Roman Solecki

MIEJSCE TEORII POROWATOŚCI BIOTA W MECHANICE OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

30/1967

WARSZAWA

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 0,5. Ark. druk. 1.
Oddano do drukarni w styczniu 1968 r.
Wydrukowano w lutym 1968 r. Nr zam. 82/0/68.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Miejsce teorii porowatości Biota
w mechanice ośrodków ciągłych

R.Solecki

1. W 1941 r. M.A.Biot opublikował /1/ swą liniową teorię deformacji ciała porowatego zawierającego płyn lepki, a w latach późniejszych zajął się - a za nim i inni autorzy - problemem propagacji akustycznej w takim ośrodku /por. np. /2/ /. Z drugiej strony w ostatnim dziesięcioleciu rozwinęła się, zapoczątkowana we współczesnym ujęciu przez C.Truesdella /3/, teoria dyfuzji ciał odkształcalnych. Zdawać by się mogło, że zlinearyzowana teoria dyfuzji płynu lepkiego i ciała sprężystego powinna być identyczna z teorią Biota. Tak jednak, jak to stwierdzono /por. np. /4//, nie jest. W niniejszej pracy postaramy się odpowiedzieć na pytanie: jakie jest miejsce teorii Biota w mechanice ośrodków ciągłych? Za kryterium poprawności omawianych związków uważać będziemy zgodność z podstawowymi zasadami których spełnienia żąda się /por /5/ / od równań konstytutywnych opisujących dane ciało.

2. Zaczniemy od krótkiego przypomnienia podstaw liniowej teorii Biota. Biot zakłada, że każdy punkt przestrzeni jest równocześnie zajęty przez cząstkę ciała sprężystego oraz przez cząstkę płynu. Otrzymany w ten sposób agregat charakteryzuje się energią potencjalną $W = W/\mathrm{grad}\ \underline{u}\ ,\ \mathrm{div}\ \underline{U}/$ gdzie $\underline{u}$ i $\underline{U}$ oznaczają odpowiednio wektory przemieszczenia ciała stałego i płynu. Wychodząc z takiego założenia wyprowadza Biot związki konstytutywne, które w przypadku izotropii przyjmują następującą postać

$$\sigma^1_{ij} = A\, e^1_{kk}\, \delta_{ij} + 2N\, e^1_{ij} + Q\, e^2_{kk}\, \delta_{ij}\,, \tag{2.1.1}$$

$$\sigma^2_{ij} = \frac{-1}{\beta}\left(Q\, e^1_{kk} + R\, e^2_{kk}\right) \delta_{ij} = p\, \delta_{ij}. \tag{2.1.2}$$

Oznaczyliśmy tutaj przez σ^1_{ij}, σ^2_{ij} tensory naprężenia, przez e^1_{ij}, e^2_{ij} - tensory odkształcenia infinitezymalnego odnoszące się do ciała "1" /ciało stałe/, lub też do ciała "2" /płyn/. Wszystkie składowe odnieśliśmy do współrzędnych kartezjańskich. W dalszym ciągu ograniczymy się do badania ciała jednorodnego zakładając, że wielkości A, N, Q i R są stałe. Zauważymy od razu, że równania konstytutywne (2.1) nie spełniają zasady współobecności. Zasada ta nie żąda coprawda, aby w ostatecznych związkach występowały te same zmienne, jednakże usunięcie niektórych wielkości może być spowodowane jedynie wymogami zasad mechaniki, warunków symetrii czy też zasady produkcji entropii. W pracy Biota związki (2.1) wynikają natomiast z definicji potencjału W oraz z definicji zależności między W, a σ_{ij}.

Posługując się związkami (2.1) można zapisać w następującej postaci wyprowadzone przez Biota równania ruchu

$$\sigma^1_{ij,j} = \rho_{11}\, \ddot{u}_i + \rho_{12}\, \ddot{U}_i\,, \tag{2.2.1}$$

$$\sigma^2_{ij,j} = \rho_{12}\, \ddot{u}_i + \rho_{22}\, \ddot{U}_i\,, \tag{2.2.2}$$

gdzie ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} są współczynnikami związanymi z gęstościami ciała stałego i płynu.

