

Barbara Gambin

WPŁYW MIKROSTRUKTURY NA WŁASNOŚCI  
KOMPOZYTÓW SPRĘŻYSTYCH,  
PIEZOELEKTRYCZNYCH I TERMOSPĘŻYSTYCH



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
WARSZAWA 2006

Redaktor Naczelny:  
doc. dr hab. Zbigniew Kotulski

Recenzent:  
dr hab. Genadij Miszuris, prof. Pol. Rzeszowskiej

Praca wpłynęła do Redakcji 6 maja 2006 r.



57355

**Praca habilitacyjna**

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład: 100 egz. Ark. druk.: 12

Oddano do druku w grudniu 2006 roku

---

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

# Spis treści

<b>1. Cel i zakres pracy</b>	<b>3</b>
<b>2. Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
2.1. Mikrostruktura w kompozytach . . . . .	5
2.2. Metody homogenizacji . . . . .	6
2.3. Metoda asymptotyczna na przykładzie kompozytów sprężystych	8
2.3.1. Procedura rozdzielania zagadnienia mikroskopowego od makroskopowego . . . . .	11
2.3.2. Nielocalne makroskopowe związki konstytutywne naprężenie-odkształcenie . . . . .	14
<b>3. Efektywne własności kompozytów piezoelektrycznych</b>	<b>17</b>
3.1. Homogenizacja fizycznie nieliniowych kompozytów piezoelektrycznych . . . . .	18
3.1.1. $\Gamma$ -zbieżność . . . . .	20
3.1.2. Główne twierdzenie o homogenizacji nieliniowych periodycznych kompozytów piezoelektrycznych . . . . .	22
3.2. Homogenizacja liniowych kompozytów piezoelektrycznych . . . . .	37
3.3. Uwagi o niejednorodnej homogenizacji . . . . .	38
3.4. Ograniczenia na stałe efektywne dla liniowej piezoelektryczności	39
3.4.1. Ograniczenia typu Voigt'a-Reuss'a . . . . .	40
3.4.2. Ilustracja graficzna ograniczeń . . . . .	42
3.5. Zagadnienie warstwy brzegowej w kompozycie piezoelektrycznym	45
3.5.1. Aproksymacja mikronaprężeń i mikroindukcji elektrycznej wewnątrz ciała . . . . .	46
3.5.2. Równania dla warstwy brzegowej . . . . .	49
<b>4. Formuły analityczne dla laminatów piezoelektrycznych</b>	<b>53</b>
4.1. Piezoelektryczne kompozyty warstwowe . . . . .	53
4.2. Laminowanie wielokrotne dwuskładnikowego kompozytu piezoelektrycznego . . . . .	57

<b>5. Zagadnienia projektowania kompozytów piezoelektrycznych</b>	<b>63</b>
5.1. H-zbieżność w piezoelektryczności . . . . .	63
5.1.1. Definicja H-zbieżności dla piezoelektryczności . . . . .	64
5.2. Minimalizacja podatności ośrodka piezoelektrycznego . . . . .	66
5.3. Powierzchnia wyężenia dla kompozytów piezoelektrycznych . .	69
5.3.1. Homogenizacja fluktuacji naprężeń i pola indukcji w $i$ -tej fazie . . . . .	73
5.3.2. Zhomogenizowana powierzchnia graniczna dla $i$ -tej fazy	74
5.3.3. Homogenizacja powierzchni granicznej w materiale gradientowym . . . . .	74
5.4. Projektowanie optymalne gradientowych materiałów piezoelektrycznych . . . . .	75
5.4.1. Przykład – zagadnienie jednowymiarowe . . . . .	80
<b>6. Kompozyty losowe – homogenizacja stochastyczna</b>	<b>89</b>
6.1. Wstęp do analizy pól losowych . . . . .	90
6.1.1. Opis ośrodków losowych . . . . .	90
6.1.2. Elementy analizy stochastycznej . . . . .	96
6.2. Losowy ośrodek termosprężysty . . . . .	100
6.2.1. Termosprężysty kompozyt stochastycznie periodyczny . .	106
6.2.2. Przypadek jednowymiarowy . . . . .	111
6.3. Materiał sprężysty osłabiony szczelinami . . . . .	114
6.3.1. Losowy rozkład szczelin . . . . .	115
6.3.2. Ciało sprężyste osłabione losowym rozkładem mikroszczelin . . . . .	118
6.3.3. Zhomogenizowany potencjał dualny . . . . .	121
<b>7. Przykłady wpływu mikrostruktury na własności efektywne</b>	<b>125</b>
7.1. Mikroszczeliny w strukturze warstwowej . . . . .	126
7.2. Ciągły model materiału gradientowego . . . . .	132
7.3. Modelowanie kości zbitej . . . . .	140
7.4. Przykład wpływu mikrostruktury na elektromechaniczny tensor sprężenia . . . . .	149
7.5. Przykład homogenizacji nieliniowego kompozytu piezoelektrycznego . . . . .	150

<b>Dodatek</b>	<b>157</b>
D.1. Liniowa piezoelektryczność . . . . .	157
D.2. Tensor sprzężenia elektromechanicznego . . . . .	162
D.3. Procedura wyznaczania piezoelektrycznych stałych efektywnych	164
<b>Podsumowanie</b>	<b>167</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>173</b>

## Rozdział 1

### Cel i zakres pracy

Celem pracy jest przedstawienie wyników badań własnych autorki dotyczących wyznaczania efektywnych własności materiałów kompozytowych: sprężystych, piezoelektrycznych i termosprężystych. Pojęcie materiału kompozytowego (złożonego) zdefiniowano zgodnie z matematyczną teorią homogenizacji. Dzięki tej teorii można określić w sposób jednoznaczny związek pomiędzy mikrostrukturą i makroskopowymi (efektywnymi, zastępczymi) własnościami materiału. Badania, oparte o różne metody teorii homogenizacji i przedstawione w rozprawie, dotyczą następujących klas materiałów.

**Kompozyty sprężyste.** Wyprowadzone zostaną nielocalne związki konstytutywne dla liniowego ośrodka sprężystego, w których nielokalność jawnie zależy od rozmiarów mikrostruktury. Pokazany będzie wpływ mikrostruktury na zmianę profilu fali przejścia przez warstwę z materiału typu FGM oraz opisane będzie zachowanie się makroskopowe ośrodka o periodycznie-stochastycznym rozkładzie szczelin.

**Kompozyty piezoelektryczne.** Dzięki wprowadzeniu nowych pojęć i udowodnieniu kilku ważnych twierdzeń, możliwe będzie wyznaczenie własności fizycznie nieliniowych kompozytów piezoelektrycznych, dokonanie analizy zagadnień projektowania optymalnego piezoelektrycznych kompozytów gradientowych, podanie nowych charakterystyk sprzężenia elektromechanicznego, a także sformułowanie pewnych nowych ograniczeń na liniowe własności piezoelektryczne i obliczenie efektu warstwy brzegowej. Zostaną także wprowadzone formuły typu Murata na tzw. laminację wielokrotną.

**Kompozyty termosprężyste.** Zastosowanie metod homogenizacji stochastycznej oraz wprowadzenie nowego funkcjonału, który opisuje fizycznie nieliniowe oddziaływanie pól sprężystych z dodatkowym polem skalarnym, umożliwi znalezienie formuł opisujących efektywne stałe termosprężyste.

Otrzymane wyniki teoretyczne będą wyjaśnione i zilustrowane przykładami numerycznymi.

Merytorycznie rozprawa jest jednorodna tematycznie – wszystkie rozdziały związane są z modelowaniem wpływu mikrostruktury na zachowanie się kompozytów. Z punktu widzenia metod użytych do wykonania postawionego celu należy wydzielić Rozdział 6, w którym użyto metod homogenizacji stochastycznej. Z powodu specyfiki języka używanego w metodzie stochastycznej homogenizacji, rozdział ten zawiera dużo nowych definicji i pojęć niezbędnych do zrozumienia przedstawionych wyników.

Ze względu na szeroki zakres analizowanych zagadnień, literatura stanowiąca podstawę przeprowadzonych badań będzie omówiona w odpowiednich rozdziałach.

Treść rozprawy jest w dużej części podsumowaniem oryginalnych wyników badań autorki prowadzonych w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w latach 1989-2006. Część wyników opublikowano w pracach, których współautorami byli koledzy z Pracowni Metod Wariacyjnych i Biomechaniki.

## Rozdział 2

# Wprowadzenie

### 2.1. Mikrostruktura w kompozytach

Kompozyty, czyli materiały złożone występują zarówno w przyrodzie jak i są wytwarzane przez człowieka. Większość metali ma strukturę kompozytową. Gdy przełamamy pręt metalowy struktura polikrystaliczna uwidacznia się poprzez nierówności powierzchni złomu. Martenzyt – typowy materiał z pamięcią kształtu – posiada strukturę warstwową, w której naprzemiennie pojawiają się dwie różne odmiany martenzytu. Pewne skały, takie jak piaskowce, posiadają strukturę ziarnistą. Inne skały, takie jak granit, są agregatami kryształów. W skałach porowatych pory są wypełnione wodą lub ropą naftową. Badania materiałów porowatych i złożonych w kontekście geologicznym są ważne dla przemysłu naftowego, jak też pomagają przy analizie wstrząsów sejsmicznych. Materiały konstrukcyjne takie jak drewno czy beton mają również strukturę złożoną. Kość jest materiałem porowatym o strukturze hierarchicznej. Kompozyty włókniste o osnowie szklanej i lekkie kompozyty węglowe znalazły zastosowanie zarówno w przemyśle lotniczym, jak i w masowej produkcji sprzętu sportowego. Lista nowoczesnych materiałów kompozytowych jest bardzo długa.

Reasumując, kompozyty są materiałami, w których niejednorodności mają skalę długości dużo większą, niż skala atomowa, co umożliwia zastosowanie do ich opisu fizyki klasycznej. W skałach o długości makroskopowej, przyjmujemy, że są one statystycznie jednorodne. W materiałach tworzonych przez człowieka mikrostruktura może być modyfikowana w celu uzyskania pożądaných własności materiału kompozytowego. Liczne zastosowania tego typu materiałów wynikają z połączenia własności poszczególnych składników kompozytu. Można w szczególności dobrać mikrostrukturę tak, aby sprężysty materiał kompozytowy miał ujemny współczynnik Poissona, por. [98]. Osnowa o takiej własności jest szczególnie korzystna w produkcji kompozytów piezoelektrycznych, gdyż ujemny współczynnik Poissona podnosi znacznie wydajność niektórych urządzeń piezoelektrycznych, por. [99]. Mikrostruktura i jej wpływ na wielkość sprzężenia elektromechanicznego jest przedmiotem licznych badań naukowych związanych z wzrastającym zainteresowaniem miniaturyzacją układów (ang. MEMS – *mi-*



*croelectromechanical systems*) i ich wykorzystaniem w procesie wytwarzania „inteligentnych” materiałów czy też „inteligentnych” konstrukcji, por. [118].

Modele materiałów złożonych, których makroskopowe zachowanie jest wynikiem hierarchicznej mikrostruktury, mogą być zastosowane do opisu struktur biologicznych. Np. tkanka kostna i tkanki miękkie, posiadają skomplikowaną mikrostrukturę hierarchiczną (por. Rozdz. 7.3). „Projektowanie kompozytów”, gdzie mikrostruktura jest budowana w celu osiągnięcia pożądanych własności, będzie z pewnością jedną z najszybciej i najowocniej rozwijających się dyscyplin teorii ośrodków ciągłych (por. Rozdz. 5).

## 2.2. Metody homogenizacji

Metody wariacyjne są w mechanice znane od czasów braci Bernoullich. Ogólnie można powiedzieć, że są to metody pozwalające opisać jakieś zjawisko fizyczne przy pomocy maksimum lub minimum odpowiedniego funkcjonału, a dokładniej przez poszukiwanie tzw. punktów stacjonarnych, czyli krytycznych. Do nowoczesnych metod wariacyjnych należą metody tzw. teorii homogenizacji używane w przedstawionej rozprawie.

Podwaliny pod teorię homogenizacji zostały położone w połowie lat 70-tych ubiegłego wieku przez rosyjską, francuską i włoską szkołę matematyki stosowanej. Należy podkreślić, że pierwotne pojęcia matematyczne, które legły u podstaw tej teorii zawdzięczamy polskiemu matematykowi Kazimierzowi Kuratowskiemu (wprowadził zbieżność ciągu nadzbiorów funkcji, tzw.  $e$ -zbieżność, która w zastosowaniu do ciągów funkcjonałów nosi nazwę  $\Gamma$ -zbieżności). Homogenizacja podaje spodoby przejścia z charakterystycznym rozmiarem niejednorodności (małym parametrem) do zera. W przypadku ośrodków złożonych oznacza to „rozmywanie” niejednorodności, czyli budowanie tzw. modeli makroskopowych. Homogenizacja wyjaśnia również w jaki sposób w modelach makroskopowych uwzględniać mały parametr, uwzględniając efekt skali. Warto również zaznaczyć, że w literaturze istnieje wiele prac poświęconych otrzymaniu w rozmaity sposób uśrednionych charakterystyk własności materiałów. Jedną z tych metod jest nieasympotyczna metoda, autorstwa Cz. Woźniaka, która umożliwi opisanie w prosty sposób efektów związanych z wymiarem niejednorodności, zarówno w zagadnieniach statycznych jak i dynamicznych, por. np. [172] i literatura cytowana w tej pracy. Metoda ta była stosowana m.in. do opisu zagadnień ośrodków spękanych [173] i gradientowych [174].

W niniejszej rozprawie posługujemy się metodami, które opisują badane zagadnienie w sposób ścisły i korzystają z pewnych działów nowoczesnej matematyki stosowanej. Równocześnie metody te stanowią podstawę do analizy

problemów inżynierskich dotyczących materiałów i konstrukcji o złożonej strukturze, w szczególności zagadnień optymalizacji tzw. materiałów gradientowych. Będziemy stosowali następujące metody homogenizacji: metodę dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych,  $\Gamma$ -zbieżności oraz H-zbieżności (G-zbieżności).  $\Gamma$ -zbieżność jest również stosowana w stochastycznej homogenizacji. Dlaczego mówimy o zbieżności? Odpowiedź jest prosta: poszukiwanie własności efektywnych ośrodków złożonych wiąże się z przejściem z rozmiarem niejednorodności (wspomnianym wyżej małym parametrem) do zera. Piśmiennictwo w zakresie zastosowań metod homogenizacji do analizy ośrodków złożonych jest już bardzo bogate, por. monografie [6, 101, 111, 132]. Rozwój tych różnych metod homogenizacji wiąże się ściśle z rozwojem nowoczesnego rachunku wariacyjnego. Warto jeszcze raz podkreślić, że to właśnie metody homogenizacji pozwalają zrozumieć i nadać precyzyjny sens pojęciu własności efektywnych ośrodka złożonego. W polskim środowisku naukowym pojawiły się w ostatnich latach dwie rozprawy habilitacyjne, w których wykorzystywano matematyczną teorię homogenizacji do opisu zagadnień związanych z zachowaniem się ośrodków porowatych wypełnionych cieczą [27, 106]. W rozprawie [27] posłużono się metodami homogenizacji stochastycznej, która będzie również stosowana w tej pracy do opisu własności kompozytów spękaných i termosprężystych, por. Rozdz. 6. Cytowane monografie zawierają obszerne bibliografie.

Metoda rozwinięć asymptotycznych umożliwiła analizę tzw. efektu warstwy brzegowej (Rozdz. 3.8), a więc precyzyjniejszego wyznaczania rozwiązań w otoczeniu brzegu, co ma istotny wpływ na zrozumienie odpowiedzi konstrukcji. Pozwoliła również pokazać w jaki sposób interpretować nielocalne związki konstytutywne (Rozdz. 2.8).

Metoda  $\Gamma$ -zbieżności w tej rozprawie została zastosowana do udowodnienia twierdzeń o postaci makroskopowej energii kompozytów, a więc w szczególności do opisu ich własności makroskopowych. W Rozdz. 3.1 podano postać zhomogenizowanej energii nieliniowego kompozytu piezoelektrycznego, a w Rozdz. 3.2 postać własności efektywnych liniowego kompozytu piezoelektrycznego. W Rozdz. 6.2 podano efektywne związki konstytutywne dla losowego kompozytu termosprężystego. W Rozdz. 6.1 wyprowadzono wzory na energię opisującą nieliniowe zachowanie się materiału sprężystego osłabionego mikroszczelinami.

Zagadnienia optymalnego projektowania kompozytów i konstrukcji stanowią niezwykle interesujący obiekt badań. W tym przypadku istotna jest odpowiedź na trudne często pytanie, czy postawione zadanie posiada rozwiązanie. Jeszcze w latach 70-tych analizy czysto inżynierskie prowadziły do paradoksów, np.

stwierdzenie, że sprężysta płyta cienka o minimalnej podatności zawiera nieskończenie cienkie pasma. Dopiero umiejętne zastosowania nowoczesnych metod wariacyjnych (tzw. relaksacja odpowiedniego funkcjonału) w powiązaniu z homogenizacją pozwoliły zrozumieć, że układy optymalne są często realizowane przez skomplikowane mikrostruktury. W świecie przyrody ożywionej dobrym tego przykładem jest tkanka kostna, której architektura jest bardzo złożona i oczywiście w pewnym sensie optymalnie dostosowana do obciążeń fizjologicznych (por. Rozdz. 5.3).

W niniejszej rozprawie pokazano, w jaki sposób dzięki metodzie  $H$ -zbieżności można uzyskać sformułowanie zagadnienia relaksacji projektowania konstrukcji na minimum uogólnionej podatności wykonanej z gradientowego materiału piezoelektrycznego.

Poniżej pokażemy metodę dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych i w jaki sposób przy użyciu tzw. wyższych wyrazów rozwinięcia można otrzymać związki konstytutywne słabo-nielokalnej teorii sprężystości. Rozważania oparto o wyniki często cytowanej pracy [78].

### 2.3. Metoda asymptotyczna na przykładzie kompozytów sprężystych

Metoda uśredniania prowadząca do definicji stałych efektywnych, stosowana najczęściej w pracach aplikacyjnych, korzysta z definicji tzw. Reprezentatywnego Elementu Objętościowego – REO (ang. RVE – *Representative Volume Element*). Element taki jest próbką wyciętą myślowo z niejednorodnego ośrodka o rozmiarze znacznie większym, niż rozmiar niejednorodności, ale znacznie mniejszym, niż rozmiar całego ośrodka. Uśrednianie objętościowe po reprezentacyjnym elemencie objętościowym (REO) gradientów pól (odkształceń w sprężystości i dodatkowo pola potencjału elektrycznego w piezoelektryczności) oraz pól strumieni (naprężeń w sprężystości i dodatkowo pola przesunięcia elektrycznego w piezoelektryczności) prowadzi do definicji stałego tensora, zwanego tensorem efektywnym. W piezoelektryczności otrzymujemy układ tensorów tworzących macierz blokową.

Tensor efektywny przekształca średnie gradienty na średnie strumienie, czyli wyznacza efektywny związek konstytutywny (naprężenie-odkształcenie w sprężystości i dodatkowo w sposób sprzężony między przesunięciem elektrycznym i polem elektrycznym w piezoelektryczności). Przy założeniu przemieszczeniowych warunków brzegowych można pokazać, że energia wewnętrzna niejednorodnego ośrodka równa jest energii wewnętrznej ośrodka o własnościach efektywnych.

Aczkolwiek powyższa definicja jest intuicyjnie oczywista, nie jest jasne czy jest ona dostatecznie ogólna. W szczególności efektywny tensor własności materiałowych można uzależnić od wyboru źródeł sił przyłożonych zarówno wewnątrz ciała jak i na jego brzegu, od typu pozostałych warunków brzegowych, a także od rozmiarów próbki i jej kształtu. Matematyczna teoria homogenizacji proponuje diametralnie inne podejście. Zamiast rozpatrywać jeden niejednorodny ośrodek z ustaloną skalą niejednorodności, zagadnienie jest „zanurzone” w pewien ciąg zagadnień samopodobnych o coraz mniejszych skalach niejednorodności opisanych przez mały parametr  $\varepsilon$ . Przeprowadza się analizę asymptotyczną gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  i otrzymujemy **tensor konstytutywny dla zagadnienia granicznego**. Tensor ten nazywany jest **tensorem efektywnym lub zhomogenizowanym**. To podejście jest bardziej skomplikowane, ale jego zaletą jest to, że definicja tensora efektywnego jest jednoznaczna. Co więcej, aproksymacja rzeczywistych mikroskopowo niejednorodnych współczynników może być uzasadniona poprzez analizę jakościową błędu przybliżenia. Sposób w jaki przechodzimy do granicy z zagadnieniem „*epsilonowym*” wymaga precyzyjnego języka matematycznego i będzie zdefiniowany w dalszej części pracy poprzez pojęcia  $\Gamma$ - i  $H$ -zbieżności. Na początku zajmieni się najstarszą techniką używaną w metodzie homogenizacji, która umożliwiła znalezienie związków pozwalających wyznaczyć zhomogenizowany tensor efektywny, a mianowicie tzw. metodą dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych. Metoda ta jest heurystyczna, ale poprawność uzyskanych przy jej zastosowaniu wyników została udowodniona innymi metodami homogenizacji. Metoda ta umożliwi otrzymanie nielokalnych związków konstytutywnych naprężenie – odkształcenie dla sprężystych kompozytów mikroperiodycznych.

W teorii homogenizacji ośrodków niejednorodnych z periodycznie rozłożonymi w przestrzeni własnościami liniowo sprężystymi wprowadza się liniowy operator różniczkowy

$$\mathbf{L}^\varepsilon(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c}^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}, \quad (2.1)$$

w każdym punkcie przestrzeni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2$  lub  $3$ . Operator  $\nabla_{\mathbf{x}}$  jest odniesiony do współrzędnych  $x^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , zaś kropka „ $\cdot$ ” oznacza proste nasunięcie. Równanie (2.1) w zapisie indeksowym ma postać

$$L_{jk}^\varepsilon(\mathbf{x}) = -\partial_j^{(x)} c_{ijkl}^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_l^{(x)}. \quad (2.2)$$

Wielkość  $\varepsilon$  jest zmienną bezwymiarową, zwaną małym parametrem. Mały parametr jest wyznaczony przez stosunek mikrodługości (skali komórki periodyczności np. długości boku sześcianu dla sześciennej struktury komórki periodycznej)

do makrodlużości (charakterystycznego wymiaru ciała lub zagadnienia). Tensor czwartego rzędu  $\mathbf{c}^\varepsilon(\mathbf{x})$  jest tensorem modułów sprężystości w punkcie  $\mathbf{x}$  i zależy od  $\varepsilon$  w sposób szczególny. Zakładamy mianowicie, że  $\mathbf{c}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}/\varepsilon)$  i  $\mathbf{c}(\mathbf{y})$  jest pewną funkcją periodyczną. Ograniczymy się do jednorodnych warunków Dirichleta tj. założymy, że przemieszczenie  $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$  na brzegu  $\partial V$  obszaru  $V$  zajętego przez ciało. Równania równowagi mają postać

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \text{w } V, \\ \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{na } \partial V, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie  $\mathbf{f}^\varepsilon(\mathbf{x})$  jest objętościową gęstością sił zewnętrznych. Oczywiście to zagadnienie ma dwa aspekty: mikro i makro, gdzie mikroskala charakteryzuje się periodycznością pól, a makroskala dotyczy całego, globalnego zachowania się ciała. Jak zobaczymy, można mniej lub bardziej precyzyjnie oddzielić zagadnienie mikroskopowe tj. periodyczne od makroskopowego, w ogólności nieperiodycznego. Postąpimy klasycznie, tak jak w innych pracach z teorii homogenizacji, np. [20, 144, 143], wprowadzając oprócz zmiennej makroskopowej  $\mathbf{x}$  zmienną mikroskopową  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ . W formalizmie homogenizacji te dwie zmienne traktujemy jak zmienne niezależne,  $\mathbf{x}$  określa położenie makroskopowe zaś  $\mathbf{y}$  zmienną wewnętrzną w komórce periodyczności. Jeśli funkcja zależy od zmiennej  $\mathbf{y}$  to jest ona z założenia funkcją periodyczną tej zmiennej. W celu rozwiązania zagadnienia poszukujemy przemieszczenia w postaci dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (2.4)$$

Wstawiając (2.4) w (2.3) z (2.1) i wykorzystując transformację

$$\nabla_{\mathbf{x}} \rightarrow \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}}, \quad (2.5)$$

która jest konsekwencją faktu, że  $y^i = x^i/\varepsilon$ , otrzymujemy formalne rozwinięcie operatora  $\mathbf{L}^\varepsilon(\mathbf{x})$

$$\mathbf{L}^\varepsilon(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon^{-2} \mathbf{L}_1(\mathbf{y}) + \varepsilon^{-1} \mathbf{L}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{L}_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &\equiv \mathbf{L}_1(\mathbf{y}) \equiv -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{L}_2 &\equiv \mathbf{L}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{L}_3 &\equiv \mathbf{L}_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Operator  $\nabla_y$  jest odniesiony do układu współrzędnych w komórce periodyczności.  $\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  działa na funkcje  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Zauważmy, że tensor materiałowy  $\mathbf{c}$  nie zależy explicite od zmiennej  $\mathbf{x}$ , ponieważ ograniczamy się do struktur mikroperiodycznych makroskopowo jednorodnych. Ponadto, operator  $\mathbf{L}_1$  zależy tylko od zmiennej mikroskopowej  $\mathbf{y}$ , i jest operatorem działającym na funkcje periodyczne tej zmiennej. Gdy (2.4) wstawimy do (2.7) otrzymujemy hierarchię równań przy odpowiednich potęgach  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{u}_0 = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = -\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{u}_0, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = -\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - \mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_0, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = -\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{u}_2 - \mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{u}_1, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{u}_4 = -\mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{u}_3 - \mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{u}_2, \dots, \text{ itd.} \quad (2.12)$$

W tym miejscu założymy, że  $\mathbf{f}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x})$ , czyli, że siły zewnętrzne zależą tylko od zmiennej  $\mathbf{x}$ , a nie zależą od  $\varepsilon$ . Oznacza to, że siły masowe zmieniają się na skali makroskopowej i ich rozkład w ciele nie zależy od procesu „zagęszczenia” mikrostruktury w procesie homogenizacji. Gdyby

$$\mathbf{f}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{f}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{f}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (2.13)$$

to człony  $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2$  pojawiłyby się w równaniach (2.11), (2.12). Wpływ mikrostruktury na rozkład sił masowych w równaniu 2.13 jest rzędu rozmiarów mikrostruktury. Równania (2.8), (2.9) itd. wraz z warunkami Dirichleta na brzegu  $\partial V$  dla  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  itd. względem zmiennej makroskopowej  $\mathbf{x}$  są równaniami podstawowymi i będą dalej analizowane.

### 2.3.1. Procedura rozdzielania zagadnienia mikroskopowego od makroskopowego

Łatwo zauważyć, że  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest funkcją tylko zmiennej makroskopowej  $\mathbf{x}$ . Funkcję tę oznaczamy przez  $\hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$ . Niezależność  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  od zmiennej mikroskopowej  $\mathbf{y}$  wynika z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia (2.8) w klasie funkcji periodycznych (prawa strona w równaniu (2.8) jest równa zeru). Rozwiązanie równania (2.9) przyjmuje się w postaci:

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla_x \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

gdzie dwie kropki w poziomie oznaczają podwójne nasunięcie tensorów. Poniżej, trzema i czterema kropkami będziemy oznaczali odpowiednio potrójne

i poczwórnie nasunięcie tensorów. Trzeciego rzędu pole tensorowe  $\mathbf{X}_1(\mathbf{y})$  musi spełniać równanie

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{A}_1(\mathbf{y}), \quad (2.15)$$

$\mathbf{A}_1(\mathbf{y})$  jest z założenia znaną funkcją periodyczną. Z równania (2.15) wynika, że  $\mathbf{X}_1(\mathbf{y})$  jest zdefiniowane z dokładnością do tensora, który zależy tylko od zmiennej  $\mathbf{x}$ . Równanie (2.15) może być przepisane w postaci:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{C}_0(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{C}_0(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) + \mathbf{c}(\mathbf{y}). \quad (2.16)$$

Równanie (2.15) oznacza, że  $\mathbf{X}_1(\mathbf{y})$  jest rozwiązaniem zagadnienia czysto periodycznego tzw. *zagadnienia na komórce*, ale  $\hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})$  nie może być wyznaczone z (2.8) i (2.9). Aby wyznaczyć  $\hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})$  musimy wziąć pod uwagę (2.11). Zanim przejdziemy do analizy równania (2.10) zauważmy, że wszystkie równania w hierarchii (2.8)-(2.12), itd.) są w postaci  $\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{v} = p.s.$  ( $p.s.$  – prawa strona), gdzie  $\mathbf{v}$  jest przyporządkowane  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ , itd. Warunkiem koniecznym i dostatecznym jednoznaczności rozwiązania w klasie funkcji periodycznych jest, aby

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y (p.s.) d\mathbf{y} = 0, \quad (2.17)$$

gdzie  $Y$  – oznacza komórkę periodyczności, zaś  $|Y|$  jej objętość. Podstawiając warunek (2.17) do (2.10), gdzie  $\mathbf{u}_1$  jest w postaci (2.14), otrzymujemy

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y [\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{C}_0(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_0(\mathbf{x})] d\mathbf{y} = 0. \quad (2.18)$$

Stąd mamy

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{C}}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.19)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{C}_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.20)$$

gdzie nadkreślenie będzie w tym rozdziale oznaczać uśrednienie po komórce periodyczności. Tak więc, gdy tylko obliczymy  $\mathbf{X}_1(\mathbf{y})$  otrzymujemy tzw. *zhomogenizowane moduły sprężyste* tworzące tensor czwartego rzędu  $\bar{\mathbf{C}}_0$ . Tensor ten definiuje własności makroskopowe kompozytu. Znajomość tensora  $\bar{\mathbf{C}}_0$  umożliwia znalezienie zhomogenizowanego pola przemieszczeń  $\hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$  poprzez rozwiązanie zagadnienia brzegowego (2.19). Pole to jest aproksymacją rzeczywistego pola przemieszczeń pojawiającego się w ciele mikroniejnorodnym. Znalezienie  $\bar{\mathbf{C}}_0$

nie wymaga wyjścia poza równanie (2.10). Wykorzystując te wyniki dochodzimy do sformułowania następującego założenia:

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}). \quad (2.21)$$

W tym wzorze i poniżej,  $\nabla_{\mathbf{x}}$  stojące po prawej stronie funkcji działa na nią prawostronnie. Zapis taki umożliwia jasne przejście do zapisu indeksowego:

$$u_2^j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_1^{j(kl)}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}}^l \hat{u}_1^k(\mathbf{x}) + X_2^{jklm}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{x}}^m \hat{u}_0^l(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}^k + \hat{u}_2^j(\mathbf{x}).$$

Równanie, z którego można otrzymać tensor czwartego rzędu  $\mathbf{X}_2(\mathbf{y})$ , otrzymujemy podstawiając założenie (2.21) do (2.10), a mianowicie

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) + \overline{\mathbf{C}}_0 - \mathbf{C}_0(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{A}_2(\mathbf{y}). \quad (2.22)$$

Przez analogię do (2.16), równanie to może być zapisane w postaci

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{C}_1(\mathbf{y}) = \overline{\mathbf{C}}_0 - \mathbf{C}_0(\mathbf{y}), \quad \mathbf{C}_1(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) + \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_2(\mathbf{y}). \quad (2.23)$$

Zauważmy, że  $\mathbf{X}_2$  jako funkcja  $\mathbf{y}$  jest zdefiniowane jednoznacznie z dokładnością do tensora będącego funkcją  $\mathbf{x}$ , gdyż średnia po komórce z prawej strony równania (2.23) znika. Ponieważ prawa strona równania (2.22) jest znana, możemy znaleźć  $\mathbf{X}_2(\mathbf{y})$ . Teraz znamy nie tylko  $\mathbf{C}_1(\mathbf{y})$ , ale także  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , z wyjątkiem  $\hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})$  i  $\hat{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x})$ . Aby znaleźć  $\hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})$  rozważamy równanie (2.11), natomiast  $\hat{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x})$  będzie wyznaczone z (2.12). Ponieważ wyznaczanie wyższych członów w rozwinięciu asymptotycznym nie jest przedstawiane w innych pracach, poniżej pokażemy odpowiednią drogę postępowania. Wykorzystując równania (2.8) – (2.11) oraz przyjętą postać rozwiązań dla  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  i  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  daną wzorami (2.14) i (2.21), otrzymujemy związek

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y [\mathbf{C}_0(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}] d\mathbf{y} = 0, \quad (2.24)$$

które jest równoważne równaniu:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \overline{\mathbf{C}}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) = -\overline{\mathbf{C}}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}. \quad (2.25)$$

Prawa strona powyższego równania po rozwiązaniu (2.19) jest znana, a więc  $\hat{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})$  może być wyznaczone z równania (2.25) z warunkiem brzegowym  $\hat{\mathbf{u}}_1 = 0$  na brzegu ciała  $\partial V$ . Teraz widać jasno jak postępować przy wyznaczaniu dalszych wyrazów rozwinięcia.



### 2.3.2. Nielokalne makroskopowe związki konstytutywne naprężenie-odkształcenie

Wstawiamy  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  etc. w (2.4). W rezultacie mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \\ & + \varepsilon [\dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})] + \\ & + \varepsilon^2 [\dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}] + \\ & + \varepsilon^3 [\dot{\mathbf{u}}_3(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \\ & + \mathbf{X}_3(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}}] + \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$+ \dots, \quad (2.27)$$

lub inaczej

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \dots, \quad (2.28)$$

gdzie

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}) + \dots \quad (2.29)$$

Ponieważ tensory  $\mathbf{X}(\mathbf{y})$  są symetryczne względem dwóch ostatnich indeksów (por. definicja (2.15)), możemy zastąpić wszystkie gradienty  $\nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{u}}$  przez odkształcenia, powiedzmy  $\acute{\mathbf{e}}(\mathbf{x})$ . Używając relacji (2.5) wyznaczamy odkształcenia zależne od przemieszczeń  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \acute{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + [\varepsilon \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \acute{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) \cdot \acute{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \dots \\ & + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \acute{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \varepsilon \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) \cdot \acute{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \dots]^{sym}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdzie symbol „sym” oznacza symetryzację. Średnie po komórce tensorów  $\mathbf{X}$  wybierzemy równe zeru, korzystając z faktu, że tensory te były określone z dokładnością do tensorów niezależnych od  $\mathbf{y}$ . Ponieważ operacja różniczkowania względem  $\mathbf{x}$  i uśredniania po komórce komutują, więc średnie z gradientów wszystkich  $\mathbf{X}$ 'ów znikają. Stąd otrzymujemy

$$\acute{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{e}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}), \quad (2.31)$$

Naprężenia otrzymujemy poprzez nasunięcie tensora  $\mathbf{c}(\mathbf{y})$  na odkształcenia dane wzorem (2.30):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \\ & + \varepsilon [\mathbf{c}(\mathbf{y}) \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \cdot \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{c}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{X}_1(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{X}_2(\mathbf{y}) \cdot \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}}] + \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (2.32)$$

lub inaczej

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{C}_0(\mathbf{y}) \cdot \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{C}_1(\mathbf{y}) \cdots \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \varepsilon^2 \mathbf{C}_2(\mathbf{y}) \cdots \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} + \dots \quad (2.33)$$

Wszystkie człony w powyższym wyrażeniu są jawnie zależne od  $\mathbf{x}$  lub  $\mathbf{y}$ . W wielu zastosowaniach istotne są nie tylko mikroskopowe fluktuacje naprężeń i odkształceń związane z  $\mathbf{C}_0(\mathbf{y})$ , ale zmiany średnich pól. Jeśli uśrednimy (2.33) otrzymujemy makroskopową relację naprężenie-odkształcenie w postaci

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{C}}_0 \cdot \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \varepsilon \bar{\mathbf{C}}_1 \cdots \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} + \varepsilon^2 \bar{\mathbf{C}}_2 \cdots \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} + \dots \quad (2.34)$$

Podsumujemy powyższe wyniki używając notacji symbolicznej (uproszczonej):

$$\mathbf{e} = \mathbb{A} * \bar{\mathbf{e}}, \quad (2.35)$$

gdzie  $\mathbb{A}$  jest operatorem tensorowym (4 rzędu) zwanym *operatorem koncentracji odkształceń*, por. [71]. Nasuwając na tensor  $\mathbf{e}$  tensor  $\mathbf{c}$  i biorąc średnie po komórce otrzymujemy

$$\bar{\sigma} = \overline{\mathbf{c} \cdot \mathbb{A} * \bar{\mathbf{e}}} \equiv \mathbf{C}_{w.n.l.}^{eff} * \bar{\mathbf{e}}, \quad (2.36)$$

gdzie  $\mathbf{C}_{w.n.l.}^{eff}$  jest efektywnym (4 rzędu) operatorem opisującym makroskopowe sprężyste zachowanie się materiału, symbol *w.n.l.* oznacza „słabo-nielokalny” (ang. *weakly non-local*). Oznaczenie to podkreśla fakt, że w relacji konstytutywnej pojawiają się gradienty odkształcenia wyższych rzędów. Taką klasyfikację modeli nielokalnej teorii sprężystości można znaleźć w pracach D. Roguli i B. Gairola, por. [138] i literaturę tam cytowaną.

Modele słabo nielocalne ograniczone do pierwszego gradientu odkształcenia w równaniu konstytutywnym naprężenie-odkształcenie znane są jako modele gradientowe sprężystości. W pracy [46] używając uogólnionej metody  $\Gamma$ -zbieżności analizowano makroskopowe zachowanie się kompozytów o własnościach opisanych stałymi „wyższego rzędu” (modele gradientowe).

W trzech następnych rozdziałach omówimy wyniki dotyczące homogenizacji kompozytów piezoelektrycznych. Podstawę związku piezoelektryczności zostaną podane w Dodatku D.1.

## Rozdział 3

# Efektywne własności kompozytów piezoelektrycznych

Piezoelektryczne materiały w silnych polach elektrycznych wykazują nieliniową zależność od pola elektrycznego. Tiersten [168] zaproponował modelowanie tego zjawiska poprzez uwzględnienie wyższego rzędu członów względem pól elektrycznych  $\mathbf{E}$  w wyrażeniu na energię. Postać elektrycznej entalpii, zaproponowana przez tego autora, zawierała człony trzeciego rzędu w  $\mathbf{E}$ , a więc entalpia  $H(\mathbf{e}, \mathbf{E})$  nie była funkcją wklęsłą względem pola  $\mathbf{E}$ . Poniżej sformułujemy i udowodnimy twierdzenie o homogenizacji przy założeniu wypukłości energii wewnętrznej  $U(\mathbf{e}, \mathbf{D})$ , która jest definiowana tutaj jako cząstkowo wklęsłe sprzężona do entalpii  $H$ . Założenie to jest istotne w dowodach sformułowanych poniżej twierdzeń i lematów. Rozważania oparte są o wyniki pracy [161].

W tym rozdziale  $\mathbf{e}$  oznacza tensor odkształcenia, zaś  $\mathbf{D}$  wektor indukcji elektrycznej (inaczej przesunięcia elektrycznego), por. Dodatek. Używając metody  $\Gamma$ -zbieżności otrzymamy ogólną postać makroskopowego potencjału czyli efektywną energię wewnętrzną. Twierdzenie to w szczególności obejmuje liniową teorię piezoelektryczności. Jego dowód stanowi uzasadnienie formuł opisujących efektywne (zhomogenizowane) związki konstytutywne wyprowadzone metodą asymptotycznej homogenizacji w sposób analogiczny do wyprowadzenia formuł na efektywny tensor materiałowy podanych w Rozdz. 2.3 dla liniowej sprężystości. W przypadku nieliniowego kompozytu o strukturze warstwowej można podać jawną postać efektywnych potencjałów. W pozostałych przypadkach należy poszukiwać ograniczeń na te potencjały. Postępowanie takie może być uogólnieniem metod poszukiwania ograniczeń podanych w pracy Talbota i Willisa [154] dla zagadnienia nieliniowej sprężystości.

Rozszerzymy także twierdzenie o homogenizacji jednorodnych makroskopowo kompozytów piezoelektrycznych na przypadek makroskopowo niejednorodnych kompozytów. Pokażemy również jak zredukować zagadnienie poszukiwania efektywnych potencjałów do potencjału opisującego liniowe materiały piezoelektryczne. Następnie, korzystając z metod wariacyjnych, wyprowadzimy formuły na ograniczenia efektywnych tensorów dwuskładnikowego kompozytu piezoelektrycznego, w przypadku gdy dane o mikrostrukturze ograniczone są

do wyspecyfikowania własności składników oraz ich udziałów objętościowych w kompozycie. Na zakończenie rozdziału podamy sposób wyznaczenia efektu warstwy brzegowej dla piezoelektrycznego kompozytu warstwowego, stosując metodę formalnych rozwinięć asymptotycznych.

### 3.1. Homogenizacja fizycznie nieliniowych kompozytów piezoelektrycznych

Przejdziemy do ścisłego sformułowania zagadnienia homogenizacji fizycznie nieliniowych kompozytów piezoelektrycznych.

Niech  $V \subset \mathbb{R}^3$  będzie ograniczonym, dostatecznie regularnym obszarem takim, że jego domknięcie  $\bar{V}$  jest zajęte przez piezoelektryczny kompozyt w stanie nieodkształconym (naturalnym). Oznaczmy przez  $\gamma = \partial V$  brzeg obszaru  $V$ . Załóżmy, że energia wewnętrzna

$$U = U(\mathbf{y}, \mathbf{e}, \mathbf{D}), \quad \mathbf{y} \in Y$$

jest funkcją periodyczną zmiennej  $\mathbf{y}$ , dla  $\mathbf{y} \in Y$ , gdzie  $Y$  jest komórką elementarną.

