Włodzimierz Laprus

PROPAGACJA SŁABYCH NIECIĄGŁOŚCI W OŚRODKU DYSSYPATYWNYM

27/1968

WARSZAWA

Prace Zakładu Teorii Łączności

Praca Nr 61

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Teorii Łączności I P P T P A N

Nakład 250 egz. Ark. wyd. 0,4. Ark. druk.0,9.
Oddano do drukarni w październiku 1968 r.
Wydrukowano w grudniu 1968 r. Nr zam. 900/0/68.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

PROPAGACJA SŁABYCH NIECIĄGŁOŚCI W OŚRODKU DYSSYPATYWNYM

Włodzimierz Łaprus

Mechanizm formowania się fali uderzeniowej oparty jest w zasadzie na dwóch przeciwstawnych procesach. Jeden z nich, to proces nieliniowy, który powoduje powstawanie nieciągłości w rozwiązaniach równań nieliniowych, bez względu na to, jak regularne były dane początkowe. Drugi proces, wynikły z efektów dyssypatywnych opisywanych przez odpowiednie wyrazy dołączone do równań, objawia się działaniem akurat przeciwnym: "wygładza" nieciągłości lub nie dopuszcza do ich powstawania. O ile więc efekty nieliniowe zwiększają nachylenie czoła fali, to efekty dyssypatywne mają tendencję do zmniejszania tego nachylenia. W określonej chwili czasu następuje równowaga między opisywanymi dwoma procesami i formowanie się frontu fali uderzeniowej jest zakończone.

Takie rozumienie zjawiska jest zapewne pierwszym przybliżeniem. Niemniej, klasyczne prace z dziedziny hydrodynamiki /patrz [1]/ pokazują, że jest to przybliżenie użyteczne.

Naszym celem jest zbadanie zagadnienia propagacji słabej nieciągłości /tzn. nieciągłości pochodnych/ wzdłuż wybranej charakterystyki układu równań, z uwzględnieniem dyssypacji. Zakładamy przy tym, dla uproszczenia, że nieciągłość propaguje się w stan stały. W takim przypadku charakterystyka jest linią prostą i wartości funkcji na niej są znane.

Rozważmy hiperboliczny układ równan quasiliniowych o postaci

/1/ $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ik}(u)\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0 ,$$

gdzie i=1,...n ; $A_{ik}(u)$ jest macierzą o n rzeczywistych i różnych wartościach własnych $\lambda(u)$, zaś przez $r_i(u)$ będziemy oznaczać odpowiedni wektor własny tej macierzy: $A_{ik}(u)\, r_k(u) = \lambda(u)\, r_i(u)$.

Opierając się na metodzie użytej przez Whithama [2,3], zastosujemy następujące rozwinięcie asymptotyczne /por. [4]/ funkcji u_i :

$$/2/ \qquad u_i(x,t) \sim u_i^{\circ} + \sum_{\nu=1}^{\infty} S_\nu(\phi)\, g_i^\nu(x,t) \qquad \text{przy} \quad \phi \to 0 .$$

Funkcje g_i^ν są dowolnie regularne, tzn. mają ciągłe pochodne dowolnego rzędu, zaś funkcje S_ν od zmiennej $\phi = x - \lambda t$, gdzie $\lambda(u^\circ)$ jest nachyleniem wybranej charakterystyki, zadajemy jako

$$S_\nu(\phi) = \left[\tfrac{1}{2}(\phi - |\phi|)\right]^\nu \frac{1}{\nu!} \qquad \text{dla} \quad \nu = 1, \ldots$$

oraz

$$S_0(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \phi < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad \phi > 0 . \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące zależności:

1° $\quad S_1' = S_0 \quad$ i ogólnie $\quad S_\nu' = S_{\nu-1}$,

2° $\quad S_0 S_0 = S_0 , \quad S_\nu S_0 = S_\nu \quad$ i $\quad S_\mu S_\nu = S_{\mu+\nu} \dfrac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!}$.

