Jacek Samborski

DRGANIA GRUBOŚCIENNEJ RURY WYWOŁANE WEWNĘTRZNYM I ZEWNĘTRZNYM OSIOWYM PRZEPŁYWEM CIECZY

23/1968

WARSZAWA

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 0,5. Ark. druk. 1.
Oddano do drukarni we wrześniu 1968r.
Wydrukowano w październiku 1968r. Nr zam. 768

Warszawska Drukarnia Naukowa , Warszawa ,
ul.Śniadeckich 8

Drgania grubościennej rury wywołane wewnętrznym i zewnętrznym osiowym przepływem cieczy

Jacek Samborski

Założenia

Rozważamy nieskończenie długą rurę grubościenną o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b. Rura wewnątrz i zewnątrz opływana jest przez ściśliwe ciecze /ogólnie różne/ o gęstościach odpowiednio ρ_w i ρ_z /ciecze idealne, nielepkie/. Rozważamy drgania własne, wolne od obciążeń. Przyjmujemy małe przemieszczenia, równania ruchu i warunki brzegowe są liniowe. Niezaburzony przepływ cieczy odbywa się ze stałą prędkością równolegle do osi rury. Zagadnienie takie /bez cieczy na zewnątrz/ było rozwiązane przez A. Bobeszko [2].

Oznaczenia

a, b -promień wewnętrzny i zewnętrzny rury,

ρ -gęstość materiału rury,

ρ_w, ρ_z -gęstość cieczy wewnętrznej i zewnętrznej,

U_w, U_z -prędkość niezaburzonego przepływu cieczy wewnętrznej i cieczy otaczającej rurę,

c_w, c_z -prędkość propagacji dźwięku w cieczy wewnętrznej i zewnętrznej przy niezaburzonym przepływie,

$V = \frac{\omega}{k}$ -prędkość fazowa sprężystej fali propagowanej wzdłuż rury,

$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ -prędkość fal podłużnych w materiale rury,

$c_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$ -prędkość fal poprzecznych w materiale rury,

λ, μ -stałe Lamè materiału rury,

$J_n(r), Y_n(r)$ -funkcje Bessel'a n. rzędu I. rodzaju,

$I_n(r), K_n(r)$-funkcje Bessel'a n.rzędu II.rodzaju,

$\eta_w = \frac{\rho_w}{\rho}$, $\eta_z = \frac{\rho_z}{\rho}$, $\xi_w = \frac{c_w}{c_2}$, $\xi_z = \frac{c_z}{c_2}$.

1.Podstawowe równania zagadnienia

Przyjmując infinitezymalne odkształcenia rury,perturbacja w przepływie wywołana przez odkształcenia rury różni się infinitezymalnie od przepływu ze stałą prędkością U,a potencjał perturbacji φ spełnia zlinearyzowane równanie

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\varphi = 0, \tag{1.1}$$

gdzie dla cieczy wewnętrznej należy podstawić : φ_w , c_w , U_w , a dla cieczy zewnętrznej : φ_z , c_z , U_z .

Równania ruchu punktów należących do rury mają postać

$$\mu \operatorname{div}\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{u} = \rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \; ; \; \mathbf{u} = \mathbf{u}(u_1, u_2, u_3). \tag{1.2}$$

Przedstawmy wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$ w postaci sumy gradientu potencjału skalarnego χ i rotacji bezźródłowego potencjału $\boldsymbol{\psi}$ wektorowego

$$u = \operatorname{grad}\chi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi} \quad ; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = 0. \tag{1.3}$$

Wprowadzamy współrzędne cylindryczne x , θ , r /oś x pokrywa się z osią cylindra/.Znając potencjały χ i $\boldsymbol{\psi}$,możemy z $(1.3)_1$ znaleźć pole przemieszczeń punktów rury

$$\begin{aligned} u_x = u &= \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}, \\ u_\theta = v &= \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_x}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial x}, \\ u_r = w &= \frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_x}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Przyjmując część liniową tensora odkształcenia Eulera ,składowe pola odkształceń i naprężeń będą

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_{\theta\theta} = \frac{w}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad e_{rr} = \frac{\partial w}{\partial r},$$

(1.5)
$$e_{x\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right), \quad e_{xr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right),$$

$$\sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + 2\mu e_{\theta\theta}, \quad \sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu e_{rr},$$