Zdefiniujemy funkcje energii wewnętrznej dla  $\varepsilon Y$ -periodycznego kompozytu przez

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{D}) = U\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right), \quad (3.1)$$

gdzie  $\mathbf{x} \in V$ ,  $\mathbf{e} \in \mathbb{E}_s^3$  i  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbb{E}_s^3$  oznacza przestrzeń symetrycznych macierzy  $3 \times 3$ . W ogólnym przypadku równania konstytutywne dane są poprzez:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}}, \quad \mathbf{E} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}}, \quad (3.2)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}$  oznacza tensor naprężenia, a  $\mathbf{E}$  wektor pola elektrycznego. Przyjmujemy następujące założenie.

**Założenie (A):** Funkcja  $U : (\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{E}_s^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow U(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}$  jest mierzalna i  $Y$ -periodyczna względem  $\mathbf{y}$ , wypukła względem  $(\mathbf{e}, \mathbf{D})$  i taka, że

$$\exists c_1 \geq c_0 > 0, \quad c_0(|\boldsymbol{\varepsilon}|^p + |\boldsymbol{\rho}|^q) \leq U(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) \leq c_1(|\boldsymbol{\varepsilon}|^p + |\boldsymbol{\rho}|^q), \quad (3.3)$$

dla każdego  $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho})$ . Tutaj  $p > 1$  i  $q > 1$ .

Założenie (A) będzie dalej osłabione w przypadku opisu makroskopowo niejednorodnych mikroperiodycznych kompozytów.

Jako szczególny przypadek energii wewnętrznej rozważmy następującą postać:

$$U\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right) = U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right) + U_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right), \quad (3.4)$$

gdzie  $U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right)$  jest dodatnio określoną formą kwadratową zmiennych  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{D}$ , typową dla liniowych kompozytów piezoelektrycznych, patrz Dodatek (D.4). Funkcja  $U_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right)$  zawiera człony wyższego rzędu niż kwadratowe. Prosty przykładem jest funkcja

$$U_2(\mathbf{y}, \mathbf{e}, \mathbf{D}) = \tilde{U}_2(\mathbf{y}, \mathbf{D}) = \frac{1}{4} b_{ijkl}(\mathbf{y}) D_i D_j D_k D_l, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

gdzie  $\mathbf{b}$  jest symetrycznym tensorem, a jego składowe są funkcjami ściśle ograniczonymi, czyli  $b_{ijkl} \in L^\infty(Y)$ .  $L^\infty(Y)$  oznacza przestrzeń funkcji periodycznych istotnie ograniczonych. Poniższe rozważania ograniczymy do małych deformacji sprężystych  $\mathbf{e}$ . Skończone deformacje należy opisywać niewypukłymi funkcjami energii wewnętrznej.

Sformułujemy zasadę minimum energii wewnętrznej. Założymy następujące warunki brzegowe na pole przemieszczeń, składową normalną (do brzegu  $\gamma$  obszaru zajętego przez ciało) tensora naprężenia, potencjał elektryczny i składową normalną indukcji elektrycznej:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{na } \gamma_0, \quad \sigma_{ij} n_j = \Sigma_i \quad \text{na } \gamma_1, \quad (3.6)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{na } \gamma_2, \quad D_i n_i = 0 \quad \text{na } \gamma_3, \quad (3.7)$$

gdzie  $\Sigma_i$  są składowymi sił zewnętrznymi,  $\gamma = \bar{\gamma}_0 \cup \bar{\gamma}_1$ ,  $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$ ;  $\gamma = \bar{\gamma}_2 \cup \bar{\gamma}_3$ ,  $\gamma_2 \cap \gamma_3 = \emptyset$  oraz  $\mathbf{n} = (n_i)$  jest jednostkowym wektorem normalnym do  $\gamma$ ; oczywiście  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty. Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  położymy

$$F_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{D}) = \int_V U_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{D}) \, dx - L(\mathbf{u}, \mathbf{D}), \quad (3.8)$$

gdzie

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{D}) = \int_V b_i u_i \, dx + \int_{\gamma_1} \Sigma_i u_i \, d\gamma - \int_{\gamma_2} \varphi_0 D_i n_i \, d\gamma, \quad (3.9)$$

oraz

$$\mathbf{u} \in \mathbf{W}(V, \gamma_0) = \left\{ \mathbf{v} = (v_i) \mid v_i \in W^{1,p}(V), \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ na } \gamma_0 \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\in \mathbf{W}(\operatorname{div}; V, \gamma_3) = \\ &= \{\mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^q(V), \operatorname{div} \mathbf{D} \in L^q(V), \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \text{ w } V, \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \gamma_3\}. \end{aligned}$$

Przestrzenie  $L^p(V)$ ,  $W^{i,p}(V)$  są odpowiednio, przestrzeniami funkcji całkowalnych z  $p$ -tą potęgą oraz całkowalnych aż do  $i$ -tej pochodnej z  $p$ -tą potęgą.

Zagadnienie równowagi fizycznie nieliniowych kompozytów piezoelektrycznych o  $\varepsilon$ -Y periodycznej mikrostrukturze można sformułować jako następujące zagadnienie minimalizacji

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad F_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) = \inf \{F_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{D}) \mid \mathbf{u} \in \mathbf{W}(V, \gamma_0), \mathbf{D} \in \mathbf{W}(\operatorname{div}; V, \gamma_3)\}.$$

Założenie (A) implikuje istnienie jednoznacznego rozwiązania  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \in \mathbf{W}(V, \gamma_0) \times \mathbf{W}(\operatorname{div}; V, \gamma_3)$  zagadnienia  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ .

### 3.1.1. $\Gamma$ -zbieżność

Wprowadzenie w teorię  $\Gamma$ -zbieżności można znaleźć w pracach Attoucha [11] i Dal Maso [54]. Attouch [11] używa określenia epi-zbieżności, które jest szczególnym przypadkiem  $\Gamma$ -zbieżności. W rozważanych poniżej przypadkach pojęcia te pokrywają się.

Poniżej przytoczona Definicja 3.1, własności  $\Gamma$ -zbieżności (i)-(iv) oraz Twierdzenie 3.1, zaczerpnięte z pracy [54], posłużą do udowodnienia głównego twierdzenia o homogenizacji kompozytów piezoelektrycznych (Twierdzenie 3.2).

**Definicja 3.1.** Niech  $(X, \tau)$  będzie metryzowalną przestrzenią topologiczną, i niech  $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  będzie ciągiem funkcjonałów z  $X$  w  $\overline{\mathbb{R}}$ , gdzie  $\overline{\mathbb{R}}$  oznacza rozszerzoną przestrzeń liczb rzeczywistych.

(a)  $\Gamma(\tau)$ -lim inf, oznaczany także przez  $G_i$ , jest funkcjonałem na  $X$  zdefiniowanym następująco

$$G_i(u) = \Gamma(\tau)\text{-lim inf}_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u) = \min_{\{u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u\}} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

(b)  $\Gamma(\tau)$ -lim sup, oznaczany także przez  $G_s$ , jest funkcjonałem na  $X$  zdefiniowanym następująco

$$G_s(u) = \Gamma(\tau)\text{-lim sup}_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u) = \min_{\{u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u\}} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

(c) Mówimy, że ciąg  $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  jest  $\Gamma(\tau)$ -zbieżny jeżeli  $G_i = G_s$ ; wtedy możemy zapisać

$$G = \Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon.$$

### Własności $\Gamma$ -zbieżności

Niech  $G_\varepsilon : (X, \tau) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  będzie ciągiem funkcjonałów  $\Gamma(\tau)$ -zbieżnych i niech  $G = \Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon$ . Wtedy:

(i) Funkcjonały  $G_i$  i  $G_s$  są  $\tau$ -półciągłe dolnie ( $\tau$ -l.s.c.).

(ii) Jeżeli funkcjonały  $G_\varepsilon$  są wypukłe, wtedy  $G_s = \Gamma(\tau)\text{-}\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon$  jest także pewnym funkcjonałem wypukłym. Co więcej,  $\Gamma(\tau)$ -granica  $G = \Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon$  jest  $\tau$ -domkniętym ( $\tau$ -l.s.c) funkcjonałem wypukłym.

(iii) Jeżeli  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest  $\tau$ -ciągłym funkcjonałem, zwanym funkcjonałem perturbacyjnym, wtedy

$$\Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G_\varepsilon + \Phi) = \Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon + \Phi = G + \Phi.$$

(iv)

$$G(u) = \Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \{u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u\}, G(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon), u \in X; \\ \forall u \in X \quad \exists u_\varepsilon \xrightarrow{\tau} u \text{ takie, że} \\ G(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon). \end{cases}$$

Prawdziwe jest również następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.1** Niech  $G = \Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon$ , i załóżmy, że istnieje  $\tau$ -względnie zwarty podzbiór  $X_0 \subset X$  taki, że  $\inf_{X_0} G_\varepsilon = \inf_X G_\varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ). Wtedy  $\inf_X G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_X G_\varepsilon$ . Ponadto, jeżeli  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  jest takie, że  $G_\varepsilon(u_\varepsilon) - \inf_X G_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ , wtedy  $\tau$ -punkt skupienia ciągu  $\{u_\varepsilon : \varepsilon \rightarrow 0\}$  minimalizuje  $G$  na  $X$ .

W rozważanym przypadku, proces homogenizacji zagadnienia  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ , polega na znalezieniu granicznego funkcjonału  $F_h$  (funkcjonału zhomogenizowanego) ciągu funkcjonałów  $F_\varepsilon$  danych przez (3.8), dokładniej poszukujemy

$$\Gamma(\tau)\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon = F_h, \tag{3.10}$$

gdzie topologia  $\tau = ((s - L^p(V)^3) \times (w - L^q(V)^3))$ ,  $L^p(V)^3 = [L^p(V)]^3$ , zaś  $s - L^p(V)^3(w - L^q(V)^3)$  oznacza silną topologię w przestrzeni  $L^p(V)^3$  (słabą w  $L^q(V)^3$ ). Zakładamy, że funkcjonal obciążeń  $L$  dany przez (3.9) jest ciągły w topologii  $\tau = (s - L^p(V)^3) \times (w - L^q(V)^3)$ . W tym celu wystarczy założyć, że  $\mathbf{b} \in L^{p'}(V)^3$ ,  $\Sigma \in L^{p'}(\gamma_1)^3$  i  $\varphi_0 \in W^{1-\frac{1}{q}, q'}(\gamma_2)$ , gdzie  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$  oraz  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . W szczególnym przypadku, możliwe jest przyjęcie założenia o ciągłości  $\varphi_0$  na  $\gamma_2$  oraz znikanie potencjału na  $\partial\gamma_2$ . Wtedy  $L$  pełni rolę funkcjonalu perturbacyjnego, por. własność (iii). Tak więc, w celu znalezienia  $\Gamma(\tau)$ -granicy (3.10) wystarczy zbadać  $\Gamma(\tau)$ -granicę następującego ciągu funkcjonałów  $\{J_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  danego przez

$$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{D}) = \int_V U_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{D}) \, dx. \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Główne twierdzenie o homogenizacji nieliniowych periodycznych kompozytów piezoelektrycznych

**Twierdzenie 3.2** *Przy założeniu (3.3) z Rozdz. 3.1 ciąg funkcjonałów  $\{J_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  jest  $\Gamma(\tau)$ -zbieżny do funkcjonalu*

$$J_h(\mathbf{u}, \mathbf{D}) = \int_V U_h(\mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{D}) \, dx, \quad (3.12)$$

gdzie  $\mathbf{u} \in W^{1,p}(V)^3$ ,  $\mathbf{D} \in L^q(V)^3$  i

$$\begin{aligned} U_h(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho}) &= \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y U(\mathbf{y}, \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y})) + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{d}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\rho}) \, d\mathbf{y} \mid \mathbf{v} \in W_{per}^{1,p}(Y)^3, \mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y) \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

W powyższym twierdzeniu:  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{E}_s^3$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$ ,  $e_{ij}^y(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$  i

$$W_{per}^{1,p}(Y)^3 = \{ \mathbf{v} \in W^{1,p}(Y)^3 \mid \mathbf{v} \text{ jest } Y\text{-periodyczne} \}, \quad (3.14)$$

$$\Delta_{per}(Y) = \left\{ \mathbf{d} \in L^q(Y)^3 \mid \operatorname{div}_y \mathbf{d} = 0 \text{ w } Y, \langle \mathbf{d} \rangle = 0, \mathbf{d} \text{ jest a-p.} \right\}, \quad (3.15)$$

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{d}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

□



*Uwaga. 3.1.* Funkcja  $\mathbf{v} \in W_{per}^{1,p}(Y)^3$  jest  $Y$ -periodyczna, jeżeli ślady  $\mathbf{v}$  są równe na przeciwległych ściankach komórki periodyczności  $Y$ . Równość śladów oznacza, że wartości składowych  $v_i$  są co najmniej równe prawie wszędzie. Podobnie, jeżeli  $\mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y)$ , wtedy ślady  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{N}$  mają przeciwne znaki na przeciwległych ściankach  $Y$ , takie pola wektorowe nazywają się a-p. (antyperiodyczne). Tutaj  $\mathbf{N}$  oznacza jednostkowy wektor normalny skierowany na zewnątrz brzegu  $\partial Y$ .

### Własności granicznej energii $U_h$

(i) Funkcja  $U_h$  jest wypukła.

Ta oczywista własność wynika bezpośrednio z wypukłości funkcji  $U(y, \cdot, \cdot)$  i liniowości operatora  $\mathbf{e}^y(\cdot)$ , cf. [133].

(ii)  $\exists c_1 \geq c'_0 > 0$  takie, że

$$c'_0(|\epsilon|^p + |\rho|^q) \leq U_h(\epsilon, \rho) \leq c_1(|\epsilon|^p + |\rho|^q),$$

dla każdego  $\epsilon \in \mathbb{E}_s^3$ ,  $\rho \in \mathbb{R}^3$ . Stała  $c_1$  jest taka sama jak w (3.3).

### Dowód

Rzeczywiście, z (3.3) i (3.13) otrzymamy

$$U_h(\epsilon, \rho) \leq \langle U(\mathbf{y}, \epsilon, \rho) \rangle \leq c_1(|\epsilon|^p + |\rho|^q).$$

Podobnie, niech  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{d}}) \in W_{per}^{1,p}(Y)^3 \times \Delta_{per}(Y)$  będzie minimizerem zagadnienia minimalizacji (3.13). Taki minimizer jest jednoznaczny, gdyż  $\langle \tilde{\mathbf{v}} \rangle = 0$ . Biorąc pod uwagę (3.3) otrzymamy

$$\begin{aligned} U_h(\epsilon, \rho) &= \langle U(\mathbf{y}, \mathbf{e}^y(\tilde{\mathbf{v}}) + \epsilon, \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{y}) + \rho) \rangle \geq \\ &\geq \langle |\mathbf{e}^y(\tilde{\mathbf{v}}) + \epsilon|^p + |\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{y}) + \rho|^q \rangle \geq c'_0(|\epsilon|^p + |\rho|^q). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Rzeczywiście, z (3.3) wnioskujemy, że

$$c_2(|\epsilon^*|^{p'} + |\rho^*|^{q'}) \leq U^*(\mathbf{y}, \epsilon^*, \rho^*) \leq c_3(|\epsilon^*|^{p'} + |\rho^*|^{q'}), \quad (3.17)$$

gdzie  $c_3 \geq c_2 > 0$  są stałymi i  $\epsilon^* \in \mathbb{E}_s^3$ ,  $\rho^* \in \mathbb{R}^3$ . Jak zwykle zakładamy, że  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ , por. [58]. Tutaj  $U^*$  oznacza funkcję sprzężoną (transformacja Fenchel'a) do  $U$ .

Zauważmy, że jeżeli  $f \leq g$ , to  $g^* \leq f^*$ , por. [133, 58]. Ponieważ  $U^*(\mathbf{y}, \epsilon^*, \rho^*) \geq 0$  i  $U^*(\mathbf{y}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ , możemy wykorzystać uwagę 4.3, Rozdz. I; w [58] i nierówność (3.17) jest spełniona.

Korzystając ze wzoru na efektywny potencjał dualny (3.18) podanego w Lemacie 3.1 poniżej, otrzymamy

$$U_h^*(\epsilon^*, \rho^*) \leq \langle U^*(\mathbf{y}, \epsilon^*, \rho^*) \rangle \leq c_3(|\epsilon^*|^{p'} + |\rho^*|^{q'}).$$

Więc

$$U_h(\epsilon, \rho) \geq c'_0(|\epsilon|^p + |\rho|^q).$$

Zhomogenizowany potencjał dualny jest funkcją makroskopowych naprężeń, które są dualne do odkształceń, a więc oznaczane przez  $\epsilon^*$  oraz makroskopowego pola elektrycznego, które jest dualne do indukcji, a więc oznaczane dalej przez  $\rho^*$ .

*Uwaga 3.2.* Dla  $p = q = 2$  dowód nierówności (3.16) można przeprowadzić w inny sposób, w którym stałą  $c'_0$  wyznacza się efektywnie. W tym przypadku mamy

$$\begin{aligned} U_h(\epsilon, \rho) &\geq c_0 \langle |\mathbf{e}^y(\tilde{\mathbf{v}}) + \epsilon|^2 + |\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{y}) + \rho|^2 \rangle = \\ &= \frac{c_0}{|Y|} \int_Y \left[ |\mathbf{e}^y(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{y}))|^2 + 2\epsilon : \mathbf{e}^y(\tilde{\mathbf{v}}) + |\epsilon|^2 + |\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{y})|^2 + 2\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{y}) \cdot \rho + |\rho|^2 \right] d\mathbf{y} \geq \\ &\geq \frac{c_0}{|Y|} \int_Y (|\epsilon|^2 + |\rho|^2) d\mathbf{y} = c'_0(|\epsilon|^2 + |\rho|^2), \end{aligned}$$

ponieważ  $\langle \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{y}) \rangle = 0$  i  $\int_Y \mathbf{e}^y(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = 0$ ; tutaj  $c'_0 = \frac{c_0}{|Y|}$ .

Aby udowodnić twierdzenie 3.2, sformułujemy dwa lematy.

**Lemat 3.1.** Makroskopowy potencjał dualny  $U_h^*$  dany jest wzorem

$$\begin{aligned} U_h^*(\epsilon^*, \rho^*) &= \inf \left\{ \langle U^*(\mathbf{y}, \mathbf{t}(\mathbf{y}) + \epsilon^*, \mathbf{E}^y(\xi) + \rho^*) \rangle \mid \right. \\ &\left. \mathbf{t} \in \mathcal{S}_{per}(Y), \xi \in W_{per}^{1,q'}(Y) \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdzie  $U^*$  jest funkcją sprzężoną do  $U(\mathbf{y}, \cdot, \cdot)$ ,  $\epsilon^* \in \mathbb{E}_s^3$ ,  $\rho^* \in \mathbb{R}^3$  i

$$\mathcal{S}_{per}(Y) = \left\{ \mathbf{t} \in L^{p'}(Y, \mathbb{E}_s^3) \mid \operatorname{div}_y \mathbf{t} = 0 \text{ w } Y, \langle \mathbf{t} \rangle = 0, \mathbf{t} \cdot \mathbf{N} \text{ jest a-p.} \right\}. \quad (3.19)$$

**Dowód**

Rozważmy sprzężony potencjał zhomogenizowany:

$$U_h^*(\epsilon^*, \rho^*) = \sup \left\{ \epsilon^* : \epsilon + \rho^* \cdot \rho - U_h(\epsilon, \rho) \mid \epsilon \in \mathbb{E}_s^3, \rho \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

stąd

$$\begin{aligned}
 U_h^*(\epsilon^*, \rho^*) &= \sup_{\epsilon \in \mathbb{E}_s^3, \rho \in \mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y (\epsilon^* : \epsilon + \rho^* \cdot \rho) \, dy + \right. \\
 &\quad \left. - \inf_{\mathbf{v} \in W^{1,p}(Y)^3, \mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y)} \int_Y U(\mathbf{y}, \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y})) + \epsilon, \mathbf{d}(\mathbf{y}) + \rho) \, dy \right\} = \quad (3.20) \\
 &= \sup \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_Y [(\epsilon^* : (\mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y})) + \epsilon) + \rho^* \cdot (\mathbf{d}(\mathbf{y}) + \rho) - U(\mathbf{y}, \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y})) + \epsilon, \right. \\
 &\quad \left. \mathbf{d}(\mathbf{y}) + \rho)] \, dy \mid \mathbf{v} \in W^{1,p}(Y)^3, \mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y), \epsilon \in \mathbb{E}_s^3, \rho \in \mathbb{R}^3 \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie  $\int_Y \epsilon^* : \mathbf{e}^y(\mathbf{v}) \, dy = 0$  i  $\langle \mathbf{d}(\mathbf{y}) \rangle = 0$ .

Ostatnią relację można zapisać w postaci

$$U_h^*(\epsilon^*, \rho^*) = \frac{1}{|Y|} (j + I_{\mathcal{H}})^*(\epsilon^*, \rho^*), \quad (3.21)$$

gdzie

$$j(\mathbf{t}, \gamma) = \int_Y U(\mathbf{y}, \mathbf{t}(\mathbf{y}), \gamma(\mathbf{y})) \, dy, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{H} = (\mathbf{e}^y(W_{per}^{1,p}(Y)^3) \oplus \mathbb{E}_s^3) \times (\Delta_{per}(Y) \oplus \mathbb{R}^3). \quad (3.23)$$

Tensor  $\epsilon^*$  oraz wektor  $\rho^*$  są stałymi funkcjami w przestrzeniach  $L^{p'}(Y, \mathbb{E}_s^3)$  i  $L^{q'}(Y)^3$ , odpowiednio (wielkościami makroskopowymi). Stąd mamy, patrz [100]

$$(j + I_{\mathcal{H}})^* = j^* \square I_{\mathcal{H}^\perp}, \quad (3.24)$$

gdzie  $\square$  oznacza inf-convolution:

$$j^* \square I_{\mathcal{H}^\perp}(x) = \inf_{y+z=x} (j^*(y) + I_{\mathcal{H}^\perp}(z)).$$

$I_{\mathcal{H}}$  oznacza funkcję indykatorową zbioru  $\mathcal{H}$ , czyli funkcję zbioru przyjmującą wartość zero na zbiorze i nieskończoność poza zbiorem. W tej definicji  $x, y, z$  są elementami przestrzeni  $\mathcal{H}^\perp$ .

Funkcjonał sprzężony do  $j$  definiujemy jako:

$$j^*(\mathbf{t}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \int_Y U^*(\mathbf{y}, \mathbf{t}^*(\mathbf{y}), \boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{y})) d\mathbf{y},$$

$$\mathcal{H}^\perp = \left[ \left( \mathbf{e}^y(W_{per}^{1,p}(Y)^3) \right)^\perp \cap (\mathbb{E}_s^3)^\perp \right] \times \left[ (\Delta_{per}(Y))^\perp \cap (\mathbb{R}^3)^\perp \right]. \quad (3.25)$$

Możemy określić następujące przestrzenie ortogonalne:

$$(\mathbb{E}_s^3)^\perp = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in L^{p'}(Y, \mathbb{E}_s^3) \mid \langle \boldsymbol{\tau} \rangle = 0 \right\},$$

$$\left( \mathbf{e}^y(W_{per}^{1,p}(Y)^3) \right)^\perp = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in L^{p'}(Y, \mathbb{E}_s^3) \mid \int_Y \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) : \mathbf{e}^y(\mathbf{v}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in W_{per}^{1,p}(Y)^3 \right\} =$$

$$= \left\{ \boldsymbol{\tau} \in L^{p'}(Y, \mathbb{E}_s^3) \mid \operatorname{div}_y \boldsymbol{\tau} \in L^{p'}(Y)^3, \operatorname{div}_y \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ w } Y; \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N} \text{ jest a-p.} \right\},$$

$$(\Delta_{per}(Y))^\perp = \left\{ \boldsymbol{\phi} \in L^{q'}(Y)^3 \mid \int_Y \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y) \right\} =$$

$$= \left\{ \boldsymbol{\phi} \in L^{q'}(Y)^3 \mid \boldsymbol{\phi} = \mathbf{E}^y(\varphi), \varphi \in W_{per}^{1,q'}(Y) \right\}.$$

Stąd

$$\int_Y \mathbf{d}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}^y(\varphi) d\mathbf{y} = \int_Y \varphi(\operatorname{div}_y \mathbf{d}) d\mathbf{y} - \int_{\partial Y} \varphi d_i N_i ds = 0 \quad \forall \mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y),$$

pod warunkiem, że  $\varphi \in W_{per}^{1,q'}(Y)$ . Tutaj  $\mathbf{E}^y(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}$ .

Biorąc pod uwagę (3.24) i (3.25), wzór (3.21) przyjmie postać

$$U_h^*(\boldsymbol{\epsilon}^*, \boldsymbol{\rho}^*) = \frac{1}{|Y|} (j^* \square I_{\mathcal{H}^\perp})(\boldsymbol{\epsilon}^*, \boldsymbol{\rho}^*) =$$

$$= \inf \frac{1}{|Y|} \left\{ j^*(\mathbf{t}_1, \boldsymbol{\gamma}_1) + I_{\mathcal{H}^\perp}(\mathbf{t}_2, \boldsymbol{\gamma}_2) \mid \boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2, \right.$$

$$\boldsymbol{\rho}^* = \left\{ \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{t}_\alpha \in \mathcal{S}_{per}(Y), \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E}^y(\varphi_\alpha), \varphi_\alpha \in W_{per}^{1,q'}(Y), \alpha = 1, 2 \right\} =$$

$$= \inf \frac{1}{|Y|} \left\{ j^*(\boldsymbol{\epsilon}^* - \mathbf{t}, \boldsymbol{\rho}^* - \boldsymbol{\gamma}) \mid \mathbf{t} \in \mathcal{S}_{per}(Y), \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E}^y(\varphi), \varphi \in W_{per}^{1,q'}(Y) \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \langle U^*(\mathbf{y}, \mathbf{t} + \boldsymbol{\epsilon}^*, \mathbf{E}^y(\varphi) + \boldsymbol{\rho}^*) \mid \mathbf{t} \in \mathcal{S}_{per}(Y), \varphi \in W_{per}^{1,q'}(Y) \right\},$$

ponieważ  $\mathcal{S}_{per}(Y)$  i  $W_{per}^{1,q'}(Y)$  są przestrzeniami liniowymi. Ten fakt zapewnia definicja (3.18). To kończy dowód.

**Wniosek 3.1.** Makroskopowa entalpia elektryczna  $H_h(\mathbf{e}, \mathbf{E})$  może być wyznaczona jako cząstkowe wklęsłe sprzężenie energii  $U_h$ , patrz [157]

$$H_h(\mathbf{e}, \mathbf{E}) = \inf \left\{ -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + U_h(\mathbf{e}, \mathbf{E}) \mid \mathbf{D} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (3.26)$$

Postępując analogicznie jak w dowodzie relacji (3.18), otrzymamy ostatecznie

$$H_h(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho}^*) = \inf_{\mathbf{v} \in W_{per}^{1,p}(Y)^3} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in W_{per}^{1,q'}(Y)} \langle H(\mathbf{y}, \mathbf{e}^y(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{E}^y(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\rho}^*) \rangle, \quad (3.27)$$

gdzie  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{E}_s^3$ ,  $\boldsymbol{\rho}^* \in \mathbb{R}^3$  i

$$H(\mathbf{y}, \mathbf{e}, \mathbf{E}) = \inf \left\{ -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + U(\mathbf{y}, \mathbf{e}, \mathbf{E}) \mid \mathbf{D} \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (3.28)$$

jest mikroskopową entalpią elektryczną. Jak już wspomnieliśmy, asymptotyczna homogenizacja liniowych piezokompozytów była po raz pierwszy przedstawiona w [157].

**Lemat 3.2.** Niech  $\mathbf{t} \in S_{per}(Y)$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in W_{per}^{1,q'}(Y)$ ,  $\psi \in \mathcal{D}(V)$ . Niech ograniczone ciągi  $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset W^{1,p}(V)^3$ ,  $\{\mathbf{D}^\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \mathbf{W}(\text{div}, V)$  będą takie, że

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon &\rightarrow \mathbf{u} \quad \text{silnie w } L^p(V)^3, \\ \mathbf{D}^\varepsilon &\rightharpoonup \mathbf{D} \quad \text{słabo w } L^q(V)^3, \end{aligned}$$

gdym  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wtedy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V \psi(\mathbf{x}) t_{ij} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.29)$$

$$D_i^\varepsilon(\mathbf{x}) E_i \left( \boldsymbol{\xi} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right) \rightharpoonup D_i(\mathbf{x}) E_i(\langle \boldsymbol{\xi} \rangle) \quad \text{w } \mathcal{D}'(V) \text{ gdy } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

Tutaj  $\mathcal{D}'(V)$  jest przestrzenią dystrybucji lub dualną do przestrzeni  $\mathcal{D}(V)$ .

**Dowód wzoru (3.29).** Połóżmy

$$R_\varepsilon = \int_V \psi(\mathbf{x}) t_{ij} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}.$$

Całkując przez części, otrzymamy

$$R_\varepsilon = - \int_V \psi_{,j}(\mathbf{x}) t_{ij} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_V \psi(\mathbf{x}) t_{ij,j} \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) u_i^\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Po przeskalowaniu  $\mathbf{y} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$  mamy  $\frac{\partial}{\partial y_i} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i}$ , w konsekwencji  $\operatorname{div} \mathbf{y} \mathbf{t} = 0$  w  $Y$  implikuje  $\varepsilon(\operatorname{div} \mathbf{t})(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = 0$  lub  $(\operatorname{div} \mathbf{t})(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) = 0$  w  $V$ . Stąd  $t_{ij,j}(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \rightarrow \langle t_{ij,j}(\mathbf{y}) \rangle = 0$  w  $L^{p'}(V)$  słabo, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dlatego  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon = 0$ , co kończy dowód.

Do dowodu (3.30) wykorzystamy następujący rezultat Murat [113].

**Wniosek 3.2.** Niech  $q$  i  $q'$  spełniają warunki

$$1 < q, \quad q' < +\infty, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

i niech  $V$  będzie ograniczonym lub nieograniczonym obszarem w  $\mathbb{R}^N$ . Zdefiniujemy następujące przestrzenie:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\operatorname{div}, V) &= \left\{ \mathbf{u} \in L^q(V)^N \mid \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^q(V) \right\}, \\ \mathbf{W}(\operatorname{rot}, V) &= \left\{ \mathbf{v} \in L^{q'}(V)^N \mid \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^{q'}(V, \mathbb{E}^N) \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

a  $\mathbb{E}^N$  jest przestrzenią macierzy  $N \times N$ . W przestrzeniach  $\mathbf{W}(\operatorname{div}, V)$  i  $\mathbf{W}(\operatorname{rot}, V)$  są określone normy:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}(\operatorname{div}, V)} &= \|\mathbf{u}\|_{L^q(V)^N} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^q(V)}, \\ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}(\operatorname{rot}, V)} &= \|\mathbf{v}\|_{L^{q'}(V)^N} + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{L^{q'}(V, \mathbb{E}^N)}. \end{aligned}$$

Jeżeli dwa ciągi  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{W}(\operatorname{div}, V)$ ,  $\{\mathbf{v}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{W}(\operatorname{rot}, V)$  spełniają warunki

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &\text{ są ograniczone w } \mathbf{W}(\operatorname{div}, V), & \mathbf{u}_n &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ słabo w } L^q(V)^N, \\ \mathbf{v}_n &\text{ są ograniczone w } \mathbf{W}(\operatorname{rot}, V), & \mathbf{v}_n &\rightharpoonup \mathbf{v} \text{ słabo w } L^{q'}(V)^N, \end{aligned}$$

to

$$\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{w } \mathcal{D}'(V) \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

**Dowód wzoru (3.30).** Zauważmy, że  $\operatorname{rot} \mathbf{E}^y(\xi) = 0$ , stąd  $\mathbf{E}(\xi(\frac{\cdot}{\varepsilon})) \in \mathbf{W}(\operatorname{rot}, V)$ . Korzystając z wniosku (3.1), stwierdzamy, że

$$D_i^\varepsilon(\mathbf{x}) E_i \left( \xi \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right) \rightarrow D_i(\mathbf{x}) E_i(\langle \xi \rangle) = 0 \quad \text{w } \mathcal{D}'(V) \text{ gdy } \varepsilon \rightarrow 0,$$

ponieważ  $\xi(\frac{x}{\varepsilon}) \rightharpoonup \langle \xi(\mathbf{y}) \rangle$  słabo w  $L^q(V)$ , patrz [52, 90]. Dowód jest kompletny.

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia 3.2.

**Dowód Twierdzenia 3.2.** Dowód w naturalny sposób składa się z dwóch części.

**I.** Najpierw pokażemy, że

$$J_i = \Gamma(\tau)\text{-}\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon \geq J_h.$$

Przypomnijmy, że  $\tau = w\text{-}(W^{1,p}(\Omega)^3 \times L^q(\Omega)^3)$ . Niech  $\{\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset W^{1,p}(\Omega)^3 \times L^q(\Omega)^3$  będzie ograniczonym ciągiem takim, że

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{silnie w } L^p(\Omega)^3,$$

$$\mathbf{D}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{D} \quad \text{słabo w } L^q(\Omega)^3,$$

jeżeli  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Należy pokazać

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) &\geq J_h(\mathbf{u}, \mathbf{D}) = \int_V U_h(\mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{D}) \, dx = \\ &= \sup \left\{ \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}^* \cdot \mathbf{D} - U_h^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}^*)] \, dx \mid \boldsymbol{\sigma} \in L^{p'}(V, \mathbb{E}_s^3), \mathbf{D}^* \in L^{q'}(V)^3 \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

**Krok I.** Po pierwsze weźmy  $\boldsymbol{\sigma}$  oraz  $\mathbf{D}^*$  w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \sum_{K \in \mathcal{K}} \chi_{V_K}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^K, & \boldsymbol{\sigma}^K &\in \mathbb{E}_s^3, \\ \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) &= \sum_{K \in \mathcal{K}} \chi_{V_K}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{*K}, & \mathbf{D}^{*K} &\in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \quad (3.32)$$

gdzie funkcja charakterystyczna zbioru zdefiniowana jest jako

$$\chi_{V_K}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \mathbf{x} \in V_K, \\ 0 & \text{gdy } \mathbf{x} \notin V_K. \end{cases}$$

Tutaj  $\{V_K\}_{K \in \mathcal{K}}$  jest rodziną otwartych rozłącznych zbiorów takich, że  $\bar{V} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \bar{V}_K$ .

Dla  $\delta > 0$  weźmiemy

$$V_K^\delta = \{x \in V_K \mid \text{dist}(x, \partial V_K) > \delta\}. \quad (3.33)$$

Niech  $\psi_K^\delta \in \mathcal{D}(V_K)$  będzie takie, że  $0 \leq \psi_K^\delta \leq 1$  i  $\psi_K^\delta = 1$  dla  $x \in V_K^\delta$ .

Niech  $(\mathbf{t}^K, \varphi^K) \in \mathcal{S}_{per}(Y) \times W_{per}^{1,q'}(Y)$ ,  $K \in \mathcal{K}$ . Na mocy Lematu 3.2, biorąc pod uwagę, że  $U \geq 0$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_V U\left(\frac{x}{\varepsilon}, \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{D}^\varepsilon\right) dx + \right. \\ &\quad \left. - \sum_K \int_{V_K} \psi_K^\delta(x) t_{ij}^K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) dx - \sum_K \int_{V_K} \psi_K^\delta(x) D_i^\varepsilon(x) E_i\left(\varphi^K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \right\} = \\ &= \sum_K \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V_K} \psi_K^\delta(x) U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}(\varphi^K))}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{D}^\varepsilon\right) dx, \end{aligned}$$

gdzie

$$U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}(\varphi^K))}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) = U(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{t}^K : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{E}(\varphi^K) \cdot \boldsymbol{\rho}.$$

Nierówność Fenchel'a zastosowana do  $[(\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{D}^\varepsilon); (\boldsymbol{\sigma}^K, \mathbf{D}^{*K})]$  daje:

$$U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}^y(\varphi^K))}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\rho}^*) \geq \boldsymbol{\sigma}^K : \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \mathbf{D}^{*K} \cdot \mathbf{D} - U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}^y(\varphi^K))}(\mathbf{y}, \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon), \mathbf{D}^\varepsilon).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) &\geq \\ &\geq \sum_{K \in \mathcal{K}} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V_K} \psi_K^\delta \left[ \boldsymbol{\sigma}^K : \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \mathbf{D}^{*K} \cdot \mathbf{D}^\varepsilon - U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}^y(\varphi^K))}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}^K, \mathbf{D}^{*K}) \right] dx. \end{aligned}$$

Typowe przekształcenia prowadzą do

$$\begin{aligned} U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}^y(\varphi^K))}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}^K, \mathbf{D}^{*K}) &= \\ &= \sup \left\{ \boldsymbol{\sigma}^K : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}^{*K} \cdot \boldsymbol{\rho} - U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}^y(\varphi^K))}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) \mid \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}_s^3, \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \\ &= \sup \left\{ (\boldsymbol{\sigma}^K + \mathbf{t}^K) : \boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{D}^{*K} + \mathbf{E}^y(\varphi^K)) \cdot \boldsymbol{\rho} - U(\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) \mid \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}_s^3, \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \\ &= U^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}^K + \mathbf{t}^K(\mathbf{y}), \mathbf{D}^{*K} + \mathbf{E}^y(\varphi^K)). \end{aligned}$$

Tak więc mamy

$$\left\langle U_{(\mathbf{t}^K, \mathbf{E}^y(\varphi^K))}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}^K, \mathbf{D}^{*K}) \right\rangle = \left\langle U^*(\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}^K + \mathbf{t}^K(\mathbf{y}), \mathbf{D}^{*K} + \mathbf{E}^y(\varphi^K(\mathbf{y}))) \right\rangle. \quad (3.34)$$



Więc

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \geq \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_{V_K} \psi_K^\delta(\mathbf{x}) \left\{ \boldsymbol{\sigma}^K : \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}^{*K} \cdot \mathbf{D} - \left\langle U^*[\mathbf{y}, \boldsymbol{\sigma}^K + \mathbf{t}^K(\mathbf{y}), \mathbf{D}^{*K} + \mathbf{E}^y(\varphi^K(\mathbf{y}))] \right\rangle \right\} dx.$$

Biorąc supremum prawej strony ostatniej nierówności, gdy  $(\mathbf{t}^K, \varphi^K)$  przebiega zbiór  $\mathcal{S}_{per}(Y) \times W_{per}^{1,q'}(Y)$ , otrzymamy

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \geq \sum_{K \in \mathcal{K}} \int_{V_K} \psi_K^\delta \left[ \boldsymbol{\sigma}^K : \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}^{*K} \cdot \mathbf{D} - U_h^*(\boldsymbol{\sigma}^K, \mathbf{D}^{*K}) \right] dx,$$

ponieważ  $\sup(-f) = -\inf f$ .

Przypomnijmy, że  $U_h^*$  jest dane wzorem (3.18), stąd  $\psi_K^\delta \geq 0$  i  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{D}^*(\mathbf{x})$  są podane wzorem (3.32), dlatego

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \geq \int_V \sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x})] dx + \int_V \sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta(\mathbf{x}) U_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{D}^*(\mathbf{x})) dx.$$

Nierówność

$$0 \leq \sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta \leq 1,$$

implikuje nierówność

$$0 \leq \sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta(\mathbf{x}) U_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{D}^*(\mathbf{x})) \leq U_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{D}^*(\mathbf{x})),$$

ponieważ  $U_h^* \geq 0$ . Stąd mamy

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \geq \int_V \sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta(\mathbf{x}) [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x})] dx + \int_V U_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{D}^*(\mathbf{x})) dx.$$

Przechodzimy teraz do granicy. Gdy  $\delta \rightarrow 0$  to  $\sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta(\mathbf{x})$  dąży do jedności dla prawie wszystkich (p.w.)  $\mathbf{x} \in \Omega$  i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) &\geq \\ &\geq \int_V [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x})] dx - \int_V U_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{D}^*(\mathbf{x})) dx. \end{aligned}$$

**Krok II.** Dla każdego  $\boldsymbol{\sigma} \in L^{p'}(V, \mathbb{E}_s^3)$  oraz  $\mathbf{D}^* \in L^{q'}(V)^3$  istnieją ciągi  $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^{p'}(V, \mathbb{E}_s^3)$  i  $\{\mathbf{D}^{*n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^{q'}(V)^3$  funkcji prostych takie, że

$$\boldsymbol{\sigma}^n \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \quad \text{w } L^{p'}(V, \mathbb{E}_s^3) \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty,$$

$$\mathbf{D}^{*n} \rightarrow \mathbf{D}^* \quad \text{w } L^{q'}(V)^3 \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty,$$

odpowiednio. Tutaj

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{x}) &= \sum_{K(n)} \chi_{V_{K(n)}}^{\delta_n}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{K(n)}, & \boldsymbol{\sigma}^{K(n)} &\in \mathbb{E}_s^3, \\ \mathbf{D}^{*n}(\mathbf{x}) &= \sum_{K(n)} \chi_{V_{K(n)}}^{\delta_n}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{*K(n)}, & \mathbf{D}^{*K(n)} &\in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

$$\text{i } \delta_n = \frac{1}{n}, \text{ diam } V_{K(n)} \leq \delta_n, \bar{V} = \bigcup_{K(n)} \bar{V}_{K(n)}.$$

Z poprzedniego kroku wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) &\geq \\ &\geq \int_V [\boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{x}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}^{*n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x})] dx - \int_V U_h^*(\boldsymbol{\sigma}^n(\mathbf{x}), \mathbf{D}^{*n}(\mathbf{x})) dx. \end{aligned}$$

Przejdźcie do granicy po prawej stronie ostatniej nierówności, gdy  $n \rightarrow \infty$  prowadzi ostatecznie do:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \geq \int_V [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) - U_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \mathbf{D}(\mathbf{x}))] dx.$$

**II.** Pokażemy teraz, że dla dowolnego  $(\mathbf{u}, \mathbf{D}) \in W^{1,p}(V)^3 \times L^q(V)^3$  istnieje ciąg  $\{\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0} \subset W^{1,p}(\Omega)^3 \times L^q(\Omega)^3$  taki, że

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{w } W^{1,p}(V)^3 \quad \text{słabo,}$$

$$\mathbf{D}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{D} \quad \text{w } L^q(V)^3 \quad \text{słabo,}$$

gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  i

$$J_h(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon). \quad (3.35)$$

Oczywiście, zbieżność ciągu  $\mathbf{u}^\varepsilon$  do  $\mathbf{u}$  jest silna w  $L^p(V)^3$ .