3. Przytoczymy teraz równania ruchu agregatu dwóch ośrodków dyfundujących pomijając siły masowe i zakładając, że spełniony jest postulat zachowania masy dla każdego z tych ośrodków oddzielnie /por.np. /6/ /. Mamy

$$(3.1.1) \qquad -\pi_i = \rho_1 \ddot{u}_i - \sigma^{/1/}_{ji,j} ,$$

$$(3.1.2) \qquad \pi_i = \rho_2 \ddot{U}_i - \sigma^{/2/}_{ji,j} ,$$

gdzie π jest wektorem oporu dyfuzji, $\sigma^{/1/}_{ki}$, $\sigma^{/2/}_{ki}$ zaś naprężeniami cząstkowymi. W celu upodobnienia (2.2) do (3.1) rozwiążemy ten układ równań względem $\ddot{u}_i$ oraz $\ddot{U}_i$. Otrzymane związki zapiszemy w następującej postaci

$$(3.2.1) \qquad \rho_{11} u_i = \rho_{11} \bar{A} \, \sigma^1_{ij,j} + \rho_{11} B \, \sigma^2_{ij,j} ,$$

$$(3.2.2) \qquad \rho_{22} U_i = \rho_{22} \bar{F} \, \sigma^1_{ij,j} + \rho_{22} C \, \sigma^2_{ij,j} ,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(3.3) \qquad \bar{A} = \frac{\rho_{22}}{\rho^{/2/}}, \quad \bar{C} = \frac{\rho_{11}}{\rho^{/2/}}, \quad \bar{B} = -\frac{\rho_{12}}{\rho^{/2/}},$$

$$\rho^{/2/} = \rho_{11} \rho_{22} - \rho^2_{12} .$$

Porównując (3.2) z (3.1) widzimy, że należałoby przyjąć w dalszym ciągu:

$$(3.4.1) \qquad \sigma^{/1/}_{ji} - \Pi_{ij} = \rho_{11} / \bar{A} \, \sigma^1_{ij} + \bar{B} \, \sigma^2_{ij} / \equiv$$

$$\equiv \alpha_1 e^1_{kk} \delta_{ij} + \alpha_2 e^1_{ij} + \alpha_3 e^2_{kk} \delta_{ij} ,$$

$$(3.4.2)\qquad \sigma^{/2/}_{ji} + \Pi_{ij} = \rho_{22}\,/\bar{B}\,\sigma^{1}_{ij} + \bar{C}\,\sigma^{2}_{ij}\,/ \equiv$$

$$\equiv \beta_1 e^{1}_{kk}\,\delta_{ij} + \beta_2\, e^{1}_{ij} + \beta_3\, e^{2}_{kk}\,\delta_{ij}\,.$$

Tutaj $\sigma^{/1/}_{ji}$, $\sigma^{/2/}_{ji}$ są nowo zdefiniowanymi naprężeniami cząstkowymi spełniającymi zasadę współobecności, Π_{ij} jest zaś pewną funkcją której dywergencja jest oporem dyfuzji

$$(3.5)\qquad \Pi_{ij,j} = \pi_i\,.$$

Występujące w (3.4) współczynniki fenomenologiczne określone są przez następujące związki

$$(3.6)\quad \alpha_1 = \rho^{-2}/\rho_{11}\,\rho_{22}A + \rho_{11}\,\rho_{12}\,\frac{Q}{\beta}/,\qquad \alpha_2 = \frac{2\rho_{11}\rho_{12}N}{\rho^2},$$

$$\alpha_3 = \rho^{-2}/\rho_{11}\,\rho_{22}Q + \rho_{11}\,\rho_{12}\,\frac{R}{\beta}/,$$

$$\beta_1 = -\rho^{-2}/\rho_{11}\,\rho_{12}A + \rho_{11}\,\rho_{22}\,\frac{Q}{\beta}/\,,\qquad \beta_2 = \frac{2\rho_{12}\rho_{22}N}{\rho^2},$$

$$\beta_3 = -\rho^{-2}/\rho_{11}\,\rho_{22}Q + \rho_{11}\,\rho_{22}\,\frac{R}{\beta}/\,.$$