Wielkość primowana oznacza pochodną po argumencie, czyli po ϕ . Funkcja S_1 ma nieciągłą pierwszą pochodną, S_2 drugą pochodną /pierwsza jest ciągła/, S_3 trzecią pochodną /pierwsza i druga są ciągłe/ itd. Ogólnie, S_ν ma $\nu-1$ ciągłych pochodnych i ν -tą pochodną nieciągłą. A więc im większy wskaźnik ν , tym większy stopień regularności funkcji S_ν .

Pochodna normalna $u_{\phi i}$ doznaje skoku na charakterystyce $x - \lambda t = 0$, a pochodna styczna $u_{s i}$ / s - parametr wzdłuż charakterystyki/ jest ciągła. Oznaczając nawiasem okrągłym skok danej wielkości na charakterystyce mamy

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{\partial v_i}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = (v_{\phi i}).$$

Z drugiej strony, przy zastosowaniu rozwinięcia /2/

$$/3/\qquad \frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_\nu S_{\nu-1}\phi_x g_i^\nu + \sum_\nu S_\nu \frac{\partial g_i^\nu}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = g_i^1.$$

Stąd, przez porównanie,

$$/3'/\qquad (v_{\phi i}) = g_i^1.$$

Mając na uwadze tę zależność ograniczymy się do wyliczenia g_i^1. W tym celu podstawiamy do równań /1/ rozwinięcia asymptotyczne /2/ oraz

$$/4/\qquad A_{ik}(v) \sim A_{ik}(v^\circ) + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{ik}^l(v^\circ) S_\nu g_l^\nu \quad \text{przy } \phi \to 0,$$

gdzie $A_{ik}^l(v^\circ) \overset{\text{def}}{=} \partial A_{ik}/\partial v_l \Big|_{v=v^\circ}$. Otrzymujemy kolejno

$$\sum_\nu S'_\nu \phi_t g_i^\nu + \sum_\nu S_\nu \frac{\partial g_i^\nu}{\partial t} + \Big[A_{ik} + \sum_\nu A_{ik}^l S_\nu g_l^\nu\Big]\Big[\sum_\mu S'_\mu \phi_x g_k^\mu + \sum_\mu S_\mu \frac{\partial g_k^\mu}{\partial x}\Big] = 0,$$

$$\sum_\nu S_{\nu-1}\phi_t g_i^\nu + \sum_\nu S_\nu \frac{\partial g_i^\nu}{\partial t} + \sum_\mu A_{ik} S_{\mu-1}\phi_x g_k^\mu + \sum_\mu A_{ik} S_\mu \frac{\partial g_k^\mu}{\partial x} +$$
$$+ \sum_\mu \sum_\nu A_{ik}^l S_{\mu+\nu-1}\phi_x g_l^\nu g_k^\mu \frac{(\mu+\nu-1)!}{(\mu-1)!\,\nu!} + \sum_\mu \sum_\nu A_{ik}^l S_{\mu+\nu} g_l^\nu \frac{\partial g_k^\mu}{\partial x}\frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} = 0$$

Przyrównując współczynnik przy S_ν do zera dostajemy

$$\phi_t g_i^1 + A_{ik}\phi_x g_k^1 = 0 \qquad \text{przy } S_0,$$

$$\phi_t g_i^2 + \frac{\partial g_i^1}{\partial t} + A_{ik}\phi_x g_k^2 + A_{ik}\frac{\partial g_k^1}{\partial x} + A_{ik}^l g_l^1 g_k^1 \phi_x = 0 \qquad \text{przy } \dot{S}_1,$$

. . . .

i dalej

$$\tilde{A}_{ik} g_k^1 = 0,$$
$$\tilde{A}_{ik} g_k^2 + \frac{\partial g_i^1}{\partial t} + A_{ik}\frac{\partial g_k^1}{\partial x} + A_{ik}^l g_l^1 g_k^1 \phi_x = 0,$$
/5/ . . . .

gdzie $\tilde{A}_{ik} = I\phi_t + A_{ik}\phi_x$ jest macierzą charakterystyczną.