**Krok III.** Przyjmijmy

$$u_i(\mathbf{x}) = \epsilon_{ij} x_j + a_i, \quad \epsilon \in \mathbb{E}_s^3, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (3.36)$$

zaś  $\mathbf{D}$  jest pewnym elementem z  $\mathbb{R}^3$  traktowanym jako stała funkcja z  $L^q(V)^3$ .  
Następnie połóżmy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{v}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \\ \mathbf{D}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mathbf{D}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{d}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.37)$$

gdzie  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{d}})$  jest rozwiązaniem zagadnienia lokalnego. Tak, więc mamy

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{w } L^p(V)^3 \quad \text{silnie,}$$

$$\mathbf{D}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{D} \quad \text{w } L^q(V)^3 \quad \text{słabo,}$$

gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Stosując Tw. 1.5 z pracy Dacorogna [52], Rozdz. 2, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_h(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V U\left[\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \epsilon + \mathbf{e}(\tilde{\mathbf{v}})\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{d}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right] dx = \\ &= \int_V \langle U[\mathbf{y}, \epsilon + \mathbf{e}^y(\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{y})), \mathbf{D} + \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{y})] \rangle dx = \\ &= \int_V U_h(\epsilon, \mathbf{D}) dx = \int_V U_h[\mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})), \mathbf{D}(\mathbf{x})] dx, \end{aligned}$$

ponieważ  $\mathbf{u}$  jest dane wzorem (3.36) i  $\mathbf{D} \in L^q(V)^3$  jest funkcją stałą.

**Krok IV.** Niech  $\mathbf{u}$  będzie ciągłą afiniczną funkcją jako element przestrzeni  $W^{1,p}(V)^3$  oraz  $\mathbf{D}$  funkcją prostą w przestrzeni  $L^q(V)^3$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \epsilon^K \mathbf{x} + \mathbf{a}^K, \quad \mathbf{x} \in V_K, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \sum_K \chi_{V_K}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^K, \quad \mathbf{D}^K \in \mathbb{R}^3, \quad (3.39)$$

gdzie  $\boldsymbol{\epsilon}^K \in \mathbb{E}_s^3$ ,  $\mathbf{a}^K \in \mathbb{R}^3$  i  $\{V_K\}_{K \in \mathcal{K}}$  jest skończonym podziałem obszaru  $V$  na wielościany. Połóżmy

$$V_K^\delta = \{\mathbf{x} \in V_K \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \partial V_K) > \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Niech  $\psi_K^\delta \in \mathcal{D}(V_K)$  będzie takie, że  $0 \leq \psi_K^\delta \leq 1$  i  $\psi_K^\delta|_{V_K^\delta} = 1$ . Z każdą rodziną funkcji  $(\mathbf{v}^K, \mathbf{d}^K) \in W_{per}^{1,p}(Y)^3 \times \Delta_{per}(Y)$  związane są następujące ciągi:

$$\mathbf{u}^{\varepsilon, \delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta(\mathbf{x}) \mathbf{v}^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{D}^{\varepsilon, \delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x}) + \sum_{K \in \mathcal{K}} \psi_K^\delta(\mathbf{x}) \mathbf{d}^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right). \quad (3.41)$$

Jest oczywiste, że

$$\mathbf{u}^{\varepsilon, \delta} \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{w } L^p(V)^3 \quad \text{silnie,}$$

$$\mathbf{D}^{\varepsilon, \delta} \rightharpoonup \mathbf{D} \quad \text{w } L^q(V)^3 \quad \text{słabo,}$$

gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Przypominamy, że dla  $N_0 \in \mathbb{N}$  dostatecznie dużego mamy:

$$\int_{V_K} \left| \mathbf{v}^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \right|^p d\mathbf{x} \leq N_0 \int_Y |\mathbf{v}^K(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}.$$

Weźmy  $0 < t < 1$ . Ponieważ  $t\psi_K^\delta + t(1 - \psi_K^\delta) + (1 - t) = 1$ , więc z wypukłości funkcji  $U\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \cdot, \cdot\right)$  mamy

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(t\mathbf{u}^{\varepsilon, \delta}, t\mathbf{D}^{\varepsilon, \delta}) &= \sum_K \int_{V_K} U\left[\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\psi_K^\delta\left(\boldsymbol{\epsilon}^K + \mathbf{e}(\mathbf{v}^K)\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right) + t(1 - \psi_K^\delta)\boldsymbol{\epsilon}^K + \right. \\ &+ (1 - t)\frac{\varepsilon t}{1 - t}\left(\psi_{K,(i)}^\delta(\mathbf{x})v_j^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right), t\psi_K^\delta\left(\mathbf{D}^K + \mathbf{d}^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right) + \\ &+ t(1 - \psi_K^\delta)\mathbf{D}^K + (1 - t)\mathbf{0}\left. \right] d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \sum_K \left\{ \int_{V_K} U\left[\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^K + \mathbf{e}(\mathbf{v}^K)\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \mathbf{D}^K + \mathbf{d}^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right] d\mathbf{x} + \right. \\ &+ c_1\left(|\boldsymbol{\epsilon}^K|^p + |\mathbf{D}^K|^q\right) \int_{V_K} (1 - \psi_K^\delta) d\mathbf{x} + \\ &\left. + c_1(1 - t) \int_{V_K} \frac{\varepsilon t}{1 - t} \left| \left(\psi_{K,(i)}^\delta(\mathbf{x})v_j^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right) \right|^p d\mathbf{x} \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Przypominamy, że  $U \geq 0$ .

Niech teraz  $\varepsilon$  zbiega do zera. Wtedy otrzymamy

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(t\mathbf{u}^{\varepsilon, \delta}, t\mathbf{D}^{\varepsilon, \delta}) \leq \sum_K \left\{ |V_K| \left\langle U \left( \mathbf{y}, \boldsymbol{\epsilon}^K + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}^K(\mathbf{y})), \mathbf{D}^K + \mathbf{d}^K(\mathbf{y}) \right) \right\rangle + c_1 \left( |\boldsymbol{\epsilon}^K|^p + |\mathbf{D}^K|^q \right) \int_{V_K} (1 - \psi_K^\delta) dx \right\}.$$

Następnie, niech  $t \rightarrow 1^-$  oraz  $\delta \rightarrow 0$ . Ciąg  $\sum_K \psi_K^\delta(\mathbf{x})$  zbiega do 1 prawie wszędzie, gdy  $\delta \rightarrow 0$ . Stąd

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 1^-}} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(t\mathbf{u}^{\varepsilon, \delta}, t\mathbf{D}^{\varepsilon, \delta}) &\leq \\ &\leq \sum_K |V_K| \left\langle U \left( \mathbf{y}, \boldsymbol{\epsilon}^K + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}^K(\mathbf{y})), \mathbf{D}^K + \mathbf{d}^K(\mathbf{y}) \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

W dalszej części dowodu wykorzystamy następujący lemat (Attouch [11]).

**Lemat 3.3.** Niech  $\{a_{A,B} \mid A \in \mathbb{N}, B \in \mathbb{N}\}$  podwójnie indeksowaną rodziną w  $\overline{\mathbb{R}}$  (ang. *the extended reals*). Wtedy istnieje odwzorowanie  $A \rightarrow B(A)$ , rosnące do  $+\infty$ , takie, że

$$\limsup_{A \rightarrow \infty} a_{A, B(A)} \leq \limsup_{B \rightarrow \infty} \limsup_{A \rightarrow \infty} a_{A, B}$$

□

Na mocy tego lematu konstruujemy odwzorowanie  $\varepsilon \rightarrow (t(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$  z  $(t(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) \rightarrow (1^-, 0)$  takie, że po przyjęciu

$$\mathbf{u}^\varepsilon = t(\varepsilon)\mathbf{u}^{\varepsilon, \delta}, \quad \mathbf{D}^\varepsilon = t(\varepsilon)\mathbf{D}^{\varepsilon, \delta},$$

z (3.43) otrzymujemy

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \leq \sum_K |V_K| \left\langle U \left( \mathbf{y}, \boldsymbol{\epsilon}^K + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}^K(\mathbf{y})), \mathbf{D}^K + \mathbf{d}^K(\mathbf{y}) \right) \right\rangle. \quad (3.44)$$

Biorąc infimum prawej strony ostatniej nierówności, gdy  $(\mathbf{v}^K, \mathbf{d}^K)$  przebiegają  $W_{per}^{1,p}(Y)^3 \times \Delta_{per}(Y)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} J_s(\mathbf{u}, \mathbf{D}) &\leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon) \leq \sum_K |V_K| U_h(\boldsymbol{\epsilon}^K, \mathbf{D}^K) = \\ &= \int_{\Omega} U_h(\mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{D}) dx = J_h(\mathbf{u}, \mathbf{D}), \end{aligned} \quad (3.45)$$

57355  
http://rcin.org.pl



gdzie  $J_s$  oznacza  $\Gamma(\tau)$ -lim sup  $J_\varepsilon$ , gdzie tak jak poprzednio topologia  $\tau = (w\text{-}W^{1,p}(V)^3) \times (w\text{-}L^q(V)^3)$ . W szacowaniu (3.45) musieliśmy wykorzystać fakt, że

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon &\rightarrow \mathbf{u} && \text{silnie w } L^p(V)^3, \\ \mathbf{D}^{\varepsilon,\delta} &\rightharpoonup \mathbf{D} && \text{słabo w } L^q(V)^3, \end{aligned}$$

gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Krok V.** Wypukłość funkcjonału  $J_\varepsilon$  jest własnością niezmienniczą przejścia granicznego  $\Gamma$ -limit. Na mocy własności (ii) energii zhomogenizowanej  $U_h$  mamy

$$J_s(\mathbf{u}, \mathbf{D}) \leq c_1 \int_V (|\mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^p + |\mathbf{D}(\mathbf{x})|^q) \, dx,$$

gdzie  $\mathbf{u} \in W^{1,p}(V)^3$ ,  $\mathbf{D} \in L^q(V)^3$ . Ponieważ funkcjonal  $J_s$  jest wypukły i skończony, jest więc ciągły na przestrzeni  $W^{1,p}(V)^3 \times L^q(V)^3$ . Wykorzystując własności potencjału shomogenizowanego  $U_h$ , stwierdzamy, że  $J_h$  jest również wypukłym i ciągłym funkcjonałem na tej przestrzeni. Ze względu na gęstość kawałkami afinicznych funkcji ciągłych w przestrzeni  $W^{1,p}(V)$  i kawałkami stałych funkcji w  $L^q(V)$ , por. [58], nierówność  $J_s(\mathbf{u}, \mathbf{D}) \leq J_h(\mathbf{u}, \mathbf{D})$  rozszerza się na  $W^{1,p}(V)^3 \times L^q(V)^3$ , patrz [101, 156]. To kończy dowód.

*Uwaga 3.3.* Dowód Tw. 3.2 jest również słuszny dla  $\mathbf{u} \in W^{1,p}(V)^3$  z  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  na  $\gamma_0$  i  $\mathbf{D} \in \mathbf{W}(\text{div}, V)$  spełniających  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  w  $V$ . Dla prostoty przyjmijmy  $\gamma_3 = \emptyset$ , wtedy  $\gamma_2 = \partial V$ . Następnie niech  $\mathbf{u}$  będzie zdefiniowane tak jak we wzorze (3.38), z warunkiem  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  na  $\gamma_0$  oraz

$$\mathbf{D}^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}^K\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad \mathbf{d}^K = \mathbf{d}.$$

Tutaj  $\mathbf{d}$  jest elementem w  $\Delta_{\text{per}}(Y)$ . Ponieważ  $\text{div}_y \mathbf{d}(\mathbf{y}) = 0$  w  $Y$ , więc  $\text{div } \mathbf{d}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$  znika w  $V$ . Zamiast  $J_\varepsilon(t\mathbf{u}^{\varepsilon,\delta}, t\mathbf{D}^{\varepsilon,\delta})$  rozpatrzmy teraz  $J_\varepsilon(t\mathbf{u}^{\varepsilon,\delta}, \mathbf{D}^\varepsilon)$ .

*Uwaga 3.4.* Wykorzystując założenie (A), nie jest trudno pokazać, że

$$\begin{aligned} \inf \{J_h(\mathbf{u}, \mathbf{D}) - L(\mathbf{u}, \mathbf{D}) \mid (\mathbf{u}, \mathbf{D}) \in X\} = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\inf \{J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{D}) - L(\mathbf{u}, \mathbf{D}) \mid (\mathbf{u}, \mathbf{D}) \in X\}), \end{aligned}$$

gdzie

$$X = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{D}) \in W^{1,p}(V)^3 \times \mathbf{W}(\operatorname{div}, V) \mid \right. \\ \left. \mathbf{u} = 0 \text{ na } \gamma_0, D_{i,i} = 0 \text{ w } V, D_i n_i = 0 \text{ na } \gamma_3 \right\}. \quad (3.46)$$

Zauważmy, że dla liniowej piezoelektryczności ta uwaga oznacza, że infima są osiągalne i można je wyznaczyć rozwiązując równania Eulera zarówno dla funkcjonału  $J_h(\mathbf{u}, \mathbf{D}) - L(\mathbf{u}, \mathbf{D})$ , jak i dla każdego  $\varepsilon > 0$  funkcjonału  $J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{D}) - L(\mathbf{u}, \mathbf{D})$  wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi określonymi przez definicję przestrzeni  $X$ . Znaczy to, że ciąg rozwiązań  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon)$  równań Eulera jest zbieżny w odpowiedni sposób do  $(\mathbf{u}^h, \mathbf{D}^h)$ , który z kolei jest rozwiązaniem „zhomogenizowanego” układu równań. Ta definicja posłuży nam do wprowadzenia pojęcia H-zbieżności w Rozdziale 5.

### 3.2. Homogenizacja liniowych kompozytów piezoelektrycznych

Rozpatrzmy szczególnie przypadek, gdy w (3.4) położymy  $U_2 = 0$ . Wtedy

$$U\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right) = U_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}, \mathbf{D}\right) = \frac{1}{2} \mathbf{e} \mathbf{a}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \mathbf{e} - \mathbf{D} \mathbf{h}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \mathbf{D},$$

gdzie współczynniki tensorowe  $\mathbf{a}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ ,  $\mathbf{h}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ ,  $\boldsymbol{\kappa}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$  opisujące własności materiału piezoelektrycznego (por. Dodatek, wzór (D.2)) są funkcjami periodycznymi zmiennej  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$  o okresie  $Y$ . Poniżej nie będziemy oznaczać operacji kontrakcji pomiędzy tensorami.

Na mocy twierdzenia o homogenizacji otrzymujemy następującą postać energii makroskopowej ( $\mathcal{P}_1^h$ ) (wzór (3.47)) dla kompozytu makroskopowo jednorodnego:

$$U_1^h(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}) = \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y}))) \mathbf{a}(\mathbf{y}) (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y}))) + \right. \right. \\ \left. \left. - (\mathbf{d}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\rho}) \mathbf{h}(\mathbf{y}) (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y}))) + \frac{1}{2} (\mathbf{d}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{y}) (\mathbf{d}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\rho}) \right) d\mathbf{y} \mid \right. \\ \left. \mathbf{v} \in W_{per}^{1,p}(Y)^3, \mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y) \right\}. \quad (3.47)$$

Ponieważ  $U_1$  spełnia założenie (A), (wzór (3.3)), istnieje więc  $\mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y})), \mathbf{d}(\mathbf{y})$  – jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia poszukiwania kresu dolnego opisanego wzorem (3.47). Spełnione są następujące równania Eulera:

$$\operatorname{div} [(\mathbf{a}(\mathbf{y}) (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y}))) - \mathbf{h}(\mathbf{y}) (\mathbf{d}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\rho}))] = 0, \\ \operatorname{rot} \left[ \mathbf{h}^T(\mathbf{y}) (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y}))) + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{y}) (\mathbf{d}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\rho}) \right] = 0.$$

Równania te należy rozumieć w słabym sensie. Korzystając z Wniosku 3.1 o postaci zhomogenizowanej entalpii elektrycznej równoważny układ równań Eulera można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [(\mathbf{c}(\mathbf{y}) (\mathbf{e} + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y})) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) (\mathbf{E} + \mathbf{E}^y(\phi(\mathbf{y}))))] &= 0, \\ \operatorname{div} [(\mathbf{g}(\mathbf{y}) (\mathbf{e} + \mathbf{e}^y(\mathbf{v}(\mathbf{y})) + \epsilon(\mathbf{y}) (\mathbf{E} + \mathbf{E}^y(\phi(\mathbf{y}))))] &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ponieważ pola  $\mathbf{e}$  oraz  $\mathbf{E}$  nie zależą od zmiennej  $\mathbf{y}$ , więc rozwiązania równań (3.48) poszukujemy w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^y \\ \mathbf{E}^y \end{bmatrix} = \nabla \chi \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix},$$

gdzie  $\nabla \chi$  jest tensorem o budowie macierzy blokowej i strukturze tensora  $\mathbf{A}$  we wzorze (D.12) w Dodatku.

Na nieznanne składowe tensora „blokowego”  $\chi$  otrzymujemy następujące równania „na komórce”  $Y$ , w zapisie indeksowym zgodnym z konwencją przyjętą w Dodatku D.1:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[ c_{i\alpha\beta k}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_{\beta}^{(\gamma j)}}{\partial y_k} \right] = - \frac{\partial}{\partial y_i} c_{i\alpha\gamma j}(\mathbf{y}). \quad (3.49)$$

Indeksy  $i, j, k, l$  przebiegają ciąg wskaźników 1, 2, 3, zaś indeksy  $\alpha, \beta, \gamma$  ciąg wskaźników 1, 2, 3, 4.

Stałe zhomogenizowane w tej notacji dla piezoelektrycznego kompozytu mikroperiodycznego określone są wzorem:

$$c_{i\alpha\beta j}^h = \langle c_{i\alpha\beta j} \rangle + \langle c_{i\alpha\gamma n} \frac{\partial \chi_{\gamma}^{(\beta j)}}{\partial y_n} \rangle, \quad (3.50)$$

gdzie jak zwykle  $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\cdot) dY$ .

### 3.3. Uwagi o niejednorodnej homogenizacji

Z punktu widzenia homogenizacji, warunek koercytywności występujący w (3.3) może być istotnie osłabiony. Rzeczywiście, niech teraz

$$U = U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \epsilon, \rho) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{E}_s^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty),$$



będzie funkcją mierzalną względem  $\mathbf{x}$ ,  $Y$ -periodyczną względem  $\mathbf{y}$ , ciągłą względem  $\mathbf{x}$  i wypukłą względem  $\boldsymbol{\epsilon}$  i  $\boldsymbol{\rho}$ . Zakładamy, że ta funkcja spełnia następujące warunki, por. [25-27]

- (i)  $|U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho}) - U(\mathbf{x}', \mathbf{y}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho})| \leq \omega(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) (a(\mathbf{y}) + U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho}))$ ,
- (ii)  $0 \leq U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho}) \leq b(\mathbf{x}) (a(\mathbf{y}) + |\boldsymbol{\epsilon}|^p + |\boldsymbol{\rho}|^q)$ ,

dla każdego  $\mathbf{x} \in V$ ,  $\mathbf{y} \in Y$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^3$  i każdego  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{E}_s^3$ . Tutaj  $a \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$  jest pewną  $Y$ -periodyczną funkcją,  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  jest pewną rosnącą funkcją, ciągłą w zerze i taką, że  $\omega(0) = 0$  oraz  $b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą i nieujemną. Założenie (ii) dopuszcza energie wewnętrzne, które nie są ściśle wypukłe. Oznacza to, iż może się zdarzyć, że  $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}(\mathbf{u}), \mathbf{D}) = 0$  mimo, że albo  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$  albo  $\mathbf{D}$  nie znika. Zależność  $U$  od zmiennej makroskopowej  $\mathbf{x}$  oznacza, że po homogenizacji efektywny potencjał  $U_h$  zależy od  $\mathbf{x}$  (homogenizacja niejednorodna). Rzeczywiście, potencjał ten ma postać:

$$U_h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\rho}) = \inf \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}^y(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{d}(\mathbf{y}) + \mathbf{D}) \, d\mathbf{y} \mid \right. \\ \left. \mathbf{v} \in W_{per}^{1,p}(Y)^3, \mathbf{d} \in \Delta_{per}(Y) \right\}. \quad (3.51)$$

Makroskopowa zmienna  $\mathbf{x}$  zmienia się wolno w przestrzeni, podczas gdy lokalna zmienna  $\mathbf{y}$  charakteryzuje szybkie zmiany lokalne. Zauważmy, że dla mikroperiodycznych kompozytów, energia makroskopowa  $U$  w (3.51) nie zależy od zmiennej makroskopowej  $\mathbf{x} \in V$ . Założenie (i) jest więc trywialnie spełnione. Więc z (ii) wynika, że mimo niekoercywności zagadnienia  $\Gamma$ -zbieżność prowadzi do tych samych rezultatów, jak dla zagadnienia koercywnego.

### 3.4. Ograniczenia na stałe efektywne dla liniowej piezoelektryczności

Poniższe rozważania oparte są na pracy [64]. W celu wyznaczenia efektywnych własności kompozytu piezoelektrycznego należy rozwiązać lokalne zagadnienie periodyczne na komórce. Poza przypadkiem jednowymiarowym (mikrostruktura warstwowa) zagadnienia takie na ogół są rozwiązywane numerycznie. W tym rozdziale podamy ograniczenia na efektywne stałe piezokompozytu otrzymane z zasad wariacyjnych. Nierówności typu Thompsona i Dirichleta będą wykorzystane do wyznaczenia ograniczeń na sprężyste, piezoelektryczne i dielektryczne własności kompozytu piezoelektrycznego. Ponadto, dla dwufazowego kompozytu porównano wyniki otrzymane metodą Ritza z wyznaczonymi ograniczeniami.

### 3.4.1. Ograniczenia typu Voigt'a-Reuss'a

Energia kompozytu (zhomogenizowana) (3.47) ma następującą postać

$$U^h(\mathbf{e}^h, \mathbf{D}^h) = \frac{1}{2} a_{ijkl}^h e_{ij}^h e_{kl}^h - h_{kij}^h D_k^h e_{ij}^h + \frac{1}{2} \kappa_{ij}^h D_i^h D_j^h, \quad (3.52)$$

gdzie

$$a_{ijkl}^h = \frac{\partial^2 U^h}{\partial e_{ij}^h \partial e_{kl}^h}, \quad h_{kij}^h = \frac{\partial^2 U^h}{\partial e_{ij}^h \partial D_k^h}, \quad \kappa_{ij}^h = \frac{\partial^2 U^h}{\partial D_i^h \partial D_j^h}.$$

Załóżmy, że pola dopuszczalne w zagadnieniu minimalizacji (3.47) nie fluktuują, a więc są stałe na komórce. Stąd:

$$U^h(\mathbf{e}^h, \mathbf{D}^h) \leq \frac{1}{2} \langle a_{ijkl}(y) \rangle e_{ij}^h e_{kl}^h - \langle h_{kij}(y) \rangle D_k^h e_{ij}^h + \frac{1}{2} \langle \kappa_{ij}(y) \rangle D_i^h D_j^h. \quad (3.53)$$

Analogicznie dla zagadnienia sprzężonego otrzymujemy:

$$U^{*h}(\boldsymbol{\sigma}^h, \mathbf{E}^h) \leq \frac{1}{2} \langle \hat{a}_{ijkl}(y) \rangle \sigma_{ij}^h \sigma_{kl}^h - \langle \hat{h}_{kij}(y) \rangle E_k^h \sigma_{ij}^h + \frac{1}{2} \langle \hat{\kappa}_{ij}(y) \rangle E_i^h E_j^h, \quad (3.54)$$

gdzie  $\langle \cdot \rangle$  oznacza średnią po komórce periodyczności. Dla funkcji wypukłych  $f$  i  $g$  nierówność  $f(x) \leq g(x)$  prowadzi do nierówności  $f^*(x^*) \geq g^*(x^*)$ . Wykorzystując ten fakt, po przekształceniach otrzymujemy

$$U^h(\mathbf{e}^h, \mathbf{D}^h) \geq \frac{1}{2} a_{ijkl}^v e_{ij}^h e_{kl}^h - h_{kij}^v D_k^h e_{ij}^h + \frac{1}{2} \kappa_{ij}^v D_i^h D_j^h, \quad (3.55)$$

gdzie  $a_{ijkl}^v$  i  $\kappa_{ij}^v$  składowymi obiektów odwrotnych (tj. tensora 4 rzędu i macierzy) do obiektów  $\hat{\mathbf{A}}$  i  $\hat{\mathbf{K}}$  odpowiednio, gdzie

$$A_{ijkl}^{\hat{\mathbf{A}}} = \langle \hat{a}_{ijkl} \rangle - \langle \hat{h}_{mij} \rangle (\langle \hat{\kappa} \rangle^{-1})_{mn} \langle \hat{h}_{nkl} \rangle, \quad (3.56)$$

$$K_{ij}^{\hat{\mathbf{K}}} = \langle \hat{\kappa}_{ij} \rangle - \langle \hat{h}_{ikl} \rangle (\langle \hat{a} \rangle^{-1})_{klmn} \langle \hat{h}_{jmn} \rangle, \quad (3.57)$$

oraz

$$h_{ijk}^v = -(\langle \hat{h}_{lmn} \rangle (\langle \hat{\kappa} \rangle^{-1})_{il} a_{mnjk}^v. \quad (3.58)$$

Nierówności (3.53), (3.55) są elementarnymi ograniczeniami na energię wewnętrzną kompozytu. Zakładając w tych nierównościach, że  $\mathbf{D}^h = 0$  lub  $\mathbf{e}^h = 0$ , otrzymujemy w szczególności następujące ograniczenia

$$a_{ijkl}^v e_{ij}^h e_{kl}^h \leq a_{ijkl}^h e_{ij}^h e_{kl}^h \leq \langle a_{ijkl}(y) \rangle e_{ij}^h e_{kl}^h, \quad \forall \mathbf{e}^h \in \mathbb{E}_s^3, \quad (3.59)$$

$$\kappa_{ij}^v D_i^h D_j^h \leq \kappa_{ij}^h D_i^h D_j^h \leq \langle \kappa_{ij}(y) \rangle D_i^h D_j^h, \quad \forall \mathbf{D}^h \in \mathbb{R}^3. \quad (3.60)$$

Nierówności (3.59) i (3.60) są równoważne dodatniej określoności następujących form kwadratowych:

$$(a_{ijkl}^h - a_{ijkl}^v), \quad (\langle a_{ijkl}(y) \rangle - a_{ijkl}^h), \quad (\kappa_{ij}^h - \kappa_{ij}^v), \quad (\langle \kappa_{ij}(y) \rangle - \kappa_{ij}^h), \quad (3.61)$$

Przy pomocy tych nierówności można wyprowadzić elementarne ograniczenia na diagonalne elementy macierzy Voigta. Mają one w postaci

$$a_{ijkl}^v \leq a_{ijkl}^h \leq \langle a_{ijkl}(y) \rangle, \quad (3.62)$$

$$\kappa_{ij}^v \leq \kappa_{ij}^h \leq \langle \kappa_{ij}(y) \rangle, \quad (3.63)$$

gdzie

$$(ijkl) \in \{(1111), (2222), (3333), (1212), (1313), (2323)\}, \quad (3.64)$$

$$(ij) \in \{(11), (22), (33)\}.$$

Każda nierówność na efektywne współczynniki  $a_{ijkl}^h$  i  $\kappa_{ij}^h$  z indeksami poza zbiorem (3.64) zawiera co najmniej dwa elementy ze zbioru efektywnych współczynników  $a_{ijkl}^h$  i  $\kappa_{ij}^h$  z indeksami ze zbioru (3.64). Na przykład dla  $a_{1133}^h$  nierówności, które zawierają  $a_{1111}^h$  oraz  $a_{3333}^h$  mają postać:

$$|a_{1133}^h - \langle a_{1133} \rangle| \leq \sqrt{(a_{1111}^h - \langle a_{1111} \rangle)(a_{3333}^h - \langle a_{3333} \rangle)}, \quad (3.65)$$

$$|a_{1133}^h - a_{1133}^v| \leq \sqrt{(a_{1111}^h - a_{1111}^v)(a_{3333}^h - a_{3333}^v)}. \quad (3.66)$$

Dowolna nierówność spełniona przez  $h_{kij}^h$  wynika bezpośrednio z (3.53) i (3.55). Zawsze zawiera ona co najmniej dwa elementy ze zbioru efektywnych współczynników  $a_{ijkl}^h$  i  $\kappa_{ij}^h$  z indeksami ze zbioru (3.64). Na przykład nierówności spełnione przez  $h_{113}^h$  i zawierające  $a_{1313}^h$  i  $\kappa_{11}^h$ , mają następującą postać:

$$|h_{113}^h - h_{113}^v| \leq \sqrt{(a_{1313}^h - a_{1313}^v)(\kappa_{11}^h - \kappa_{11}^v)}, \quad (3.67)$$

$$|h_{113}^h - \langle h_{113} \rangle| \leq \sqrt{(a_{1313}^h - \langle a_{1313} \rangle)(\kappa_{11}^h - \langle \kappa_{11} \rangle)}. \quad (3.68)$$

W ten sposób otrzymane ograniczenia są dosyć szerokie. Podstawiając

$$e_{ij}^h = P_{kij} D_k^h, \quad D_i^h = Q_{ikl} e_{kl}^h \quad (3.69)$$

do (3.53) i (3.55) i optymalizując otrzymane wyrażenie ze względu na  $P_{kij}$  i  $Q_{ikl}$ , otrzymano ograniczenia na stałe dielektryczne

$$\begin{aligned} \kappa_{ij}^v + (h_{ikl}^h - h_{ikl}^v)((\mathbf{a}^h - \mathbf{a}^v)^{-1})_{klmn}(h_{jmn}^h - h_{jmn}^v) &\leq \kappa_{ij}^h \leq \\ &\leq \langle \kappa_{ij} \rangle + (h_{ikl}^h - \langle h_{ikl} \rangle)((\mathbf{a}^h - \langle \mathbf{a} \rangle)^{-1})_{klmn}(h_{jmn}^h - \langle h_{jmn} \rangle), \end{aligned} \quad (3.70)$$

oraz ograniczenia na stałe sprężyste

$$\begin{aligned} a_{ijkl}^v + (h_{mij}^h - h_{mij}^v) \left( (\boldsymbol{\kappa}^h - \boldsymbol{\kappa}^v)^{-1} \right)_{mn} (h_{nkl}^h - h_{nkl}^v) &\leq a_{ijkl}^h \leq \\ &\leq \langle a_{ijkl} \rangle + (h_{mij}^h - \langle h_{mij} \rangle) \left( (\boldsymbol{\kappa}^h - \langle \boldsymbol{\kappa} \rangle)^{-1} \right)_{mn} (h_{nkl}^h - \langle h_{nkl} \rangle). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Dla indeksów ze zbioru (3.64) ograniczenia te są węższe od ograniczeń Voigta-Reussa (3.62), (3.63).

### 3.4.2. Ilustracja graficzna ograniczeń

Rozpatrzmy periodyczny kompozyt włóknisty, w którym osnowa i włókna są materiałami jednorodnymi, transwersalnie izotropowymi z osiami transwersalnej izotropii zorientowanymi w kierunku włókien. Dla uproszczenia sześć składowych tensora odkształcenia  $\mathbf{e}$  i trzy składowe indukcji elektrycznej  $\mathbf{D}$  tworzą następujący wektor:

$$\mathbf{F}^T = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{23}, 2e_{31}, 2e_{12}, D_1, D_2, D_3), \quad (3.72)$$

gdzie górny indeks „ $T$ ” oznacza transpozycję. Gęstość energii swobodnej włókien i osnowy są funkcjami kwadratowymi  $\mathbf{F}$ , co oznacza że są określone przez dwie symetryczne, dodatnio określone macierze  $9 \times 9$ , a mianowicie  $\mathbf{A}^{(1)}$  i  $\mathbf{A}^{(2)}$

$$U^{(1)}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{F}, \quad (3.73)$$

$$U^{(2)}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A}^{(2)} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.74)$$

Blokowy zapis stałych materiałowych włókna (material (1), w obliczeniach ceramika PZT-7A) i osnowy (material (2), w obliczeniach epoksyd) ma postać

$$\mathbf{A}^{(1)} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{a}^{(1)} & \mathbf{h}^{(1)T} \\ \hline \mathbf{h}^{(1)} & \boldsymbol{\kappa}^{(1)} \end{array} \right], \quad \mathbf{A}^{(2)} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{a}^{(2)} & \mathbf{h}^{(2)T} \\ \hline \mathbf{h}^{(2)} & \boldsymbol{\kappa}^{(2)} \end{array} \right]. \quad (3.75)$$

Wprowadźmy macierze:

$$\mathbf{A}^s = f_1 \mathbf{A}^{(1)} + f_2 \mathbf{A}^{(2)}, \quad (3.76)$$

$$\mathbf{A}^r = \left( f_1 \left( \mathbf{A}^{(1)} \right)^{-1} + f_2 \left( \mathbf{A}^{(2)} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad (3.77)$$

gdzie  $f_1$  oznacza udział objętościowy włókien, a  $f_2 = 1 - f_1$  oznacza udział objętościowy osnowy.

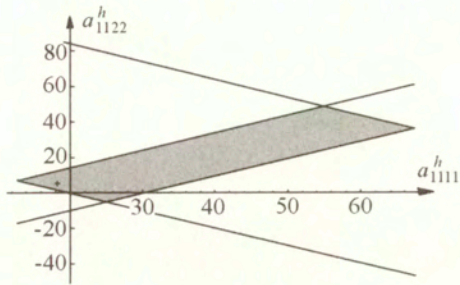
Nierówności (3.53) i (3.55) są równoważne następującym:

$$\mathbf{A}^r \leq \mathbf{A}^h \leq \mathbf{A}^s, \quad (3.78)$$

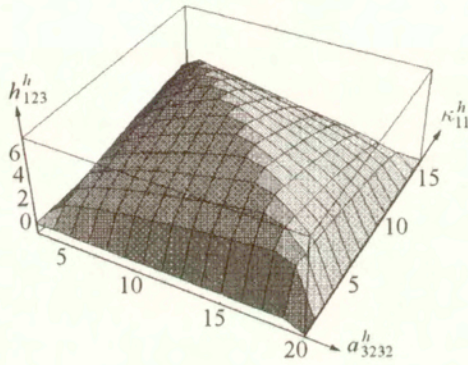
gdzie  $\mathbf{A}^h$  oznacza macierz efektywną. Nierówności te prowadzą wprost do górnych i dolnych ograniczeń na diagonalne współczynniki materiałowe kompozytu. Lepsze ograniczenia mogą być otrzymane z (3.70)-(3.71). W literaturze nie spotkano poprawnych ograniczeń explicite na pozadiagonalne składowe stałych materiałowych kompozytu piezoelektrycznego. Bisegna i Luciano [29, 30] podali ograniczenia na pozadiagonalne składowe poprzez elementy macierzy  $\mathbf{A}^r$  i  $\mathbf{A}^s$ . Taka definicja jest w ogólności niepoprawna, ponieważ ograniczenia na składowe macierzy nie pokrywają się z ograniczeniami na całe macierze. Podobna uwaga dotyczy ograniczeń Hashina-Shtrikmana podanych w pracy [29]. Zauważmy, że ograniczenia podane w [31] na współczynniki niediagonalne są poprawne jedynie dla stałych sprężystych. W związku z tym poniżej, wykorzystując formuły (3.70)-(3.71), podajemy przykłady poprawnego wyprowadzenia ograniczeń na składowe pozadiagonalne macierzy stałych piezoelektrycznych kompozytu. Formuły te są nowym wkładem w teorię ograniczeń wariacyjnych.

Na rysunku 3.1 pokazano ograniczenia na współczynnik  $a_{1122}^h$ . Ograniczenia te są zależne od  $(a_{1111}^h, a_{2222}^h)$ . Zakładając, że  $a_{1111}^h$  i  $a_{2222}^h$  pokrywają się, ograniczenia te leżą w płaszczyźnie. Część płaszczyzny wewnątrz równoległoboku zawiera punkty o współrzędnych  $(a_{1111}^h, a_{1122}^h)$ . W szczególności można wyznaczyć ograniczenie liczbowe  $-5.41 \leq a_{1122}^h \leq 49.3$ . Znak „+” oznacza punkt wyznaczony metodą Ritza, patrz. Dodatek D.3.

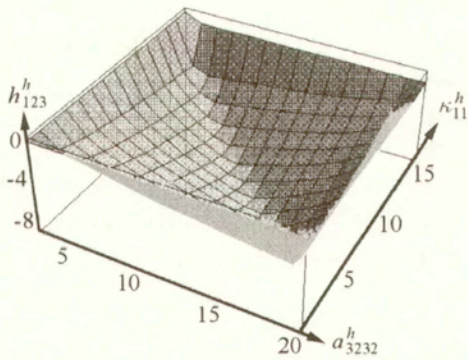
Rysunek 3.2 przedstawia powierzchnię wyznaczoną przez maksymalne wartości współczynników  $h_{123}^h$  (ograniczenie górne) jako funkcję  $a_{3232}^h$  i  $\kappa_{11}^h$ . Dwa ostatnie współczynniki zmieniają się wewnątrz ograniczeń Voigta-Reussa. Na



Rysunek 3.1. Pole ograniczeń



Rysunek 3.2. Górna powierzchnia obszaru ograniczeń



Rysunek 3.3. Dolna powierzchnia obszaru ograniczeń

rysunku 3.3 pokazano powierzchnię dolnych ograniczeń. Obszar zawarty pomiędzy powierzchniami nazywamy „obszarem ograniczeń”. Podobnie można przedstawić graficznie powierzchnie dla innych pozadiagonalnych składowych macierzy  $A^h$ .

### 3.5. Zagadnienie warstwy brzegowej w kompozycie piezoelektrycznym

Homogenizacja dostarcza stałych efektywnych opisujących wystarczająco dobrze makroskopowe własności materiału. Rozwiązania makroskopowego zagadnienia brzegowego i rozwinięcia asymptotyczne (względem małego parametru mierzącego rozmiar niejednorodności w porównaniu z charakterystycznym rozmiarem zagadnienia brzegowego) prowadzą do przybliżenia pól mikronaprężeń i mikroindukcji elektrycznej wewnątrz ciała przez funkcje lokalnie periodyczne. W pobliżu brzegu przybliżenia mikropól tracą sens z powodu nie uwzględnienia dokładnych warunków brzegowych dla wyjściowego zagadnienia ośrodka niejednorodnego. Jest to tzw. utrata translacyjnej niezmienniczości geometrii mikrostruktury w pobliżu brzegu ciała [15, 71]. Celem tego rozdziału jest zdefiniowanie aproksymacji lokalnych naprężeń i indukcji elektrycznej w pobliżu brzegu. Rozpatrujemy zagadnienie z warunkami brzegowymi typu Neumanna. Zaproponowana aproksymacja umożliwia precyzyjną analizę lokalnych pól na poziomie mikroskopowej skali niejednorodności. Jest ona istotna np. w zadaniu rozpoznania początku lokalnego zniszczenia w postaci delaminacji w pobliżu swobodnego brzegu. W rozwinięciu asymptotycznym poszukiwanych pól wprowadzamy dodatkowe człony odpowiedzialne za efekt warstwy brzegowej. Wyprowadzamy układ równań na niewiadome pola w warstwie brzegowej. Jakościowy efekt członów brzegowych został zilustrowany na przykładzie piezoelektrycznego kompozytu warstwowego o stratyfikacji prostopadłej do brzegu. Będziemy używali sformułowania kinematycznego tzn. niewiadomymi polami będą pole przemieszczeń i pole elektryczne. Wprowadzone równania, pozwalające wyznaczyć efekt warstwy brzegowej, są równaniami 2 rzędu, eliptycznymi, określonymi na półnieskończonym paśmie prostopadłym do swobodnego brzegu ciała. Proponowane sformułowanie wyklucza analizę zjawiska jeśli stratyfikacja mikrostruktury jest równoległa do brzegu ciała.

Na zakończenie rozdziału podamy przykład numeryczny wyznaczania wpływu warstwy brzegowej na pole efektywne przy założeniu struktury o stratyfikacji prostopadłej do brzegu ciała oraz do analizy zjawiska czysto elektrycznego. Rozważania przedstawione poniżej oparte są o wyniki pracy [75].

### 3.5.1. Aproksymacja mikronaprężeń i mikroindukcji elektrycznej wewnątrz ciała

Niech, jak dotychczas  $V \subset R^n$  będzie obszarem ograniczonym, z gładkim brzegiem. Niech  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  oznacza kartezjańskie współrzędne punktu należącego do  $V$  względem osi  $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Piezoelektryczne ciało zajmuje obszar  $V$ . Przemieszczenie oraz potencjał pola elektrycznego zakładamy równe zeru na brzegu  $\partial V = \Gamma_1$ , zaś brzeg  $\Gamma_2 = \partial V \setminus \Gamma_1$  pozostaje swobodny od naprężeń i indukcji elektrycznej. Założymy, że materiał jest laminowanym kompozytem o strukturze periodycznej, a kierunek  $\vec{e}_3$  jest prostopadły do warstw. Każda warstwa jest jednorodnym materiałem piezoelektrycznym. Oznaczmy jednowymiarową komórkę periodyczności przez  $Z = [0, Z^*]$ , gdzie  $z \in Z$ ,  $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$  oraz  $\varepsilon$  jest jak zwykle bezwymiarowym, małym parametrem charakteryzującym wymiar mikrostruktury. Współczynniki materiałowe oznaczamy jako następujące funkcje zmiennej  $z$ :

$$\mathbf{c}(z) = c_{klmn}(z), \quad \mathbf{g}(z) = g_{kl}^n(z), \quad \boldsymbol{\eta}(z) = \eta_{kl}(z),$$

zdefiniowane na  $Z$  i przedłużone na całą przestrzeń liczb rzeczywistych przez  $Z$  periodyczność, gdzie  $c_{klmn}$  – oznaczają współczynniki sprężystości,  $g_{kl}^n$  – współczynniki sprzężenia piezoelektrycznego, zaś  $\eta_{ln}$  – współczynniki dielektryczne.

