanie zagadnienia /funkcje losowe $\Phi(x,z,w)$, $\Psi(x,z,w)$, $T(x,z,w)$ wyraża się przez funkcję losową $T_0/x,w/$ charakteryzującą rozkład temperatury na brzegu w dość skomplikowany sposób. Stałe A_1, B_1, C_1 wyrażają się przez transformaty Fouriera funkcji f_1, f_2 i T_1 wzorami /3.14/.

Z kolei funkcje f_1, f_2, T_1 określone są wzorami /3.10/ i wyrażają się przez transformatę temperatury na brzegu wzorami /3.6/ - /3.8/. Wobec tego charakterystyki probabilistyczne /w naszych rozważaniach - wartość przeciętna i funkcja korelacyjna/ potencjałów i temperatury /3.15/ będą miały bardziej skomplikowaną postać niż w przypadku poprzednim. Tutaj ograniczymy się do znalezienia wyrażenia dla wartości przeciętnej i funkcji korelacyjnej temperatury. Własności statystyczne potencjałów termosprężystych wyznacza się w sposób analogiczny.

Ze wzorów /3.11/ otrzymujemy następujące wyrażenie dla temperatury

/4.8/
$$T(x,z,w) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(n_1 A_0 e^{-\lambda_1 z} + n_2 B_0 e^{-\lambda_2 z}\right) e^{-i\alpha x} d\alpha + \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(n_1 A_1 e^{-\lambda_1 z} + n_2 B_1 e^{-\lambda_2 z}\right) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Korzystając z /3.14/ i oznaczając

/4.9/
$$\begin{cases} \dfrac{2i\alpha}{\mu\Delta} = d(\alpha)\,, \qquad \dfrac{\alpha^2+\nu^2}{\mu\Delta} = h(\alpha) \\ g_4(\alpha,x,z) = \dfrac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha x}\left[a(\alpha) n_1 e^{-\lambda_1 z} + b(\alpha) n_2 e^{-\lambda_2 z}\right] \\ g_5(\alpha,x,z) = \dfrac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha x}\left[e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}\right] h(\alpha)\, n_1 n_2 \\ g_6(\alpha,x,z) = \dfrac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-i\alpha x}\left[e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z}\right] d(\alpha)\, \nu\, n_1 n_2 \end{cases}$$

po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy

/4.10/
$$T(x,z,w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g_3(\alpha,x,z)\, \tilde{T}_0(\alpha,w) + g_4(\alpha,x,z)\, \tilde{T}_1(\alpha,w) + g_5(\alpha,x,z)\, \tilde{f}_1(\alpha) + g_6(\alpha,x,z)\, \tilde{f}_2(\alpha)\right] d\alpha$$

W celu zapisania wzorów w zwartej postaci oznaczymy tutaj

/4.11/ $T_0(x,w) = X_3(x,w),\ T_1(x,w) = X_4(x,w),\ f_1(x,w) = X_5(x,w),\ f_2(x,w) = X_6(x,w).$

Wartość przeciętna pola temperatury /4.10/ wyraża się następująco

/4.12/ $$m_T(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=3}^{6} g_i(\alpha,x,z)\, m_{\tilde{X}_i}(\alpha)\, d\alpha$$

Funkcja korelacyjna $K_T(x',z';x'',z'')$ pola temperatury /4.10/ wyraża się wzorem

/4.13/ $$K_T(x',z';x'',z'') = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=3}^{6} g_i(\alpha',x',z')\, g_j^*(\alpha'',x'',z'')\, K_{\tilde{X}_i\tilde{X}_j}(\alpha',\alpha'')\, d\alpha' d\alpha''$$

Należy jeszcze określić wartości przeciętne $m_{\tilde{X}_i}(\alpha)$ i funkcje korelacyjne $K_{\tilde{X}_i\tilde{X}_j}(\alpha',\alpha'')$.
Dla i = j = 3 $\left(m_{\tilde{X}_3}(\alpha) = m_{\tilde{T}_0}(\alpha),\ K_{\tilde{X}_3\tilde{X}_3}(\alpha',\alpha'') = K_{\tilde{T}_0}(\alpha',\alpha'')\right)$ funkcje te są określone wzorami (4.5). Do wyznaczenia $m_{\tilde{X}_i}(\alpha)$ i $K_{\tilde{X}_i\tilde{X}_j}(\alpha',\alpha'')$ $(i,j=4,5,6)$ prowadzi następujące postępowanie.