Podstawiając (3.4) i (3.5) do (3.2) otrzymujemy

$$(3.7.1)\qquad \pi_i = \rho_{11}\,\ddot{u}_i - \sigma^{/1/}_{ji,j}\,,$$

$$(3.7.2)\qquad \pi_i = \rho_{22}\,\ddot{U}_i - \sigma^{/2/}_{ji,j}\,.$$

Uzyskaliśmy zatem formalną identyczność równań ruchu dwóch ośrodków dyfundujących z równaniami ruchu mieszaniny Biota. Musimy teraz wyjaśnić czy nie zachodzi sprzeczność między związkami (3.4) wynikającymi z teorii Biota, a uzyskanymi formalnie równaniami ruchu (3.7).

1^o Załóżmy na razie, że ciało "1" jest izotropowym ciałem sprężystym, ciało "2" zaś - płynem. W przypadku ruchu takiej mieszaniny obowiązują równania konstytutywne uzyskane przez A.E.Greena i T.R.Steela /7/. Równania te czynią zadość żądaniu niezmienniczości i zasadzie współobecności, a ograniczenia nałożone na występujące w nich współczynniki fenomenologiczne wynikają z zastosowania nierówności entropii. Otóż w przypadku zlinearyzowanym, zgodnie z tą pracą, żadne z naprężeń cząstkowych nie zależy ani od różnicy prędkości składników mieszaniny ani od pochodnych tensora odkształcenia; opór dyfuzji natomiast od tych wielkości zależy.

W tym przypadku, z rozwiązania równania (3.5) wynika, że i tensor Π_{ij} musi zależeć od tej różnicy, a zatem /w związku z założeniami odnośnie $\sigma^{/1/}_{ji}$, $\sigma^{/2/}_{ji}$ / spełnienie związków (3.4) nie jest możliwe.

2^o Jeśliby obydwa ciała były izotropowymi ciałami sprężystymi wówczas zgodnie z pracą /4/, opór dyfuzji zależałby ponownie od podanych poprzednio wielkości, a zatem i w tym przypadku spełnienie związków (3.4) nie jest możliwe.

Doszliśmy tym samym do wniosku, że w teorii Biota pominięty jest opór dyfuzji. W konsekwencji związki (3.4) należy uważać za równania konstytutywne dla naprężeń cząstkowych $\sigma^{/1/}_{ji}$, $\sigma^{/2/}_{ji}$.

3^o Należy teraz wyjaśnić, przyjmując za dopuszczalne pominięcie oporu dyfuzji, mieszaninę jakich dwóch ciał można opisać związkami (3.4). Jednym z nich jest niewątpliwie izotropowe, jednorodne ciało sprężyste przy czym naprężenie w takim ciele opisane jest w przypadku infinitezymalnej deformacji jak wiadomo związkiem typu

$$\sigma_{ij} = \lambda_1 e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_1 e^1_{ij} \tag{3.8}$$

Drugie z tych ciał opisane jest, w przypadku gdy pierwsze z nich nie występuje, związkiem konstytutywnym typu

$$\sigma_{ij} = \lambda_2 e^2_{kk} \delta_{ij} . \tag{3.9}$$

Zachodzą trzy alternatywy:

I/ Ciało "2" może być, zgodnie z założeniami Biota, idealnym /sprężystym/ płynem Stokesa o równaniu konstytutywnym

$$\sigma_{ij} = -\bar{\pi} \delta_{ij}. \tag{3.10}$$

Jednakże żądanie jednoczesnego spełnienia równania zachowania masy oraz wynikającego z (3.9) i (3.10) związku $\bar{\pi} = -\lambda_2 e^2_{kk}$ wraz z założeniem o nieskończenie małych deformacjach i prędkościach prowadzi, co łatwo sprawdzić, do następującego równania stanu

$$\bar{\pi} = \lambda_2 \ln\rho + C, \qquad C = \text{const.} \tag{3.11}$$

Ciało "2" może być więc bardzo szczególnym przypadkiem płynu piezotropowego.