Zakładamy, że  $\mathbf{c}(z)$ ,  $\mathbf{g}(z)$ ,  $\boldsymbol{\eta}(z)$  należą do  $L^\infty(Z)$  i spełniają odpowiednie warunki ograniczoności i symetrii (por. [120, 157]). Tak więc, lokalne współczynniki dane są poprzez formułę:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) = c_{klmn}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right), \\ \mathbf{g}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) = g_{kl}^n\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right), \\ \boldsymbol{\eta}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\eta}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) = \eta_{kl}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Definiujemy następujące zagadnienie.

#### Zagadnienie ( $\mathcal{P}_w^\varepsilon$ )

Znaleźć rozwiązanie równań równowagi

$$\sigma_{ij,j}^\varepsilon(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}), \quad D_{j,j}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \tag{3.80}$$

z warunkami brzegowymi

$$u_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad \phi^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x})n_j = 0, \quad D_j^\varepsilon(\mathbf{x})n_j = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2,$$



gdzie

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = c_{ijkl} \left( \frac{x_3}{\varepsilon} \right) u_{k,l}^\varepsilon(\mathbf{x}) - g_{ij}^n \left( \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \phi_{,n}^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

$$D_j^\varepsilon = g_{kl}^j \left( \frac{x_3}{\varepsilon} \right) u_{k,l}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \eta_{jl} \left( \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \phi_{,l}^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Jak poprzednio  $\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x})$  – jest tensorem naprężenia,  $D_j^\varepsilon(\mathbf{x})$  – wektorem indukcji elektrycznej,  $u_m$  – wektorem przemieszczenia,  $\phi$  – potencjałem elektrycznym,  $f_i$  – wektorem objętościowych sił masowych, a  $n_j$  jest wektorem prostopadłym do brzegu  $\Gamma_2$ .

Rozwiązania  $(u_m^\varepsilon, \phi^\varepsilon, \sigma_{ij}^\varepsilon, D_j^\varepsilon)$  zagadnienia  $(\mathcal{P}_w^\varepsilon)$  poszukujemy w postaci:

$$u_m^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_m^1(\mathbf{x}, z) + \dots,$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, z) + \varepsilon \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, z) + \dots,$$

$$\phi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi^0(\mathbf{x}) + \varepsilon \phi_m^1(\mathbf{x}, z) + \dots,$$

$$D_j^\varepsilon(\mathbf{x}) = D^0(\mathbf{x}, z) + \varepsilon D^1(\mathbf{x}, z) + \dots,$$
(3.81)

gdzie  $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$  i funkcje  $u_m^p(\mathbf{x}, z)$ ,  $\phi^p(\mathbf{x}, z)$  oraz  $\sigma_{ij}^q(\mathbf{x}, z)$ ,  $D_j^q(\mathbf{x}, z)$  ( $p \geq 1, q \geq 0$ ) są zdefiniowane dla  $\mathbf{x} \in V$  i periodyczne w zmiennej  $z \in Z$ . Pokazano ([66]), że

$$\sigma_{kl}^0(\mathbf{x}, z) = a_{klmn}(z) u_{m,n}^0(\mathbf{x}) - b_{kl}^n(z) \phi_{,n}^0(\mathbf{x}),$$

$$D_k^0(\mathbf{x}, z) = d_{mn}^k(z) u_{m,n}^0(\mathbf{x}) - h_{km}(z) \phi_{,m}^0(\mathbf{x}),$$
(3.82)

gdzie

$$a_{klmn}(z) = c_{klmn}(z) - c_{kli3}(z) \frac{d}{dz} \chi_i^{mn}(z) - g_{kl}^3(z) \frac{d}{dz} \gamma^{mn}(z),$$

$$b_{kl}^n(z) = g_{kl}^n(z) + c_{kli3}(z) \frac{d}{dz} \Delta_i^n(z) - g_{kl}^3(z) \frac{d}{dz} \Lambda^n(z),$$

$$d_{mn}^k(z) = g_{mn}^k(z) + g_{i3}^k(z) \frac{d}{dz} \chi_i^{mn}(z) - \eta_{k3}(z) \frac{d}{dz} \gamma^{mn}(z),$$

$$h_{kn}(z) = \eta_{kn}(z) + g_{i3}^k(z) \frac{d}{dz} \Delta_i^n(z) + \eta_{k3}(z) \frac{d}{dz} \Lambda^n(z).$$
(3.83)

Funkcje  $\chi_i^{mn}$ ,  $\Delta_i^n$ ,  $\Lambda^n$ ,  $\gamma^{mn}$  są periodycznymi rozwiązaniami następujących równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} c_{k3j3}(z) \frac{d}{dz} \chi_j^{mn} - \frac{d}{dz} g_{k3}^3(z) \frac{d}{dz} \gamma^{mn} &= -\frac{d}{dz} c_{k3mn}(z), \\ \frac{d}{dz} c_{k3j3}(z) \frac{d}{dz} \Delta_j^m - \frac{d}{dz} g_{k3}^3(z) \frac{d}{dz} \Lambda^m &= \frac{d}{dz} g_{km}^3(z), \\ \frac{d}{dz} g_{j3}^3(z) \frac{d}{dz} \chi_j^{mn} + \frac{d}{dz} \eta_{33}(z) \frac{d}{dz} \gamma^{mn} &= -\frac{d}{dz} g_{mn}^3(z), \\ \frac{d}{dz} g_{j3}^3(z) \frac{d}{dz} \Delta_j^m + \frac{d}{dz} \eta_{33}(z) \frac{d}{dz} \Lambda^m &= -\frac{d}{dz} \eta_{3m}(z). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Powyższe równania mają analityczne rozwiązania. Makroskopowe zachowanie piezoelektrycznego laminatu opisują poniższe równania:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{kl,l}^0(\mathbf{x}, z) \rangle &= f_k, \\ \langle \sigma_{kl}^0(\mathbf{x}, z) \rangle &= \langle a_{klmn}(z) \rangle u_{m,n}^0(\mathbf{x}) - \langle b_{kl}^n(z) \rangle \phi_{,n}^0(\mathbf{x}), \\ \langle D_{k,k}^0(\mathbf{x}, z) \rangle &= 0, \\ \langle D_k^0(\mathbf{x}, z) \rangle &= \langle d_{mn}^k(z) \rangle u_{m,n}^0(\mathbf{x}) + \langle h_{km}(z) \rangle \phi_{,m}^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.85)$$

z warunkami brzegowymi

$$u_m^0(\mathbf{x}) = 0 = \phi^0 \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \langle \sigma_{kl}^0(\mathbf{x}, z) \rangle n_l = 0, \quad \langle D_k^0(\mathbf{x}, z) \rangle n_k = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2,$$

gdzie  $\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{Z^*} \int_0^{Z^*} (\cdot) dz$ .

Aproksymacje dla naprężeń  $\sigma_{kl}^0$  i indukcji elektrycznej  $D_k^0$  dane są przez (3.82) pod warunkiem, że znane są rozwiązania zagadnienia (3.85). W pobliżu swobodnego brzegu  $\Gamma_2$  nie są one zadawalające, gdyż warunki brzegowe są spełnione jedynie przez pola uśrednione (makroskopowe). W rozważanym zagadnieniu oznacza to, że  $\sigma_{kl}^0(\mathbf{x}, z) \cdot n_l \neq 0$ ,  $D_k^0(\mathbf{x}, z) n_k \neq 0$  na  $\Gamma_2$ , czyli założenie o periodyczności  $\sigma^0$  i  $\mathbf{D}^0$ , względem zmiennej  $z$  w pobliżu brzegu, jest w kontradycji z warunkami Neumanna.

Podobnie jak w [57], gdzie rozważano kompozyt sprężysty, wprowadzimy w rozwinięciu (3.81) człony warstwy brzegowej, dla których hipoteza o periodyczności względem zmiennej  $z$  jest zastąpiona przez hipotezę periodyczności względem zmiennej równoległej do brzegu. Zażądamy, aby dodatkowe człony łącznie z mikroskopowymi naprężeniami  $\sigma_{kl}^0(\mathbf{x}, z)$  oraz mikroskopową indukcją  $D_k^0(\mathbf{x}, z)$  spełniały warunki brzegowe na  $\Gamma_2$ .

### 3.5.2. Równania dla warstwy brzegowej

Dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że  $\Gamma_2$  jest płaszczyzną nachyloną pod kątem  $\alpha$  do płaszczyzny  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Osie  $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  są przekształcone przez obrót do osi  $R' = (0, \vec{e}', \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ , gdzie 0 należy do  $\Gamma_2$  i  $\vec{e}'_3 = -\sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3$ . Wprowadzimy następujące zmienne mikroskopowe

$$y_2 = \frac{x'_2}{\varepsilon}, \quad y_3 = \frac{x'_3}{\varepsilon}. \quad (3.86)$$

Jest oczywiste, że

$$z = \sin \alpha y_2 + \cos \alpha y_3. \quad (3.87)$$

Położmy  $G = Y_2 \times (0, +\infty)$ , gdzie  $Y_2 = (0, Y_2^*)$  i  $Y_2^* = \frac{Z^*}{\sin \alpha}$ . Obszar  $G$ , który jest pół-nieskończonym pasmem, powtarza się periodycznie względem zmiennej  $Y_2$  i wtedy współczynniki

$$\tilde{\mathbf{c}}(y_2, y_3) = \mathbf{c}(z), \quad \tilde{\mathbf{g}}(y_2, y_3) = \mathbf{g}(z), \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_2, y_3) = \boldsymbol{\eta}(z)$$

są  $Y_2$  periodyczne dla ustalonego  $y_3$ . Zmienna  $z$  jest określona przez (3.86). Należy podkreślić, że składowe  $\tilde{\mathbf{c}}(y_2, y_3)$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}(y_2, y_3)$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_2, y_3)$  powinny być wyznaczone w nowym układzie współrzędnych. Tak więc, przemieszczeń  $u^\varepsilon(\mathbf{x})$  i potencjału elektrycznego  $\phi^\varepsilon(\mathbf{x})$  poszukujemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(\mathbf{x}') &= u^0(\mathbf{x}') + \varepsilon[u^1(\mathbf{x}', z) + u^{1BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3)] + \dots, \\ \phi^\varepsilon(\mathbf{x}') &= \phi^0(\mathbf{x}') + \varepsilon[\phi^1(\mathbf{x}', z) + \phi^{1BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3)] + \dots, \end{aligned} \quad (3.88)$$

zaś naprężeń  $\sigma^\varepsilon(\mathbf{x})$  oraz indukcji  $D^\varepsilon(\mathbf{x})$  w postaci

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon(\mathbf{x}') &= \sigma^0(\mathbf{x}', z) + \sigma^{0BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) + \dots, \\ D^\varepsilon(\mathbf{x}') &= D^0(\mathbf{x}', z) + D^{0BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) + \dots \end{aligned} \quad (3.89)$$

Zmienne  $(y_2, y_3)$  i  $z$  określone są formułami (3.86) i (3.87), gdzie  $u^{iBL}(\mathbf{x}', y_2, y_3)$ ,  $\phi^{iBL}(\mathbf{x}', y_2, y_3)$  ( $i \geq 1$ ) i  $\sigma^{jBL}(\mathbf{x}', y_2, y_3)$ ,  $D^{jBL}(\mathbf{x}', y_2, y_3)$  ( $j \geq 0$ ) oznaczają człony warstwy brzegowej (ang. *boundary layer*).

Są one zdefiniowane dla  $\mathbf{x}' \in \Gamma_2$ ,  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, 0)$  i  $(y_2, y_3) \in G$  oraz są  $Y_2$  periodyczne w  $y_2$  i spełniają warunki

$$\sigma^{jBL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) \rightarrow 0, \quad D^{jBL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) \rightarrow 0, \quad \text{gdy } y_3 \rightarrow \infty, \quad (3.90)$$

oraz

$$\begin{aligned}\sigma_{p3}^{jBL}(x'_1, x'_2, 0, y_2, 0) &= -\sigma_{p3}^j(x'_1, x'_2, 0, y_2, 0), \\ D_3^{jBL}(x'_1, x'_2, 0, y_2, 0) &= -D_3^j(x'_1, x'_2, 0, y_2, 0), \quad \forall y_2 \in Y_2.\end{aligned}\tag{3.91}$$

Zauważmy, że pola  $u^1(\mathbf{x}', z)$ ,  $\phi^1(\mathbf{x}', z)$ ,  $\sigma^0(\mathbf{x}', z)$ ,  $D^0(\mathbf{x}', z)$  są zdefiniowane poprzez formuły (3.81) i (3.82), wyrażone w układzie osi  $R'$ .

Ostatecznie otrzymujemy układ równań na niewiadome związane z zagadnieniem warstwy brzegowej:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_2} \sigma_{j2}^{0BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) + \frac{\partial}{\partial y_3} \sigma_{j3}^{0BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y_2} D_2^{0BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) + \frac{\partial}{\partial y_3} D_3^{0BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) &= 0,\end{aligned}\tag{3.92}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{0BL} &= \tilde{a}_{ijkl}(y_2, y_3) u_{k,l}^{1BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) - \tilde{b}_{ij}^n(y_2, y_3) \phi_{,n}^{1BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3), \\ D_i^{0BL} &= \tilde{d}_{mn}^i(y_2, y_3) u_{m,n}^1(\mathbf{x}', y_2, y_3) + \tilde{h}_{im}(y_2, y_3) \phi_{,m}^{1BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3).\end{aligned}$$

Przyjmijmy, że poszukiwane wielkości  $u^{1BL}$ ,  $\phi^{1BL}$  mają postać:

$$\begin{aligned}u_k^{1BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) &= \rho_k^{lm}(y_2, y_3) u_{l,m}^0(x'_1, x'_2, 0) + \\ &+ \nu_k^m(y_2, y_3) \phi_{,m}^0(x'_1, x'_2, 0) + \tilde{u}_k^{1BL}(x'_1, x'_2, 0), \\ \phi^{1BL}(\mathbf{x}', y_2, y_3) &= \tau^{lm}(y_2, y_3) u_{l,m}^0(x'_1, x'_2, 0) + \\ &+ \mu^m(y_2, y_3) \phi_{,m}^0(x'_1, x'_2, 0) + \tilde{\phi}^{1BL}(x'_1, x'_2, 0).\end{aligned}\tag{3.93}$$

Wstawiając (3.93) do (3.92) otrzymujemy układ równań dla  $\nu_k^{lm}$ ,  $\rho_k^m$ ,  $\tau^{lm}$ ,  $\mu^m$  z warunkami:

$$\begin{aligned}\nu_k^{lm}, \rho_k^m, \tau^{lm}, \mu^m &\rightarrow 0 \quad \text{gdy } y_3 \rightarrow 0 \quad \forall y_2 \in Y, \\ \nu_k^{lm}, \rho_k^m, \tau^{lm}, \mu^m &\text{ są } Y \text{ periodyczne w } y_2.\end{aligned}\tag{3.94}$$

Poniżej podamy prosty przykład ilustrujący jakościowy charakter efektu warstwy brzegowej.

### Przykład

Dla prostoty w przykładzie przyjmujemy następujące uproszczenia:

1° warstwy są prostopadłe do brzegu, czyli  $\alpha = \pi/2$ ,

2° tensory  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}$  są stałymi tensorami,

3° współczynniki sprzężenia elektromechanicznego są o rząd mniejsze od stałych dielektrycznych, czyli  $|\mathbf{g}| \ll |\boldsymbol{\eta}|$ ,

4°  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(y_2)$ .

W takim przypadku zagadnienie warstwy brzegowej redukuje się do znalezienia  $y_2$ -periodycznych rozwiązań  $v(y_2, y_3)$  następującego równania:

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \left( \eta_{33}(y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} v(y_2, y_3) \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \eta_{22}(y_2) \frac{\partial}{\partial y_3} v(y_2, y_3) \right) = 0,$$

dla  $y_2 \in (0, 1)$ ,  $y_3 \in (0, \infty)$ , z warunkiem

(3.95)

$$\frac{\partial}{\partial y_3} v(y_2, y_3) \Big|_{y_3=0} = 1 - \frac{1}{\eta_{22}(y_2)} \langle \eta_{22} \rangle.$$

Równanie powyższe rozwiązano pół-analitycznie, a mianowicie poprzez transformację Fouriera i całkowanie numeryczne. Człony odpowiedzialne za efekt warstwy brzegowej pojawiają się jedynie w polach  $D_2^{0BL}$  i  $D_3^{0BL}$ , dane są przez następujące wyrażenie:

$$D_2^{0BL}(y_2, y_3, \mathbf{x}') = \eta_{33} \frac{\partial}{\partial y_2} v(y_2, y_3) \phi_{,3}^0(\mathbf{x}')$$

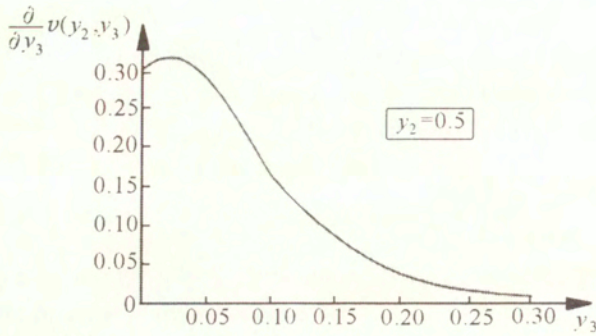
$$D_3^{0BL}(y_2, y_3, \mathbf{x}') = \eta_{22} \frac{\partial}{\partial y_2} v(y_2, y_3) \phi_{,3}^0(\mathbf{x}')$$
(3.96)

Wielkości  $\frac{\partial}{\partial y_2} v$ ,  $\frac{\partial}{\partial y_3} v$  są bezwymiarowe i zależą od stosunków własności parametrów materiałowych  $\eta_{22}^1, \eta_{33}^1, \eta_{22}^2, \eta_{33}^2$  dla dwóch różnych materiałów.

W ogólnym przypadku rozwiązanie zagadnienia wymaga dużego nakładu pracy numerycznej, ale układ równań podany tutaj umożliwi analizę konkretnych problemów technicznych, w których można dokonać szereg dodatkowych uproszczeń.

Charakter efektu warstwy brzegowej pokazano na rysunku, Rys. 3.4. Łatwo zauważyć, że wpływ efektu brzegowego zanika na długości proporcjonalnej do okresu periodyczności mikrostruktury.

Sposób opisu zagadnienia warstwy brzegowej przy użyciu metody homogenizacji, podany powyżej, oparty jest o ścisłe definicje homogenizacyjne. Nie można tego powiedzieć o podejściu przedstawionym w pracy [105], w której definicja efektywnych własności nie jest matematycznie precyzyjna i w związku



Rysunek 3.4. Wykres  $\frac{\partial}{\partial y_3} v(y_2, y_3)$  w zależności od  $y_3$ ,  $y_2 = 0.5$

z tym interpretacja wyników uzyskanych przez autorów jest dyskusyjna. Autorzy tych prac otrzymują nielocalne równania efektywne posługując się pojęciem uśrednienia po ансамblu. Nie wyjaśniają dokładnego znaczenia takiego uśrednienia jasno określonego w teorii homogenizacji stochastycznej (por. Rozdz. 6). Należy zaznaczyć, że geometria periodyczna jest szczególnym przypadkiem geometrii ergodycznej; losowej i rozważania autorów powinny się odnosić również do struktur periodycznych.

## Rozdział 4

# Formuły analityczne dla laminatów piezoelektrycznych

W tym Rozdziale wyprowadzimy formuły opisujące własności makroskopowe warstwowych, wielofazowych kompozytów piezoelektrycznych. Własności te zależą od własności poszczególnych składników, ich udziałów objętościowych w kompozycie, a także od kierunku laminacji. Oczywiście taka struktura jest anizotropowa. Następnie, wykorzystując wyprowadzone wzory dla dwuskładnikowego kompozytu warstwowego, wyprowadzimy wzory typu Murat'a na laminację wielokrotną dwuskładnikowych kompozytów piezoelektrycznych. W tym celu wprowadzimy symboliczny rachunek algebraiczny na macierzach blokowych definiujących własności materiału piezoelektrycznego. Otrzymane formuły typu Murat'a opisują własności tzw. laminatów płaszczowych, w których jedna z faz jest wyróżniona i powtarza się na każdym kroku warstwowania (laminacji). Laminaty płaszczowe posiadają wielopoziomową, hierarchczną strukturę warstwową. Ich efektywne tensory materiałowe zależą nie tylko od własności faz i ich globalnego udziału objętościowego w kompozycie, ale także od wszystkich kierunków laminacji i od ilości fazy „płaszcz” na poszczególnych poziomach warstwowania. Dowolnie duża liczba parametrów geometrycznych umożliwia uzyskanie szerokiej klasy tensorów efektywnych opisujących kompozyty piezoelektryczne. Przejdziemy do ścisłego, systematycznego wyprowadzenia wzorów na laminację w oparciu o wyniki twierdzenia o homogenizacji z Rozdziału 3.

### 4.1. Piezoelektryczne kompozyty warstwowe

Rozważmy ośrodek warstwowy o strukturze periodycznej. Założymy, że stałe materiałowe zależą tylko od jednej zmiennej  $y = \mathbf{y}\mathbf{n} = y_k n_k$  i są funkcjami periodycznymi tej zmiennej. Rozwiązań zagadnienia lokalnego poszukujemy więc też jako funkcji zmiennej  $y$ . Ponieważ

$$\frac{\partial F(\mathbf{y}\mathbf{n})}{\partial y_k} = \frac{dF(y)}{dy} n_k,$$

więc wzór (3.49) opisujący problem lokalny można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dy} \left[ n_m c_{m\alpha\beta n}(y) n_n \frac{d\chi_\beta^{(\gamma j)}}{dy} \right] = -\frac{d}{dy} c_{m\alpha\gamma j}(y) n_m,$$

stąd

$$n_m c_{m\alpha\beta r}(y) n_r \frac{d\chi_\beta^{(\gamma j)}}{dy} = -n_m c_{m\alpha\gamma j}(y) + A_{\alpha\gamma j}. \quad (4.1)$$

Wprowadzając oznaczenie  $(n_m c_{m\alpha\beta r}(y) n_r)^{-1} = s_{\alpha\beta}(y)$ , mamy:

$$\frac{d\chi_\beta^{(\gamma j)}}{dy} = -s_{\beta\alpha}(y) n_r c_{r\alpha\gamma j}(y) + s_{\beta\alpha}(y) A_{\alpha\gamma j}. \quad (4.2)$$

Zauważmy, że tensor  $s_{\alpha\beta}$  jest tensorem symetrycznym drugiego rzędu reprezentowanym macierzą  $4 \times 4$ . Całkując (4.2) po komórce otrzymamy:

$$\langle s_{\beta\alpha}(y) n_r c_{r\alpha\gamma j}(y) \rangle = \langle s_{\beta\alpha}(y) \rangle A_{\alpha\gamma j},$$

stąd

$$A_{\alpha\gamma j} = \langle s_{\alpha\nu}(y) \rangle^{-1} \langle s_{\nu\mu}(y) n_i c_{i\mu\gamma j}(y) \rangle. \quad (4.3)$$

Podstawiając (4.3) do (4.2) otrzymujemy:

$$\frac{d\chi_\beta^{(\gamma j)}}{dy} = -s_{\beta\alpha}(y) n_r c_{r\alpha\gamma j}(y) + s_{\beta\alpha}(y) \langle s_{\alpha\nu}(y) \rangle^{-1} \langle s_{\nu\mu}(y) n_i c_{i\mu\gamma j}(y) \rangle. \quad (4.4)$$

Z (3.50) mamy ogólną postać wzorów na stałe zhomogenizowane dla ośrodka warstwowego o dowolnej niejednorodności (ciągłej lub „dyskretnej”)

$$\begin{aligned} c_{i\alpha\beta\gamma}^h &= \langle c_{i\alpha\beta\gamma}(y) \rangle - \langle c_{i\alpha\mu\mu}(y) n_m s_{\mu\nu}(y) n_r c_{r\nu\beta\gamma}(y) \rangle + \\ &+ \langle c_{i\alpha\rho m}(y) n_m s_{\rho\mu}(y) \rangle \langle s_{\mu\nu}(y) \rangle^{-1} \langle s_{\nu\kappa}(y) n_v c_{v\kappa\beta\gamma}(y) \rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dla ośrodka  $N$ -składnikowego własności materiałowe przyjmujemy w postaci:

$$c_{n\alpha\beta k}(y) = \sum_{i=1}^N {}^{(i)} c_{n\alpha\beta k} \kappa_i(y),$$



gdzie  $\kappa_i(y)$  jest funkcją charakterystyczną obszaru zajętego przez materiał  $i$ -ty,  $c_{n\alpha\beta k}^{(i)}$  są stałymi tensorami.

Wtedy

$$\langle c_{n\alpha\beta k}(y) \rangle = \sum_{i=1}^N c_{n\alpha\beta k}^{(i)} v_i, \quad (4.6)$$

gdzie  $v_i$  jest udziałem objętościowym  $i$ -tego materiału, tj. względną grubością warstwy.

W tym przypadku otrzymujemy

$$\langle c_{n\alpha\beta m}(y) n_m s_{\beta\mu}(y) n_k c_{k\mu\nu j}(y) \rangle = \sum_{i=1}^N v_i c_{n\alpha\beta m}^{(i)} n_m s_{\beta\mu}^{(i)} n_r c_{r\mu\nu j}^{(i)},$$

gdzie

$$s_{\alpha\beta}^{(i)} = (n_l c_{l\alpha\beta j} n_j)^{-1},$$

$$\langle c_{n\alpha\beta m}(y) n_m s_{\beta\mu}(y) \rangle = \sum_{i=1}^N v_i c_{n\alpha\beta m}^{(i)} n_m s_{\beta\mu}^{(i)},$$

$$\langle s_{\alpha\beta}(y) \rangle = \sum_{i=1}^N v_i s_{\alpha\beta}^{(i)},$$

$$\langle s_{\alpha\beta}(y) n_r c_{r\beta\mu q}(y) \rangle = \sum_{i=1}^N v_i s_{\alpha\beta}^{(i)} n_r c_{r\beta\mu q}^{(i)}.$$

Wzory (4.5) w zapisie absolutnym, przy kierunku laminacji  $\mathbf{n}$ , mają postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^h = & \langle \mathbf{c} \rangle - \langle (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^{-1} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}) \rangle + \\ & + \langle (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^{-1} \rangle \cdot \langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^{-1} \rangle^{-1} \cdot \langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^{-1} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}) \rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie  $\cdot$  oznacza proste nasunięcie.

Prostsze wyrażenia otrzymujemy dla

$$\mathbf{c}^h \cdot \mathbf{n} = \langle (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^{-1} \rangle \cdot \langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^{-1} \rangle^{-1}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}^h \cdot \mathbf{n} = \langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{n})^{-1} \rangle^{-1}. \quad (4.9)$$

Dla ośrodka dwuskładnikowego wzór na stałe zhomogenizowane można zapisać w postaci:

$$C_{i\alpha\beta n}^h = \langle C_{i\alpha\beta n} \rangle + C_{i\alpha\gamma q}^{(1)} \int_{Y_1} \frac{\partial \chi_\gamma^{(\beta n)}}{\partial y_q} dY + C_{i\alpha\gamma q}^{(2)} \int_{Y_2} \frac{\partial \chi_\gamma^{(\beta n)}}{\partial y_q} dY. \quad (4.10)$$

Dla periodycznej funkcji  $\chi_p^{(mn)}$  mamy:

$$\int_Y \frac{\partial \chi_\gamma^{(\beta n)}}{\partial y_q} dY = 0,$$

czyli

$$\int_{Y_2} \frac{\partial \chi_\gamma^{(\beta n)}}{\partial y_q} dY = - \int_{Y_1} \frac{\partial \chi_\gamma^{(\beta n)}}{\partial y_q} dY.$$

Więc na stałe zhomogenizowane otrzymujemy wzór:

$$C_{i\alpha\beta n}^h = \langle C_{i\alpha\beta n} \rangle - \llbracket C_{i\alpha\gamma q} \rrbracket \int_{Y_1} \frac{\partial \chi_\gamma^{(\beta n)}}{\partial y_q} dY, \quad (4.11)$$

gdzie

$$\llbracket C_{i\alpha\beta q} \rrbracket = C_{i\alpha\beta q}^{(2)} - C_{i\alpha\beta q}^{(1)}.$$

Stałe efektywne dla ośrodka warstwowego można wyznaczać ze wzoru (4.11) w postaci zawierającej jawną zależność od kontrastu  $\llbracket C_{i\alpha\beta q} \rrbracket$ :

$$C_{i\alpha\beta n}^h = \langle C_{i\alpha\beta n} \rangle - v(1-v)(B)_{\gamma\delta}^{-1} \llbracket C_{i\alpha\gamma r} \rrbracket n_r \llbracket C_{s\delta\beta n} \rrbracket n_s, \quad (4.12)$$

gdzie  $v$  jest udziałem objętościowym pierwszego składnika, zaś  $\mathbf{B}^{-1}$  jest macierzą odwrotną do macierzy

$$B_{\alpha\beta} = v C_{p\alpha\beta q}^{(2)} n_p n_q + (1-v) C_{p\alpha\beta q}^{(1)} n_p n_q,$$

Wzór 4.12 w zapisie absolutnym przyjmuje postać

$$\mathbf{C}^h = \langle \mathbf{C} \rangle - v(1-v)(\llbracket \mathbf{C} \rrbracket \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{C} \rrbracket). \quad (4.13)$$

Wszystkie powyższe formuły redukują się do związków na stałe efektywne dla warstwowych ośrodków sprężystych, gdy wskaźniki górne lub dolne oznaczone literami greckimi przebiegają ciąg wartości 1,2,3.

Formuły (4.7)-(4.9) oraz zapis absolutny (4.13) nie były dotychczas opublikowane w znanych autorce pracach.

## 4.2. Laminowanie wielokrotne dwuskładnikowego kompozytu piezoelektrycznego

Rozpatrzmy kompozyt warstwowy złożony z dwóch powtarzających się warstw piezoelektrycznych. Zauważmy, że w szczególnym przypadku jeden z materiałów może być sprężysty i ewentualnie posiadać niezerowe stałe dielektryczne.

Związki konstytutywne zapiszemy w notacji symbolicznej

$$\Sigma = \mathbf{A}\mathcal{E}, \quad (4.14)$$

gdzie

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{g} \\ \mathbf{g} & \epsilon \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (4.15)$$

Zakładamy, że własności materiału zależą od jednej zmiennej przestrzennej w kierunku wektora  $\mathbf{n}_1$  (np. wektora jednostkowego osi  $x_1$ ) w sposób następujący

$$\mathbf{A} = \chi(x_1) \mathbf{A}^{(1)} + (1 - \chi(x_1)) \mathbf{A}^{(2)}, \quad (4.16)$$

gdzie blokowe macierze  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$  opisują odpowiednio, stałe materiałowe jednorodnego materiału (1) i (2), a funkcja  $\chi(x_1)$  jest periodyczną funkcją charakterystyczną obszaru zajętego przez materiał (1), czyli  $\chi(x_1) = 1$  na warstwie zajętej przez materiał (1), a  $\chi(x_1) = 0$  na warstwie zajętej przez materiał (2).

Dla ośrodka warstwowego lokalne pola odkształceń i pola elektryczne są stałe na warstwach, tzn.:

$$\mathcal{E}(x_1) = \chi(x_1) \mathcal{E}^{(1)} + (1 - \chi(x_1)) \mathcal{E}^{(2)}, \quad (4.17)$$

gdzie blokowe wektory  $\mathcal{E}^{(1)}$ ,  $\mathcal{E}^{(2)}$  są stałe na warstwach zajętych przez materiał (1) i (2).

Warunek ciągłości naprężeń normalnych i normalnej składowej pola indukcji elektrycznej (przesunięcia elektrycznego) wyraża się w notacji symbolicznej formułą:

$$(\mathbf{A}^{(1)} \mathcal{E}^{(1)}) \mathbf{n}_1 = (\mathbf{A}^{(2)} \mathcal{E}^{(2)}) \mathbf{n}_1, \quad (4.18)$$

co oznacza w notacji indeksowej:

$$\left( c_{ijkl}^{(1)} e_{kl}^{(1)} - g_{lij}^{(1)} E_l \right) n_{1i} = \left( c_{ijkl}^{(2)} e_{kl}^{(2)} - g_{lij}^{(2)} E_l \right) n_{1i}, \quad (4.19)$$

oraz

$$\left( g_{ikl}^{(1)} e_{kl}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(1)} E_j \right) n_{1i} = \left( g_{ikl}^{(2)} e_{kl}^{(2)} + \epsilon_{ij}^{(2)} E_j \right) n_{1i}. \quad (4.20)$$

Warunek ciągłości lokalnego przemieszczenia i potencjału elektrycznego ma postać

$$\mathcal{E}^{(1)} - \mathcal{E}^{(2)} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{n}_1, \quad (4.21)$$

gdzie  $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ w_0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{w}$  jest wektorem,  $w_0$  jest skalarem, a operacja  $\oplus$  zdefiniowana jest następująco:

$$\mathbf{W} \oplus \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{w}) \\ w_0 \mathbf{n}_1 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Warunek ten oznacza, że lokalnie stałe pola odkształceń i pole elektryczne są polami bezrotacyjnymi (potencjalnymi). Symbol  $\otimes$  oznacza iloczyn tensorowy.

W wyniku homogenizacji, makroskopowe związki konstytutywne mają postać

$$\Sigma^h = \mathbf{A}^h \mathcal{E}^h, \quad (4.23)$$

gdzie

$$\Sigma^h = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^h \\ \mathbf{D}^h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^h & -\mathbf{g}^h \\ \mathbf{g}^h & \boldsymbol{\epsilon}^h \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^h = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^h \\ \mathbf{E}^h \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Ponieważ  $\Sigma^h = \langle \Sigma \rangle$  oraz  $\mathcal{E}^h = \langle \mathcal{E} \rangle$ , to

$$\Sigma^h = \theta \mathbf{A}^{(1)} \mathcal{E}^{(1)} + (1 - \theta) \mathbf{A}^{(2)} \mathcal{E}^{(2)}, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{E}^h = \theta \mathcal{E}^{(1)} + (1 - \theta) \mathcal{E}^{(2)}, \quad (4.26)$$

gdzie  $\theta$  jest udziałem objętościowym materiału o własnościach  $\mathbf{A}^{(1)}$ .

Wyznaczając  $\mathcal{E}^{(2)}$  ze wzoru (4.21) i podstawiając do (4.23), po uwzględnieniu (4.25) i (4.26) otrzymamy

$$(\mathbf{A}^h - \mathbf{A}^{(2)}) \left( \mathcal{E}^{(1)} - (1 - \theta) \mathbf{W} \oplus \mathbf{n}_1 \right) = \theta (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)}) \mathcal{E}^{(1)}.$$

Stąd

$$\mathcal{E}^{(1)} - (1 - \theta) \mathbf{W} \oplus \mathbf{n}_1 = \theta (\mathbf{A}^h - \mathbf{A}^{(2)})^{-1} (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)}) \mathcal{E}^{(1)}. \quad (4.27)$$

Macierz  $\mathbf{A}^{-1}$  odwrotna do macierzy  $\mathbf{A}$  jest zdefiniowana zależnością

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\mathbf{I}_4 = (\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}))$ ,  $\mathbf{I}_2 = (\delta_{ij})$  są odpowiednio jedynekami tensorowymi rzędu 4 i 2.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)}) \mathcal{E}^{(1)},$$

gdzie  $\boldsymbol{\eta}$  ma strukturę blokową podobną do struktury blokowej uogólnionych narężeń  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Dla niezerowej różnicy pomiędzy własnościami rozważanych materiałów mamy

$$\mathcal{E}^{(1)} = (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)})^{-1} \boldsymbol{\eta}. \quad (4.28)$$

Podstawiając (4.28) do (4.27) otrzymujemy

$$\theta (\mathbf{A}^h - \mathbf{A}^{(2)})^{-1} \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)})^{-1} \boldsymbol{\eta} - (1 - \theta) \mathbf{W} \oplus \mathbf{n}_1. \quad (4.29)$$

Aby wyznaczyć  $\mathbf{W}$  korzystamy ze wzorów (4.21), (4.18) i (4.28). Otrzymujemy równość

$$\boldsymbol{\eta} \mathbf{n}_1 = -(\mathbf{A}^{(2)} \mathbf{W} \oplus \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1, \quad (4.30)$$

którą można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\eta} \mathbf{n}_1 = -\mathbf{q}_{(2)}^{-1}(\mathbf{n}_1) \mathbf{W}. \quad (4.31)$$

Stąd

$$\mathbf{W} = -\mathbf{q}_{(2)}(\mathbf{n}_1)(\boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_1), \quad (4.32)$$

gdzie  $\mathbf{q}_{(2)}(\mathbf{n}_1)$  jest macierzą  $4 \times 4$ , a jej odwrotność  $\mathbf{q}_{(2)}^{-1}(\mathbf{n}_1)$  w symbolicznej notacji (w zapisie wskaźnikowym), ma postać:

$$\mathbf{q}_{(2)}^{-1}(\mathbf{n}_1) = \begin{bmatrix} \overset{(2)}{c}_{ijkl} n_{1j} n_{1l} & - \overset{(2)}{g}_{ijk} n_{1j} n_{1k} \\ \overset{(2)}{g}_{jkl} n_{1l} n_{1j} & \overset{(2)}{\epsilon}_{ij} n_{1j} n_{1i} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Ostateczny wzór na efektywne własności piezoelektryczne dla ośrodka warstwowego ma postać:

$$\theta(\mathbf{A}^h - \mathbf{A}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{\eta} + (1 - \theta)(\mathbf{q}_{(2)}(\mathbf{n}_1))(\boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_1) \oplus \mathbf{n}_1. \quad (4.34)$$

Powyższy wzór ma dogodną postać, jeśli chcemy otrzymać zwartą formułę na efektywne własności tzw. laminatu  $p$ -krotnego, inaczej też nazywanego wielokrotnym laminatem płaszczywnym. Konstrukcja takiego laminatu polega na tworzeniu materiału warstwowego w sposób rekurencyjny. Mianowicie, w pierwszym kroku wyznaczamy stałe zhomogenizowane  $\mathbf{A}_1^h$  dla ośrodka warstwowego, dwuskładnikowego o własnościach  $\mathbf{A}^{(1)}$  i  $\mathbf{A}^{(2)}$ , udziale objętościowym pierwszego składnika  $\theta_1$  i kierunku laminacji  $\mathbf{n}_1$ . Dolny indeks w wielkościach  $\mathbf{A}_1^h$ :  $\theta_1$  oznacza kolejny krok laminacji. W drugim kroku laminacji wyznaczamy stałe zhomogenizowane  $\mathbf{A}_2^h$  dla ośrodka warstwowego, dwuskładnikowego o własnościach  $\mathbf{A}_1^h$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$ , udziale objętościowym pierwszego składnika  $\theta_2$  i kierunku laminacji  $\mathbf{n}_2$ , itd. Tak więc, nowopowstały ośrodek warstwowy, o własnościach  $\mathbf{A}_1^h$ , używany jest jako składnik pierwszy w drugim kroku laminacji. Oznacza to, że nie zmieniający się składnik (2), traktowany jako otulający „płaszcz”, jest użyty do tworzenia laminatu, gdy tym czasem pierwszy składnik jest mieszaniną obu faz otrzymaną w wyniku poprzedniego kroku laminacji. Na stałe zhomogenizowane dla  $p$ -krotnego laminatu otrzymujemy wzór:

$$\prod_{i=1}^p \theta_i (\mathbf{A}_p^h - \mathbf{A}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{\eta} + \sum_{i=1}^p (1 - \theta_i) \left[ (\mathbf{q}_{(2)}(\mathbf{n}_i))(\boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_i) \oplus \mathbf{n}_i \right] \prod_{k=1}^{i-1} \theta_k,$$

gdzie  $\theta_0 = 1$ .

Powyższy wzór można zapisać w postaci

$$f_1(\mathbf{A}_p^h - \mathbf{A}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{A}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{\eta} + f_2 \sum_{i=1}^p c_i \left[ (\mathbf{q}_{(2)}(\mathbf{n}_i))(\boldsymbol{\eta}\mathbf{n}_i) \oplus \mathbf{n}_i \right], \quad (4.35)$$

gdzie  $f_1$  jest całkowitym udziałem objętościowym materiału (1),  $f_2 = 1 - f_1$  jest udziałem materiału (2) po  $p$ -tej laminacji. Stałe  $c_i$  dane są wzorem

$$c_i = \frac{f^{(i-1)} - f^{(i)}}{1 - f_1}. \quad (4.36)$$

Stałe  $f^{(i)}$  oznaczają udział objętościowy materiału (1) po  $i$ -tej laminacji, który wynosi

$$f^{(i)} = \prod_{k=1}^i \theta_k.$$

Stałe  $c_i$  spełniają warunki:

$$c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p c_i = 1. \quad (4.37)$$

Zauważmy, że jeśli mamy dany dowolny ciąg stałych  $c_i$  spełniających (4.37) i dowolną liczbę  $f_1 \in (0, 1)$ , to możemy wyznaczyć zbiór częściowych udziałów objętościowych  $f^{(j)}$  takich, że równości (4.36) są spełnione poprzez równanie

$$f^{(i)} = f_1 + (1 - f_1) \sum_{k=i+1}^p c_k, \quad i = 1, 2, \dots, p-1, \quad f^{(p)} = f_1,$$

Oznacza to, że formuły na laminację są podane w postaci bardzo dogodnej do sterowania parametrami w nich zawartymi. Zmieniając kąty laminacji, a zachowując udziały objętościowe na poszczególnych krokach procesu możemy otrzymać różne własności kompozytu. Podobnie, zachowując kierunki, a dobierając optymalnie (z ustalonego punktu widzenia) parcjalne udziały objętościowe dostaniemy również możliwość sterowania własnościami kompozytu. Ogólnie możemy jednocześnie sterować kątami i udziałami objętościowymi. Zauważmy, że przyjęcie we wzorze (4.33) macierzy  $\mathbf{A}_1$  o postaci

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

umożliwia otrzymanie zamkniętych formuł na własności multilaminatu „porowatego” dla  $p \geq 2$ . Podobnie więc jak w przypadku sprężystym (por. [6]) formuły te są przydatne w optymalizacji topologicznej kompozytu piezoelektrycznego.