Funkcje losowe $X_4/x,w/ = T_1/x,w/$, $X_5/x,w/ = f_1/x/$, $X_6/x,w/ = f_2/x/$
można zapisać

/4.14/ $$X_i(x,w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_i(\alpha,x)\, \tilde{T}_0(\alpha)\, d\alpha \quad , \qquad i = 4,5,6$$

gdzie

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda_4(\alpha,x) &= \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}\xi(x)e^{-i\alpha x}\left[n_1\lambda_1 a(\alpha)+n_2\lambda_2 b(\alpha)\right] \\ \Lambda_5(\alpha,x) &= \frac{u}{\sqrt{2\pi}}\xi(x)e^{-i\alpha x}\left\{(\alpha^2+\nu^2)\left[a(\alpha)\lambda_1+b(\alpha)\lambda_2\right]-2\nu i\alpha c(\alpha)\right\} \\ \Lambda_6(\alpha,x) &= \frac{u}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\alpha x}\Big(\xi(x)\left\{2i\alpha\left[a(\alpha)\lambda_1+b(\alpha)\lambda_2\right]+\nu s^2 c(\alpha)\right\}- \\ &\quad -\frac{d\xi}{dx}\left[(2\lambda_1^2+s^2)a(\alpha)+(2\lambda_1^2+s^2)b(\alpha)+2\nu i\alpha c(\alpha)\right]\Big) \end{aligned}\right. \tag{4.15}$$

Transformacje Fouriera funkcji $X_i/x,w/$, $/i=4,5,6/$ wyrażają się jak wiadomo, wzorem

$$\tilde{X}_i(\alpha,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} X_i(x,w)\,e^{i\alpha x}dx \tag{4.16}$$

Wobec tego

$$\left\{\begin{aligned} m_{\tilde{X}_i}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} m_{X_i}(x)\,e^{i\alpha x}dx = \widetilde{m}_{X_i} \\ K_{\tilde{X}_i\tilde{X}_j}(\alpha',\alpha'') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{X_iX_j}(x',x'')\,e^{i(\alpha'x'-\alpha''x'')}dx'dx'' \end{aligned}\right. \quad i,j=4,5,6. \tag{4.17}$$

Występujące w powyższych wzorach funkcje $m_{X_i}(x)$ i $K_{X_iX_j}(x',x'')$ można już na podstawie wzorów /4.14/ prosto wyrazić przez wartość przeciętną i funkcję korelacyjną losowej temperatury na brzegu /jej transformaty/ $\tilde{T}_0(\alpha)$

$$\left\{\begin{aligned} m_{X_i}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda_i(\alpha,x)\,m_{\tilde{T}_0}(\alpha)\,d\alpha \\ K_{X_iX_j}(x',x'') &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda_i(\alpha',x')\,\Lambda_j^*(\alpha'',x'')\,K_{\tilde{T}_0}(\alpha',\alpha'')\,d\alpha'd\alpha'' \end{aligned}\right. \quad /i,j=4,5,6/ \tag{4.18}$$

Tak więc wzory /4.12/, /4.13/, /4.17/, /4.18/ i /4.5/ dają rozwiązanie postawionego w tym punkcie zagadnienia. Wyrażają one wartości przeciętne i funkcje korelacyjne pola temperatury w półprzestrzeni przez wartość przeciętną i funkcję korelacyjną temperatury na brzegu. Własności statystyczne potencjałów sprężystych Φ i Ψ wyznacza się w sposób analogiczny. Funkcje korelacyjne naprężeń będą wyrażać się przez pochodne funkcji korelacyjnych potencjałów /przez pochodne czwartego rzędu/, /por. [6] /.

4.3. Półprzestrzeń ograniczona powierzchnią losową

Rozważymy tutaj zagadnienie sformułowane w punkcie drugim przy założeniu, że funkcja opisująca powierzchnię nierówną jest funkcją losową, /$z=\xi(x,w)$, $w\in W$ /, natomiast rozkład temperatury na brzegu T_0/x/ jest funkcją nielosową. Zakładamy, że wartość przeciętna funkcji ξ jest równa zeru, i że znana jest funkcja korelacyjna $K_\xi(x', x'')$. Należy wyznaczyć funkcje korelacyjne pola termosprężystego w półprzestrzeni. Tutaj ograniczymy się do podania wyrażeń określających funkcję korelacyjną temperatury.

Funkcje określające pole termosprężyste w półprzestrzeni wyrażają się wzorami /3.15/. Wpływ nierówności powierzchni opisują człony Φ^1, Ψ^1 i T^1 , które /przy założeniu, że powierzchnia jest losowa/ są funkcjami losowymi. Wyznaczymy funkcję korelacyjną funkcji losowej $T^1(x,z,w)$.