(1.6)
$$\sigma_{x\theta} = 2\mu e_{x\theta}, \qquad \sigma_{xr} = 2\mu e_{xr}, \qquad \sigma_{\theta r} = 2\mu e_{\theta r},$$

gdzie

(1.7)
$$\Delta = (e_{xx} + e_{\theta\theta} + e_{rr}) = \nabla^2\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}.$$

Równanie (1.2) jest spełnione ,jeśli potencjały χ i ψ spełniają równania falowe

(1.8)
$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0,$$

(1.9)
$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Warunki brzegowe łączące pole prędkości płynącej cieczy wewnętrznej i zewnętrznej i drgającej sprężyście rury są następujące:

warunek kinematyczny,wymagający by były równe składowe promieniowe prędkości cząstki płynu i cząstki rury na powierzchniach $r=a$ i $r=b$

(1.10)
$$\left.\frac{\partial\varphi_w}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial u_r}{\partial t}\right|_{r=a} + U_w \cdot \left.\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|_{r=a},$$

(1.11)
$$\left.\frac{\partial\varphi_z}{\partial r}\right|_{r=b} = \left.\frac{\partial u_r}{\partial t}\right|_{r=b} + U_z \cdot \left.\frac{\partial u_r}{\partial x}\right|_{r=b},$$

oraz warunek dynamiczny zapewniający ciągłość naprężeń na granicy ośrodków

$$(1.12)\qquad \sigma_{rx}\Big|_{r=a} = \sigma_{r\theta}\Big|_{r=a} = 0,$$

$$(1.13)\qquad \sigma_{rr}\Big|_{r=a} = \rho_w \cdot \left(\frac{\partial \varphi_w}{\partial t} + U_w \cdot \frac{\partial \varphi_w}{\partial x}\right)\Big|_{r=a},$$

$$(1.14)\qquad \sigma_{rx}\Big|_{r=b} = \sigma_{r\theta}\Big|_{r=b} = 0,$$

$$(1.15)\qquad \sigma_{rr}\Big|_{r=b} = \rho_z \cdot \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial t} + U_z \cdot \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}\right)\Big|_{r=b}.$$

2. Rozwiązanie falowe

Dalsze rozważania ograniczymy do rury nieskończenie długiej. Rozwiązania równań (1.1), (1.8) i (1.9) przewidujemy w postaci

$$(2.1)\qquad \begin{aligned}
\varphi_w(x,\theta,r,t) &= f(r)\cos n\theta \sin(\omega t - kx),\\
\varphi_z(x,\theta,r,t) &= p(r)\cos n\theta \sin(\omega t - kx),\\
\chi(x,\theta,r,t) &= g(r)\cos n\theta \cos(\omega t - kx),\\
\psi_x(x,\theta,r,t) &= h_x(r)\sin n\theta \cos(\omega t - kx),\\
\psi_\theta(x,\theta,r,t) &= h_\theta(r)\cos n\theta \sin(\omega t - kx),\\
\psi_r(x,\theta,r,t) &= h_r(r)\sin n\theta \sin(\omega t - kx).
\end{aligned}$$

Przez podstawienie (2.1) do równań (1.1), (1.8) i (1.9) otrzymujemy zwyczajne równania różniczkowe na funkcje f, g, $h_1 \equiv h_x$, $h_\theta - h_r \equiv h_2$ oraz $h_\theta + h_r \equiv 2h_3$

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}
&B_{n,\alpha r}[f] = 0, \qquad B_{n,\beta r}[g] = 0, \qquad B_{n,\gamma r}[h_1] = 0,\\
&B_{n+1,\gamma r}[h_2] = 0, \qquad B_{n-1,\gamma r}[h_3] = 0, \qquad B_{n,\delta r}[p] = 0,
\end{aligned}$$

gdzie

(2.3)
$$B_{n,\rho}=\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\left(\frac{n^2}{\rho^2}-1\right),$$

$$\alpha^2=\frac{(\omega-kU_w)^2}{c_w^2}-k^2,\quad \beta^2=\frac{\omega^2}{c_1^2}-k^2,\quad \gamma^2=\frac{\omega^2}{c_2^2}-k^2,\quad \delta^2=\frac{(\omega-kU_z)^2}{c_z^2}-k^2.$$