Formuły na wielokrotną laminację kompozytów piezoelektrycznych (4.35) są oryginalnym dorobkiem autorki opublikowanym w [62].

## Rozdział 5

# Zagadnienia projektowania kompozytów piezoelektrycznych

Podstawowym zagadnieniem projektowania struktur niejednorodnych jest określenie optymalnego rozłożenia składników kompozytu w przestrzeni. W ostatnich latach temu zagadnieniu, w kontekście tzw. materiałów funkcjonalnie gradientowym (ang. FGM – *functionally graded material*), poświęcono wiele uwagi, por. np. [6, 107]. Problemy związane z FGM rozważali zarówno matematycy stosowani, jak i inżynierowie zajmujący się optymalizacją konstrukcji. Wspólną cechą badań w tej dziedzinie jest zastosowanie metod homogenizacji do optymalizacji topologicznej oraz do metody relaksacji w optymalizacji konstrukcji. Metody homogenizacji zastosowane do projektowania sprężystych materiałów złożonych, w celu otrzymania optymalnej „wydajności” elementu konstrukcyjnego lub całej konstrukcji, można znaleźć w pracach [16, 17, 18, 19]. Bez wątpienia lista ta nie jest kompletna. Ścisłe rezultaty dotyczące zadania określenia optymalnego, przestrzennego rozkładu składników uzyskano w ramach liniowej sprężystości przy użyciu teorii efektywnych związków konstytutywnych [6].

Pojęcia H-zbieżności i G-zbieżności dla liniowej sprężystości są pojęciami podstawowymi umożliwiającymi podanie ścisłych definicji oraz interpretacji efektywnych relacji konstytutywnych. Rozszerzymy te pojęcia na zagadnienia liniowej teorii piezoelektryczności.

### 5.1. H-zbieżność w piezoelektryczności

Wprowadzimy definicję H-zbieżności ciągu macierzy blokowych  $\mathbf{B}^\varepsilon(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in V$  (por. (D.15)), opisujących własności mikroniejednorodnego ośrodka piezoelektrycznego. Granica tego ciągu, macierz blokowa, oznaczona jako  $\mathbf{B}^h$ , opisuje własności kompozytu piezoelektrycznego. Wprowadźmy przestrzeń macierzy, którą oznaczymy przez  $L^\infty(V; M_{\alpha,\beta})$ , gdzie  $\beta \geq \alpha > 0$  oznaczają stałe. Elementy tej przestrzeni są macierzami blokowymi, a ich składowe są funkcjami istotnie ograniczonymi w obszarze  $V$ , tj. należą do przestrzeni  $L^\infty(V)$ . Oznacza to, że:



$$\begin{aligned}
M_{\alpha,\beta} = \{ & \mathbf{B} \mid a_{ijkl} \in L^\infty(V), h_{ijk} \in L^\infty(V), \kappa_{ij} \in L^\infty(V), \\
& \mathbf{B}(\mathbf{x})\phi \cdot \phi \geq \alpha(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2), \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\phi \cdot \phi \geq \beta(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2), \\
& \forall \phi_1 \in M_3^s, \phi_2 \in \mathbb{R}^3 \text{ dla prawie wszystkich } \mathbf{x} \in V \}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Ponieważ (5.1) zachodzi dla p.w.  $\mathbf{x} \in V$ , więc tym samym w rozpatrywanej klasie macierzy blokowych uwzględnione zostały własności warstwowych i wielowarstwowych niejednorodnych materiałów piezoelektrycznych.

### 5.1.1. Definicja H-zbieżności dla piezoelektryczności

Ciąg blokowych macierzy  $\mathbf{B}^\varepsilon(\mathbf{x})$  z przestrzeni  $L^\infty(V; M_{\alpha,\beta})$  jest H-zbieżny do H-granicy  $\mathbf{B}^h \in L^\infty(V; M_{\alpha,\beta})$  jeśli dla dowolnego  $b_i \in H^{-1}(V)$  i dowolnego  $d \in H^{-1/2}(\Gamma_3)$ , ciąg  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon)$  rozwiązań równań

$$-[a_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) - h_{kij}^\varepsilon D_k^\varepsilon]_{,j} = b_i, \quad \text{w } V, \tag{5.2}$$

$$D_{i,i}^\varepsilon = 0, \quad \varepsilon \lim [h_{ijk}^\varepsilon e_{jk}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \kappa_{ij}^\varepsilon D_j^\varepsilon]_{,m} = 0, \quad \text{w } V, \tag{5.3}$$

z warunkami brzegowymi

$$u_i^\varepsilon = 0 \quad \text{na } \Gamma_0, \quad \sigma_{ij}^\varepsilon n_j = f_i \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{5.4}$$

$$\varphi^\varepsilon = \varphi_0 \quad \text{na } \Gamma_2, \quad D_i^\varepsilon n_i = d \quad \text{na } \Gamma_3,$$

zbiega słabo do  $(\mathbf{u}, \mathbf{D})$ :

$$\mathbf{u}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{słabo w } W^{1,2}(V)^3,$$

$$\mathbf{D}^\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{D} \quad \text{słabo w } L^2(V)^3,$$

oraz

$$a_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) - h_{kij}^\varepsilon D_k^\varepsilon \rightharpoonup a_{ijkl}^h e_{kl}(\mathbf{u}) - h_{kij}^h D_k \quad \text{słabo w } L^2(V), \tag{5.5}$$

$$-h_{ijk}^\varepsilon e_{jk}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \kappa_{ij}^\varepsilon D_j \rightharpoonup -h_{ijk}^h e_{jk}(\mathbf{u}) + \kappa_{ij}^h D_j \quad \text{słabo w } L^2(V), \tag{5.6}$$

gdzie  $(\mathbf{u}, \mathbf{D})$  jest rozwiązaniem układu równań brzegowego zagadnienia dla zhomogenizowanego ośrodka

$$[a_{ijkl}^h e_{kl}(\mathbf{u}) - h_{kij}^h D_k]_{,j} = b_i, \quad \text{w } V, \tag{5.7}$$

$$D_{i,i} = 0, \quad \varepsilon \lim [-h_{ijk}^h e_{jk}(\mathbf{u}) + \kappa_{ij}^h D_j]_{,m} = 0, \quad \text{w } V, \tag{5.8}$$

$$u_i = 0 \quad \text{na } \Gamma_0, \quad \sigma_{ij}n_j = f_i \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (5.9)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{na } \Gamma_2, \quad D_i n_i = d \quad \text{na } \Gamma_3. \quad (5.10)$$

$M_{\alpha,\beta}$  oznacza składowe macierzy blokowej o strukturze macierzy  $\mathbf{A}$  zdefiniowanej w Dodatku. W powyższych wzorach

$$\sigma_{ij}^h = a_{ijkl}^h e_{kl} - h_{kij}^h D_k, \quad E_i^h = -h_{ijk}^h e_{jk} + \kappa_{ij}^h D_j,$$

$\epsilon_{lim}$  jest symbolem permutacyjnym Levi-Civity,  $\mathbf{E}^h$  jest makroskopowym polem elektrycznym,  $\boldsymbol{\sigma}^h$  jest makroskopowym naprężeniem (por. (D.12)).

*Uwaga 5.1.* Warunek brzegowy stawiany na powierzchni  $\Gamma_2$  zakłada znajomość potencjału elektrycznego  $\varphi^\epsilon$  na brzegu ośrodka niejednorodnego, jak i potencjału  $\varphi$  na brzegu kompozytu, czyli ośrodka jednorodnego, zhomogenizowanego. Funkcje te możemy znaleźć wyznaczając  $\mathbf{D}^\epsilon(\mathbf{D})$  i  $\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{u})$  i wykorzystując związki konstytutywne.

Graniczna macierz, dla zagadnienia minimum energii liniowego kompozytu piezoelektrycznego, oznaczana jest jako macierz blokowa  $\mathbf{B}^h$ . Znając macierz  $\mathbf{B}^h$ , można wyznaczyć macierz  $\mathbf{A}^h$  związaną z entalpią kompozytu. Macierze te charakteryzują zhomogenizowany materiał piezoelektryczny, czyli kompozyt piezoelektryczny.

W ogólności, jeżeli dany ciąg funkcjonałów jest  $\Gamma$ -zbieżny i każdy element tego ciągu ma minimum (tzn. istnieje rozwiązanie równań Eulera), to granica ciągu minimizerów jest rozwiązaniem równania Eulera dla funkcjonału granicznego ( $\Gamma$ -granicy), [54]. H-zbieżność ciągu macierzy współczynników wprowadzona powyżej wynika z  $\Gamma$ -zbieżności odpowiedniego ciągu funkcjonałów energii. Ponieważ blokowe macierze  $\mathbf{B}^\epsilon$  są symetryczne to pojęcie H-zbieżności pokrywa się z definicją G-zbieżności, [6]. Nazwa G-zbieżność pochodzi od nazwy „funkcja Greena” dla rozpatrywanych równań różniczkowych. Istnienie H-granicy (G-granicy) ciągów macierzy należących do odpowiednio określonej przestrzeni nie wymaga przyjmowania założenia o typie niejednorodności, ani nawet zdefiniowania małego parametru  $\epsilon$  jako miary rozmiaru niejednorodności. Dodanie założenia o sposobie zależności współczynników materiałowych od małego parametru, a w szczególności periodyczna zależność od argumentu  $\frac{x}{\epsilon}$ , pozwala na podanie sposobu wyznaczania macierzy granicznej zhomogenizowanej, por. równania „na komórce” (3.49) oraz (3.50).

## 5.2. Minimalizacja podatności ośrodka piezoelektrycznego

Spośród różnorodnych zagadnień projektowania optymalnego wiele uwagi poświęcono zagadnieniu projektowania ośrodków sprężystych na minimum podatności w przypadku, gdy rozpatrywany ośrodek ma być zbudowany z dwu materiałów. Monografia [6] stanowi podsumowanie osiągniętych wyników. W monografii [101] rozpatrzono podobne zagadnienia dla płyt i powłok sprężystych. Istotną rolę w analizie tego typu zagadnień odgrywa relaksacja odpowiednich funkcjonalów i zastosowanie homogenizacji. Ściśle rzecz biorąc, okazuje się, że kompozyt dwuskładnikowy o minimalnej podatności (maksymalnej sztywności) jest realizowany przez laminaty odpowiedniego rzędu. Ten głęboki rezultat udało się ściśle udowodnić jedynie dla kompozytu zbudowanego z dwu sprężystych materiałów izotropowych o dobrze uporządkowanych modułach ścinania i modułach objętościowych, por. [6]. W ogólności ważna jest znajomość zbioru wszystkich możliwych kompozytów utworzonych z dwóch składników, czyli tzw. G-domknięcie. Innymi słowy, chodzi o znajomość modułów efektywnych (zhomogenizowanych) dla kompozytów utworzonych z danych dwóch materiałów, w ogólności anizotropowych. G-domknięcie dla kompozytów piezoelektrycznych oznacza zbiór wszystkich możliwych tensorów blokowych  $\mathbf{B}^h$  otrzymanych w wyniku homogenizacji (poprzez H-granice) dwóch składników piezoelektrycznych.

Charakteryzacja zbioru G-domknięcia nie jest znana dla dwuskładnikowych kompozytów piezoelektrycznych. Wprowadzimy dodatkowe pojęcie tzw.  $G_\theta$ -domknięcia dla kompozytów piezoelektrycznych, czyli G-domknięcia, gdy udział objętościowy jednego z składników jest ustalony i wynosi  $\theta$ , a drugiego  $1 - \theta$  dla  $\theta \in [0, 1]$ . Zbiór kompozytów otrzymanych w wyniku wielokrotnej laminacji oznaczać będziemy  $L_\theta$ . Stanowi on oczywiście podzbiór  $G_\theta$ .

Przejdźmy do sformułowania pewnego zadania na minimum uogólnionej podatności dla elementu piezoelektrycznego. Wprowadźmy konkretny funkcjonal uogólnionej podatności  $J(\chi)$ , który, dzięki naturalnym, rozważanym poprzednio warunkom brzegowym, można przyjąć w postaci:

$$J(\chi, \mathbf{B}_\chi) = \int_V b_i u_i dx + \int_{\Gamma_1} f_i u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2} D_i n_i \varphi_0 d\Gamma + \int_{\Gamma_3} d\varphi d\Gamma. \quad (5.11)$$

Funkcje  $D_i$ ,  $u_i$  i  $\varphi$  zależą od funkcji charakterystycznej  $\chi$ , bowiem macierz współczynników materiałowych ma następującą postać:

$$\mathbf{B}_\chi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \mathbf{B}^{(1)} + (1 - \chi(\mathbf{x})) \mathbf{B}^{(2)}, \quad (5.12)$$

gdzie  $\chi(\mathbf{x})$  oznacza funkcję charakterystyczną części obszaru  $V$  zajmowanej przez materiał piezoelektryczny (1), tzn.  $\chi(\mathbf{x}) = 1$ , jeśli faza (1) znajduje się w punkcie  $\mathbf{x}$  i  $\chi(\mathbf{x}) = 0$ , jeśli znajduje się w nim faza (2). Funkcje  $u_i$  i  $D_i$  są rozwiązaniami równań typu (5.2) i (5.3) z warunkami brzegowymi (5.4). Potencjał  $\varphi$  wyznaczamy, znając  $u_i$  i  $D_i$  (zależne od  $\chi$ ) oraz związki konstytutywne.

Zadanie na minimum podatności oznacza znalezienie kresu dolnego funkcjonału  $J(\chi, \mathbf{B}_\chi)$  przy zadanych warunkach, czyli:

$$(\mathcal{P}) \quad \inf \left\{ J(\chi, \mathbf{B}_\chi) \mid \chi \in L^\infty(V; 0, 1), \int_V \chi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = v_1, \right. \\ \left. \text{spełnione są równania równowagi} \right\}. \quad (5.13)$$

Zakładamy, że  $0 \leq v_1 \leq \text{vol } V$ . Warunek izoperymetryczny w (5.13) oznacza, że objętość obszaru zajętego przez materiał (1) jest dana przez  $v_1$ , podczas gdy  $\text{vol } V$  oznacza objętość obszaru  $V$  zajętego przez całe ciało. Wprowadzając mnożnik Lagrange'a  $\lambda \in R$ , zapisujemy zadanie na minimum podatności w postaci

$$(\mathcal{P}_\lambda) \quad \inf \left\{ J(\chi) + \lambda \int_V \chi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \mid \chi \in L^\infty(V; \{0, 1\}) \right\}. \quad (5.14)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że symbol  $\{0, 1\}$  oznacza zbiór dwuliczbowy: 0 i 1. W ostatnim wzorze pominęliśmy stałą  $-\lambda v_1$ , ponieważ nie odgrywa ona roli w poszukiwaniu projektu optymalnego.

Jest rzeczą znaną, że zadania typu (5.14) nie posiadają w ogólnym przypadku rozwiązania. Istnieje bowiem kres dolny, ale minimum nie jest osiągalne na żadnym elemencie zbioru dopuszczalnych konfiguracji faz materiału. Stąd, podobnie jak w zagadnieniach sprężystości (por. [6]) pojawia się konieczność poszukiwania projektów uogólnionych. W tym celu funkcjonał podatności zastępujemy funkcjonałem rozszerzonym (uogólnionym, zrelaksowanym):

$$\tilde{J}(\theta, \mathbf{B}^h) = J(\theta) + \lambda \int_V \theta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (5.15)$$

gdzie  $\theta \in L^\infty(V; [0, 1])$ , zaś  $\mathbf{B}^h(\mathbf{x}) \in G_{\theta(\mathbf{x})}$ .

Relaksacja zadania  $(\mathcal{P}_\lambda)$  ma postać

$$(\mathcal{R}_\lambda) \quad \min \left\{ \tilde{J}(\theta, \mathbf{B}^h) \mid \theta \in L^\infty(V; [0, 1]), \mathbf{B}^h(\mathbf{x}) \in G_{\theta(\mathbf{x})} \text{ dla p.w. } \mathbf{x} \in V \right\} \quad (5.16)$$

Funkcje  $u_i$ ,  $D_i$  i  $\varphi$  zależą obecnie od  $\theta(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ , a więc wartości funkcji  $\theta$  mogą się zmieniać od 0 do 1.

W zagadnieniu zrelaksowanym ( $\mathcal{R}_\lambda$ ) minimum jest osiągalne, gdyż w tym przypadku przestrzeń dopuszczalnych konfiguracji została „domknięta” przez dołączenie G-granic ciągów elementów dopuszczalnych konfiguracji w zagadnieniu ( $\mathcal{P}_\lambda$ ). Ponadto, kres dolny zagadnienia pierwotnego jest równy minimum zagadnienia zrelaksowanego, co możemy zapisać symbolicznie

$$\inf(\mathcal{P}_\lambda) = \min(\mathcal{R}_\lambda). \quad (5.17)$$

Oczywiście każdy element macierzy  $\mathbf{B}^h$  należy do  $L^\infty(V)$ , czyli jest funkcją istotnie ograniczoną.

Jedno z pytań, jakie się nasuwa, to czy zbiór macierzy  $\mathbf{B}^h(\mathbf{x})$ , na którym ( $\mathcal{R}_\lambda$ ) ma rozwiązanie jest taki, że  $\mathbf{B}^h(\mathbf{x}) \in L_\theta(\mathbf{x})$ ? Na to pytanie nie ma w tej pracy ogólnej odpowiedzi, gdyż twierdząca odpowiedź dotyczy jedynie szczególnej klasy kompozytów sprężystych, por. [6]. Nie należy więc oczekiwać, że w rozważanym tutaj przypadku (znacznie ogólniejszym, niż mieszanina dwóch izotropowych materiałów sprężystych), można udowodnić istnienie konstrukcji zbioru istotnych w relaksacji własności efektywnych jako zbioru laminatów wielokrotnych.

Wróćmy do zagadnienia relaksacji. Intuicyjnie postać funkcjonału w zagadnieniu ( $R_\lambda$ ) można uzasadnić następująco. Stosując tzw. metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego do zadania ( $P_\lambda$ ) mamy do czynienia z ciągiem funkcji charakterystycznych  $\chi^\varepsilon$ , a więc i z ciągiem macierzy modułów piezoelektrycznych  $\mathbf{B}^\varepsilon$ . Wiadomo, że słaba granica ciągu  $\chi^\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) nie jest funkcją charakterystyczną, lecz pewną funkcją  $\theta \in L^\infty(V; [0, 1])$ , czyli  $0 \leq \theta(x) \leq 1$ . Z H-zbieżności tego ciągu wynika, że odpowiednią granicą ciągu  $\mathbf{B}^\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) jest H-granica  $\mathbf{B}^h$ . Tym samym piezoelektrykiem o minimalnej podatności będzie niejednorodny materiał piezoelektryczny, którego lokalne własności będą otrzymane na drodze homogenizacji.

Podobnie, jak w przypadku materiałów sprężystych, można rozpatrywać zadanie optymalizacji kształtu na minimum podatności, por. [6, 101]. Formalnie wystarczy przyjąć, że moduły „słabszego” materiału znikają. Optymalizacja topologiczna odnosi się do sytuacji, w której poszukujemy optymalnego kształtu i topologii rozmieszczenia materiału, które minimalizują odpowiedź konstrukcji poddanej działaniu sił zewnętrznych. Zagadnienie tak rozumianej optymalizacji topologicznej jest szczególnym przypadkiem projektowania kompozytu dwufazowego, w którym jedną z faz jest pustka (rozumiana jako graniczne przejście z własnościami materiału do 0), a więzami w poszukiwaniu projektu optymalnego jest dany całkowity ciężar lub objętość materiału litego. Specyfiką takich zagadnień dla kompozytów piezoelektrycznych jest fakt, że pustka rozumiana

jako próżnia ma stałą dielektryczną różną od zera. Próżnia jest też nośnikiem pola elektrycznego, a więc macierz blokowa charakteryzująca próżnię nie jest tożsamościowo równa zeru. W wyniku procesu homogenizacji materiału litego i pustek otrzymujemy lżejszy materiał o własnościach piezoelektrycznych, które mogą być lepsze, niż własności materiału litego. Ten fakt został wykorzystany do opracowania produkcji nowych, lekkich materiałów piezokompozytowych, por. [86, 145, 147]. Należy jednak podkreślić, że optymalizacja topologiczna jest zagadnieniem prostszym, niż poszukiwanie optymalnego projektu wyznaczającego minimalną podatność. Warto zauważyć, że element konstrukcji z materiału piezoelektrycznego o optymalnym kształcie może zawierać trzy podobszary złożone z trzech składników: 1) materiału litego, 2) pustek, 3) kompozytu będącego mieszaniną materiału i pustek.

### 5.3. Powierzchnia wyężenia dla kompozytów piezoelektrycznych

Rozpatrzmy elementy konstrukcji wykonane z 2 liniowo piezoelektrycznych składników o własnościach zadanych blokowymi tensorami  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Obszar zajęty przez ciało oznaczmy przez  $V$ . Składniki zajmują dwa podobszary tego zbioru. Wprowadzimy oznaczenie  $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ . Stosunek liniowego wymiaru mikroniejednorodności do charakterystycznego wymiaru ciała oznaczmy jak zwykle przez  $\varepsilon$ . Lokalny tensor własności piezoelektrycznych  $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in V$  jest kawałkami stały i przyjmuje wartości  $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \mathbf{A}_i$  w  $i$ -tej fazie. Dla sił masowych  $\mathbf{f}$  naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$  i indukcja elektryczna  $\mathbf{D}^\varepsilon$  w każdym punkcie kompozytu spełniają równania:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = -\mathbf{f}, \quad (5.18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^\varepsilon = 0. \quad (5.19)$$

Związki konstytutywne zapiszemy w notacji symbolicznej

$$\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon = \mathbf{A}^\varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}^\varepsilon, \quad (5.20)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \\ \mathbf{D}^\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\varepsilon & -\mathbf{g}^\varepsilon \\ \mathbf{g}^\varepsilon & \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}^\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^\varepsilon \\ \mathbf{E}^\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Tutaj  $\mathbf{e}^\varepsilon$  jest tensorem odkształcenia,  $\mathbf{E}^\varepsilon$  polem elektrycznym,

$$\mathbf{e}^\varepsilon = \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^\varepsilon + u_{j,i}^\varepsilon), \quad \mathbf{E}^\varepsilon = \mathbf{E}(\varphi^\varepsilon) = -\operatorname{grad} \varphi^\varepsilon, \quad (5.22)$$

$u_i^\varepsilon$  jest  $i$ -tą składową przemieszczenia,  $u_{i,j}^\varepsilon$  pochodną cząstkową względem  $j$ -tej współrzędnej, a  $\varphi^\varepsilon$  jest potencjałem elektrycznym.

Na brzegu ciała zadajemy przemieszczenia i potencjał elektryczny równe zeru. Funkcjonalnie gradientowe („w sposób celowy” zmienne makroskopowo) materiały (FGM – ang. *functionally graded material*) charakteryzują się mikrostrukturą, która jest zależna od położenia w elemencie materialnym. A więc materiał taki jest makroskopowo niejednorodny, jego własności zmieniają się przestrzennie na makroskali, cf. [3]. Tak więc rzeczywiste naprężenia oraz pole indukcji można rozłożyć na część lokalną i makroskopową, które odzwierciedlają hierarchiczną strukturę geometrii kompozytu. Naprężenie  $\sigma^\varepsilon$  oraz indukcję  $\mathbf{D}^\varepsilon$  można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\sigma^\varepsilon &= \sigma^M + \sigma_\varepsilon^m, \\ \mathbf{D}^\varepsilon &= \mathbf{D}^M + \mathbf{D}_\varepsilon^m.\end{aligned}$$

Tutaj  $\sigma^M$  jest makronaprężeniem, a  $\mathbf{D}^M$  jest makroskopową indukcją.

Makroskopowe prawa konstytutywne mają postać:

$$\sigma^M(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}^M, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^M = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^M(\mathbf{x}), \varphi^M(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(\mathbf{u}^M(\mathbf{x})) \\ \mathbf{E}(\varphi^M) \end{bmatrix},$$

gdzie  $\mathbf{e}(\mathbf{u}^M(\mathbf{x}))$  i  $\mathbf{E}(\varphi^M)$  jest odpowiednio zhomogenizowanym lub makroskopowym odkształceniem i polem elektrycznym.  $\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})$  jest efektywnym tensorem piezoelektrycznym. Tutaj  $\mathbf{e}(\mathbf{u}^M) = (u_{i,j}^M + u_{j,i}^M)/2$ , zaś  $\mathbf{E}(\varphi^M) = (\varphi_{,j}^M)$ , gdzie  $\mathbf{u}^M$  jest makroskopowym przemieszczeniem, a  $\varphi^M$  makroskopowym potencjałem elektrycznym. Na brzegu obszaru położymy  $\mathbf{u}^M = \mathbf{0}$  i  $\varphi^M = 0$ . Pola makroskopowe spełniają równania:

$$\operatorname{div} \sigma^M = -\mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^M = 0. \quad (5.23)$$

Mikronaprężenia  $\sigma_\varepsilon^m$  oraz mikroindukcja  $\mathbf{D}_\varepsilon^m$  zależą od  $\varepsilon$  i opisują związki pomiędzy mikrostrukturą, a polami makroskopowymi  $\sigma^M$  i  $\mathbf{D}^M$ .

Oddziaływanie pomiędzy polami makroskopowymi i mikrostrukturą można opisać poprzez rozwiązanie zagadnienia

$$\operatorname{div} (\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})) \left( \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^M, \varphi^M) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m, \varphi^m) \right) = \operatorname{div} \left( \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^M, \varphi^M) \right), \quad (5.24)$$

przy założeniu, że  $\mathbf{u}_\varepsilon^m$  i  $\varphi_\varepsilon^m$  znikają na brzegu ciała.

Opis efektywnych własności FGM nie wymaga założeń o typie mikrostruktury. Hipoteza o statystycznej jednorodności jest nieprzydatna do opisu takich zagadnień. Dopuszczamy rozkłady geometrii, które są makroskopowo statystycznie niejednorodne. W tym przypadku istotne są pojęcia  $H(G)$ -zbieżności wprowadzone w Rozdz. 5.1.

$G$ -zbieżność opisuje zbieżność zagadnienia (5.18), (5.19) do rozwiązania zagadnienia makroskopowego  $M$  (5.23), gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Zagadnienie brzegowe związane z efektywnym niejednorodnym tensorem piezoelektryczności  $\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})$  zapiszemy w notacji symbolicznej

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \mathcal{E}(\mathbf{u}^M, \varphi^M) \right) = -\mathbf{F}, \quad (5.25)$$

gdzie  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$ , zaś  $\mathbf{u}^M$  i  $\varphi^M$  są równe zeru na brzegu ciała.

$G$ -zbieżność oznacza, że ciąg blokowych tensorów  $\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})$  jest  $G$ -zbieżny do  $\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ , gdy  $\varepsilon$  dąży do zera. Fizycznie oznacza to, że zachowanie się piezoelektrycznego „elementu” ciała posiadającego mikrostrukturę można przybliżyć, dla małych  $\varepsilon$ , piezoelektrycznym efektywnym tensorem  $\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ . Bogatsza informacja o mikrostrukturze, niż ta zawarta w efektywnym tensorze piezoelektrycznym jest ukryta w rozwiązaniu zagadnienia mikroskopowego (5.3.24). Rzeczywiście równanie to zawiera informacje o koncentracji naprężeń i pola indukcji na poziomie mikrostruktury, por. wyprowadzenie równań na efekt warstwy brzegowej w Rozdz. 3.5. tej monografii.

Wprowadźmy sformułowanie lokalnej wersji (5.3.24) stowarzyszonej z ciągiem  $\{\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})\}_{\varepsilon \geq 0}$ . W tym celu rozpatrzmy kostkę  $Q(\mathbf{x}, r)$  o środku w punkcie  $\mathbf{x} \in V$  i długości krawędzi  $r$ . Dla  $r$  dostatecznie małych,  $Q(\mathbf{x}, r)$  zawiera się w  $V$ . Wprowadzając stałe odkształcenie  $\bar{\mathbf{e}}$  i pole elektryczne  $\bar{\mathbf{E}}$ , lokalne funkcje „korektorowe” (ang. *corrector functions*) będą rozwiązaniami równania:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \left( \mathcal{E}(\mathbf{w}_{\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}, \psi_{\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}) + \bar{\mathcal{E}} \right) = \operatorname{div} \left( \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \bar{\mathcal{E}} \right), \quad \text{w } Q(\mathbf{x}, r),$$

gdzie  $\mathbf{w}_{\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}$  oraz  $\psi_{\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}$  jest równe zeru na brzegu kostki, zaś  $\bar{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ \bar{\mathbf{E}} \end{bmatrix}$ .



Zauważmy, że tak sformułowane zagadnienie jest uogólnieniem periodycznego zagadnienia na komórce. Wtedy efektywny tensor piezoelektryczny wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \bar{\mathcal{E}} : \bar{\mathcal{E}} &= \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{Q(\mathbf{x}, r)} \int_{Q(\mathbf{x}, r)} \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{y}) \left( \mathcal{E}(\mathbf{w}_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}, \psi_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}) + \bar{\mathcal{E}} \right) : \left( \mathcal{E}(\mathbf{w}_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}, \psi_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}) + \bar{\mathcal{E}} \right) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

W zastosowaniach technicznych ważne jest określenie kryterium wyęźnienia kompozytu piezoelektrycznego. Aby wyrazić to kryterium, niezbędne jest zdefiniowanie pojęcia pochodnej tensora własności efektywnych względem „fazy”. Oznaczmy przez  $\chi_i^\varepsilon$  funkcję charakterystyczną obszaru zajętego przez  $i$ -tą fazę. Funkcja  $\chi_i^\varepsilon$  przyjmuje wartość jeden dla punktów leżących wewnątrz  $i$ -tej fazy oraz zero w pozostałych punktach.

Tensor własności piezoelektrycznych opisujący wybraną konfigurację dwóch faz można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \chi_i^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{A}_i.$$

W przypadku kompozytu  $N$ -składnikowego  $i = 1, \dots, N$ , definiujemy **gradient piezoelektrycznych własności efektywnych**  $\nabla^i \mathbf{A}^E$  kompozytów po  $i$ -tej fazie następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \left( \nabla^i \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \right) \bar{\mathcal{E}} : \bar{\mathcal{E}} &= \\ \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{Q(\mathbf{x}, r)} \int_{Q(\mathbf{x}, r)} \chi_i^\varepsilon \left( \mathcal{E}(\mathbf{w}_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}, \psi_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}) + \bar{\mathcal{E}} \right) \boxtimes \left( \mathcal{E}(\mathbf{w}_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}, \psi_{\bar{\varepsilon}, \bar{\mathbf{E}}}^{\varepsilon, r}) + \bar{\mathcal{E}} \right) d\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

gdzie  $\boxtimes$  definiujemy następująco:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} & \mathbf{e} \otimes \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \otimes \mathbf{e} & \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \end{bmatrix}.$$

Formuły (5.26) dla pochodnych są pół jawne w tym sensie, że podane są jako granice ciągów rozwiązań zagadnień lokalnych. Są one uogólnieniem definicji wprowadzonej dla liniowej sprężystości w [103].

### 5.3.1. Homogenizacja fluktuacji naprężeń i pola indukcji w $i$ -tej fazie

Powierzchnię wyężenia dla kompozytów sprężystych opisano w pracy [37]. W podobny sposób zajmiemy się kompozytami piezoelektrycznymi. Przewidywanie wyężenia dla kompozytów piezoelektrycznych musi być oparte o znajomość lokalnych *powierzchni wyężenia dla poszczególnych składników piezoelektrycznych*, które definiujemy jako

$$\mathbf{\Pi}^i \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon : \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon = 1,$$

gdzie  $\mathbf{\Pi}^i$  jest symetrycznym, dodatnio określonym tensorem blokowym wyężenia dla  $i$ -tej fazy, a  $\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon$  opisuje wzór (5.21)<sub>1</sub>.

W podobozarach  $i$ -tej fazy, gdy  $\mathbf{\Pi}^i \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon : \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon$  przekracza wartość jeden, materiał przestaje mieć požądane własności piezoelektryczne z powodu inicjacji procesu zniszczenia. W szczególności tensor ten może mieć postać:

$$\mathbf{\Pi}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{\Pi}}^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^i$  jest tensorem czwartego rzędu,  $\tilde{\mathbf{\Pi}}^i_{mjkl} = \frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{jl} + \delta_{ml}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{mj}\delta_{kl}$ . Wtedy powierzchnia wyężenia redukuje się do pewnej powierzchni plastyczności. Zadając stały  $\mathbf{\Pi}$  i dowolną różniczkowalną funkcję  $p(\mathbf{x})$ , która jest ciągła na domknięciu  $V$ , otrzymujemy następujący rezultat wynikający bezpośrednio z twierdzenia o homogenizacji: jeśli  $\{\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})\}_{\varepsilon>0}$  G-zbiega do  $\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ , wtedy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V p(\mathbf{x}) \chi_i^\varepsilon \mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\Sigma}^M + \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^m) : (\boldsymbol{\Sigma}^M + \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^m) d\mathbf{x} = \int_V p(\mathbf{x}) \langle \mathbf{\Pi} \rangle_i \boldsymbol{\Sigma}^M : \boldsymbol{\Sigma}^M d\mathbf{x},$$

gdzie

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle_i \boldsymbol{\Sigma}^M : \boldsymbol{\Sigma}^M = \left( \mathbf{S}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \mathbf{A}_i \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_i \nabla^i \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \mathbf{S}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \right) \boldsymbol{\Sigma}^M : \boldsymbol{\Sigma}^M.$$

Tutaj  $\mathbf{S}^E = (\mathbf{A}^E)^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{x})$  jest tensorem odwrotnym do tensora własności piezoelektrycznych  $\mathbf{A}$ .

Gdy  $\varepsilon$  zbiega do zera, to ciąg funkcji charakterystycznych  $i$ -tej fazy zbiega słabo do gęstości  $\theta_i(\mathbf{x})$  tak, że dla dowolnej kostki  $Q(\mathbf{x}, r)$  w  $V$  mamy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{Q(\mathbf{x}, r)} (\chi_i^\varepsilon(\mathbf{y}) - \theta_i(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = 0.$$

Zbieżność tą zapisujemy symbolicznie  $\chi_i^\varepsilon \xrightarrow{*} \theta_i$ .

### 5.3.2. Zhomogenizowana powierzchnia graniczna dla $i$ -tej fazy

Zakładamy, że ciąg  $\{\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})\}_{\varepsilon>0}$   $G$ -zbiega do  $\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})$ ,  $\chi_i^\varepsilon \xrightarrow{*} \theta_i$  oraz, że uogólnione naprężenia w  $i$ -tej fazie spełniają nierówność:

$$\mathbf{\Pi}^i \Sigma^\varepsilon : \Sigma^\varepsilon \leq 1.$$

Wtedy

$$\langle \mathbf{\Pi}^i \rangle_i \Sigma^M : \Sigma^M \leq 1,$$

prawie wszędzie w  $V$ . Co więcej, jeżeli  $\mathbf{\Pi}^i \Sigma^\varepsilon : \Sigma^\varepsilon = 1$  to  $\langle \mathbf{\Pi}^i \rangle_i \Sigma^M : \Sigma^M = 1$ .

### 5.3.3. Homogenizacja powierzchni granicznej w materiale gradientowym

Załóżmy, że  $\{\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})\}_{\varepsilon>0}$   $G$ -zbiega do  $\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \mathbf{x})$  oraz odpowiednie umowne „naprężenia”  $\Sigma^\varepsilon$  spełniają warunek

$$\mathbf{\Pi}^*(\Sigma^\varepsilon) = \max_i \{ \mathbf{\Pi}^i \Sigma^\varepsilon : \Sigma^\varepsilon \} \leq 1,$$

dla każdego  $\varepsilon \geq 0$ . Wtedy

$$(*) \quad \langle \mathbf{\Pi}^* \rangle(\Sigma^M) = \max_i \{ \langle \mathbf{\Pi}^i \rangle_i \Sigma^M : \Sigma^M \} \leq 1,$$

prawie wszędzie. Jeżeli przyjmiemy efektywną powierzchnię graniczną dla kompozytu w postaci

$$\mathbf{\Pi}^E \Sigma^M : \Sigma^M = \sum_i \langle \mathbf{\Pi}^i \rangle_i \Sigma^M : \Sigma^M = 1,$$

to z warunku

$$\mathbf{\Pi}^E \Sigma^M : \Sigma^M \leq 1$$

wynika warunek (\*). Jeżeli powierzchnia wyężenia wszystkich faz jest taka sama, to oznaczać będziemy ją przez  $\mathbf{\Pi}$ . Oczywiście powierzchnia  $\mathbf{\Pi}$  jest funkcjonalnie zależna od  $\mathbf{A}$ , czyli zarówno od własności materiałowych poszczególnych składników kompozytu, jak i od własności zhomogenizowanych

## 5.4. Projektowanie optymalne gradientowych materiałów piezoelektrycznych

Projektowanie materiałów gradientowych opiera się o pojęcie zbioru efektywnych tensorów piezoelektrycznych, podobnie jak metoda relaksacji w zagadnieniu optymalizacji na minimum uogólnionej podatności, która była wprowadzona w poprzednim paragrafie. Różnice tkwią w przestrzeniach projektów dopuszczalnych. Przestrzeń projektów w metodzie relaksacji została rozszerzona do zbioru wszystkich  $G$  granic, czyli do zbioru  $G$ -domknięcia. Ponieważ zbiór  $G$ -domknięcia jest zbiorem domkniętym z definicji, to istnieje minimum zrelaksowanego funkcjonału podatności. Zbiór projektów określony przez  $G$ -domknięcie obejmuje materiał makroskopowo niejednorodny, którego własności mogą się zmieniać skokowo w poprzek obszaru zajętego przez element konstrukcji. Natomiast zbiór projektów dopuszczalnych w materiałach gradientowych jest ograniczony do określonej ściśle klasy efektywnych tensorów odpowiadającej zdefiniowanej klasie mikrostruktur. Ponadto, ponieważ w zastosowaniach istotna i pożądana jest ciągłość zmiany efektywnych tensorów piezoelektrycznych w poprzek obszaru elementu, istotnym założeniem matematycznym będzie spełnienie tego warunku.

Przejdziemy do zdefiniowania zbioru dopuszczalnych efektywnych tensorów piezoelektrycznych opisujących własności ośrodków makroskopowo niejednorodnych w sposób ciągły. Formuły na stałe efektywne dla piezokompozytu wyznaczone są wzorami (3.50). Tutaj ograniczymy się do mikrostruktur periodycznych. Takiego rodzaju materiały produkowane są seryjnie przy użyciu technologii trójwymiarowej litografii (ang. *stereolithography*), por. [86].

Lokalnie periodyczna mikrostruktura oznacza, że dla każdego ustalonego punktu makroskopowego  $\mathbf{x} \in V$ , lokalne fluktuacje funkcji charakterystycznych  $\chi_i^\varepsilon$  są periodyczne ze względu na zmienną lokalną  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ , i.e.  $\chi_i^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  i  $\chi_i(\cdot, \mathbf{y})$  jest  $Y$ -periodyczne. Ponadto,  $\frac{1}{|Y|} \int_Y \chi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \theta_i(\mathbf{x})$ . Procedura niejednorodnej homogenizacji może być użyta do sformułowania tzw. „zagadnienia na komórce” dla każdego ustalonego makroskopowego punktu  $\mathbf{x} \in V$ , por. Rozdz. 3.3. Oznacza to, że zadana jest periodyczna geometria określona jednoznacznie przez funkcję charakterystyczną  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . W szczególności możemy ustalić geometrię, a zmieniać jedynie udział objętościowy składników, tj. założyć, że  $\langle \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = \theta(\mathbf{x})$ . Tak więc, w przypadku, gdy znane są własności obu faz kompozytu, powyższe zagadnienie może być rozwiązany numerycznie z jednym parametrem sterowania, którym jest lokalny udział objętościowy

jednego ze składników, np.  $\theta(\mathbf{x}) = \theta_1(\mathbf{x})$  (udział objętościowy drugiej fazy wynosi  $\theta_2(\mathbf{x}) = 1 - \theta_1(\mathbf{x})$ ).

Zdefiniujemy jednoznacznie mikrostrukturę przez zbiór parametrów geometrycznych oznaczonych przez  $\underline{\beta} = \beta_1, \dots, \beta_n$ ). Parametry te muszą być wyspecyfikowane w każdym konkretnym zagadnieniu projektowania. W szczególności rozważmy przypadek dwuskładnikowego kompozytu o lokalnej geometrii typu osnowa-włókna. Włókna mają ustalony przekrój prostokątny, rozłożony w osnowie w ten sposób, że ściany prostokąta są równoległe do ścian pewnej kwadratowej komórki periodyczności. Wersor normalny do płaszczyzny przekroju zadany jest przez dwa kąty Eulera opisujące kierunek ułożenia włókien w przestrzeni. Geometrię przekroju opisują dwa parametry: stosunek boków prostokąta i pole powierzchni prostokąta. „Wektor”  $\underline{\beta}$  ma w tym przypadku cztery składowe. Jeżeli dopuścimy mikrostruktury, w których geometria przekroju w poprzek włókien nie jest stała (np. prostokąt może być dowolnie obrócony względem środka symetrii komórki periodyczności), to musimy dodać jeszcze jeden parametr geometryczny opisujący ten obrót. W każdej komórce periodyczności składowe wektora geometrycznego są ustalone. Oczywiście możemy mieć bardziej restrykcyjne żądania i określić zbiór dopuszczalny tylko poprzez jeden parametr, ustalając pozostałe.