Uwzględniając wzór /4.10/ i oznaczenia /4.11/ funkcję $T^1(x,z,w)$ można zapisać

$$T^1(x,z,w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[g_4(\alpha,x,z)\widetilde{X}_4(\alpha,w)+g_5(\alpha,x,z)\widetilde{X}_5(\alpha,w)+g_6(\alpha,x,z)\widetilde{X}_6(\alpha,w)\right]d\alpha \qquad /4.19/$$

Funkcja korelacyjna wyraża się wzorem analogicznym do /4.13/

$$/4.20/ \quad K_{T'}(x', z'; x'', z'') = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=4}^{6} g_i(\alpha', x', z') g_j^*(\alpha'', x'', z'') K_{\tilde{X}_i \tilde{X}_j}(\alpha', \alpha'') d\alpha' d\alpha''$$

lecz teraz funkcje korelacyjne $K_{\tilde{X}_i X_j}(\alpha', \alpha'')$ należy wyrazić przez funkcję korelacyjną powierzchni losowej $K_\xi(x', x'')$.

Zgodnie z oznaczeniami /4.11/ funkcje X_i /i=4,5,6/ wyrażają się wzorami /3.10/. Transformacje Fouriera funkcji X_i /x,w/ wyrażają się przez ξ /x,w/ wzorami

$$/4.21/ \quad \begin{cases} \tilde{X}_4(\alpha, w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x, w)\, \varphi_4(x)\, e^{i\alpha x} dx \\ \tilde{X}_5(\alpha, w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x, w)\, \varphi_1(x)\, e^{i\alpha x} dx \\ \tilde{X}_6(\alpha, w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x, w)\, \varphi_2(x)\, e^{i\alpha x} dx + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{d\xi(x,w)}{dx}\, \varphi_3(x)\, e^{i\alpha x} dx \end{cases}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$/4.22/ \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_4(x) e^{i\alpha x} = r_4(x, \alpha) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_1(x) e^{i\alpha x} = r_5(x, \alpha) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_2(x) e^{i\alpha x} = r_6^1(x, \alpha) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_3(x) e^{i\alpha x} = r_6^2(x, \alpha) \end{cases}$$

otrzymujemy

$$K_{\tilde{X}_i \tilde{X}_j}(\alpha',\alpha'') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{\xi}(x',x'')\, r_i(x',\alpha')\, r_j^{*}(x'',\alpha'')\, dx'dx'', \qquad i,j=4,5$$

$$\begin{aligned}
K_{\tilde{X}_4 \tilde{X}_6}(\alpha',\alpha'') &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{\xi}(x',x'')\, r_4(x',\alpha')\, r_6^{1*}(x'',\alpha'')\, dx'dx'' + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial K}{\partial x''}\, r_4(x',\alpha')\, r_6^{2*}(x'',\alpha'')\, dx'dx'', \\
K_{\tilde{X}_6 \tilde{X}_4}(\alpha',\alpha'') &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{\xi}(x',x'')\, r_6^{1}(x',\alpha')\, r_4^{*}(x'',\alpha'')\, dx'dx'' + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial K}{\partial x'}\, r_6^{2}(x',\alpha')\, r_4^{*}(x'',\alpha'')\, dx'dx'', \\
K_{\tilde{X}_5 \tilde{X}_6}(\alpha',\alpha'') &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{\xi}(x',x'')\, r_5(x',\alpha')\, r_6^{1*}(x'',\alpha'')\, dx'dx'' + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial K}{\partial x''}\, r_5(x',\alpha')\, r_6^{2*}(x'',x'')\, dx'dx'', \\
K_{\tilde{X}_6 \tilde{X}_5}(\alpha',\alpha'') &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{\xi}(x',x'')\, r_6^{1}(x',\alpha')\, r_5^{*}(x'',\alpha'')\, dx'dx'' + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial K}{\partial x'}\, r_6^{2}(x',\alpha')\, r_5^{*}(x'',\alpha'')\, dx'dx''.
\end{aligned} \tag{/4.23/}$$

Wzory /4.20/, /4.22/ i /4.23/ wyrażają funkcję korelacyjną temperatury w półprzestrzeni przez znaną funkcję korelacyjną powierzchni losowej.

L i t e r a t u r a

1. Nowacki W. – Dynamiczne zagadnienia termosprężystości, PWN, Warszawa 1966.

2. Parkus H. – Неустановившиеся температурные напряжения, Изд. физ-мат. лит., Москва 1963

3. Альперт Я. Л., Гинзбург В. А., Фейнберг Е. Л., Распространение радиоволн, Москва 1953

4. Sobczyk K. – Scattering of Rayleigh waves at a random boundary of an elastic body, Proc. Vibr. Probl., 4, 7 /1966/.

5. Sobczyk K. – Rozpraszanie fal na powierzchniach nierównych.
Część I, Postępy Fizyki, T. XVIII, 1,1967.
Część II, Postępy Fizyki, T. XVIII, 3,1967.

6. Loève M. – Probability Theory, sec. edition. Princeton, 1960.