II/ Ciało "2" może być również dowolnie poruszającym się ciałem sprężystym dla którego współczynnik Lamé $\mu = 0$.

III/ Ciało "2" może być wreszcie dowolnym ciałem sprężystym o ograniczeniach nałożonych na stan deformacji.

Załóżmy

$$e^2_{ij} = e/x_1, x_2, x_3, t/ \delta_{ij} \qquad \text{gdzie} \qquad e = \tfrac{1}{3} e^2_{jj} . \tag{3.12}$$

Wówczas

$$\sigma_{ij} = /3\lambda + 2\mu/\ e\ \delta_{ij}, \tag{3.13}$$

a to jest istotne wzór typu(3.8) z (3.12) wynika, że

$$U_{ij} = 0 \qquad \text{gdy} \qquad i = j\ , \tag{3.14}$$

a więc

$$U_1 = U_1/x_1,t/, \quad U_2 = U_2/x_2,t/, \quad U_3 = U_3/x_3,t/, \tag{3.15}$$

oraz

$$e^2_{jj,i} = \frac{\partial^2\ U_i/x_i,t/}{\partial x_i^2} \qquad \text{/ nie sumować po "i"/.} \tag{3.16}$$

Podstawmy teraz (3.4) i(3.16) do (3.7) uwzględniając, że $\pi_i = 0$

$$\rho_{11}\ddot{u}_i = \alpha_1 e^1_{jj,i} + \alpha_2 e^1_{ij,j} + \alpha_3 \frac{\partial^2\ U_i}{\partial x_i\ \partial x_i}, \qquad \text{/nie sumować po "i"/} \tag{3.17.1}$$

$$\rho_{22}\ddot{U}_i = \beta_1 e^1_{jj,i} + \beta_2\ e^1_{ij,j} + \beta_3\ \frac{\partial^2\ U_i}{\partial x_i\ \partial x_i} \tag{3.17.2}$$

/nie sumować po "i"/

Układ równań (3.17.2) jest rozprzężony z uwagi na U_i; każde z równań tego układu jest niejednorodnym równaniem falowym. Wielkości U_i można zatem bez trudu wyeliminować z (3.17.1). Zauważmy jednakże, że z(3.15)i z (3.17.1)wynikają dodatkowo ograniczenia którym podlegają funkcje $u_i/x_1,x_2,x_3,t/$. Muszą być mianowicie spełnione warunki

$$\beta_1 e^1{}_{jj,i} + \beta_2 e^1{}_{ij,j} = f_i/x_1,t/ \qquad \text{/nie sumować po "i"/} \tag{3.18}$$

gdzie $f_i/x_i,t/$ są dowolnymi funkcjami swoich argumentów

Literatura

[1] M.A.Biot, Journ.of Appl.Phys.12,1941,s.155,s.426,s.578.

[2] M.A.Biot, Journ.of Appl.Phys.33,1962,s.1482.

[3] C.Truesdell, III simposio di meccanica e matematica applicata, 1961, s.161.

[4] T.R.Steel, The Quart.Joura.of Mech.and Appl.Math. 20, 1,1967,s.57.

[5] C.Truesdell, W.Noll, Handb.d.Physik, III/3, Springer Verlag 1965.

[6] A.E.Green, P.M.Naghdi, Int.Journ.of Eng.Sci.,3, 1965, 2, s.231.

[7] A.E.Green, T.R.Steel, Int.Journ.of Eng.Sci.,4, 1966, 4, s.483.

[8] A.C.Eringen, Nonlinear Theory of Continuous Media, Mc Graw-Hill, New York 1962.