Z pierwszego z równań /5/ wynika, że $g_k^1 = \sigma r_k$. Mnożąc zaś drugie równanie z lewej strony przez lewy wektor własny l_i macierzy A_{ik} i zakładając unormowanie: $l_i r_i = 1$, mamy

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\sigma}{\partial x} + l_i A_{ik}^l r_l r_k \sigma^2 = 0,$$

czyli

/6/ $$\dot{\sigma} + \varkappa\sigma^2 = 0.$$

Jest to równanie transportu nieciągłości. Kropka oznacza różniczkowanie wzdłuż charakterystyki względem parametru s.

Wielkość $\varkappa \stackrel{\text{def}}{=} l_i A_{ik}^l r_l r_k$ określa typ charakterystyki, po której przemieszcza się nieciągłość. Charakterystyka jest mianowicie typu wyjątkowego, gdy $\varkappa = 0$. Aby się o tym przekonać, dokonujemy rozwinięcia asymptotycznego $r_k(v)$ i $\lambda(v)$ analogicznego do /4/,

$$r_k(v) \sim r_k(v^0) + \sum_{\mu=1}^{\infty} r_k^m(v^0) S_\mu g_m^\mu \qquad \text{przy } \phi \to 0,$$

$$\lambda(v) \sim \lambda(v^\circ) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{m}(v^\circ) S_\nu g_m^\nu \qquad \text{przy } \varphi \to 0,$$

i wstawiamy te rozwinięcia do równania charakterystycznego

$$A_{ik}(v) r_k(v) = \lambda(v) r_i(v) .$$

Mamy kolejno

$$[A_{ik}(v^\circ) + \sum_\nu A^l_{ik}(v^\circ) S_\nu g_l^\nu][r_k(v^\circ) + \sum_\mu r_k^m(v^\circ) S_\mu g_m^\mu] =$$
$$= [\lambda(v^\circ) + \sum_\nu \lambda^j(v^\circ) S_\nu g_j^\nu][r_i(v^\circ) + \sum_\mu r_i^m(v^\circ) S_\mu g_m^\mu],$$

$$\sum_\mu A_{ik} r_k^m S_\mu g_m^\mu + \sum_\nu A^l_{ik} r_k S_\nu g_l^\nu + \sum_\mu \sum_\nu A^l_{ik} r_k^m S_{\mu+\nu} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} g_l^\nu g_m^\mu =$$
$$= \sum_\mu \lambda r_i^m S_\mu g_m^\mu + \sum_\nu \lambda^j r_i S_\nu g_j^\nu + \sum_\mu \sum_\nu \lambda^j r_i^m S_{\mu+\nu} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} g_j^\nu g_m^\mu ,$$

a po przyrównaniu wyrazu przy S_1 do zera

$$A_{ik} r_k^m g_m^1 + A^l_{ik} r_k g_l^1 = \lambda r_i^m g_m^1 + \lambda^j r_i g_j^1 .$$

Mnożąc to równanie z lewej strony przez l_i i pamiętając, że $g_m^1 = \sigma r_m$, otrzymujemy ostatecznie

/7/ $$\varkappa = \lambda^j r_j$$

Warunek $\lambda^j r_j \neq 0$ jest warunkiem istotnej nieliniowości Laxa [5], zaś charakterystyka, dla której $\lambda^j r_j = 0$, nazywa się wyjątkowa.