Przypomnijmy, że komórka periodyczności – oznaczana jak i dotychczas przez  $Y$  – opisuje punkty w mikrostrukturze  $\mathbf{y} \in Y$ . Charakterystyczną funkcję  $i$ -tej fazy w komórce periodyczności oznaczamy przez  $\chi_i(\underline{\beta}, \mathbf{y})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , gdzie  $N$  jest liczbą składników w kompozycji. W każdym przypadku kompozyt może być  $N$ -składnikowy i wówczas tensor własności materiałowych  $A^{per}(\mathbf{A}, \underline{\beta}, \mathbf{y})$  jest funkcją obszarami stałą na fazach, równą  $\mathbf{A}_i$  w  $i$ -tej fazie. Pole geometrycznego wektora  $\underline{\beta}$  opisujące geometrię kompozytu zmienia się w obszarze  $V$  zajęтым przez materiał kompozytowy. Ta makroskopowa zmienność odpowiada za zmiany efektywnych parametrów materiałowych zgodne z makroskopowymi zmianami charakteryzującymi zmienność mikrostruktury od jednego do drugiego punktu makroskopowego  $\mathbf{x} \in V$ . Tak więc efektywny tensor piezoelektryczności może być zapisany jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \underline{\beta}(\mathbf{x})) \bar{\mathcal{E}} : \bar{\mathcal{E}} &= \\ &= \frac{1}{Y} \int_Y \mathbf{A}^{per}(\mathbf{A}, \underline{\beta}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \left( \mathcal{E}(\mathbf{w}(\mathbf{y}), \psi(\mathbf{y})) + \bar{\mathcal{E}} \right) : \left( \mathcal{E}(\mathbf{w}(\mathbf{y}), \psi(\mathbf{y})) + \bar{\mathcal{E}} \right) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{w}$  i  $\psi$  są  $Y$ -periodycznymi rozwiązaniami problemu na komórce (3.48) o składowych w klasie funkcji  $W^{1,2}(Y, R^3)$ . Zakładamy, że obszar zajmowany

przez każdy ze składników kompozytu w mikrostrukturze zmienia się w sposób ciągły ze względu na wektor geometryczny  $\underline{\beta}$ , tj.:

$$\lim_{\delta \underline{\beta} \rightarrow 0} \int_V |\chi_i(\underline{\beta}, \mathbf{y}) - \chi_i(\underline{\beta} + \delta \underline{\beta}, \mathbf{y})| d\mathbf{y} = 0. \quad (5.27)$$

Zbiór dopuszczalnych wektorów geometrycznych oznaczmy przez  $\mathcal{A}_d$  i założymy, że jest to zbiór skończony i ograniczony. Makroskopowe zmiany własności materiałów gradientowych są ciągłe względem zmiennej  $\mathbf{x} \in V$ . W celu udowodnienia twierdzeń o istnieniu projektu optymalnego musimy zażądać spełnienia warunku jednostajnej ciągłości Höldera w domknięciu zbioru  $\bar{V}$ , co oznacza, że dla pewnych stałych  $C > 0$  i  $0 < \alpha < 1$ ,

$$|\underline{\beta}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \underline{\beta}(\mathbf{x})| \leq C|\mathbf{h}|^\alpha, \quad \text{p.w. w } V. \quad (5.28)$$

Należy też nałożyć więzy na ilości materiału poszczególnych składników, którymi możemy dysponować przy projektowaniu. Są one uogólnieniem warunku izoperymetrycznego przyjmowanego w optymalizacji podatności, por. [6]. Więzy te dane są w postaci następujących nierówności

$$\int_V \theta_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.29)$$

gdzie lokalny udział objętościowy  $i$ -tego składnika w kompozycie dany jest jako  $\theta_i(\mathbf{x}) = \int_Y \chi_i(\underline{\beta}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ . Tak więc przestrzeń projektowania zawiera wszystkie możliwe podziały  $v$  na podzbiory  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  (zajęte przez różne materiały), objętość  $(V_i) \leq \gamma_i$ , a „wektor”  $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$  nazwiemy wektorem więzów.

Zbiór parametrów sterowania  $\underline{\beta}$ , który spełnia (5.27) oraz warunek (5.28), oznaczmy przez  $\mathcal{A}_{d\gamma}$ . Rozpatrywana poniżej uogólniona podatność projektu zhomogenizowanego dana jest jako

$$P(\mathbf{u}^E, \phi^E) = \int_V \mathbf{F} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^E \\ \phi^E \end{bmatrix} d\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{F}$  zadane jest wzorem (5.25), a  $(\mathbf{u}^E, \phi^E)$  jest rozwiązaniem zagadnienia makroskopowo niejednorodnego, por. (5.23). Zhomogenizowane (funkcjonalnie gradientowe) optymalne zagadnienie projektowania  $(\mathcal{P})^{FGM}$  definiujemy jako

zagadnienie poszukiwania kresu dolnego podatności uogólnionej w przestrzeni projektów dopuszczalnych. Oznaczmy przez  $\mathcal{P}$  wartość kresu dolnego:

$$(\mathcal{P})^{FGM} \quad \mathcal{P} = \inf_{\underline{\beta}(\mathbf{x}) \in Ad_{\gamma}} \{P(\mathbf{u}^E, \phi^E)\}, \quad (5.30)$$

Udowodnimy poniżej, że projekt optymalny istnieje. Przypomnijmy, że podobnie jak wszystkie rezultaty otrzymane przy użyciu metod homogenizacji, powyższe definicje i pojęcia są ważne w zastosowaniu do bardzo drobnych mikrostruktur i nie mogą być stosowane do optymalizacji niejednorodnych materiałów, w których rozmiar niejednorodności jest rzędu wielkości elementu kompozytowego, który chcemy zaprojektować.

Wprowadzimy definicję  $(\mathcal{P}_w)^{FGM}$  zagadnienia projektowania materiału gradientowego w przypadku przyjęcia dodatkowych całkowitych więzów na uogólnione naprężenia:

$$(\mathcal{P}_w)^{FGM} \quad \mathcal{P}_w = \inf_{\underline{\beta}(\mathbf{x}) \in Ad_{\gamma}} \{P(\mathbf{u}^E, \phi^E); \int_V \{\Pi^E(\mathbf{A}, \underline{\beta}(\mathbf{x}))\} \Sigma^E : \Sigma^E dx \leq K^2\}, \quad (5.31)$$

gdzie  $\Sigma^E$  jest zhomogenizowanym uogólnionym naprężeniem, a  $\mathbf{u}^E$  i  $\phi^E$  jest rozwiązaniem zhomogenizowanego układu równań (5.23), zaś  $\mathcal{P}_w$  wartością kresu dolnego (5.31). Założymy, że powierzchnie wyężenia obu faz są jednakowe i mają postać zadaną  $\Pi$ . Zauważmy, że powierzchnia  $\Pi$  zależy od klasy rozpatrywanych materiałów gradientowych, więc

$$\Pi = \Pi(\mathbf{A}, \underline{\beta}).$$

Jeżeli położymy  $K^2 = +\infty$  otrzymamy zagadnienie projektownia bez więzów, a więc poniżej udowodnione twierdzenie obejmuje także zagadnienie  $(\mathcal{P})^{FGM}$ .

**Twierdzenie 5.1** *Istnieje optymalny projekt dla zhomogenizowanego zagadnienia projektowania  $(\mathcal{P}_w)^{FGM}$ , czyli istnieje optymalne sterowanie  $\hat{\underline{\beta}}(\mathbf{x}) \in Ad_{\gamma}$ , dla którego kres dolny w (5.31) jest osiągalny.*

### Dowód

Rozpatrzmy jakikolwiek ciąg minimalizujący  $\mathcal{P}(\mathbf{u}^E, \phi^E)$  w problemie  $(\mathcal{P}_w)^{FGM}$ , mianowicie  $\{\underline{\beta}_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ .

Ponieważ ciąg  $\{\underline{\beta}_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$  jest jednostajnie ciągły, istnieje podciąg, oznaczony także przez  $\{\underline{\beta}_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{\infty}$ , zbieżny jednostajnie na  $\bar{V}$ , do sterowania  $\hat{\underline{\beta}}(\mathbf{x}) \in Ad_{\gamma}$ . Następnie, dla każdego stałego tensora odkształceń  $\bar{\epsilon}$  i stałego wektora pola elektrycznego  $\bar{\mathbf{E}}$ , rozpatrzmy funkcje  $Y$ -periodyczne w zmiennej  $\mathbf{y}$  ze

składowymi w przestrzeniach  $W_{per}^{1,2}(Y)$ ,  $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  oraz  $\hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , będące rozwiązaniami następujących równań na komórce periodyczności (zmienna  $\mathbf{x}$  traktowana jest jako parametr):

$$-\operatorname{div} \left( \mathbf{A}^{per}(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\beta}(\mathbf{x}), \mathbf{y})(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + \bar{\mathcal{E}}) \right) = 0. \quad (5.32)$$

Ponieważ zachodzi warunek (5.27), więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y |\chi^i(\underline{\beta}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y}) - \chi^i(\hat{\beta}(\mathbf{x}), \mathbf{y})| d\mathbf{y} = 0, \quad (5.33)$$

dla każdego  $\mathbf{x}$  w  $V$ . Stąd mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y |\mathbf{e}(\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) - \mathbf{e}(\mathbf{w}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|^2 d\mathbf{y} = 0, \quad (5.34)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y |\mathbf{E}(\hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) - \mathbf{E}(\phi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|^2 d\mathbf{y} = 0,$$

gdzie  $\mathbf{w}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\phi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , są  $Y$ -periodyczne w zmiennej  $\mathbf{y}$ , należą do przestrzeni  $W^{1,2}(Y, R^3)$  i są rozwiązaniami następującego układu równań:

$$-\operatorname{div} \left( \mathbf{A}^{per}(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\beta}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y})(\mathcal{E}(\mathbf{w}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \phi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + \bar{\mathcal{E}}) \right) = 0. \quad (5.35)$$

Jest oczywiste, że z (5.35) oraz z (5.33) i (5.36), mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^E(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\beta}_n(\mathbf{x})) = \Pi^E(\underline{\mathbf{A}}, \hat{\beta}(\mathbf{x})), \quad (5.36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^E(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\beta}_n(\mathbf{x})) = \mathbf{A}^E(\underline{\mathbf{A}}, \hat{\beta}(\mathbf{x})),$$

dla każdego  $\mathbf{x}$  w  $V$ . Z (5.37) wnioskujemy, że ciąg  $\{\mathbf{A}^E(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\beta}_n(\mathbf{x}))\}_{n=1}^{\infty}$  jest G-zbieżny do  $\mathbf{A}^E(\underline{\mathbf{A}}, \hat{\beta}(\mathbf{x}))$ , por. Rozdz. 5.1. Rozpatrujemy rozwiązania  $(\mathbf{u}_n^E, \phi_n^E)$  i  $(\hat{\mathbf{u}}^E, \hat{\phi}^E)$ , które spełniają jednorodne warunki brzegowe, odpowiednio, następujących równań równowagi:

$$-\operatorname{div} \left( \mathbf{A}^E(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\beta}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y})(\mathcal{E}(\mathbf{w}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \phi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) \right) = 0, \quad (5.37)$$

oraz

$$-\operatorname{div} \left( \mathbf{A}^E(\underline{\mathbf{A}}, \hat{\beta}(\mathbf{x}))\mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}^E, \hat{\phi}^E) \right) = \mathbf{f}. \quad (5.38)$$

Ponieważ podatność jest ciągła względem G-zbieżności, wnioskujemy że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathbf{u}_n^E, \phi_n^E) = \mathbf{P}(\hat{\mathbf{u}}^E, \hat{\phi}^E). \quad (5.39)$$



Na mocy (5.37) otrzymujemy wniosek, że ciągi  $\{\mathcal{E}(\mathbf{u}_n^E, \phi_n^E)\}_{n=1}^\infty$  i  $\{\Sigma_n^E\}_{n=1}^\infty$  silnie zbiegają w przestrzeni  $L^2(V)^{3 \times 3}$  odpowiednio do elementów  $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}^E, \hat{\phi}^E)$  i  $\hat{\Sigma}^E = \mathbf{A}^E(\underline{\mathbf{A}}, \hat{\beta}(\mathbf{x}))\mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}^E, \hat{\phi}^E)$ . Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V \{\Pi^E(\underline{\mathbf{A}}, \underline{\beta}_n(\mathbf{x}))\} \Sigma_n^E : \Sigma_n^E dx = \int_V \{\Pi^E(\underline{\mathbf{A}}, \hat{\beta}(\mathbf{x}))\} \hat{\Sigma}^E : \hat{\Sigma}^E dx, \quad (5.40)$$

co kończy dowód.  $\square$

Fakt istnienia projektu optymalnego może być wykorzystany do skonstruowania zagadnień przybliżających zagadnienie optymalne. Sformułujemy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 5.2** *Optymalne sterowanie  $\hat{\beta}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Ad}_\gamma$  może być użyte do konstrukcji ciągu celowo gradientowych materiałów z tensorami piezoelektryczności  $\{\mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{x})\}_{\varepsilon \geq 0}$ , który zbiega do  $\{\mathbf{A}^E(\mathbf{A}, \hat{\beta}(\mathbf{x}))\}_{\varepsilon \geq 0}$  takiego, że*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(\mathbf{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon) &= \mathcal{P}_w, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V \Pi \Sigma^\varepsilon : \Sigma^\varepsilon dx &\leq K^2 \quad \text{oraz} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_V \chi_i^\varepsilon(\mathbf{x}) dx &= \int_V \theta_i(\mathbf{x}) dx \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Przykład elementu ciągu materiałów gradientowych jest pokazany na końcu bieżącego rozdziału.

Twierdzenie 5.2 można dowieść w oparciu o dowód twierdzenia dla przypadku sprężystego FGM podanego w [132] str. 183. Przejdziemy teraz do rozważenia przykładu, który dzięki w dużej mierze analitycznym wynikom, dobrze ilustruje powyższe abstrakcyjne sformułowania.

#### 5.4.1. Przykład – zagadnienie jednowymiarowe

Zanim przejdziemy do rozważania zagadnienia piezoelektrycznego sformułujemy zagadnienie problemu optymalnego projektowania **sprężystego** kompozytu makroskopowo niejednorodnego (materiału gradientowego), ze względu na minimalną podatność, z więzami i bez więzów nałożonych na naprężenia. Zagadnienie to sprowadza się do znalezienia minimum podatności przy dodatkowych warunkach ograniczających naprężenia (projektowanie z więzami) lub

bez tych warunków (projektowane bez więzów). Założymy, że rozpatrywane zagadnienie jest zagadnieniem jednowymiarowym, w którym zmienna  $x \in R$ . Istnienie optymalnego sterowania, czyli optymalnego rozkładu niejednorodności, jest zagwarantowane na mocy Tw. 5.1. Pokażemy przykładowo jak skonstruować elementy „ciągu minimalizującego” w skończonym, dyskretnym (skokowo-zmiennym) modelu przybliżającym materiał gradientowy.

Przypomnimy elementarne, potrzebne w dalszych rozważaniach wyniki dotyczące szczególnego, jednowymiarowego zagadnienia brzegowego dla niejednorodnego ciała sprężystego. Zagadnienie brzegowe ma postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( c^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} u^\varepsilon(x) \right) &= -f(x) \quad \text{dla } x \in (0, 1) \quad \text{oraz} \\ u^\varepsilon(0) &= 0, \quad u^\varepsilon(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Gradientową, mikroperiodyczną strukturę materiału określa zależność

$$c^\varepsilon(x) = C_1 \chi^\varepsilon(x) + C_2(1 - \chi^\varepsilon(x)),$$

gdzie funkcja charakterystyczna podzbioru odcinka  $[0,1]$ , w którym znajduje się materiał o stałej sprężystości  $C_1$ , ma postać  $\chi^\varepsilon(x) = \chi(x, y)$ , a funkcja  $\chi(x, y)$  jest  $Y$ -periodyczna względem zmiennej  $y$ . Przypomnijmy, że  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ . Oznaczmy makroskopową zmienną wartości „średniej” z funkcji charakterystycznej przez  $\frac{1}{|Y|} \int_Y \chi(x, y); dy = \theta(x)$ .

Przyjmując stałą (równomiernie rozłożoną) siłę masową  $f(x) = f$ , rozwiązanie zagadnienia brzegowego (5.42) ma postać

$$u^\varepsilon(x, c^\varepsilon(x)) = f \left[ \frac{\int_0^1 \frac{z}{c^\varepsilon(z)} dz}{\int_0^1 \frac{1}{c^\varepsilon(z)} dz} \int_0^x \frac{1}{c^\varepsilon(z)} dz - \int_0^x \frac{z}{c^\varepsilon(z)} dz \right]. \quad (5.43)$$

Stąd, naprężenia wyrażają się wzorem

$$\sigma^\varepsilon(x, c^\varepsilon(x)) = f \left[ \frac{\int_0^1 \frac{z}{c^\varepsilon(z)} dz}{\int_0^1 \frac{1}{c^\varepsilon(z)} dz} - x \right]. \quad (5.44)$$

Ponieważ  $\varepsilon$  dąży do zera na mocy twierdzenia o homogenizacji, por. [20], otrzymujemy:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{c^\varepsilon(z)} dz = \int_0^x \frac{1}{c^E(z)} dz \quad \forall x, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^x \frac{z}{c^\varepsilon(z)} dz = \int_0^x \frac{z}{c^E(z)} dz \quad \forall x,$$

gdzie

$$c^E(x) = \left\langle \frac{1}{c^\varepsilon(x)} \right\rangle^{-1} = \left[ \left( \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right) \theta(x) + \frac{1}{C_2} \right]^{-1}. \quad (5.45)$$

Ponadto mamy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x) = f \left\{ \frac{\int_0^1 \frac{z}{c^E(z)} dz}{\int_0^1 \frac{1}{c^E(z)} dz} \int_0^x \frac{1}{c^E(z)} dz - \int_0^x \frac{z}{c^E(z)} dz \right\} = u^M(x),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma^\varepsilon(x) = f \left\{ \frac{\int_0^1 \frac{z}{c^E(z)} dz}{\int_0^1 \frac{1}{c^E(z)} dz} - x \right\} = \sigma^M(x).$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$t = \frac{\int_0^1 \frac{z}{c^E(z)} dz}{\int_0^1 \frac{1}{c^E(z)} dz}.$$

Zauważmy, że dla skończonych i różnych od zera własności materiałów  $C_1$ ,  $C_2$ , spełniony jest warunek  $t > 0$ . Wielkość  $t$  zależy od postaci funkcji  $\theta(x)$ . Używając oznaczenia  $t$ , wprowadzimy  $\sigma^M(x) = f(t - x)$ , skąd otrzymujemy

$$(\sigma^M(x))^2 = f^2(t - x)^2. \quad (5.46)$$

Podatność jest pracą wykonaną przez siły  $f$ , wyrażoną następującym wzorem:

$$P(u^M) = f \int_0^1 u^M(x) dx.$$

Zagadnienie projektowania funkcjonalnie gradientowego materiału na minimum podatności redukuje się do następującego zagadnienia minimalizacji:

$$(\mathcal{P})^{FGM} \quad \mathcal{P} = \min_{\theta(x) \in Ad} P(u^M), \quad (5.47)$$

gdzie  $Ad$  jest zbiorem funkcji nad przedziałem  $[0, 1]$ , o wartościach w tym przedziale. Zbiór ten określa wszystkie możliwe makroskopowe dopuszczalne niejednorodności. Z uwagi na założenie Tw. 5.1 musi być spełniony warunek Höldera dla funkcji  $\theta(x)$  (por. warunek (5.28)).

Jeśli zdefiniujemy globalne więzy na naprężenia

$$\int_0^1 (\sigma^M(x))^2 dx \leq \tau^2, \quad (5.48)$$

gdzie  $\tau$  jest ustaloną stałą, to możemy rozpatrywać zagadnienie projektowania z więzami  $(\mathcal{P}_w)^{FGM}$  jako poszukiwanie  $\mathcal{P}$ , danego przez (5.47), z warunkiem na naprężenia (5.48).

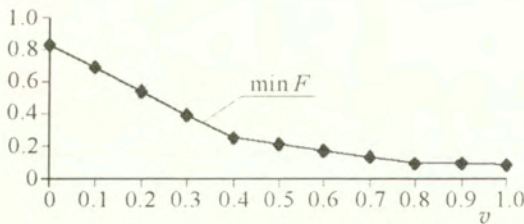
Korzystając ze wzorów (5.48) i (5.46), otrzymujemy  $\tau \geq \frac{f}{2\sqrt{3}}$ . Stąd wynika, że najniższe możliwe ograniczenie na poziom naprężeń, to warunek, aby  $\tau = f/2\sqrt{3}$ . Zagadnienie nie ma rozwiązania dla  $\tau < \frac{f}{2\sqrt{3}}$ . Górne ograniczenie dla  $\tau$  wynika z oczywistej nierówności  $t < 1$ , a mianowicie  $\tau < \frac{f}{\sqrt{3}}$ . Zauważmy, że w zakresie określoności  $\tau$ , tylko punkt  $\tau = \frac{f}{2\sqrt{3}}$  odpowiada jednej wartości parametru  $t$ , w pozostałych przypadkach są dwie możliwe, różne wartości.

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do znalezienia rozkładu  $\theta(x)$  na odcinku  $[0, 1]$ . Aby rozwiązać zadanie numerycznie, dzielimy przedział  $[0, 1]$  na części o długości  $\frac{1}{n}$ . Jako niewiadome wprowadzamy nieznanne, ale stałe na każdej części, wartości funkcji  $\theta(x)$ . Otrzymaliśmy zagadnienie nieliniowego programowania z więzami danymi przez (5.48). Obliczenia przeprowadzono dla  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0.1$ ,  $f = 1$ ,  $\tau = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ . Wyniki są pokazane na Rys. 5.1, Rys. 5.2 i w Tabeli 5.1. Warunek izoperymetryczny, tj. globalna „ilość” materiału  $C_1$  jest dana jako  $v = \int_0^1 \theta(x) dx$ . Optymalny rozkład lokalnych udziałów objętościowych fazy  $C_1$  (dla ustalonego  $v$ ) prowadzi do określenia wartości optymalnych niejednorodnych własności materiału gradientowego (5.45). W rozpatrywanym przypadku, bez więzów na naprężenia, otrzymano dwa optymalne rozkłady niejednorodności przedstawione na Rys. 5.2. Oba są niesymetryczne względem osi

symetrii elementu konstrukcji w zakresie  $0.1 \leq v \leq 0.7$ . Podobny efekt występuje w zagadnieniu z więzami, gdy  $\tau > \frac{1}{2\sqrt{3}}$ . Jednakże, w tym przypadku istnieje  $\tau$ , dla którego brak symetrii obserwowany jest dla każdego  $0 < v < 1$ . Z analizy zależności  $\tau$  z  $\tau(t)$  wynika, że dwie niesymetryczne struktury będą istniały w zakresie  $\tau \in (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ . Tak więc, tylko przypadek  $\tau = \frac{1}{2\sqrt{3}}$  prowadzi do jednoznacznej, symetrycznej względem środka odcinka  $[0, 1]$ , struktury optymalnej. Wyniki przedstawiono w Tab. 5.1, gdzie  $v_i = \int_0^{1/i} \theta(x) dx$ .

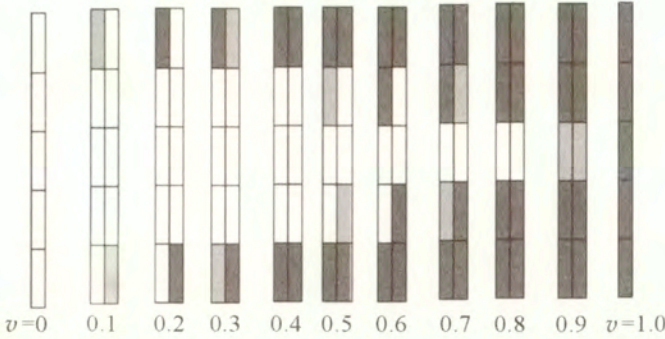
**Tabela 5.1.** Optymalny rozkład  $\theta(x)$  w pięciu odcinkach, dla różnych globalnych udziałów objętościowych  $v$ , z więzami na naprężenia dla  $\tau = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$v$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$v_1$	0	0.25	0.5	0.75	1	1	1	1	1	1	1
$v_2$	0	0	0	0	0	0.25	0.5	0.75	1	1	1
$v_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1
$v_4$	0	0	0	0	0	0.25	0.5	0.75	1	1	1
$v_5$	0	0.25	0.5	0.75	1	1	1	1	1	1	1



**Rysunek 5.1.** Minimum podatności jako funkcja globalnego udziału objętościowego, bez więzów

Rozpatrzenie jednowymiarowego zagadnienia optymalnego projektowania dla gradientowego materiału **piezoelektrycznego** wymaga rozwiązania układu dwóch równań zwyczajnych. Rozpatrzmy dwuskładnikowy kompozyt piezoelektryczny utworzony z materiałów piezoelektrycznych o symetriach tensorów opisujących własności ceramiki PZT5. Tak jak poprzednio, przyjmujemy, że wszystkie stałe materiałowe zależą tylko od jednej zmiennej  $x \in R$ , a siły masowe mają postać:  $\mathbf{f} = [0, 0, f_3]$ . Równania równowagi ośrodka piezoelektrycznego,



**Rysunek 5.2.** Optymalny rozkład  $\theta(x)$  w pięciu odcinkach jako funkcja globalnego udziału objętościowego, bez więzów

w którym jednokierunkowy stan przemieszczenia opisuje wektor  $[0, 0, u^\varepsilon]$ , a pole elektryczne – wektor  $[E_1^\varepsilon, 0, 0]$  ( $E_1^\varepsilon = \frac{d\phi^\varepsilon}{dx}$ ) mają postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( c_{3113}^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} - g_{131}^\varepsilon(x) \frac{d\phi^\varepsilon}{dx} \right) &= -f_3, \\ \frac{d}{dx} \left( g_{131}^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} + \epsilon_{11}^\varepsilon(x) \frac{d\phi^\varepsilon}{dx} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

dla  $x \in (0, 1)$ . Jednorodne warunki brzegowe w punktach 0 i 1, stawiane są zarówno na przemieszczenie  $u^\varepsilon$  jak i na potencjał elektryczny  $\phi^\varepsilon$ .

Wprowadzając macierz blokową współczynników materiału piezoelektrycznego (szczególną postać macierzy blokowej wprowadzonej w dodatku D.1)

$$\mathbf{A}^\varepsilon(x) = \begin{bmatrix} c_{3113}^\varepsilon(x) & -g_{131}^\varepsilon(x) \\ g_{131}^\varepsilon(x) & \epsilon_{11}^\varepsilon(x) \end{bmatrix}$$

przeprowadzamy proces homogenizacji i otrzymujemy zarówno postać efektywnych, makroskopowych współczynników materiałowych, jak i równania na pola makroskopowe. W tym przypadku efektywne zhomogenizowane) współczynniki materiałowe zależą oczywiście od zmiennej  $x$ . Dla ośrodka mikroperiodycznego, dwuskładnikowego o własnościach  $\mathbf{A}^1$  i  $\mathbf{A}^2$  (którego definicja jest analogiczna do podanej poprzednio dla przypadku sprężystego), mają one postać

$$\mathbf{A}^E(x) = \left( (\mathbf{A}^1)^{-1} \theta(x) + (\mathbf{A}^2)^{-1} (1 - \theta(x)) \right)^{-1},$$

gdzie  $\theta(x)$  jest wartością średnią z funkcji charakterystycznej obszaru zajętego przez materiał „pierwszy” – (1). Wtedy równanie równowagi dla zagadnienia zhomogenizowanego piezoelektrycznego (materiału gradientowego) ma postać:

$$\frac{d}{dx} \left( \mathbf{A}^E(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} \right) = \mathbf{F}. \quad (5.50)$$

Przyjęto tu następującą symboliczną notację:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_3 \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie równania (5.50), dla jednorodnych warunków brzegowych na uogólnione przemieszczenie  $\mathbf{u}$  i dla stałej siły  $\mathbf{F}$ , wyraża się wzorem

$$\mathbf{u}(x) = \int_0^x \left( \mathbf{A}^E(z) \right)^{-1} \mathbf{F} z \, dz + \mathbf{C} \int_0^x \left( \mathbf{A}^E(z) \right)^{-1} dz,$$

gdzie

$$\mathbf{C} = - \left( \int_0^1 \left( \mathbf{A}^E(z) \right)^{-1} dz \right)^{-1} \int_0^1 \left( \mathbf{A}^E(z) \right)^{-1} \mathbf{F} z \, dz.$$

Na mocy Tw. 5.1. uogólniona podatność zdefiniowana jako

$$P = \mathbf{F} \int_0^1 \mathbf{u}(x) \, dx.$$

osiąga minimum przy pewnym rozkładzie faz. Mówimy wówczas o sterowaniu optymalnym  $\hat{\theta}(x)$ .

Postępując analogicznie jak poprzednio, poszukujemy rozwiązań równania (5.50) jako dyskretnych, skokowo niejednorodnych konfiguracji faz. Badając przypadek projektowania optymalnego bez więzów, jako stałe materiałowe przyjęto:  $\mathbf{A}^1$  – dla ceramiki PTZ5,  $\mathbf{A}^2$  – dla epoksydu. Warunek izoperymetryczny dla „ilości” fazy pierwszej opisuje równość  $v = 0.2$ . W tym przypadku otrzymano jedną konfigurację niesymetryczną względem środka przedziału, w której materiał złożony z samej ceramiki ulokowany jest na krańcu badanego przedziału. Na Rys. 5.2 opisuje ją prawy słupek dla  $v = 0.2$ . Konfiguracja opisana

przez lewy słupek na Rys. 5.2, ma wartość podatności skrajnie największą spośród możliwych kombinacji, czyli nie tylko nie jest równoważna poprzedniej, ale maksymalizuje podatność przy danym warunku izoperymetrycznym. Wynik ten jest zgodny z intuicją, gdyż zagadnienie nie jest już skalarne  $\{u^\varepsilon\}$ , lecz ma charakter wektorowy  $\{u^\varepsilon, \phi^\varepsilon\}$ . Przeprowadzanie pełnej analizy i wykonanie szczegółowych obliczeń jest interesujące, ale nie jest przedmiotem tej pracy.



## Rozdział 6

# Kompozyty losowe – homogenizacja stochastyczna

Jak podkreślono we wstępie przy omawianiu rzeczywistych materiałów złożonych, większość z nich ma strukturę „losową”, por. [42]. Precyzyjna definicja pojęcia ośrodka losowego z mikrostrukturą jest podstawą rozważań w homogenizacji stochastycznej, której dotyczy ten rozdział. Należy jednak podkreślić, że pojęcie ośrodków losowych (ang. random media) używane było również wcześniej w ogólniejszym sensie (por. monografie [71, 148] oraz cytowaną tam literaturę). W podejściu tym badano m.in. modele nielokalne opisywane przez równania różniczkowo-całkowe względem średnich pól przemieszczeń. Nielokalność związana była z zachowaniem w modelu parametru skali opisującego rozmiar niejednorodności. W tym przypadku otrzymuje się efekty rozpraszania fali na niejednorodnościach. Pojawia się tłumienie związane z rozpraszaniem fali, zwane tłumieniem Reyleigha.

W ramach homogenizacji stochastycznej, przy użyciu dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych, przedstawiono w pracy autorki [70] propozycję zachowania wyższych wyrazów rozwinięcia pola przemieszczeń względem małego parametru w formalnych rozwinięciach asymptotycznych. W cytowanej pracy przedyskutowano konsekwencje zachowania efektu skali w modelowaniu zjawiska propagacji fal. Praca ta nie będzie tutaj omawiana, gdyż w niniejszej monografii kładziemy nacisk na metody ściśle homogenizacji stochastycznej, a metoda rozwinięć dwuskalowych jest, podobnie jak w przypadku periodycznym, heurystyczna. W Rozdziale 6 ograniczymy się do omówienia wyników badań będących wkładem w teorię *nieliniowej homogenizacji stochastycznej* wykorzystywanych w opisie pewnych statycznych zagadnień nieliniowych dla kompozytów o strukturze losowej. Mianowicie, w Rozdz. 6.1 opartym na wynikach prac innych autorów, podamy krótkie wprowadzenie w matematyczny formalizm związany z nieliniową homogenizacją stochastyczną. Natomiast Rozdziały 6.2 i 6.3 zawierają własne wyniki badań przedstawione w oparciu o prace [79, 80]. Pierwszy z rozdziałów dotyczy zagadnienia homogenizacji funkcjonatów, w których funkcje podcałkowe zależą nie tylko od symetryzowanego gradientu przemieszczenia (odkształceń), ale również od pewnego dodatkowego

pola skalarne i jego gradientu (pola temperatury i jej gradientu). Redukcja tego zadania do zagadnienia liniowego, czyli kwadratowych zależności funkcji podcałkowej od gradientów, prowadzi do zagadnienia homogenizacji kompozytów termosprężystych. W Rozdz. 6.3 rozpatrzono zagadnienie makroskopowego opisu materiałów spękanych, w których na powierzchniach pęknięć (szczelin) zadane są tzw. warunki Signoriniego, czyli więzy jednostronne na naprężenia. Zagadnienie takie wymaga w sformułowaniu użycia nierówności wariacyjnych, a wynik procesu homogenizacji można przedstawić następująco: osnowa liniowo-sprężysta osłabiona mikroszczelinami pracuje makroskopowo (efektywnie), tak jak materiał nieliniowy – dokładniej, w takim materiale inaczej przebiega proces rozciągania, a inaczej ściskania.

## 6.1. Wstęp do analizy pól losowych

Istotnym zagadnieniem w teorii ośrodków losowych jest matematyczny opis mikrostruktury. W modelowaniu mikrostruktury musimy posłużyć się odpowiednimi idealizacjami. Ośrodki losowe stanowią ważną klasę takich idealizacji, por. [2]. W pracy [4] opisano losowe rozkłady pęknięć oraz sieci pęknięć używając metod geometrii pól losowych, por. [2]. Ważnym zagadnieniem jest nie tylko opisanie rzeczywistych materialnych struktur, ale także opracowanie metod ich generowania i ich analizy numerycznej. Zagadnieniom takim poświęcona jest monografia [151], a także materiały z kursu AMAS – RMM'04, [150]. W szczególności nie analizowane w niniejszej rozprawie zagadnienie rekonstrukcji mikrostruktur losowych (np. geometria polikryształu) jest przedstawione w pracy [149], w której po raz pierwszy zastosowano do tego celu zasadę maksimum entropii informacyjnej.

Przejdziemy teraz do podstawowego formalizmu homogenizacji stochastycznej.

### 6.1.1. Opis ośrodków losowych

Niech  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  oznacza przestrzeń probabilistyczną, gdzie  $\Omega$  jest zbiorem zdarzeń elementarnych,  $\Sigma$  jest zupełną *sigma*-algebrą podzbiorów zbioru  $\Omega$  i  $\mu$  jest miarą probabilistyczną określoną na  $\Sigma$ . Aby opisać strukturę losową wprowadźmy pewną dodatkową operację na przestrzeni probabilistycznej. Mianowicie, założmy, że na  $\Omega$  działa *n*-wymiarowy układ dynamiczny  $T(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \Omega$ , taki, że dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , zarówno  $T(\mathbf{x})$  i  $T(\mathbf{x})^{-1}$  są mierzalne oraz takie, że spełnione są następujące warunki:

- (a)  $T(\mathbf{0})$  jest identycznością na  $\Omega$  i dla  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = T(\mathbf{x}_1)T(\mathbf{x}_2)$ ;

(b) dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  i mierzalnego zbioru  $F \in \Sigma$ ,  $\mu(T(\mathbf{x})^{-1}F) = \mu(F)$ , tj.,  $\mu$  jest niezmienniczą miarą względem  $T$ ;

(c) dla każdego  $F \in \Sigma$ , zbiór  $\{(\mathbf{x}, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega \mid T(\mathbf{x})\omega \in F\}$  jest  $d\mathbf{x} \times d\mu$  mierzalnym podzbiorem  $\mathbb{R}^n \times \Omega$ , gdzie  $d\mathbf{x}$  oznacza miarę Lebesgue'a na  $\mathbb{R}^n$ .

Zauważmy, że  $T(\mathbf{x})^{-1} = T(-\mathbf{x})$ . Układ dynamiczny spełniający warunki (a) – (c) jest nazywany również *przepływem zachowującym miarę*, por. [141].

Dla zadanej zmiennej losowej  $f \in L^1(\Omega)$  wprowadzamy jednorodne pole losowe:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) \equiv f(T(\mathbf{x})\omega). \quad (6.1)$$

Pole  $\tilde{f}$  jest również nazywane statystycznie jednorodnym (tj. stacjonarnym) procesem losowym. Wprowadzenie pola losowego pozwala zdefiniować strukturę losową, a także pozwala zdefiniować *ośrodek losowy*. Statystyczna jednorodność pola losowego oznacza, że dowolne dwa punkty w przestrzeni są statystycznie nierozróżnialne. Innymi słowami, statystyczne własności ośrodka opisanego przez pole takie losowe będą translacyjnie niezmiennicze. Zatem istnieje grupa  $\{U(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$  izometrii na  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$  zdefiniowana przez  $(U(\mathbf{x})f)(\omega) = f(T(\mathbf{x})\omega)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ . Funkcja  $\mathbf{x} \rightarrow U(\mathbf{x})$  jest ciągła w silnej topologii, tj. dla każdego  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $U(\mathbf{x})f \rightarrow f$  zbiega silnie w  $L^2(\Omega)$  gdy  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Silna zbieżność wymaga ośrodkowości przestrzeni probabilistycznej, którą będziemy w ciągu dalszym zakładać. Funkcja  $f(T(\mathbf{x})\omega)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , nazywana jest realizacją pola  $f$ . Mówimy, że układ dynamiczny jest *ergodyczny*, jeżeli każda funkcja niezmiennicza, tj. spełniająca warunek  $f(T(\mathbf{x})\omega) = f(\omega)$ , jest *stała* prawie wszędzie w  $\Omega$ .

Zanim wprowadzimy niezbędne definicje prowadzące do określenia ośrodka losowego z mikrostrukturą podamy przykłady losowych struktur, które opisują różne geometrie ośrodków losowych.

### Przykład 6.1

(i) *Sferyczne wtrącenia lub pustki w osnowie*, por. [140, 142]. Rozpatrzmy nieskończony ośrodek kompozytowy składający się z osnowy oraz losowo w niej rozrzuconych jednakowych sferycznych cząstek (pustek). Wtedy, realizacja zmiennej losowej opisującej geometrię dla ustalonego  $\omega \in \Omega$  może być identyfikowana ze zbiorem  $\omega = \{\mathbf{a}^m : m \in \mathbb{N}\}$  środków  $\mathbf{a}^m$  cząstek (pustek) rozmieszczonych w przestrzeni. W tym miejscu  $\mathbb{N}$  oznacza zbiór liczb naturalnych. Niech  $Nb(\omega, Q)$  oznacza liczbę środków wtrąceń, które zawierają się w otwartym

zbiorze  $Q \subset \mathbb{R}^n$ . Wielkość  $\Sigma$  jest zdefiniowana jako najmniejsza  $\sigma$ -algebra zawierająca podzbiory  $\Omega$  w postaci:

$$\{\omega \in \Omega : Nb(\omega, Q_1) = k_1, \dots, Nb(\omega, Q_i) = k_i\},$$

gdzie podzbiory  $Q_1, \dots, Q_i$  są rozłączne, liczby  $k_1, \dots, k_i$  są dodatnie i całkowite. Miara probabilistyczna  $\mu$  jest określona jednoznacznie na  $\Sigma$  poprzez swoje wartości na tych podzbiorach; translacje działają na  $\Omega$  następująco:

$$\forall \mathbf{x}, \forall \omega = \{\mathbf{a}^m : m \in \mathbb{N}\}, T(\mathbf{x})\omega = \{\mathbf{a}^m + \mathbf{x} \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Aby zapewnić statystyczną jednorodność kompozytu, miara  $\mu$  musi być niezmiennicza względem działania  $T(\mathbf{x})$ , dla każdego  $\mathbf{x}$ . Tak będzie, jeśli np.  $\mu$  ma następujący rozkład Poissona:

$$\begin{aligned} \mu[Nb(\omega, Q_1) = k_1, \dots, Nb(\omega, Q_i) = k_i] = \\ = \mu[Nb(\omega, Q_1) = k_1] \times \dots \times \mu[Nb(\omega, Q_i) = k_i], \end{aligned}$$

z warunkiem

$$\mu(Nb(\omega, Q) = k) = \frac{(a|Q|)^k}{k!} \exp(-a|Q|).$$

Tutaj  $a > 0$  jest stałą i  $|Q|$  oznacza miarę  $Q$  (objętość).

Wiadomo, że rozkład Poissona jest ergodyczny, por. [126]. Niestety, model ten nie zawsze w sposób zadawalający opisuje zachowanie się ośrodków z wtrąceniami, zwłaszcza w przypadku dużych koncentracji cząstek z powodu możliwości pokrywania się wtrąceń (ang. *overlapping*). Zauważmy, że ten przykład podaje sposób generacji realizacji geometrii losowej.

(ii) *Struktury statystycznie periodyczne* są modelowane przez przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega', \Sigma', \mu')$ , na którą działa grupa zachowująca miarę  $T'(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ , która jest zbiorem bijektywnych odwzorowań z  $\Omega$  na siebie spełniającą własności grupowe w  $\mathbb{Z}^n$  i posiadającą następującą własność niezmienniczości:

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n, \forall F \in \Sigma', \quad T'(\mathbf{z})F = \{\omega \mid T'(-\mathbf{z})\omega \in F\} \in \Sigma',$$

ponadto,  $\mu'(T'(\mathbf{z})F) = \mu'(F)$ .