Ogólne rozwiązanie (2.1) ma w tym przypadku postać

(2.5)
$$\begin{aligned}
f(r) &= A_1 Z_n(\alpha r)+A_2 W_n(\alpha r),\\
p(r) &= B_1 Z_n(\delta r)+B_2 W_n(\delta r),\\
g(r) &= C_1 Z_n(\beta r)+C_2 W_n(\beta r),\\
h_1(r) &= D_1 Z_n(\gamma r)+D_2 W_n(\gamma r),\\
h_2(r) &= E_1 Z_{n+1}(\gamma r)+E_2 W_{n+1}(\gamma r),\\
h_3(r) &= F_1 Z_{n-1}(\gamma r)+F_2 W_{n-1}(\gamma r),
\end{aligned}$$

gdzie Z_n oznacza I_n lub J_n ,a W_n oznacza K_n lub Y_n zgodnie z układem /w zależności czy: α , β , γ lub δ ,są urojone czy rzeczywiste/

(2.6)

$\lvert\omega-kU_w\rvert<kc_w$	$I_n(\alpha r)$
$kc_w<\lvert\omega-kU_w\rvert$	$J_n(\alpha r)$
$\omega<kc_2$	$I_n(\beta r)$, $K_n(\beta r)$, $I_n(\gamma r)$, $K_n(\gamma r)$,
$kc_2<\omega<kc_1$	$I_n(\beta r)$, $K_n(\beta r)$, $J_n(\gamma r)$, $Y_n(\gamma r)$,
$kc_1<\omega$	$J_n(\beta r)$, $Y_n(\beta r)$, $J_n(\gamma r)$, $Y_n(\gamma r)$
$\lvert\omega-kU_z\rvert<kc_z$	$K_n(\delta r)$
$kc_z<\lvert\omega-kU_z\rvert$	$Y_n(\delta r)$

Ponieważ $f(r)$ musi być ograniczone dla $r=0$,a $p(r)=0$ dla $r=\infty$ więc będzie: $A_2=B_1=0$ .Na podstawie $(1.3)_2$,każda z funkcji h_i /$i=1,2,3$/ może być przedstawiona w postaci kombinacji dwóch pozostałych,więc przyjmując $h_3=0$ mamy: $h_x=h_1$, $h_\theta=h_2$, $h_r=-h_2$. Pola przemieszczeń ,odkształceń i naprężeń mogą więc być przedstawione w następującej postaci

$$
\begin{aligned}
u_x&=u=\left(kg-h_2'-\frac{1}{r}h_2-\frac{n}{r}h_2\right)\cos n\theta \sin(\omega t-kx),\\
u_\theta&=v=\left(-\frac{ng}{r}+h_1'-kh_2\right)\sin n\theta\cos(\omega t-kx),\\
u_r&=w=\left(g'-\frac{n}{r}h_1-kh_2\right)\cos n\theta\cos(\omega t-kx),\\
e_{xr}&=\frac{1}{2}\left[2kg'-h_2''-\frac{1}{r}\left(h_2'-\frac{1}{r}h_2\right)-\frac{nk}{r}h_1-k^2h_2\right]\cos n\theta\sin(\omega t-kx),\\
e_{r\theta}&=\frac{1}{2}\left[-\frac{2n}{r}\left(g'-\frac{g}{r}\right)+h_1''-kh_2'-\frac{h_1'}{r}+\frac{n^2h_1}{r^2}+\frac{(n+1)}{r}kh_2\right]\sin n\theta\cos(\omega t-kx),\\
e_{rr}&=\left[g''-\frac{n}{r}\left(h_1'-\frac{h_1}{r}\right)-kh_2'\right]\cos n\theta\cos(\omega t-kx),\\
\sigma_{xr}&=2\mu e_{xr}=\mu\left[2kg'-h_2''-\frac{1}{r}\left(h_2'-\frac{1}{r}h_2\right)-\frac{nk}{r}h_1-k^2h_2\right]\cos n\theta\sin(\omega t-kx),\\
\sigma_{r\theta}&=2\mu e_{r\theta}=\mu\left[-\frac{2n}{r}\left(g'-\frac{g}{r}\right)+h_1''-kh_2'-\frac{h_1'}{r}+\frac{n^2h_1}{r^2}+\frac{(n+1)}{r}kh_2\right]\sin n\theta\cos(\omega t-kx),\\
\sigma_{rr}&=2\mu e_{rr}+\lambda\nabla^2\chi=\left\{\left[g''-\frac{n}{r}\left(h_1'-\frac{h_1}{r}\right)-kh_2'\right]2\mu-\lambda\left(\beta^2+k^2\right)g\right\}\cos n\theta\cos(\omega t-kx),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

gdzie primowanie oznacza różniczkowanie ze względu na r.