Rozwiązanie równania /6/ ma postać

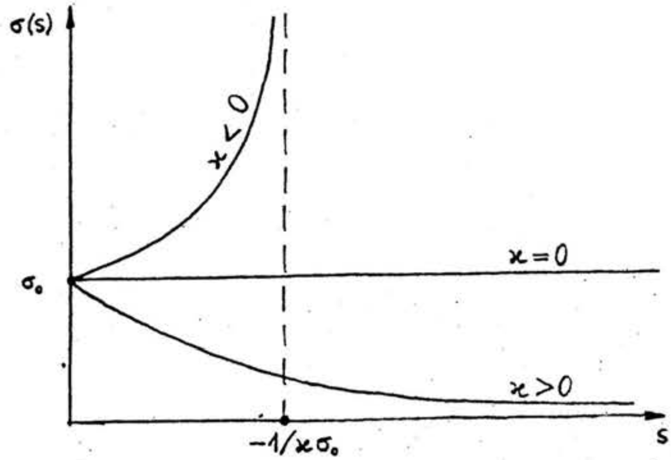
$$\sigma(s) = \frac{1}{\varkappa s + \frac{1}{\sigma_0}} ,$$

gdzie $\sigma_0 = \sigma(0)$. Dla ustalenia uwagi zakładamy, że $\sigma_0 > 0$ i badamy rozwiązanie dla $s \geqslant 0$:

1. $\varkappa < 0$, $\sigma \to \infty$ dla $s \to -\frac{1}{\varkappa\sigma_0}$;

2. $\varkappa = 0$, $\sigma \equiv \sigma_0$,

3. $\varkappa > 0$, $\sigma \to 0$ dla $s \to \infty$



Rys. 1. Zachowanie się funkcji σ(s) przy braku dyssypacji.

Widać, że istnieje pewna analogia między naszym rozwiązaniem a rozwiązaniem układu /1/ w postaci fali prostej. Fala prosta wyjątkowa / $\varkappa = 0$ / przemieszcza się bez zniekształcenia, co w naszym przypadku odpowiada propagacji nieciągłości /w pierwszym przybliżeniu/ bez zniekształcenia: $\sigma(s) \equiv \sigma_0$. Podobnie fali rozrzedzenia / $\varkappa > 0$ / odpowiada nieciągłość zanikająca, zaś fali prostej, która staje się po określonym czasie niejednoznaczna - nieciągłość o rosnącym do nieskończoności "natężeniu" / $\sigma \to \infty$ /. Ten ostatni przypadek zawiera zresztą wystarczającą ilość informacji, aby się pokusić o pośrednie sprawdzenie naszych wyników. Można mianowicie porównać czas, po upływie którego nieciągłość w pierwszych pochodnych staje się nieciągłością samych funkcji v_i, z analogicznym czasem dla fali prostej, której front narasta. Otóż fala prosta, tak jak nieciągłość rozpatrywana przez nas, propaguje się w stan stały i graniczy z tym stanem wzdłuż wybranej charakterystyki /która, z tego powodu, jest linią prostą/. Będziemy zatem porównywać odpowiednie wielkości na tej charakterystyce.

Jak wiadomo, fala prosta jest rozwiązaniem układu /1/ zależnym od jednej zmiennej: $v = v(\xi)$, gdzie $\xi = \xi(x,t)$. Wynika stąd, że powinny być spełnione równania

$$\frac{dv_i}{d\xi} = r_i(v) \qquad \text{oraz} \qquad \xi_t + \lambda(v)\xi_x = 0 .$$

Rozwiązanie drugiego równania, $\xi = f(x - \lambda t)$, da się rozwikłać ze względu na ξ, jeżeli tylko $tf'\lambda^j \frac{dv_j}{d\xi} = tf'\lambda^j r_j = tf'\varkappa$ jest różne od -1. Przy $tf'\varkappa = -1$ mamy do czynienia z wyżej wspomnianą niejednoznacznością rozwiązania $v_i(\xi)$, którą należy interpretować jako nieciągłość. Rozwiązanie staje się więc nieciągłe, gdy

/8/ $$t \to -1/\varkappa f'$$

gdzie f zadaje wartości początkowe funkcji $\xi(x,t) : \xi(x,0) = f(x)$, zaś f' jest pochodną po argumencie.