Przypominamy, że  $\mathbb{Z}$  oznacza zbiór liczb całkowitych. Ośrodki statystycznie periodyczne są ergodyczne jeśli stałe są jedynymi zmiennymi losowymi takimi, że

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n, \quad f \circ T'(\mathbf{z}) = f \quad (\text{p.n.p.} - \text{prawie na pewno}).$$

Zauważmy, że ośrodki statystycznie periodyczne zdefiniowane przez taki „dyskretny” układ dynamiczny są szczególnym przypadkiem ośrodków statystycznie jednorodnych. Rzeczywiście, wystarczy wziąć  $\Omega = \Omega' \times Y$  i  $Y = [0, 1]^n$ ,  $\Sigma$  jako  $\Sigma' \otimes \mathcal{L}(Y)$ , uzupełnioną ze względu na  $\mu = \mu' \otimes d\mathbf{y}$  do  $\sigma$ -algebry produktowej  $\Sigma'$  i borelowskiej  $\sigma$ -algebry na  $Y$ . Teraz  $T(\mathbf{x})$ , zdefiniowane jako:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \omega' \in \Omega', \forall \mathbf{y} \in Y, T(\mathbf{x})(\omega', \mathbf{y}) = (T'([\mathbf{x} + \mathbf{y}])(\omega', \mathbf{x} + \mathbf{y} - [\mathbf{x} + \mathbf{y}]))$$

jest przepływem zachowującym miarę na  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ; co więcej, struktura jest ergodyczna wtedy i tylko wtedy jeżeli  $T'$  jest ergodyczne. Przypominamy, że  $[\mathbf{x}]$  oznacza część całkowitą  $\mathbf{x}$ . Przykład jednowymiarowego ośrodka statystycznie periodycznego wykorzystany jest w tym rozdziale, por. Rozdz. 6.2.2, do znalezienia zamkniętych formuł na własności losowego kompozytu termosprężystego.

(iii) *Struktury periodyczne makroskopowo jednorodne* są także szczególnym przypadkiem struktur ergodycznych statystycznie jednorodnych. Tutaj  $Y$  jest zbiorem  $Y = [0, 1]^n$  (komórka elementarna), podczas gdy  $\Sigma$  i  $\mu$  są odpowiednio  $\sigma$ -algebrą Borela i miarą Lebesgue'a na  $Y$ . Wtedy  $T(\mathbf{x})$  działa na  $Y$  następująco:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in Y, T(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - [\mathbf{x} + \mathbf{y}].$$

W tym szczególnym przypadku, każda zmienna losowa jest utożsamiana z mierzalnym odwzorowaniem na  $Y$ , pole losowe  $\tilde{f}$  jest utożsamiane z periodycznym przedłużeniem  $f$  na całą przestrzeń, zaś wartość oczekiwana z uśrednianiem objętościowym na komórce elementarnej  $Y$ , a  $d\mu = d\mathbf{y}$ . Każdy ośrodek, którego własności są opisane przez funkcje periodyczne jest więc jednocześnie pewną strukturą losową, makroskopowo jednorodną.

(iv) *Struktury kwaziperiodyczne*. Niech  $\Omega = \mathbf{T}^m$  dla  $m > n$ , będzie  $m$ -wymiarowym torusem wyposażonym w miarę Lebesgue'a. Aby zdefiniować układ dynamiczny  $T(\mathbf{x})$  ustalamy  $(m \times n)$ -macierz  $\mathbf{A} = (A_{ij})$  i zbiór

$$T(\mathbf{x})\omega = \omega + \mathbf{A}\mathbf{x} \bmod \mathbb{Z}^m,$$

por. [124]. Odwzorowanie  $T(\mathbf{x})$  zachowuje miarę  $\mu$ . Dla przepływów  $T(\mathbf{x})$  ergodycznych, potrzeba i wystarcza aby  $\mathbf{A}\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ , dla  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ . Dowolna mierzalna funkcja  $f$  na  $\Omega$  może być utożsamiona z jednoznacznie mierzalną 1-periodyczną funkcją na  $\mathbb{R}^m$ . W tym przypadku mamy dużo istotnie różnych realizacji pola losowego  $f(\omega + \mathbf{A}\mathbf{x})$ . Realizacje tego typu są nazywane *funkcjami kwaziperiodycznymi*, jeżeli funkcja  $f(\omega)$  jest ciągła. Funkcją kwaziperiodyczną, jest np. suma dwóch funkcji periodycznych o okresach niewspółmiernych.

Struktury kwaziperiodyczne spotykane są często na antycznych mozaikach oraz w przyrodzie, w tzw. kwazikryształach.

Reasumując, mając określoną przestrzeń probabilistyczną, przepływ zachowujący miarę na tej przestrzeni, zmienną losową, a co za tym idzie stacjonarne pole losowe, możemy powiedzieć, że pojęcie jednorodnego ośrodka losowego jest jednoznacznie określone wtedy i tylko wtedy, gdy zdefiniujemy znaczenie danej zmiennej losowej. W tym rozdziale niejednorodne ośrodki losowe nie będą definiowane.

### Definicja losowego obszaru, losowej funkcji charakterystycznej i obszaru z losową mikrostrukturą

Ośrodki z mikrostrukturą są określone, dla każdego rzeczywistego materiału, przez skończony rozmiar niejednorodności  $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ . Ponieważ proces homogenizacji polega na „pozbywaniu się” niejednorodności, np. porów, wtrąceń, szczelin, więc definicja losowego ośrodka z mikrostrukturą musi jawnie zawierać parametr charakteryzujący wielkość niejednorodności. Matematycznie oznacza to, że w procesie homogenizacji, tak samo jak w teorii homogenizacji ośrodków periodycznych, zdefiniujemy ciąg zagadnień parametryzowany przez mały parametr  $\varepsilon$  i dopiero dokonując przejścia granicznego  $\varepsilon \rightarrow 0$ , zdefiniujemy pojęcie losowego materiału złożonego, czy też inaczej – kompozytu stochastycznego. W rozdziale tym, losowy materiał złożony zdefiniowany jest przez gęstość makroskopowej (zhomogenizowanej) energii wewnętrznej otrzymanej w wyniku procesu przejścia granicznego  $\varepsilon \rightarrow 0$  z ciągiem energii wewnętrznych, dla coraz drobniejszej mikrostruktury w materiale losowo niejednorodnym. Taka zbieżność nosi nazwę  $\Gamma$ -zbieżności stochastycznej.

Ustalmy zbiór  $G \in \Sigma$  oraz układ dynamiczny  $T$ . Losowy obszar  $G(\omega)$  jest zbiorem w  $\mathbb{R}^n$  określonym w następujący sposób:

$$G(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x)\omega \in G\}.$$

Zwykle zakłada się, że  $G(\omega)$  jest prawie na pewno (p.n.p.) otwartym zbiorem w  $\mathbb{R}^n$ . Wprowadzimy również losową funkcję charakterystyczną  $\chi(\omega)$  obszaru  $G(\omega)$  i realizacje  $\chi(T(x)\omega)$  tej zmiennej losowej. Wtedy  $x \rightarrow \chi(T(x)\omega)$ , dla ustalonego  $\omega \in \Omega$ , jest losową funkcją charakterystyczną losowego obszaru  $G(\omega)$ .

W celu wprowadzenia pojęcia obszaru losowego z mikrostrukturą, a co za tym idzie opisanie ośrodków z mikrostrukturą, potrzebne będzie twierdzenie ergodyczne. Aby je sformułować, wprowadzimy pojęcie średniej wartości funkcji

zdefiniowanych w przestrzeni rzeczywistej  $\mathbb{R}^n$ . Niech  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , tj. funkcja  $f$  jest całkowalna na każdym mierzalnym ograniczonym zbiorze  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Liczba  $M\{g\}$  jest nazywana *średnią wartością*  $g$ , jeżeli

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K g(\varepsilon^{-1} \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |K| M\{g\}. \quad (6.2)$$

Tutaj  $|K|$  oznacza miarę Lebesgue'a zbioru  $K$ .

Poniżej przedstawimy bardzo ważne twierdzenie, por. [90].

**Twierdzenie 6.1 Ergodyczne twierdzenie Birkhoffa.** *Niech  $f \in L^\alpha(\Omega)$ ,  $\alpha \geq 1$ . Wtedy dla prawie wszystkich  $\omega \in \Omega$ , realizacja  $f(T(\mathbf{x})\omega)$  posiada średnią wartość w następującym sensie:*

$$f\left(T\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\omega\right) \rightarrow M\{f(T(\mathbf{x})\omega)\} \quad \text{slabo w } L^\alpha_{loc}(\Omega), \quad \text{gdzie } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

Co więcej, ta wartość średnia  $M\{f(T(\mathbf{x})\omega)\}$ , rozpatrywana jako funkcja  $\omega \in \Omega$ , jest niezmiennicza oraz

$$\langle f \rangle \stackrel{df}{=} \int_{\Omega} f(\omega) \, d\mu = \int_{\Omega} M\{f(T(\mathbf{x})\omega)\} \, d\mu.$$

W szczególności, jeżeli układ  $T(\mathbf{x})$  jest ergodyczny, wtedy

$$M\{f(T(\mathbf{x})\omega)\} = \langle f \rangle \quad \text{dla prawie wszystkich } \omega \in \Omega.$$

□

Pokażemy teraz, w jaki sposób korzystając z twierdzenia (6.1), można wprowadzić definicję *zbioru losowego z mikrostrukturą*. Zbiór ten określony jest przez mały parametr  $\varepsilon = l/L$ , gdzie  $l$  jest charakterystycznym wymiarem mikroskopowym, podczas gdy  $L$  oznacza charakterystyczny wymiar makroskopowy.

Niech  $Q$  będzie danym, deterministycznym ograniczonym obszarem w  $\mathbb{R}^n$ , a  $G(\omega)$  będzie statystycznie jednorodnym losowym obszarem zdefiniowanym wyżej. W pracy [176] przyjęto następującą definicję *obszaru losowego z mikrostrukturą*:

$$Q_\varepsilon(\omega) = Q \setminus G_\varepsilon(\omega), \quad \text{gdzie } G_\varepsilon(\omega) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon^{-1} \mathbf{x} \in G(\omega)\}.$$

Takie definicje obszaru losowego z mikrostrukturą  $Q_\varepsilon(\omega)$  są wygodne w rozważaniach teoretycznych. Obszar losowy jest więc zdefiniowany jednoznacznie poprzez zadanie zbioru losowego i układu dynamicznego  $T(\mathbf{x})$ , a obszar

z mikrostrukturą wymaga wprowadzenia dodatkowo obszaru deterministycznego w przestrzeni oraz ustalenia skali niejednorodności, co odpowiada „przeskalowaniu” parametru  $\mathbf{x}$  w układzie dynamicznym  $T(\mathbf{x})$  na  $\mathbf{x}/\varepsilon$ . W praktyce, musimy sprecyzować opis  $G(\omega)$  lub  $G_\varepsilon(\omega)$ . Wiele prac poświęcono temu zagadnieniu, por. np. [2, 3, 136]. Losową funkcję charakterystyczną  $\chi(T(\mathbf{x})\omega)$  dla ośrodka porowatego, oznaczaną przez  $Z(\mathbf{x})$ , można aproksymować w sposób następujący ([3]):

$$Z(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \mathbf{x} \text{ należy do przestrzeni porów,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (6.4)$$

Funkcja  $Z(\mathbf{x})$  nazywana jest funkcją fazową (zależną od  $\omega$ ). Określenie przestrzeni porów jest równoważne z określeniem funkcji  $Z(\mathbf{x})$  i pewnych jej własności. Zauważmy, że gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  wtedy  $Z(\mathbf{x}/\varepsilon) \rightarrow v$ , gdzie  $v$  jest udziałem objętościowym porów w kompozycie. Ponieważ własności fizyczne w ośrodku niejednorodnym zależą od funkcji fazowej, więc zależą *explicite* od wymiaru niejednorodności. W pracy [3] podano przegląd metod numerycznych i eksperymentalnych umożliwiających podanie własności tej funkcji. Wśród różnych dostępnych technik doświadczalnych wyróżnić należy wysokiej jakości mikrotomografię, bardzo przydatną przy badaniu architektury porów w geomateriałach, a także architektury kości, por. literaturę w pracach [159, 160].

### 6.1.2. Elementy analizy stochastycznej

W przypadku homogenizacji periodycznej fundamentalną rolę, przy wyprowadzaniu makroskopowych związków konstytutywnych, odgrywa tzw. zagadnienie lokalne lub zagadnienie na komórce, zwykle oznaczanej przez  $Y$ . Homogenizacja periodyczna wymaga różniczkowania względem  $y \in Y$ . W przypadku stochastycznej homogenizacji rolę komórki  $Y$  spełnia przestrzeń zdarzeń elementarnych  $\Omega$ . Poniższe rozważania matematyczne przytoczono w celu otrzymania uogólnionego postulatu zgodności Hilla (ang. *Hill's consistency condition*). Jest on traktowany jako założenie prowadzące do wyprowadzenia efektywnych związków konstytutywnych dla liniowych kompozytów sprężystych, por. [71]. Postulat ten głosi, że makroskopowe (średnie) odkształcenia są związane z makroskopowymi (średnimi) naprężeniami przez efektywny, makroskopowy tensor sztywności, wtedy i tylko wtedy, gdy wewnętrzna energia ciała niejednorodnego równa jest energii wewnętrznej ciała zastępczego, efektywnego.



W celu pokazania istotnych analogii do homogenizacji periodycznej, wprowadzimy elementy analizy stochastycznej. Więcej szczegółów można znaleźć w pracach [9, 43].

Założymy, że zbiór  $\Omega$  jest óśrodkową przestrzenią mierzalną. Niech  $f$  będzie mierzalną funkcją określoną na  $\Omega$ , a funkcja  $(\mathbf{x}, \omega) \rightarrow f(T(\mathbf{x})\omega)$  jest  $d\mathbf{x} \times d\mu$  mierzalną na  $\mathbb{R}^n \times \Omega$ . Możemy więc zdefiniować grupę  $\{U(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$  izometrii na  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$  przez  $(U(\mathbf{x})f)(\omega) = f(T(\mathbf{x})\omega)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ . Gdy  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , to  $U(\mathbf{x})f \rightarrow f$  zbiega silnie w  $L^2(\omega)$ .

Ustalony  $n$ -wymiarowy układ dynamiczny  $T$  na  $\Omega$  umożliwia zdefiniowanie różniczkowego rachunku stochastycznego na  $L^2(\Omega)$ , który wynika z wprowadzonej grupy izometrii  $\{U(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ . Zauważmy, że gdy każda ze współrzędnych  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  zmienia się nad  $\mathbb{R}$ , a pozostałe są zerami w  $U(\mathbf{x})$ , to otrzymamy  $n$  jedno-parametrowych, silnie ciągłych, grup izometrii  $U_i$  na  $L^2(\Omega)$ , które komutują parami. Stąd

$$U_i(x_i)f = U(0, 0, \dots, x_i, 0, \dots, 0)f = f(T(0, 0, \dots, x_i, 0, \dots, 0)).$$

Niech  $D_1, \dots, D_n$  oznaczają *infinitesimalne generatory* w  $L^2(\Omega)$  jedno-parametrowych grup  $U_1, \dots, U_n$  i niech  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$  oznaczają ich odpowiednie dziedziny. Stąd  $f \in \mathcal{D}_i$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f \in L^2(\Omega)$  oraz

$$D_i(f) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{U_i(\xi)f - f}{\xi} \quad (6.5)$$

istnieją silnie jako element  $L^2(\Omega)$ .

Niech  $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ . Dla każdego multi-indeksu  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ , oznaczmy przez  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ , gdzie  $D_i^{\alpha_i}$  oznacza  $\alpha_i$ -krotne działanie generatora  $D_i$ , oraz

$$\mathcal{D}^\infty(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha f \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ dla każdego multi-indeksu } \alpha\}.$$

Niech teraz  $C^\infty(\Omega)$  oznacza zbiór wszystkich funkcji  $f \in L^\infty(\Omega)$  takich, że dla każdego multi-indeksu  $\alpha$ ,  $D^\alpha f \in L^\infty(\Omega)$  i  $\xi^{-1}(U_i(\xi)D^\alpha f - D^\alpha f)$  zbiega silnie w  $L^\infty(\Omega)$ , gdy  $\xi \rightarrow 0$ . Te założenia wystarczają do określenia  $D_i^\alpha f$ , dla  $i = 1, \dots, n$ .

Niech  $f \in L^1(\Omega)$  i  $\alpha$  będzie multi-indeksem.

Słaba pochodna stochastyczna  $D^\alpha f$  jest liniowym funkcjonałem na  $C^\infty(\Omega)$  zdefiniowanym przez

$$(D^\alpha f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^\alpha \varphi \, d\mu, \quad (6.6)$$

gdzie  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Zauważmy, że  $T$ -niezmienniczość miary probabilistycznej  $\mu$  prowadzi do

$$\int_{\Omega} f D_i g \, d\mu = - \int_{\Omega} g D_i f \, d\mu, \quad (6.7)$$

gdzie  $f \in \mathcal{D}_i$ ,  $g \in \mathcal{D}_i$ . Jeżeli wyposażymy  $\mathcal{D}(\Omega)$  w naturalną normę

$$\|f\|_{\mathcal{D}(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_i \|D_i f\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (6.8)$$

wtedy otrzymana przestrzeń Banacha może być rozumiana jako stochastyczne uogólnienie przestrzeni Hilberta  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , czyli przestrzeni Sobolewa  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  z naturalnym iloczynem skalarnym. Niech  $D_i f \in L^2(\Omega)$  oznacza słabą pochodną stochastyczną  $D^\alpha f$ , dla  $f \in \mathcal{D}_i$  w przypadku, gdy  $\alpha_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni})$ , gdzie  $\delta_{ij}$  – delta Kroneckera.

Dla  $f \in L^2(\Omega)$ , odpowiednio  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in [L^2(\Omega)]^n = L^2(\Omega)^n$ , definiujemy *stochastyczny gradient*  $\nabla_\omega f$ , *stochastyczną dywergencję*  $\operatorname{div}_\omega \mathbf{v}$ , *stochastyczny laplasjan*  $\Delta_\omega f$ , i *rotację*  $\operatorname{curl}_\omega \mathbf{v}$  przez

$$\nabla_\omega f = (D_1 f, \dots, D_n f), \quad \operatorname{div}_\omega \mathbf{v} = \sum_i D_i v_i,$$

$$\Delta_\omega f = \sum_i D_i^2 f, \quad (\operatorname{curl}_\omega \mathbf{v})_{ij} = D_i v_j - D_j v_i.$$

Przejdźmy do prezentacji pewnych własności funkcji stochastycznie różniczkowalnych. Zauważmy, że funkcja  $f \in L^2(\Omega)$  jest niezmiennicza względem  $T$ , jeżeli  $f(T(\mathbf{x})) = f$ , czyli prawie wszędzie względem miary probabilistycznej  $\mu$  na  $\Omega$ , dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . W dalszym ciągu przez  $\mu$ -a.e. będziemy rozumieli określenie „prawie wszędzie względem miary probabilistycznej  $\mu$  na  $\Omega$ ”. Zbiór wszystkich funkcji w  $L^2(\Omega)$  niezmienniczych względem  $T$  jest domkniętą podprzestrzenią  $L^2(\Omega)$  i jest oznaczana przez  $I^2(\Omega)$ . Przez  $M^2(\Omega) = [I^2(\Omega)]^\perp$  dopełnienie ortogonalne  $I^2(\Omega)$  w  $L^2(\Omega)$ .

Podprzestrzeni  $I^2(\Omega)$  funkcji niezmienniczych jest również uzupełnieniem do przestrzeni  $L^2(\Omega)$  otrzymanym przez rzutowanie  $E : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  normy 1:

$$(Ef)(\omega) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\lambda)^n} \int_{[-\lambda, \lambda]^n} f(T(\mathbf{x})\omega) d\mathbf{x}, \quad (6.9)$$

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{dla } \mu\text{-a.e.}, \omega \in \Omega.$$

Powyższa granica istnieje silnie w  $L^2(\Omega)$  oraz punktowo  $\mu$ -a.e., zatem  $M^2(\Omega) = \ker E$ .

Poniżej podamy bardziej szczegółowo pewne własności funkcji stochastycznie różniczkowalnych.

### Lemat 6.1

(i) Jeżeli  $f \in L^2(\Omega)$ , to  $f \in I^2(\Omega)$  wtedy i tylko wtedy  $\nabla_{\omega} f = 0$ .

(ii) Jeżeli  $\varphi \in \mathcal{D}^{\infty}(\Omega)$ , to dla  $\mu$ -a.e.  $\omega \in \Omega$ , funkcja  $\mathbf{x} \rightarrow \varphi(T(\mathbf{x}))$  należy do  $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ , i dla każdego multi-indeksu  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,

$$\partial^{\alpha} \varphi(T(\mathbf{x})\omega) = (D^{\alpha} \varphi)(T(\mathbf{x})\omega),$$

$$\text{gdzie } \partial^{\alpha} = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}.$$

(iii)  $C^{\infty}(\Omega)$  jest silnie gęsty w  $L^2(\Omega)$ .

(iv) Niech  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$ ,  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$ ,  $\text{curl}_{\omega} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , i  $\text{div}_{\omega} \mathbf{v} = 0$ . Wówczas

$$\int_{\Omega} u_i v_i d\mu = \int_{\Omega} (E\mathbf{u}) \cdot (E\mathbf{v}) d\mu. \quad (6.10)$$

Co więcej, jeżeli  $T$  jest ergodyczne, wówczas

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mu \cdot \int_{\Omega} \mathbf{v} d\mu.$$

□

Ostatnie równanie rozszerza znany **postulat Hilla**, por. [71, 142, 169]. Przypomnijmy, że postulat ten w oryginale dotyczył wartości oczekiwanych (średnich) z pól odkształceń (pól bezwirowych) i naprężeń (pól bezdywergencyjnych).

Jeżeli  $F$  jest  $\mu$ -mierzalnym podzbiorem  $\Omega$ , a przez  $C^\infty(F)$  zbiorem wszystkich funkcji w  $C^\infty(\Omega)$  znikających na  $\Omega \setminus F$  oraz jeżeli  $f \in L^1(\Omega)$ , to  $D_i f$  znika na  $F$ , jeżeli  $(D_i f)(\varphi) = 0$ , dla każdego  $\varphi \in C^\infty(F)$ .

Z warunku (i) Lematu 6.1 wynika, że jeżeli  $f \in L^2(\Omega)$  pokrywa się na  $F$  z elementem  $L^2(\Omega)$ , to  $\nabla_\omega f = 0$  na  $F$ . W celu otrzymania relacji odwrotnej przyjmujemy, że  $F$  jest  $T$ -otwarte w  $\Omega$ , jeżeli  $C^\infty(F)$  jest silnie gęste w zbiorze  $L^2(F)$  wszystkich elementów  $L^2(\Omega)$  znikających na  $\Omega \setminus F$  oraz przyjmujemy, że  $F$  jest  $T$ -zwykłe w  $\Omega$  jeżeli  $f \in C^\infty(\Omega)$  ma stochastyczny gradient znikający na  $F$ . Wówczas  $f$  pokrywa się na  $F$  z pewnym elementem  $L^2(\Omega)$ .

Wprowadzając powyższe określenia formułujemy następujący lemat.

**Lemat 6.2** *Jeżeli  $F$  jest  $\mu$ -mierzalnym podzbiorem  $\Omega$  oraz jest  $T$ -otwarty i  $T$ -zwykły, wówczas  $f \in L^2(\Omega)$  ma gradient stochastyczny, który znika na  $F$  wtedy i tylko wtedy jeżeli  $f$  pokrywa się na  $F$  z pewnym elementem z przestrzeni  $L^2(\Omega)$ .*

## 6.2. Losowy ośrodek termosprężysty

W pracach Dal Maso i Modica [53, 55], podają podstawy nieliniowej homogenizacji stochastycznej funkcjonałów wypukłych o wzroście  $\alpha$ ,  $\alpha > 1$ . Ta homogenizacja oparta jest o metodę zbieżności ciągu losowych funkcjonałów, czyli o metodę  $\Gamma$ -zbieżności stochastycznej. W szczególnym przypadku, dla  $\alpha = 2$ , jako wniosek z wyników  $\Gamma$ -zbieżności, otrzymujemy sformułowanie zagadnienia  $H$ -zbieżności, czyli homogenizację zagadnienia opisanego przez układ liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu z losowymi współczynnikami. W takim przypadku w wyniku homogenizacji otrzymuje się postać efektywnych (zhomogenizowanych) tensorów wiążących odpowiednie średnie pola w równaniach konstytutywnych. Tensory te, określające makroskopowe własności materiału, opisują losowy materiał kompozytowy.

Wyniki te zostały rozszerzone w [141] na przypadek funkcjonałów wypukłych ze wzrostem liniowym, co umożliwiło sformułowanie zadania idealnej plastyczności, por. również [140]. Zauważmy, że praca [141] uogólnia na przypadek losowych ośrodków idealnie plastycznych wyniki otrzymane w [41] w przypadku periodycznej mikrostruktury, por. również [140]. W [141] nie rozpatrywano wpływu obciążeń brzegowych, które mogą odrywać istotną rolę, por. [42] w przypadku struktury periodycznej. Telega i Gambin [164] uzupełnili rezultat otrzymany w [141] poprzez dodanie obciążeń brzegowych. Należy zauważyć, że obciążenia brzegowe mogą obniżyć granicę plastyczności zhomogenizowanego materiału.

Monografia [84] zawiera istotne, dla rozważań przedstawionych w tej rozprawie, sformułowania zagadnień sprężystych i termosprężystych. Zagadnieniom

uogólnionej termosprężystości poświęcona jest praca przeglądowa [85] z bogatą literaturą.

Przejdźmy do omówienia głównych wyników otrzymanych w pracy Gambin i in. [80].

Sformułujemy ogólne twierdzenie o stochastycznej homogenizacji, które zastosujemy do zagadnienia homogenizacji stacjonarnej termosprężystości. Oznaczmy przez  $\mathcal{A}_0$  rodzinę ograniczonych, otwartych podzbiorów  $\mathbb{R}^n$ . Oczywiście z fizycznego punktu widzenia  $n = 1, 2$  lub  $3$ . Dla każdego  $A \in \mathcal{A}_0$ , oznaczmy przez  $W^{1,\alpha}(A)$  przestrzeń Sobolewa funkcji z  $L^\alpha(A)$ , które posiadają słabą pochodną pierwszego rzędu należącą do  $L^\alpha(A)$ . Przypomnijmy, że  $L^\alpha(A)$  oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z potęgą  $\alpha$ . Ustalmy  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$ ,  $c_1 \geq c_0 > 0$ . Oznaczmy przez  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(c_0, c_1, \alpha, \beta)$  klasę wszystkich funkcyjałów

$$\mathcal{K} : (L_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^n))^n \times L_{loc}^\beta(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{A}_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

takich, że

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}, \theta, A) = \begin{cases} \int_A f[\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})), \theta(\mathbf{x}), \nabla\theta(\mathbf{x})]d\mathbf{x}, & \text{jeżeli } \begin{cases} \mathbf{u}|_A \in W^{1,\alpha}(A)^n, \\ \theta|_A \in W^{1,\beta}(A), \end{cases} \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \quad (6.11)$$

Tutaj  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{E}_s^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją spełniającą następujące warunki:

- (i)  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\epsilon}, \xi, \mathbf{q})$  jest mierzalna w sensie Lebesgue'a w  $\mathbf{x}$  i wypukła w  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\xi$  i  $\mathbf{q}$ ;
- (ii)  $c_0(|\boldsymbol{\epsilon}|^\alpha + |\xi|^\beta + |\mathbf{q}|^\beta \leq f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\epsilon}, \xi, \mathbf{q}) \leq c_1(|\boldsymbol{\epsilon}|^\alpha + |\xi|^\beta + |\mathbf{q}|^{\beta+1})$ ,  
dla każdego  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\epsilon}, \xi, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{E}_s^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Przez  $\mathbb{E}_s^n$  oznaczyliśmy przestrzeń symetrycznych macierzy  $n \times n$ . W przypadku liniowej termosprężystości  $\alpha = \beta = 2$ . Ponadto,  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$  oznacza tensor małych odkształceń:

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (6.12)$$

gdzie, jak zwykle,  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Przypomnijmy, że  $L^\alpha(\mathbb{R}^n)^n = [L^\alpha(\mathbb{R}^n)]^n$ .

Zauważmy, że Dal Maso i Modica [53, 55] rozpatrywali jedynie funkcje podcałkowe w postaci  $f(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x}))$ , por. również [141]. Aby przeprowadzić stochastyczną homogenizację równań stacjonarnej termosprężystości, potrzebne jest

ogólniejsze podejście. Za Dal Maso i Modica [53, 55] wyposażymy klasę funkcjonalów  $\mathcal{F}$  w metrykę  $d$  tak, aby zbiór  $\mathcal{F}$  stanowił zwartą przestrzeń metryczną. W celu zdefiniowania metryki  $d$ , najpierw wprowadzimy definicje  $\varepsilon$ -Yosida ( $\varepsilon > 0$ ) transformacji funkcjonalów  $\mathcal{K} \in \mathcal{F}$ :

$$T_\varepsilon \mathcal{K}(\mathbf{u}, \theta, A) = \inf \left\{ \mathcal{K}(\mathbf{v}, R, A) + \frac{1}{\varepsilon} \int_A |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^\alpha dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_A |R - \theta|^\beta dx; \mathbf{v} \in L_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^n)^n, R \in L_{loc}^\beta(\mathbb{R}^n) \right\}. \quad (6.13)$$

Teraz możemy zdefiniować odległość na zbiorze  $\mathcal{F}$ . Wybierzmy przeliczalnie gęsty podzbiór  $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_j \mid j \in \mathbb{N}\} \times \{g_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  przestrzeni  $W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)^n \times W^{1,\beta}(\mathbb{R}^n)$  i przeliczalną podrodzinę  $\mathcal{B} = \{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  zbioru  $\mathcal{A}_0$ . Tutaj  $\mathbb{N}$  oznacza zbiór liczb naturalnych. Rodzina  $\mathcal{B}$  może być wybrana jako rodzina otwartych, ograniczonych podzbiorów  $\mathbb{R}^n$ , które są sumą prostopadłościanów z wymiernymi wierzchołkami. Metrykę  $d$  dla  $\mathcal{K}, \mathcal{G} \in \mathcal{F}$ , zdefiniujemy następująco:

$$d(\mathcal{K}, \mathcal{G}) = \sum_{i,j,k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j+k}} \left| \phi(T_{\frac{1}{i}} \mathcal{K}(\mathbf{w}_j, g_j, B_k)) - \phi(T_{\frac{1}{i}} \mathcal{G}(\mathbf{w}_j, g_j, B_k)) \right|. \quad (6.14)$$

Tutaj  $\phi: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  jest dowolną niemalejącą, ciągłą, ograniczoną funkcją. Np. możemy przyjąć  $\phi = \arctg$ .

Aby wykazać, że  $d$  jest odległością na  $\mathcal{F}$  wystarczy pokazać, że  $d(\mathcal{K}, \mathcal{G}) = 0$  jeżeli  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ . W tym celu Prop. 1.11 i Wniosek 1.6 sformułowany w [53], rozszerzymy następująco.

### Lemat 6.3

(a) Niech  $\mathcal{K} \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{u} \in L_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^n)^n$ ,  $\theta \in L_{loc}^\beta(\mathbb{R}^n)$ ,  $A \in \mathcal{A}_0$ .

Wtedy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T_\varepsilon \mathcal{K}(\mathbf{u}, \theta, A) = \sup_{\varepsilon > 0} T_\varepsilon \mathcal{K}(\mathbf{u}, \theta, A) = \mathcal{K}(\mathbf{u}, \theta, A).$$

(b) Niech  $\mathcal{W}$  będzie gęstym podzbiorem  $W^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)^n \times W^{1,\beta}(\mathbb{R}^n)$  i  $\mathcal{B}$  gęstą podrodziną  $\mathcal{A}_0$ . Jeżeli  $\mathcal{K}, \mathcal{G} \in \mathcal{F}$  i  $\mathcal{K}(\mathbf{w}, g, B) = \mathcal{G}(\mathbf{w}, g, B) \forall (\mathbf{w}, g) \in \mathcal{W}, \forall B \in \mathcal{B}$ , wówczas  $\mathcal{K} = \mathcal{G}$ .

Musimy pokazać, że przestrzeń metryczna  $(\mathcal{F}, d)$  jest zwarta, co więcej, zupełna i ośrodkowa. W tym celu wykorzystujemy pojęcie  $\Gamma$ -zbieżności.

Niech  $X$  będzie przestrzenią metryczną i niech  $\{\mathcal{K}_\delta\}_{\delta>0}$  będzie ciągiem funkcji określonych na  $X$  z wartościami w  $\overline{\mathbb{R}}$ . W naszym przypadku  $X = L^\alpha(A)^n \times L^\beta(A)$ . Mówimy, że  $\{\mathcal{K}_\delta\}$   $\Gamma(X)$ -zbiega w punkcie  $z_\infty \in X$  do  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ , gdy spełnione są następujące dwa warunki:

(A<sub>1</sub>)  $\lambda \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_\delta(z_\delta)$  dla każdego ciągu  $\{z_\delta\}_{\delta>0}$  zbieżnego w  $X$  do  $z_\infty$ ;

(A<sub>2</sub>) istnieje ciąg  $\{z_\delta\}_{\delta>0}$  zbieżny w  $X$  do  $z_\infty$  taki, że  $\limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_\delta(z_\delta) \leq \lambda$ .

Jeżeli istnieje  $\mathcal{K}_\infty : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  takie, że

$$\mathcal{K}_\infty(z) = \Gamma(X) - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f_\delta(z), \quad \forall z \in X$$

to mówimy, że  $\{\mathcal{K}_\delta\}$   $\Gamma(X)$ -zbiega do  $\mathcal{K}_\infty$ . Z warunków (A<sub>1</sub>) i (A<sub>2</sub>) wynika, że

$$\mathcal{K}_\infty(z_\infty) = \min\{\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_\delta(z_\delta) \mid z_\delta \text{ zbiega w } X \text{ to } z_\infty\}, \quad (6.15)$$

dla każdego  $z_\infty \in X$ . Zatem,  $\Gamma(X)$ -granica  $\mathcal{K}_\infty$  jest jednoznacznie określona.

Niech  $\{\mathcal{K}_\delta\}$  będzie ciągiem w  $\mathcal{F}$ . Wtedy

$$\Gamma(\tau) - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_\delta(\mathbf{u}, \theta) = \mathcal{K}_\infty(\mathbf{u}, \theta), \quad (6.16)$$

$\forall (\mathbf{u}, \theta) \in L^\alpha(A)^n \times L^\beta(A)$ , gdy  $A \in \mathcal{A}_0$ . Tutaj topologia  $\tau = L^\alpha(A)^n \times L^\beta(A)$ . Ścisłej powinniśmy napisać  $(\mathcal{K}_\delta)_A$  i  $(\mathcal{K}_\infty)_A$ , zamiast  $\mathcal{K}_\delta$  i  $\mathcal{K}_\infty$ . Rzeczywiście,  $\mathcal{K} \in \mathcal{F}$  definiuje, dla każdego  $A \in \mathcal{A}_0$ , funkcjonal  $\mathcal{K}_A : L^\alpha(A)^n \times L^\beta(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Wystarczy rozszerzyć  $(\mathbf{u}, \theta) \in L^\alpha(A)^n \times L^\beta(A)$  do elementu  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta})$  z przestrzeni  $L_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^n)^n \times L_{loc}^\beta(\mathbb{R}^n)$ . Zauważmy, że wartość  $\mathcal{K}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta}, A)$  nie zależy od rozszerzenia  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta})$  na  $(\mathbf{u}, \theta)$ .

Pokażemy, że odległość  $d$  na  $\mathcal{F}$  może być określona przez związek (6.14), ponieważ jest to związek między odległością  $d$  i  $\Gamma$ -zbieżnością. Najpierw sformułujemy warunek zwartości.

**Lemat 6.4** *Klasa  $\mathcal{F}$  jest zwarta względem  $\Gamma(L^\alpha \times L^\beta)$ -zbieżności, tj. każdy ciąg  $\{\mathcal{K}_\delta\}_{\delta>0}$  w  $\mathcal{F}$  zawiera podciąg  $\Gamma(L^\alpha \times L^\beta)$ -zbieżny do funkcjonułu  $\mathcal{K}_\infty \in \mathcal{F}$ .  $\square$*

Teraz sformułujemy twierdzenie, które łączy  $d$ ,  $\Gamma$ -zbieżność i  $T_\varepsilon$ -Yosida transformacje.

**Twierdzenie 6.2** Niech  $\{\mathcal{K}_\delta\}_{\delta>0}$  będzie ciągiem w  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{K}_\infty \in \mathcal{F}$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (1)  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} d(\mathcal{K}_\delta, \mathcal{K}_\infty) = 0$ ;
- (2)  $\Gamma(L^\alpha \times L^\beta) - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{K}_\delta = \mathcal{K}_\infty$ ;
- (3)  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} (T_\varepsilon \mathcal{K}_\delta)(\mathbf{u}, \theta, A) = (T_\varepsilon \mathcal{K}_\infty)(\mathbf{u}, \theta, A)$ ,  
dla każdego  $\varepsilon > 0$ ,  $(\mathbf{u}, \theta) \in L_{loc}^\alpha(A)^n \times L_{loc}^\beta(A)$ ,  $A \in \mathcal{A}_0$ .

### Dowód

Dowód jest podobny do dowodu Prop. 1.21 w pracy [53], z oczywistymi rozszerzeniami.

### Losowe funkcjonały całkowite

Niech  $(\Omega, \Sigma, P)$  będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną, gdzie  $\Omega$  jest zbiorem zdarzeń elementarnych,  $\Sigma$  jest  $\sigma$ -ciałem podzbiorów  $\Omega$  i  $P$  jest miarą probabilistyczną na  $\Sigma$ . *Losowy funkcjonal całkowity* jest mierzalną funkcją  $\mathcal{K} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ , gdy  $\Omega$  jest wyposażone w  $\sigma$ -ciało  $\Sigma$  i  $\mathcal{F}$  posiada borelowskie  $\sigma$ -ciało  $-\Sigma_{\mathcal{F}}$  generowane przez odległość  $d$  zdefiniowaną przez równanie (6.14). Jeżeli  $\mathcal{K}$  jest losowym funkcjonalem całkowitym, miara indukowana  $\mathcal{K}_\#P$  na  $\mathcal{F}$  zdefiniowana przez  $(\mathcal{K}_\#P)(S) = P(\mathcal{K}^{-1}(S))$  dla każdego  $S \in \Sigma_{\mathcal{F}}$ , nazywa się *dystrybucją*  $\mathcal{K}$ . Możemy zapisać  $\mathcal{K} \sim \mathcal{G}$  jeżeli  $\mathcal{K}$  i  $\mathcal{G}$  są losowymi funkcjonalami całkowitymi o tym samym prawie rozkładu (tej samej dystrybucji).

Addytywna grupa  $\mathbb{Z}^n$  i grupa multiplikatywna  $\mathbb{R}^+$  działają na  $\mathcal{F}$  poprzez operator translacji  $\tau_z$  ( $z \in \mathbb{Z}^n$ ) zdefiniowany przez

$$(\tau_z \mathcal{K})(\mathbf{u}, \theta, A) = \int_A f(\mathbf{x} + z, \mathbf{e}(\mathbf{u}), \theta, \nabla \theta) dx \quad (6.17)$$

i przez operator podobieństwa  $\rho_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), zdefiniowany jako

$$(\rho_\varepsilon \mathcal{K})(\mathbf{u}, \theta, A) = \int_A f\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}(\mathbf{u}), \theta, \nabla \theta\right) dx, \quad (6.18)$$

dla każdego  $(\mathbf{u}, \theta) \in W_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^n)^n \times W_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^n)$ , i  $A \in \mathcal{A}_0$ . Przypomnijmy, że  $\mathbb{Z}$  oznacza zbiór liczb całkowitych.



Zauważmy, że jeżeli funkcja podcałkowa  $f$  nie zależy od  $\theta$ , ale zależy od  $\nabla\theta$ , wtedy  $(\tau_z\mathcal{K})(\mathbf{u}, \theta, A) = \mathcal{K}(\tau_z\mathbf{u}, \tau_z\theta, \tau_zA)$ , gdzie  $(\tau_z\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{z})$ ,  $\tau_z\theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x} - \mathbf{z})$ ,  $\tau_zA = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} - \mathbf{z} \in A\}$ , a  $(\rho_\varepsilon\mathcal{K})(\mathbf{u}, A) = \varepsilon^n(\rho_\varepsilon\mathbf{u}, \rho_\varepsilon\theta, \rho_\varepsilon A)$ , gdzie  $(\rho_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x})$ ,  $(\rho_\varepsilon\theta)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon}\theta(\varepsilon\mathbf{x})$ ,  $\rho_\varepsilon A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon\mathbf{x} \in A\}$ . Innymi słowami, podczas translacji i podobieństwa funkcja  $\theta$ , w (6.17) i (6.18), jest traktowana jako parametr, podobnie jak w przypadku homogenizacji periodycznej, por. [44].

Na mocy Wniosku 2.4, podanego w pracy [53] otrzymujemy, że jeżeli  $\mathcal{K}$  jest losowym funkcjonałem całkowym i  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ , wtedy funkcje  $\tau_z\mathcal{K}$ ,  $\rho_\varepsilon\mathcal{K} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  zdefiniowane przez

$$(\tau_z\mathcal{K})(\omega) = \tau_z(\mathcal{K}(\omega)), \quad (\rho_\varepsilon\mathcal{K})(\omega) = \rho_\varepsilon(\mathcal{K}(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (6.19)$$

są losowymi funkcjonałami całkowymi. Ponadto, jeżeli  $\mathcal{G}$  jest innym losowym funkcjonałem całkowym takim, że  $\mathcal{K} \sim \mathcal{G}$ , wtedy mamy  $\tau_z\mathcal{K} \sim \tau_z\mathcal{G}$  i  $\rho_\varepsilon\mathcal{K} \sim \rho_\varepsilon\mathcal{G}$ .