Wykorzystując warunki brzegowe (1.10-15) otrzymujemy jednorodny układ 8. równań na stałe A_1 , B_2, C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , E_1 , E_2 .Układ ten ma zawsze trywialne rozwiązanie $A_1=B_2=\ldots=E_2=0$, odpowiadające niezaburzonemu przepływowi cieczy i spoczynkowi rury.Przy pewnych warunkach możliwy jest jednak stan zaburzony odpowiadający przypadkowi ,gdy nie wszystkie stałe są równe zero.

Warunkiem istnienia rozwiązania niezerowego jest,aby wyznacz-

nik charakterystyczny tego układu był równy zero.
Z równań powstałych z wykorzystania warunków (1.10) i (1.11) wyznaczono A_1 i B_2 w zależności od pozostałych stałych, a następnie podstawiono w ten sposób otrzymane wyrażenia na A_1 i B_2 do pozostałych sześciu równań, dzięki czemu obniżono stopień wyznacznika do sześciu. W oparciu o wzory rekurencyjne dla funkcji Bessel'a, warunek istnienia rozwiązań niezerowych można ostatecznie zapisać jako

$$|C_{ij}| = 0, \qquad (i,j=1,2,\dots,6), \tag{2.8}$$

gdzie

$$C_{11} = \left\{2n(n-1) - a^2\left[(\gamma^2-k^2)+2\beta^2(\lambda_2-1)\right]\right\}Z_n(\beta a) + 2\lambda_2\beta a Z_{n+1}(\beta a) +$$
$$+\eta_w\xi_w^2 a^2(\alpha^2+k^2)\frac{nZ_n(\beta a)-\lambda_2\beta a Z_{n+1}(\beta a)}{nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)}Z_n(\alpha a)$$

$$C_{12} = 2\gamma k a^2 Z_n(\gamma a) - 2(n+1)ka Z_{n+1}(\gamma a) +$$
$$+\eta_w\xi_w^2 a^2(\alpha^2+k^2)\frac{ka Z_{n+1}(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)}Z_n(\alpha a),$$

(2.9)

$$C_{13} = 2n(n-1)Z_n(\gamma a) - 2n\lambda_3\gamma a Z_{n+1}(\gamma a) +$$
$$+\eta_w\xi_w^2 a^2(\alpha^2+k^2)\frac{nZ_n(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)}Z_n(\alpha a),$$

$$C_{14} = \left\{2n(n-1) - \alpha^2\left[(\gamma^2-k^2)+2\beta^2(\lambda_2-1)\right]\right\}W_n(\beta a) + 2\beta a W_{n+1}(\beta a) +$$
$$+\eta_w\xi_w^2 a^2(\alpha^2+k^2)\frac{nW_n(\beta a)-\beta a W_{n+1}(\beta a)}{nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)}Z_n(\alpha a),$$

$$C_{15} = 2\lambda_3\gamma k a^2 W_n(\gamma a) - 2ka(n+1)W_{n+1}(\gamma a) +$$
$$+\eta_w\xi_w^2 a^2(\alpha^2+k^2)\frac{ka W_{n+1}(\gamma a)}{nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)}Z_n(\alpha a),$$

$$C_{16}=2n(n-1)W_n(\gamma a)-2n\gamma a W_{n+1}(\gamma a)+$$

$$+\eta_w \xi_w^2 a^2(\alpha^2+k^2)\frac{n W_n(\gamma a)}{n Z_n(\alpha a)-\lambda_1 \alpha a Z_{n+1}(\alpha a)} Z_n(\alpha a),$$

$$C_{21}=-2n(n-1)Z_n(\beta a)+2n\lambda_2 \beta a Z_{n+1}(\beta a),$$

$$C_{22}=\gamma k a^2 Z_n(\gamma a)-2(n+1)ka Z_{n+1}(\gamma a),$$

$$C_{23}=-\left[2n(n+1)-(2\lambda_3-1)\gamma^2 a^2\right]Z_n(\gamma a)-2\lambda_3 \gamma a Z_{n+1}(\gamma a),$$

$$C_{24}=-2n(n-1)W_n(\beta a)+2n\beta a W_{n+1}(\beta a),$$

$$C_{25}=\lambda_3 \gamma k a^2 W_n(\gamma a)-2(n+1)ka W_{n+1}(\gamma a), \tag{2.9}$$

$$C_{26}=-\left[2n(n-1)-(2\lambda_3-1)\gamma^2 a^2\right]W_n(\gamma a)-2\gamma a W_{n+1}(\gamma a),$$