Z drugiej strony, rozwiązanie układu /1/ staje się nieciągłe, gdy

/9/ $$s \to -1/\varkappa\sigma_0$$

Wtedy bowiem $\sigma \to \infty$, a zatem, jak wynika z /3/, pochodna normalna również dąży do nieskończoności /zauważmy, że $(v_{\phi i}) = v_{\phi i}|_{\phi=-0} - v_{\phi i}|_{\phi=+0} = v_{\phi i}|_{\phi=-0} - 0 = v_{\phi i}|_{\phi=-0}$ /.

Dla identyfikacji /8/ z /9/ należy w pierwszym rzędzie ustalić związek między s i t. Parametr s został wprowadzony w równaniu /6/. Przez porównanie tego równania z poprzednim widać, że

/10/ $$s = \frac{\lambda x + t}{1 + \lambda^2}$$

Przypominamy dla porządku, że wprowadziliśmy uprzednio parametr $\phi = x - \lambda t$ "w poprzek" charakterystyki. W sumie, dokonaliśmy zamiany zmiennych $x \to \phi$, $t \to s$. Na charakterystyce $\phi = 0$ i wtedy $s = t$, jak wynika z /10/.

Wystarczy teraz tylko pokazać, że $\sigma_0 = f'$ dla $\phi = 0$ i $t = 0$. Istotnie

$$\sigma r_i = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial x}\bigg|_{\phi=-0} = \frac{dv_i}{d\xi}\xi_x\bigg|_{\phi=-0} = r_i\xi_x\bigg|_{\phi=-0},$$

a stąd $\sigma = \xi_x\big|_{\phi=-0}$. Ponieważ zaś

$$\xi_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x - \lambda t) = f'(1 - t\lambda_x) = f' - f't\frac{\partial\lambda}{\partial v_i}\frac{dv_i}{d\xi}\xi_x = f' - f't\alpha\xi_x,$$

to $\xi_x = f'$ dla $t = 0$, czyli $\sigma_0 = f'$.

Dotąd, dla prostoty, nie braliśmy pod uwagę efektów dyssypatywnych, chociaż dopiero ich uwzględnienie pozwala wniknąć głębiej w istotę mechanizmu tworzenia się fali uderzeniowej. Zrobimy to teraz, dołączając do równań /1/ wyrazy dyssypatywne:

/11/ $$\frac{\partial v_i}{\partial t} + A_{ik}(v)\frac{\partial v_k}{\partial x} = D_i(v);$$

przy czym zakładamy, że istnieje zbiór $\mathcal{M}$ wektorów stałych, taki że $D_i(v^0) = 0$ dla $v_i^0 \in \mathcal{M}$.

Rozwinięcie asymptotyczne funkcji wektorowej $D_i(v)$ ma postać

/12/ $$D_i(v) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} D_i^{\kappa}(v^0) S_\nu g_k^\nu \qquad \text{przy } \phi \to 0,$$

gdzie $D_i^k(v^0) \overset{def}{=} \partial D_i/\partial v_k \Big|_{v=v^0}$. Wstawiamy /12/ do równania /11/ i stwierdzamy, że w drugim równaniu z /5/ pojawia się dodatkowy wyraz, $D_i^k(v^0) g_k^1$, który pochodzi ze współczynnika przy S_1 /współczynnik przy S_0 nie zawiera żadnego przyczynka/. W konsekwencji, równanie /6/ przybiera postać

/13/
$$\dot{\sigma} + \varkappa\sigma^2 = \theta\sigma,$$

gdzie $\theta \overset{def}{=} l_i D_i^k \gamma_k$. Znak θ można określić zważywszy, że w nieobecności procesów nieliniowych $|\sigma|$ nie powinno wzrastać. Dla $\varkappa = 0$ równanie /13/ przechodzi w

$$\dot{\sigma} = \theta\sigma,$$

z rozwiązaniem $\sigma = \sigma_0 \exp \theta s$. Stąd $\theta \leq 0$, przy założeniu, że $s \geq 0$.