WYKAZ PRAC
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
P A N

1 - 30/1967

1 9 6 7

W A R S Z A W A

W roku 1967 w wydawnictwie
Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk
ukazały się następujące prace

1. W. N o w a c k i, Twierdzenie o zupełności funkcji naprężeń w termosprężystości
2. Z. B y c h a w s k i, W. O l s z a k, Energetyczna interpretacja stanów krytycznych w ciałach lepkosprężystych
3. S. Z a h o r s k i, Prosty model nieprostych ośrodków sprężystych. Zastosowanie do polimerów usieciowanych
4. W. S z c z e p i ń s k i, J. M i a s t k o w s k i, Plastic straining of notched bars with intermediate thickness and small shoulder ratio
5. W. S z c z e p i ń s k i, L. D i e t r i c h, Plastic yielding of axially-symmetric bars with non-symmetric v-notch
6. S. M a y, Fala uderzeniowa w wilgotnej mieszaninie parogazowej
7. A. B r a h m e r, Asymptotyczne rozwiązania równań teorii magnetojonowej
8. K.J. F r ą c k o w i a k, Dissipativity of magnetogasdynamic /MGD/
9. J. M a j e r c z y k - G ó m u ł k a, K. M a k o w s k i, Wyznaczanie optymalnego sterowania procesami dynamicznymi metodą funkcjonałów Lagrange'a
10. E. Ł u c z y w e k, Obliczanie opływu naddźwiękowego ciał zatępionych metodą związków całkowych

11. Н. Бобровова, О некоторых параметрах ионосферы

12. S. K o s o w s k i, Efektywne określenie parametrów dysypacyjnych gazu relatywistycznego w ramach teorii kinetycznej

13. Z. P a w ł o w s k i, Ocena wytrzymałości materiałów kruchych metodą ultradźwiękową

14. W. P a j e w s k i, Charakterystyka skuteczności mikrofonu piezoelektrycznego płaskiego

15. J. W e h r, Ultradźwiękowa metoda wyznaczania gęstości i ściśliwości cieczy w funkcji ciśnienia

16. P. K u c h a r c z y k, Teoria grup Liego w zastosowaniu do równań różniczkowych cząstkowych

17. P. P e r z y n a, On thermodynamic foundation of viscoplasticity

18. J. W i c h e r, S. Z i e m b a, Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych układów znajdujących się pod wpływem wymuszeń losowych

19. A. M u s z y ń s k a, On motion of the rotor in flexible nonlinear bearings

20. A. D r e s c h e r, W. B o j a n o w s k i, O wpływie drogi na własności mechaniczne ośrodka idealnie sypkiego

21. Z. W e s o ł o w s k i, Incompressible materials in the theory of elasticity

22. J. K a c p r o w s k i, R. G u b r y n o w i c z, Automatyczne rozpoznawanie samogłosek polskich metodą segmentacji widma

23. W. P a j e w s k i, Zagadnienie charakterystyki skuteczności piezoelektrycznego mikrofonu cylindrycznego

24. W. P a j e w s k i, Charakterystyka skuteczności mikrofonu piezoelektrycznego kulistego

25. Cz. S z y m a ń s k i, Płaskie płynięcie stacjonarne ośrodka typu Coulomba z uwzględnieniem sił bezwładności i sił masowych

26. W. P a j e w s k i, Wpływ fotonów na tłumienie poprzecznej fali ultradźwiękowej w krysztale Cd Se

27. E. K a m i ń s k i, Wpływ nieliniowych parametrów na charakterystyki przenoszenia bezwładnościowych przyrządów pomiarowych

28. W.K. N o w a c k i, B. R a n i e c k i, Uwagi dotyczące rozwiązań pewnych zagadnień dynamicznych termo-lepkosprężystości

29. K. S o b c z y k, Pole termosprężyste w półprzestrzeni ograniczonej powierzchnią nierówną

30. R. S o l e c k i, Miejsce teorii porowatości Biota w mechanice ośrodków ciągłych.