$$C_{31}=2nka Z_n(\beta a)-2\lambda_2 \beta k a^2 Z_{n+1}(\beta a),$$

$$C_{32}=-(\gamma^2-k^2)a^2 Z_{n+1}(\gamma a)+n\gamma a Z_n(\gamma a),$$

$$C_{33}=nka Z_n(\gamma a),$$

$$C_{34}=2nka W_n(\beta a)-2\beta k a^2 W_{n+1}(\beta a),$$

$$C_{35}=\lambda_3 n\gamma a W_n(\gamma a)-(\gamma^2-k^2)a^2 W_{n+1}(\gamma a),$$

$$C_{36}=nka W_n(\gamma a).$$

Pozostałe współczynniki /od C_{41} do C_{66}/ będą miały analogiczną postać / C_{41} jak C_{11} , C_{42} jak C_{12} itd/, z tym tylko, że należy zastąpić :

$$\eta_w \longrightarrow \eta_z, \qquad \xi_w \longrightarrow \xi_z, \qquad a \longrightarrow b, \qquad (\alpha^2+k^2)\longrightarrow(\delta^2+k^2),$$

a mianownik $\left[nZ_n(\alpha a)-\lambda_1\alpha a Z_{n+1}(\alpha a)\right]$, zastąpić mianownikiem

$$\left[nW_n(\delta b)-\delta b W_{n+1}(\delta b)\right].$$

Wielkości λ_i /i=1,2,3/ przyjmują wartości +1 lub -1 /w zależności czy α, β, γ są rzeczywiste czy urojone/, zgodnie z tabelą

$$
\begin{array}{llll}
 & \alpha \text{ urojone} \longrightarrow & I_n(\alpha r) & \lambda_1=-1, \\
 & \alpha \text{ rzeczyw.} \longrightarrow & J_n(\alpha r) & \lambda_1=1, \\
 & \beta \text{ urojone} \longrightarrow & I_n(\beta r), K_n(\beta r) & \lambda_2=-1, \\
(2.10) & \beta \text{ rzeczyw.} \longrightarrow & J_n(\beta r), Y_n(\beta r) & \lambda_2=1, \\
 & \gamma \text{ urojone} \longrightarrow & I_n(\gamma r), K_n(\gamma r) & \lambda_3=-1, \\
 & \gamma \text{ rzeczyw.} \longrightarrow & J_n(\gamma r), Y_n(\gamma r) & \lambda_3=1.
\end{array}
$$

Uwaga.

W pracy A.Bobeszki [2] popełniono pomyłkę rachunkową przy obliczaniu współczynników C_{ij}, pomyłkę tę powtórzono prawdopodobnie za pracą D.C.Gazisa [5]. W C_{11}, C_{41}, C_{14} i C_{44} zamiast (γ^2-1) winno być : $\left[(\gamma^2-1)+2\beta^2(\lambda_2-1)\right]$, a w C_{23}, C_{26}, C_{53} i C_{56} wyrażenie $\gamma^2k^2a^2$ winno być pomnożone przez $(2\lambda_3-1)$.

3. Rozwiązania szczególne

Równanie (2.8) opisuje związki dyspersyjne dla grubościennej rury opływanej wewnątrz i na zewnątrz przez płyny. W szczególnych przypadkach ten bardzo skomplikowany warunek znacznie się upraszcza .

W przypadku fali stojącej (k =0) wyznacznik redukuje się do iloczynu dwóch podwyznaczników

$$D_1 \cdot D_2 = 0, \tag{3.1}$$

gdzie

$$(3.2)\qquad D_1=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{14} & C_{16}\\ C_{21} & C_{23} & C_{24} & C_{26}\\ C_{41} & C_{43} & C_{44} & C_{46}\\ C_{51} & C_{53} & C_{54} & C_{56}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} C_{32} & C_{35}\\ C_{62} & C_{65}\end{vmatrix}.$$

Rozwiązania niezerowe istnieją ,jeśli przynajmniej jeden z podwyznaczników jest równy zero.Przy D_1=o stan odkształcenia jest płaski,przy D_2 =0 zachodzą podłużne drgania ścinające /oba rodzaje drgań są niezależne od x/.