Zbadamy zachowanie się rozwiązania równania /13/,

$$\sigma(s) = \frac{\theta/\varkappa}{1 + \frac{\theta/\varkappa - \sigma_0}{\sigma_0} e^{-\theta s}},$$

dla $s \geq 0$, ustalając, że $\sigma_0 > 0$. Mamy następujące przypadki:

A. $\varkappa < 0$

1. $0 < \sigma_0 < \theta/\varkappa$

   $\sigma \to 0$ przy $s \to \infty$

2. $\sigma_0 = \theta/\varkappa$

   $\sigma \equiv \sigma_0$

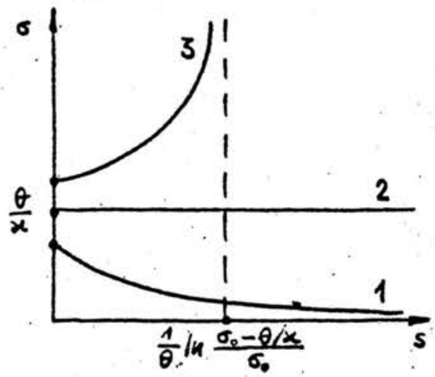
3. $\theta/\varkappa < \sigma_0$

   $\sigma \to \infty$ przy $s \to \frac{1}{\theta} \ln \frac{\sigma_0 - \theta/\varkappa}{\sigma_0}$

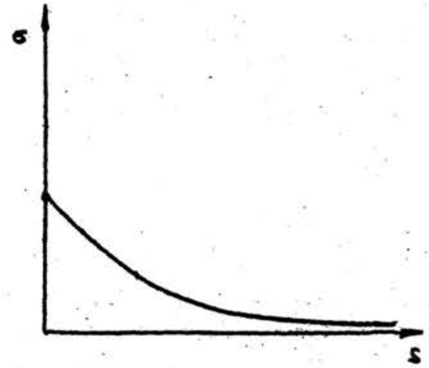
B. $\varkappa \geq 0$

$\sigma \to 0$ przy $s \to \infty$.

Tym razem zachowanie funkcji $\sigma(s)$ zależy głównie od zadanej wartości początkowej σ_0. Przy dostatecznie małym σ_0 biorą górę efekty dyssypatywne /nieciągłość zanika/, a przy dostatecznie dużym σ_0 - efekty nieliniowe /nieciągłość narasta/.



Rys. 2A. Przypadek $\varkappa < 0$.



Rys. 2B. Przypadek $\varkappa > 0$.

Widać, że między tymi dwoma przypadkami istnieje ostre rozgraniczenie: równowaga, zresztą w pewnym sensie nietrwała, nastaje tylko dla jednej wartości, $\sigma_0 = \theta/\varkappa$, i to od samego początku, tzn. od chwili $s = 0$. Tymczasem, należało by się raczej spodziewać, że proces formowania fali uderzeniowej zajmie określony odcinek czasu i że po tym czasie fala będzie stabilna. Ta kontrowersja ma prawdopodobnie swoje źródło w braku wyrazów wyższego rzędu w rozpatrywanym przybliżeniu.

LITERATURA

[1] M.J.Lighthill, w "Surveys in Mechanics", edited by G.K. Batchelor and R.M.Davis, Cambridge Univ. Press 1956.

[2] G.B.Whitham, On the propagation of weak shock waves, J. Fluid Mech. 2, 1956, pp. 290-318.

[3] G.B.Whitham, Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics, Comm. Pure Appl. Math. 12, 1959, pp. 113-158.

[4] R.Courant and D.Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. 2: Partial Differential Equations, Interscience Publishers 1962. Chap. 6, § 4.

[5] P.D.Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm. Pure Appl. Math. 10, 1957, pp. 537-566.