W przypadku fal osiowo-symetrycznych /n=0/ warunek istnienia rozwiązań niezerowych /2.8/ redukuje się do

$$(3.3)\qquad D_3\cdot D_4=0,$$

gdzie

$$(3.4)\qquad D_3=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15}\\ C_{31} & C_{32} & C_{34} & C_{35}\\ C_{41} & C_{42} & C_{44} & C_{45}\\ C_{61} & C_{62} & C_{64} & C_{65}\end{vmatrix},\qquad D_4=\begin{vmatrix} C_{23} & C_{26}\\ C_{53} & C_{56}\end{vmatrix}.$$

Przy D_3=0 powstają fale podłużne osiowo-symetryczne /tylko przemieszczenia u_r i u_x/.Jeśli D_4=0 ,to przypadek fal skrętnych /przemieszczenia u_θ /.

Literatura

[1] A.Bobeszko,Sprężyste fale giętne w nieskończonej rurze przy przepływie płynu nieściśliwego.Rozpr.Inż.1,11 /1963/.

[2] A.Bobeszko,Flexural elastic waves in infinite tube containg flowing a compressible fluid,according to the exact theory of elasticity.Arch.Mech.Stos.,1,16 /1964/.

[3] В.В.Болотин,Колебания и устойчивость упругоц цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости.Инж.Сб.24. 1956.

[4] В.В.Болотин,Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.Москва 1961.

[5] D.C.Gazis,Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circula cylinders,J.A.S.A., 5,31 /1959/.

[6] I.Mirsky,G.Herrmann,Axially symmetric motions of thick cylindrical shells,J.Appl.Mech.,1,25 /1958/.

[7] J.E.Greenspon,Vibrations of thick and thin cylindrical shells surrounded by water,J.A.S.A.,10,33 /1961/.

Prace Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN
wydane w 1968 r.

1. T. W i e r z b i c k i, Viscoplastic flow of rotationally symmetric shells with particular application to dynamic loadings

2. Z. K o z ł o w s k i, Ultradźwiękowe pomiary w ośrodkach gazowych na częstotliwościach rzędu 1 MHz

3. J. K a s p e r k i e w i c z, On the possibility of experimental investigation of shrinkage in concrete

4. A. S z a d k o w s k i, O ruchu częściowo bezinercyjnego zachowawczego układu mechanicznego

5. A. T a r n o g r o d z k i, E. Ł u c z y w e k, Badania doświadczalne opływu naddźwiękowego ciał o dwu prostopadłych płaszczyznach symetrii

6. W.J. P r o s n a k, M.E. K l o n o w s k a, O dwu odmianach metody Pohlhausena i ich zastosowaniu do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia

7. A. M u s z y ń s k a, O ograniczoności rozwiązań pewnego układu równań różniczkowych zwyczajnych

8. S. Z a h o r s k i, Kinematics and statics of small superposed deformations

9. Z. W e s o ł o w s k i, Deformacja klina i deformacja stożka w nieliniowej teorii sprężystości

10. P. P e r z y n a, W. W o j n o, Thermodynamics of a rate sensitive plastic material

11. L. F i l i p c z y ń s k i, The near field distribution on the axis of a vibrating piston

12. W.K. N o w a c k i, Zastosowanie biliniowej teorii plastyczności do zagadnień propagacji fal

13. Z.F. B a c z y ń s k i, Podstawowe równania teorii ośrodków wieloskładnikowych mikroniejednorodnych

14. Z.B y c h a w s k i, K. P i s z c z e k, On the operational perturbation method of solution of the Volterra's nonlinear integral equations

15. J. K a c p r o w s k i, W. M i k i e l, A regenerative electroacoustic method of testing abrasive wheels by resonance frequency measurement

16. J. K r z y ż o w s k a, Porównanie pewnych metod przybliżonych w długofalowych problemach dyfrakcji

17. J. K r z y ż o w s k a, Dyfrakcja między dwiema równoległymi płaszczyznami dla fal bardzo długich

18. E.M. L e ś k i e w i c z, Z.A. P i e t r z y k, Pomiar gęstości i temperatur elektronów par rtęci w dyszy przetwornika kalorymetrycznego

19. Z.A. P i e t r z y k, Pomiar średniego współczynnika pochłaniania światła przez plazmę

20. E. K a m i ń s k i, K.A. K u n e r t, Rozwinięcie teorii blokowej mieszanin dwufazowych

21. Cz. B r o n i a r e k, B. R a d z i s z e w s k i, On the stability of spring pendulum vibration with the movable suspension point

22. B. R a d z i s z e w s k i, S. Z i e m b a, O pewnych szczególnych przypadkach uogólnionych potencjałów Lagrange'a.