Powiemy, że  $\{\mathcal{K}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  jest procesem stochastycznej homogenizacji modelowanym na losowym funkcjonałe całkowym  $\mathcal{K}$  na  $\Omega$ , jeżeli  $\mathcal{K}_\varepsilon \sim \rho_\varepsilon\mathcal{K}$  dla każdego  $\varepsilon > 0$ , czyli że  $\mathcal{K}_\varepsilon$  i  $\rho_\varepsilon\mathcal{K}$  posiadają tą samą funkcję rozkładu.

Niech  $\mathcal{K}$  będzie losowym funkcjonałem całkowym. Funkcjonał losowy  $\mathcal{K}$  jest stochastycznie periodyczny w prawie rozkładu, jeżeli  $\mathcal{K}$  i  $\tau_z\mathcal{K}$  posiadają to samo prawo rozkładu dla każdego  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ .

Ergodyczność jest pojęciem dobrze określonym dla funkcji podcałkowych. Tutaj żądamy ergodyczności w  $\mathcal{F}$  ze względu na  $\mathbb{Z}^n$ . Powiemy, że losowy funkcjonal całkowy  $\mathcal{K} \in \mathcal{F}$  jest ergodyczny, jeżeli  $P[\mathcal{K} \in S] = 0$  lub 1, dla każdego  $\Sigma_{\mathcal{F}}$ -mierzalnego podzbioru  $S$  zbioru  $\mathcal{F}$  takiego, że  $\tau_z(S) = S$  dla każdego  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ .

Dla  $\mathcal{K} \in \mathcal{F}$ ,  $A \in \mathcal{A}_0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  i  $(\mathbf{u}_0, \theta_0) \in W^{1,\alpha}(A)^n \times W^{1,\beta}(A)$  możemy rozpatrzeć następujące zagadnienie Dirichleta:

$$m_\xi(\mathcal{K}, \mathbf{u}_0, \theta_0, A) = \min \left\{ \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x})), \xi, \nabla\theta(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}; \right. \\ \left. (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \theta - \theta_0) \in W_0^{1,\alpha}(A)^n \times W_0^{1,\beta}(A) \right\}. \quad (6.20)$$

Zatem  $m_\xi(\mathcal{K}, \mathbf{u}_0, \theta_0)$  jest ciągle w  $\mathcal{K}$  ze względu na metrykę  $d$ . Podkreślmy, że w zagadnieniu (4.10)  $\xi \in \mathbb{R}$  odgrywa rolę parametru. Ponadto niech  $Q_{1/\varepsilon}$

będzie kostką  $Q_{1/\varepsilon} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \frac{1}{\varepsilon}, i = 1, \dots, N\}$ , a  $|Q_{1/\varepsilon}| = (2/\varepsilon)^n$  jej miarą Lebesgue'a. Przypomnijmy, że  $l_{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}$  i  $l_{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}$ , gdzie  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{E}_s^n$ .

Po tym długim, ale koniecznym wprowadzeniu możemy sformułować główne twierdzenie o homogenizacji.

**Twierdzenie 6.3** *Niech  $\mathcal{K}$  będzie losowym funkcjonalem całkowym i  $\mathcal{K}_\varepsilon = \rho_\varepsilon \mathcal{K}$ . Jeżeli  $\mathcal{K}$  jest periodyczne w prawie rozkładu, wtedy  $\mathcal{K}_\varepsilon$  zbiega  $P$ -prawie wszędzie, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  do losowego funkcjonatu całkowego  $\mathcal{K}_0$ . Ponadto, istnieje  $\Omega' \subset \Omega$  mierzalny taki, że granica*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{m_\xi(\mathcal{K}(\omega), l_{\mathbf{e}}, l_{\mathbf{q}}, Q_{1/\varepsilon})}{|Q_{1/\varepsilon}|} = f_0(\omega, \boldsymbol{\epsilon}, \xi, \mathbf{q}) \quad (6.21)$$

istnieje dla każdego  $\omega \in \Omega'$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{E}_s^n$  oraz

$$\mathcal{K}_0(\omega)(\mathbf{u}, \theta, A) = \int_A f_0[\omega, \mathbf{e}(\mathbf{u}(x)), \theta(x), \nabla \theta(x)] dx, \quad (6.22)$$

dla każdego  $\omega \in \Omega'$ ,  $A \in \mathcal{A}_0$ ,  $(\mathbf{u}, \theta) \in L_{loc}^\alpha(A)^n \times L_{loc}^\beta(A)$  z obcięciem  $\mathbf{u}|_A \in W^{1,\alpha}(A)^n$ ,  $\theta|_A \in W^{1,\beta}(A)$ . Dodatkowo, jeżeli  $\mathcal{K}$  jest ergodyczny, wtedy  $\mathcal{K}_0$  lub równoważnie  $f_0(\omega, \boldsymbol{\epsilon}, \xi, \mathbf{q})$ , nie zależy od  $\omega$  oraz

$$f_0(\boldsymbol{\epsilon}, \xi, \mathbf{q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{m_\xi(\mathcal{K}(\omega), l_{\mathbf{e}}, l_{\mathbf{q}}, Q_{1/\varepsilon})}{|Q_{1/\varepsilon}|}, \quad (6.23)$$

dla każdego  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{E}_s^n$ . □

Dowód twierdzenia znajduje się w pracy [80]. Twierdzenie wykorzystamy w dalszych rozważaniach.

### 6.2.1. Termosprężysty kompozyt stochastycznie periodyczny

Rozpatrzmy dwu-składnikowy termosprężysty kompozyt zajmujący obszar  $A \subset \mathbb{R}^3$ . Składniki są ułożone w periodycznych kostkach z danym rozkładem. Bezwymiarowy parametr  $\varepsilon$  równa się stosunkowi długości komórki periodycznej  $l$  do charakterystycznego wymiaru ciała  $L$ ,  $\varepsilon = \frac{l}{L}$ .

Klasyczne związki Duhamel'a-Neumann'a są spełnione w dowolnym punkcie  $\mathbf{x} \in A$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})\mathbf{e} - \boldsymbol{\beta}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})T, \quad \boldsymbol{\beta}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\lambda}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}), \quad (6.24)$$

gdzie związki geometryczne mają postać

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6.25)$$

Prawo Fouriera przyjmuje postać

$$\mathbf{q} = -\kappa^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) \nabla T, \quad (6.26)$$

gdzie  $\omega \in \Omega$ , i  $(\Omega, \Sigma, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną. Tutaj  $\sigma$  jest tensorem naprężenia;  $\lambda$  i  $\alpha$  są odpowiednio, tensorami sprężystości i termicznej rozszerzalności,  $T$  jest przyrostem temperatury,  $\mathbf{q}$  jest strumieniem ciepła, a  $\kappa$  tensorem przewodności cieplnej.

Przypominamy, że  $\lambda^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \lambda(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ ,  $\kappa^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \kappa(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ , itd. Losowy funkcjonal  $F^\varepsilon$ , dany jest wzorem:

$$F^\varepsilon(\omega)(\mathbf{u}, T, A) = \begin{cases} \int_A f^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}); T, \nabla T) dx, & \begin{cases} \mathbf{u} \in H^1(A)^3, \\ T \in H^1(A) \end{cases} \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (6.27)$$

gdzie

$$f^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}), T, \nabla T) dx = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{e}(\mathbf{u}) - T\alpha^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})]^t \lambda^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) \times \right. \\ \left. \times [\mathbf{e}(\mathbf{u}) - T\alpha^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})] + (\nabla)^t \kappa^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) \nabla T \right\}. \quad (6.28)$$

Tutaj górny wskaźnik „t” oznacza transpozycję. Moduły  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  jako funkcje zmiennej  $\mathbf{x}$  należą do przestrzeni funkcji istotnie ograniczonych nad ciałem i są od dołu ograniczone przez dodatnio określone tensory, por. [60]. Symbolicznie zapisane równania konstytutywne przyjmują postać

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial \mathbf{e}} = \sigma, \quad \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial \nabla T} = -\mathbf{q}. \quad (6.29)$$

Wprowadzimy stochastycznie periodyczną strukturę w następujący sposób:  $(X_k^\varepsilon)_{k \in \mathbb{Z}^N}$  jest rodziną niezależnych zmiennych losowych zdefiniowaną nad przestrzenią probabilistyczną  $(\Omega, \Sigma, P)$ , taką że

$$P \{ \omega \in \Omega : X_k^\varepsilon(\omega) = 1 \} = c_1, \quad (6.30)$$

$$P \{ \omega \in \Omega : X_k^\varepsilon(\omega) = 0 \} = 1 - c_1 = c_2,$$

dla każdego  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$  i dla  $c_1 \in (0, 1)$  ustalonego.

Niech  $Q_k^\varepsilon$  będzie kostką w  $\mathbb{R}^3$ , dla każdego  $\varepsilon > 0$  i  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon k_i \leq x_i < \varepsilon(k_i + 1), \quad i = 1, \dots, N \right\}. \quad (6.31)$$

Przez  $I_k^\varepsilon$  oznaczmy funkcję charakterystyczną kostki  $Q_k^\varepsilon$ .

Stochastycznie periodyczna funkcja charakterystyczna dana jest jako

$$\chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \chi\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right), \quad (6.32)$$

gdzie  $\chi(\omega, \cdot)$  jest 1-periodyczną funkcją, gdyż  $I_k^\varepsilon(\mathbf{x}) = I_k^1\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ .

Położmy teraz

$$\chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} X_{\mathbf{k}}^\varepsilon(\omega) I_{\mathbf{k}}^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \omega \in \Omega, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (6.33)$$

gdzie  $I_{\mathbf{k}}^\varepsilon(\mathbf{x})$  jest funkcją periodyczną w  $\mathbf{x}$ .

*Uwaga 6.1.* Zmienna  $y = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$  jest zmienną lokalną o tym samym znaczeniu jak zmienna lokalna wprowadzona w homogenizacji periodycznej. Zatem tensory  $\lambda$ ,  $\alpha$  i  $\varkappa$  są określone przez funkcję  $\chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})$  i dodatnio określoną macierz modułów  $\lambda^{(i)}$ ,  $\beta^{(i)}$ ,  $\alpha^{(i)}$ ,  $\varkappa^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , charakteryzujące oba składniki. Stąd

$$\lambda^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \lambda^{(1)} \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) + \lambda^{(2)} (1 - \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})),$$

$$\beta^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \beta^{(1)} \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) + \beta^{(2)} (1 - \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})),$$

$$\alpha^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \alpha^{(1)} \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) + \alpha^{(2)} (1 - \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})),$$

$$\varkappa^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \varkappa^{(1)} \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) + \varkappa^{(2)} (1 - \chi^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})).$$

Moduły  $\lambda^{(i)}$ ,  $\beta^{(i)}$ ,  $\alpha^{(i)}$ ,  $\varkappa^{(i)}$  są stałe.

Teraz możemy wykorzystać Tw. 6.2. W szczególności mamy

$$(\rho_\varepsilon F)(\omega)(\mathbf{u}, T, A) = \int_A f\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}(\mathbf{u}); T, \nabla T\right) dx, \quad (6.34)$$

gdzie

$$f^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}); T, \nabla T) = f\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{e}(\mathbf{u}); T, \nabla T\right) = \quad (6.35)$$

$$= [\mathbf{e}(\mathbf{u}) - T\alpha(\omega, \mathbf{x})]^t \cdot \lambda(\omega, \mathbf{x}) \cdot [\mathbf{e}(\mathbf{u}) - T\alpha(\omega, \mathbf{x})] + (\nabla T)^t \varkappa(\omega, \mathbf{x}) \nabla T.$$

$\Gamma$ -granica funkcjonałów  $F^\varepsilon$ , zgodnie z definicją (dla  $f^\varepsilon$  zdefiniowanego powyżej, gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) ma postać następującego nielosowego funkcjonału całkowego  $F_0$ :

$$F_0(\omega)(\mathbf{u}, T, A) = \begin{cases} \int_A f_0(\mathbf{e}(\mathbf{u}); T, \nabla T) d\mathbf{x}, & (\mathbf{u}, T) \in H^1(A)^3 \times H^1(A), \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (6.36)$$

Funkcja podcałkowa  $f_0(\cdot, \cdot, \cdot)$  jest dana zależnością

$$f_0(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{Q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \min_{\mathbf{u}, T} \left\{ \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \int_{1/\varepsilon} f(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}); \theta, \nabla T) d\mathbf{x} dP(\omega) \right\} | \quad (6.37)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{x}, \quad T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} \text{ na } \partial Q_{1/\varepsilon}, \quad (\mathbf{u}, T) = \mathcal{U},$$

gdzie  $\mathbf{E} \in \mathbf{E}_s^N$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3$ .

*Uwaga 6.2.* Warunki wystarczające istnienia minimum są równaniami Eulera

$$\operatorname{div} \lambda(\mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{E} - \alpha\theta) = 0, \quad \operatorname{div} \varkappa(\nabla T + \mathbf{Q}) = 0 \quad \text{w } Q_{1/\varepsilon}, \quad (6.38)$$

dla  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $T = 0$ , na brzegu  $\partial Q_{1/\varepsilon}$ . Ponieważ mamy do czynienia z zagadnieniem liniowym, poszukujemy nieznanych pól w następującej postaci:

$$u_i = -\varphi_i^{(mn)} E_{mn} + \phi_i \theta, \quad T = \psi^m Q_m. \quad (6.39)$$

Wtedy

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = -e_{ij}(\varphi^{(mn)}) E_{mn} + e_{ij}(\phi)\theta, \quad (6.40)$$

$$\nabla_i T = -\partial_i \psi^m Q_m.$$

Podstawiając (6.17) do (6.15) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -\partial_i \lambda_{ijkl} e_{kl}(\varphi^{(mn)}) E_{mn} + \partial_i \lambda_{ijmn} E_{mn} &= 0, & \forall \mathbf{E} \in \mathbf{E}_s^N, \\ -\partial_i \lambda_{ijkl} \alpha_{kl} \theta + \partial_i \lambda_{ijmn} e_{mn}(\phi) \theta &= 0, & \forall \theta \in \mathbb{R}, \\ \partial_i \varkappa_{ij} (-\partial_j \psi^m Q_m + Q_i) &= 0, & \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Ostatecznie mamy układ równań na  $Q_{1/\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \partial_i \lambda_{ijkl} \partial_{(k} \varphi_{l)}^{(mn)} &= \partial_i \lambda_{ijmni}, \\ \partial_i \lambda_{ijmn} \partial_{(k} \phi_{l)} &= \partial_i \lambda_{ijkl} \alpha_{kl}, \\ \partial_i \varkappa_{ij} \partial_j \psi^m &= \partial_i \varkappa_{im}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

z jednorodnymi warunkami brzegowymi na brzegu  $\partial Q_{1/\varepsilon}$  dla nieznanymi pól  $\varphi_i^{(mn)}$ ,  $\phi_i$ ,  $\psi$ .

Zakładając, że znamy rozwiązania „zagadnienia na komórce”  $Q_{1/\varepsilon}$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 f(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{e}(\mathbf{u}); \theta, \nabla T) &= \frac{1}{2} [(e_{ij} - \alpha_{ij}\theta)\lambda_{ijkl}(e_{kl} - \alpha_{kl}\theta) + \partial_k T \varkappa_{kl} \partial_l T] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \lambda_{ijkl} \left( -\partial_{(k}\varphi_{l)}^{(mn)} E_{mn} + E_{kl} + \partial_{(k}\phi_{l)}\theta - \alpha_{kl}\theta \right) \times \right. \\
 &\times \left( -\partial_{(k}\varphi_{l)}^{(mn)} E_{mn} + E_{kl} + \partial_{(k}\phi_{l)}\theta - \alpha_{kl}\theta \right) + \\
 &\left. + (-\partial_i \psi^j Q_j + Q_i) \varkappa_{ik} (-\partial_k \psi^l Q_l + Q_l) \right] = \tag{6.43} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \lambda_{ijkl} \left[ \left( I_{klmn} - \partial_{(k}\varphi_{l)}^{(mn)} \right) E_{mn} - \left( \alpha_{mn} - \partial_{(m}\phi_{n)} \right) \theta \right] \times \right. \\
 &\times \left[ \left( I_{ijmn} - \partial_{(i}\varphi_{j)}^{(mn)} \right) E_{mn} - \left( \alpha_{ij} - \partial_{(i}\phi_{j)} \right) \theta \right] + \\
 &\left. + \varkappa_{ik} \left[ \left( I_{kl} - \partial_k \psi^l \right) Q_l \right] \left[ \left( I_{li} - \partial_l \psi^i \right) Q_i \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Podstawiając (6.19) do (6.14) mamy

$$f_0(\mathbf{E}; \theta, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\lambda}^* (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}^* \theta) \cdot (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}^* \theta) + \varkappa^* \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}], \tag{6.44}$$

gdzie makroskopowe moduły określone są przez następujące uśrednienia względem miary  $dP(\omega)$ :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\lambda}^* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \min_{\mathbf{u}, T} \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \int_{Q_{1/\varepsilon}} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{I} - \nabla \varphi) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega), \\
 \boldsymbol{\beta}^* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \min_{\mathbf{u}, T} \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \int_{Q_{1/\varepsilon}} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{I} - \nabla \varphi) \boldsymbol{\alpha} \, d\mathbf{x} \, dP(\omega), \\
 \boldsymbol{\alpha}^* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \min_{\mathbf{u}, T} \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \int_{Q_{1/\varepsilon}} (\boldsymbol{\alpha} - \nabla \phi) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega), \\
 \varkappa^* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \min_{\mathbf{u}, T} \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \int_{Q_{1/\varepsilon}} \varkappa(\mathbf{I} - \nabla \psi) \, d\mathbf{x} \, dP(\omega).
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

Przy wyprowadzaniu powyższych formuł wykorzystaliśmy fakt, że rozwiązania zagadnień na komórce mają następujące własności:

$$\begin{aligned} \int_{Q_{1/\varepsilon}} \lambda(\mathbf{I} - \nabla\varphi) \cdot \nabla\varphi \, dx &= 0, & \int_{Q_{1/\varepsilon}} \lambda(\mathbf{I} - \nabla\varphi) \cdot \nabla\phi \, dx &= 0, \\ \int_{Q_{1/\varepsilon}} \lambda(\mathbf{I} - \nabla\phi) \cdot \nabla\phi \, dx &= 0, & \int_{Q_{1/\varepsilon}} \lambda(\mathbf{I} - \nabla\phi) \cdot \nabla\varphi \, dx &= 0, \\ \int_{Q_{1/\varepsilon}} \lambda(\mathbf{I} - \nabla\psi) \cdot \nabla\psi \, dx &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli założymy, że  $\mathbf{E} = \mathbf{e}(\mathbf{u})$ ,  $\theta = T$ ,  $\mathbf{Q} = \nabla T$  to potencjał makroskopowy dany przez (3.21) umożliwia wyznaczenie makroskopowych naprężeń i strumienia ciepła jako:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{e}} = \boldsymbol{\sigma}^0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial \nabla T} = -\mathbf{q}^0, \quad (6.46)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{\lambda}^* (\mathbf{e}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\alpha}^* T), \quad \mathbf{q}^0 = \boldsymbol{\varkappa}^* \nabla T. \quad (6.47)$$

### 6.2.2. Przypadek jednowymiarowy

Założymy, że wszystkie własności materiałowe oraz pola przemieszczeń i temperatury zależą od jednej zmiennej, oznaczanej dalej przez  $x$ . Niech dla każdego  $\varepsilon > 0$ ,  $(X_k^\varepsilon)_{k \in \mathbb{Z}}$  będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych zdefiniowanych na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \Sigma, P)$

$$P \{ \omega \in \Omega : X_k^\varepsilon(\omega) = 1 \} = c_1, \quad (6.48)$$

$$P \{ \omega \in \Omega : X_k^\varepsilon(\omega) = 0 \} = 1 - c_1 = c_2$$

dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$  i dla ustalonego  $c_1 \in (0, 1)$ . Ponadto, niech dla każdego  $\varepsilon > 0$  i  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $Q_k^\varepsilon$  będzie przedziałem na osi rzeczywistej  $\mathbb{R}$  zdefiniowanym przez

$$Q_{1/\varepsilon} = \{-j \leq x < j\}, \quad |Q_{1/\varepsilon}| = \frac{1}{2j}. \quad (6.49)$$

Przez  $I_k^\varepsilon$  oznaczymy funkcję charakterystyczną tego przedziału. Stochastycznie periodyczna funkcja charakterystyczna dana jest związkami

$$\boldsymbol{\chi}^\varepsilon(\omega, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k^\varepsilon(\omega) I_k^\varepsilon(x) \quad \omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.50)$$

gdzie  $I_k^\varepsilon(x)$  jest periodyczną względem zmiennej  $x$ . Ponadto, położmy:

$$\chi^\varepsilon(\omega, x) = \chi\left(\omega, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (6.51)$$

gdzie  $\chi(\omega, \cdot)$  jest 1-periodyczną funkcją, ponieważ  $I_k^\varepsilon(x) = I_k^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Wówczas wartości  $\lambda^\varepsilon$ ,  $\alpha^\varepsilon$  i  $\varkappa^\varepsilon$  są określone przez funkcję  $\chi^\varepsilon(\omega, x)$  i dodatnie stałe  $\lambda^{(i)}$ ,  $\beta^{(i)}$ ,  $\alpha^{(i)}$ ,  $\varkappa^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \lambda^\varepsilon(\omega, x) &= \lambda^{(1)}\chi^\varepsilon(\omega, x) + \lambda^{(2)}(1 - \chi^\varepsilon(\omega, x)), \\ \beta^\varepsilon(\omega, x) &= \beta^{(1)}\chi^\varepsilon(\omega, x) + \beta^{(2)}(1 - \chi^\varepsilon(\omega, x)), \\ \alpha^\varepsilon(\omega, x) &= \alpha^{(1)}\chi^\varepsilon(\omega, x) + \alpha^{(2)}(1 - \chi^\varepsilon(\omega, x)), \\ \varkappa^\varepsilon(\omega, x) &= \varkappa^{(1)}\chi^\varepsilon(\omega, x) + \varkappa^{(2)}(1 - \chi^\varepsilon(\omega, x)). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Makroskopowy potencjał w tym przypadku ma postać

$$\begin{aligned} f_0(E; \theta, Q) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \min_{u, T} \frac{1}{2} \frac{1}{2j} \int_{-j}^j [(u' - \alpha(\omega, x)\theta) \lambda(\omega, x) \times \\ &\quad \times (u' - \alpha(\omega, x)\theta) + T' \varkappa(\omega, x) T'] dx dP(\omega), \end{aligned} \quad (6.53)$$

z warunkami

$$u(-j) = -jE, \quad u(j) = jE, \quad T(-j) = -jQ, \quad T(j) = jQ. \quad (6.54)$$

Aby znaleźć minimum występujące w zależności (6.53) rozwiązujemy następujące równania Eulera:

$$(\lambda(\omega, x)u'(x) - \beta(\omega, x)\theta)' = 0 \quad \forall x \in (-j, j), \quad (6.55)$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} u(-j) &= -jE, \quad u(j) = jE, \\ (\varkappa(\omega, x)T'(x))' &= 0, \\ T(-j) &= -jQ, \quad T(j) = jQ. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Tutaj  $u' = \frac{du}{dx}$  itd. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy

$$u' = \frac{d_1}{\lambda(\omega, x)} + \alpha(\omega, x)\theta, \quad (6.57)$$



gdzie

$$d_1 = \left[ 2Ej - \theta \int_{-j}^j \alpha(\omega, x) dx \right] \left( \int_{-j}^j \frac{dx}{\lambda(\omega, x)} \right)^{-1}, \quad (6.58)$$

oraz

$$T' = \frac{d_2}{\varkappa(\omega, x)}, \quad d_2 = 2Qj \left( \int_{-j}^j \frac{dx}{\varkappa(\omega, x)} \right)^{-1}. \quad (6.59)$$

Co więcej, mamy

$$\begin{aligned} & \min_{u, T'} \left\{ \frac{1}{4j} \int_{-j}^j [(u' - \alpha(\omega, x)\theta) \lambda(\omega, x) (u' - \alpha(\omega, x)\theta) + T' \varkappa(\omega, x) T'] dx \mid \right. \\ & \left. u(-j) = -jE, \quad u(j) = jE, \quad T(-j) = -jQ, \quad T(j) = jQ \right\} = \\ & = \frac{1}{4j} \left\{ \left( \int_{-j}^j \frac{dx}{\lambda(\omega, x)} \right)^{-1} \left( 2Ej - \theta \int_{-j}^j \alpha(\omega, x) dx \right)^2 + \left( \int_{-j}^j \frac{dx}{\varkappa(\omega, x)} \right)^{-1} Q^2 j \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2j} \sum_{k=-j}^j (\lambda^{(1)} X_k^\varepsilon(\omega) + \lambda^{(2)} (1 - X_k^\varepsilon(\omega)))^{-1} \right]^{-1} E^2 + \right. \\ & + 2 \left[ \frac{1}{2j} \sum_{k=-j}^j (\lambda^{(1)} X_k^\varepsilon(\omega) + \lambda^{(2)} (1 - X_k^\varepsilon(\omega)))^{-1} \right]^{-1} E \times \\ & \times \left[ \frac{1}{2j} \sum_{k=-j}^j (\alpha^{(1)} X_k^\varepsilon(\omega) + \alpha^{(2)} (1 - X_k^\varepsilon(\omega))) \right] \theta + \\ & + \left[ \frac{1}{2j} \sum_{k=-j}^j (\lambda^{(1)} X_k^\varepsilon(\omega) + \lambda^{(2)} (1 - X_k^\varepsilon(\omega)))^{-1} \right]^{-1} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{2j} \sum_{k=-j}^j (\alpha^{(1)} X_k^\varepsilon(\omega) + \alpha^{(2)} (1 - X_k^\varepsilon(\omega))) \right]^2 \theta^2 + \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2j} \sum_{k=-j}^j (\varkappa^{(1)} X_k^\varepsilon(\omega) + \varkappa^{(2)} (1 - X_k^\varepsilon(\omega)))^{-1} \right]^{-1} Q^2 \right\}, \end{aligned}$$

dla każdego  $\omega \in \Omega$ . Korzystając z prawa wielkich liczb, por. [53], dla  $\varepsilon \rightarrow 0$  i jednocześnie  $j \rightarrow \infty$  otrzymujemy:

$$f_0(E; \theta, Q) = \frac{1}{c_1 \lambda_1^{-1} + c_2 \lambda_2^{-1}} E^2 - \frac{2(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2)}{c_1 \lambda_1^{-1} + c_2 \lambda_2^{-1}} E\theta + \frac{(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2)^2}{c_1 \lambda_1^{-1} + c_2 \lambda_2^{-1}} \theta^2 + \frac{1}{c_1 \varkappa_1^{-1} + c_2 \varkappa_2^{-1}} Q^2. \quad (6.60)$$

Na koniec otrzymujemy ostateczną postać funkcji podcałkowej  $f_0$

$$f_0(E; \theta, Q) = \lambda^* E^2 - 2\lambda^* \alpha^* E\theta + \lambda^* \alpha^{*2} \theta^2 + \varkappa^* Q^2, \quad (6.61)$$

gdzie

$$\lambda^* = \left( c_1 \lambda_1^{-1} + c_2 \lambda_2^{-1} \right)^{-1}, \quad \beta^* = \lambda^* \alpha^*, \\ \alpha^* = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2, \quad \varkappa^* = \left( c_1 \varkappa_1^{-1} + c_2 \varkappa_2^{-1} \right)^{-1}.$$

Zauważmy, że z wyjątkiem przypadku jednowymiarowego rozpatrywanego powyżej, moduły efektywne nie mogą być wyznaczone dokładnie. Można poszukiwać jedynie ograniczeń na te wielkości. Zagadnienie znalezienia optymalnych górnych i dolnych ograniczeń na stałe efektywne dla kompozytów termosprężystych pozostaje otwarte. Aby rozwiązać zagadnienie homogenizacji stochastycznej niestacjonarnej, sprzężone termosprężystości należy zastosować metodę  $G$ -zbieżności lub metodę dwuskalowej stochastycznej zbieżności w średniej, por. [32, 96].

Ogólne twierdzenie o stochastycznej homogenizacji może być zastosowane do przypadku fizycznie nieliniowej termosprężystości z losową mikrostrukturą przy założeniu małych deformacji.

### 6.3. Materiał sprężysty osłabiony szczelinami

Celem rozważań tego rozdziału jest opisanie osłabienia materiału liniowo-sprężystego przez losowy rozkład mikroszczelin, dla których przyjęto tzw. warunki Signoriniego, por. [79]. Podobnie jak w pracy [142] wykorzystamy ideę  $\Gamma$ -zbieżności, w połączeniu z metodą homogenizacji periodycznej zastosowanej do mikroszczelin.

Niech ciało sprężyste zajmuje obszar  $A_0$ . Przez  $\overline{A_0}$  oznaczamy domknięcie obszaru  $A_0$  w  $\mathbb{R}^N$ , gdzie  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  lub  $N = 3$ . W dalszym ciągu  $\mathbf{u}$  oznacza wektor przemieszczenia,  $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  jest tensorem odkształcenia, a  $\sigma$

tensorem naprężenia. Przestrzeń symetrycznych tensorów drugiego rzędu nad przestrzenią  $\mathbb{R}^N$  oznaczamy przez  $\mathbb{E}_s^N$ , zaś

$$J: \mathbb{E}_s^N \rightarrow R^+, \quad (6.62)$$

jest gęstością energii sprężystej. Zakładamy, że funkcja ta jest wypukła i spełnia następujący warunek:

istnieje  $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$  takie, że

$$\lambda |\mathbf{E}|^2 \leq J(\mathbf{E}) \leq \Lambda(1 + |\mathbf{E}|^2) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathbb{E}_s^N. \quad (6.63)$$

Niech podzbiór  $C_0 \subset A_0$  modeluje szczelinę (nacięcie) będącą gładką  $(N-1)$ -wymiarową rozmaitością. Zakładamy, że  $A_0 \setminus C_0$  jest zbiorem otwartym i spójnym. Oznacza to, że  $C_0$  nie dzieli  $A_0$  na podzbiory rozłączne. Orientując rozmaitość  $C_0$  przez wektor do niej normalny  $\mathbf{n}$ , możemy zdefiniować dwie strony tej rozmaitości. Wtedy, dla dowolnej funkcji  $v$  z przestrzeni  $H^1(A \setminus C_0)$ , otrzymujemy dwa ślady (wartości)  $v_1$  i  $v_2$  na  $C_0$ . Skok funkcji  $v$  w kierunku normalnej do  $C_0$  oznaczamy przez  $[[v]] = v_2 - v_1$ . Dla zadanych sił masowych  $\mathbf{f} = (f_i)$ ,  $f_i \in L^2(A_0)$ , zagadnienie poszukiwania minimum całkowitej energii sprężystej formułujemy jako zadanie poszukiwania następującego minimum:

$$\min_{\mathbf{u} \in K} \left\{ \int_{A_0 \setminus C_0} J(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \, d\mathbf{x} - \int_{A_0 \setminus C_0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \right\}, \quad (6.64)$$

gdzie  $K = \{\mathbf{u} \in [H^1(A_0 \setminus C_0)]^N \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ na } \partial A_0, [[u_i n_i]] \geq 0 \text{ na } C_0\}$  jest zbiorem wypukłym, pól kinematycznie dopuszczalnym.

### 6.3.1. Losowy rozkład szczelin

Rozkład szczelin  $C$  jest zdefiniowany jako suma przeliczalnej liczby  $(N-1)$ -wymiarowych rozmaitości  $C_i \in \mathbb{R}^N$ , gdzie  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}$  jest zbiorem liczb naturalnych. Zakładamy, że zbiór  $\mathbb{R}^N \setminus C$ , gdzie

$$C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i,$$

jest otwarty i zwarty. Losowy rozkład szczelin  $C(\omega)$  jest modelowany przez przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \Sigma, P)$ . Poniżej zakładamy, że  $\Sigma$  jest  $P$  zupełne. Rzeczywista zmienna losowa  $X$  jest odwzorowaniem mierzalnym z  $\Omega$  w  $\mathbb{R}$ .

Zdefiniujemy statystycznie jednorodny i ergodyczny (S.H.E. – ang. *Statistically Homogeneous and Ergodic*) rozkład szczelin. Statystyczna jednorodność

oznacza, że dwa punkty geometryczne w przestrzeni są statystycznie nieodróżnialne. Innymi słowy, statystyczne własności materiału spękanego są niezmiennicze względem operacji translacji. Podobnie, jak w poprzednim rozdziale, założymy, że

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \forall A \in \Sigma \quad \tau_{\mathbf{x}}A &= \{\omega \mid \tau_{-\mathbf{x}}\omega \in A\}, & P(\tau_{-\mathbf{x}})A &= P(A), \\ \forall (\omega, \mathbf{x}) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \quad \tilde{X}(\omega, \mathbf{x}) &\equiv X(\tau_{-\mathbf{x}}\omega). \end{aligned}$$

Założymy, że przepływ  $\tau$  jest ergodyczny, więc jedynie stałe spełniają równanie

$$\forall \mathbf{x}, \quad X \circ \tau_{\mathbf{x}} = X \quad \text{p.w.}$$

Powiemy, że ośrodek jest osłabiony przez S.H.E. rozkład szczelin, jeżeli jest modelowany nad przestrzenią probabilistyczną, na której określony jest ergodyczny przepływ zachowujący miarę. Ważną konsekwencją twierdzenia Birkhoff'a jest to, że dla  $X \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , mamy następujące słabe zbieżności w  $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{X}\left(\omega, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right) = \mathcal{E}(X), \quad \text{p.n.},$$

gdzie  $\mathcal{E}(X)$  oznacza wartość oczekiwaną  $X$ , a p.n. – prawie napewno.

## Przykład 6.2

(i) Rozpatrzmy nieskończony, jednorodny ośrodek sprężysty ze szczelinami rozłożonymi w ten sposób, że jedna realizacja  $\omega \in \Omega$  jest identyfikowana ze zbiorem  $\omega = \{\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N}\}$  „środków” zdefiniowanych jako ustalone punkty na szczelinach. Geometrycznie szczeliny te są identyczne, a ich miara powierzchniowa jest skończona.

Niech  $Nb(\omega, \mathcal{V})$  oznacza liczbę ”środków”, które mieszczą się w obszarze  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N$ . Teraz  $\Sigma$  jest zdefiniowane jako najmniejsza  $\sigma$ -algebra zawierająca podzbiór  $\Omega$  w postaci

$$\{\omega \in \Omega \mid Nb(\omega, \mathcal{V}_1) = k_1, Nb(\omega, \mathcal{V}_2) = k_2, \dots; Nb(\omega, \mathcal{V}_i) = k_i\}, \quad (6.65)$$

gdzie  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_i$  są rozłączne, a  $k_1, k_2, \dots, k_i$  są dodatnimi liczbami całkowitymi. Miara probabilistyczna jest jednoznacznie zdefiniowana na  $\Sigma$  poprzez wartości na podzbiórach. Translacje działają na  $\Omega$  następująco:

$$\forall \mathbf{x}, \forall \omega = \{\mathbf{x}_n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \tau_{\mathbf{x}}\omega = \{\mathbf{x}_n + \mathbf{x} \mid n \in \mathbb{N}\}. \quad (6.66)$$

Statystycznie jednorodny rozkład szczelin zapewnia niezmienniczość  $P$  względem działania translacji  $\tau_x$ . Tak jest w przypadku, gdy miara  $P$  ma rozkład Poissona:

$$P[Nb(\omega, \mathcal{V}_1) = k_1, Nb(\omega, \mathcal{V}_2) = k_2, \dots, Nb(\omega, \mathcal{V}_i) = k_i] = \quad (6.67)$$

$$= P[Nb(\omega, \mathcal{V}_1) = k_1] \times P[Nb(\omega, \mathcal{V}_2) = k_2] \times \dots \times P[Nb(\omega, \mathcal{V}_i) = k_i] \quad (6.68)$$

z warunkiem

$$P[Nb(\omega, \mathcal{V}) = k] = \frac{(a|\mathcal{V}|)^k}{k!} \exp(-a|\mathcal{V}|), \quad (6.69)$$

gdzie  $a > 0$  jest stałą, a  $|\mathcal{V}|$  jest miarą  $\mathcal{V}$ . Rozkład Poissona jest ergodyczny. Niemniej, przy dużej gęstości szczelin może pojawić się nakładanie szczelin jednych na drugie. Taka sytuacja nie pojawi się w przypadku rozkładu szczelin statystycznie periodycznego przedstawionego poniżej.

(ii) Statystycznie periodyczny rozkład szczelin. Niech  $\{X^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N}$  będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych nad przestrzenią  $(\Omega, \Sigma, P)$  o wartościach  $\{0, 1\}$  taką, że

$$P\{\omega : X^{\mathbf{k}}(\omega) = 1\} = r, \quad P\{\omega : X^{\mathbf{k}}(\omega) = 0\} = 1 - r,$$

dla  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$  i dla ustalonego  $0 \leq r \leq 1$ . Dla każdego  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$  niech  $Q^{\mathbf{k}}$  oznacza kostkę w  $\mathbb{R}^N$ :

$$Q^{\mathbf{k}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid k_i \leq x_i \leq k_i + 1, i = 1, 2, \dots, N\}. \quad (6.70)$$

Funkcję charakterystyczną kostki  $Q^{\mathbf{k}}$  oznaczmy przez  $I^{\mathbf{k}}$ . Połóżmy

$$\chi(\omega, \mathbf{x}) = \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} I^{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) X^{\mathbf{k}}(\omega). \quad (6.71)$$

Funkcja ta może być nazwana losową funkcją charakterystyczną kostek zawierających szczelinę.

Oznaczmy przez  $C^{per}$  zbiór periodycznie rozłożonych szczelin w  $\mathbb{R}^N$ . Wówczas, zbiór

$$\tilde{C}(\omega, \mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid \chi(\omega, \mathbf{x}) = 1\} \cap C^{per} \quad (6.72)$$

określa S.H.E. rozkład nacięć. Periodyczny rozkład nacięć jest szczególnym przypadkiem stochastycznie jednorodnego ergodycznego rozkładu. Rzeczywiście, weźmy  $\Omega$  jako zbiór  $Y = [0, 1]^N$  oraz  $P, \Sigma$  jako miarę Lebesgue'a i jej  $\sigma$ -algebrę na  $Y$ , odpowiednio. Wartość oczekiwana oznacza teraz całkowanie po komórce periodyczności  $Y$ .

### 6.3.2. Ciało sprężyste osłabione losowym rozkładem mikroszczelin

Rozpatrzmy S.H.E. rozkład szczelin  $C(\omega)$  określony przez przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \Sigma, P)$  i proces stochastyczny  $\tilde{C}$ , gdzie:

$$\tilde{C}(\omega, \mathbf{x}) = C(\tau_{-\mathbf{x}}\omega). \quad (6.73)$$

Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  połóżmy

$$\tilde{C}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}) = \tilde{C}\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right). \quad (6.74)$$

Niech  $V \subset \mathbb{R}^N$  będzie skończonym obszarem z zadaną w ten sposób mikrostrukturą. W celu ominięcia trudności technicznych, gdy szczeliny przecinają brzeg  $\partial V$ , założymy, że są one ściśle zwarte w  $V$ . Rozwiązanie zadania równowagi polega na znalezieniu następującego kresu dolnego:

$$\inf_{K^\varepsilon(\omega)} \left\{ \int_{V \setminus \tilde{C}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})} J(\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}))) dx - \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) dx \right\}, \quad (6.75)$$

gdzie

$$K^\varepsilon(\omega) = \{\mathbf{u} \in [H^1(V \setminus \tilde{C}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x}))]^N \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ na } \partial V, \llbracket u_i n_i \rrbracket \geq 0 \text{ na } \tilde{C}^\varepsilon(\omega, \mathbf{x})\}.$$

Aby zbadać graniczne zachowanie się kresu dolnego (6.75) przy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , rozszerzymy podejście stosowane w pracy [53]. Wprowadźmy najpierw następującą klasę funkcjonałów całkowych  $F \in \mathcal{F}$ , które są określone na zbiorze nie zawierającym szczelin poprzez definicję:

$$F : (L_{loc}^2(\mathbb{R}^N))^N \times \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (6.76)$$

$$F(\mathbf{u}, A) = \begin{cases} \int_A J[\mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))] dx & \text{gdy } \mathbf{u}|_A \in [H^1(A)]^N, \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (6.77)$$

gdzie  $A \in \mathcal{A}^0$  i  $\mathcal{A}_0$  jest rodziną wszystkich otwartych ograniczonych podzbiorów  $\mathbb{R}^N$ .

Następnie zdefiniujemy klasę funkcjonałów  $\mathcal{F}'$ , które są określone na zbiorze ze szczelinami, poprzez formułę:

$$F^C(\mathbf{u}, A) := F(\mathbf{u}, A \setminus C). \quad (6.78)$$

Ponieważ możemy zawsze dowolny zbiór  $A$  przybliżyć przez taki zbiór  $A'$ , którego brzeg nie przecina szczelin oraz spełniona jest równość miar  $|A| \simeq |A'|$ , możemy założyć, że

$$\bigcup_i C_i \cap \partial A = \emptyset, \quad (6.79)$$

W założeniu tym  $C_i$  jest sumą teoriomnogościową szczelin leżących wewnątrz zbioru  $A$ . Gdy  $C = \emptyset$ , wtedy  $F^\emptyset \in \mathcal{F}$ . Ponieważ chcemy opisać losowy rozkład szczelin, musimy założyć, że mamy dane odwzorowanie mierzalne  $\omega \rightarrow F^C(\omega)$  przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \Sigma, P)$  na przestrzeń funkcjonałów  $\mathcal{F}'$ , a  $d$  jest odległością na  $\mathcal{F}$  zdefiniowaną w sposób podany w pracy [53]. Zaproponujemy następującą definicję odległości dwóch funkcjonałów z  $\mathcal{F}'$ :

$$\begin{aligned} d(F^C, F^D) &= \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{+\infty} \frac{1}{i+j+k} |\arctg(T_{1/i} F^C(\mathbf{w}_j, B_k)) - \arctg(T_{1/i} F^D(\mathbf{w}_j, B_k))|, \end{aligned} \quad (6.80)$$

gdzie

$$T_\varepsilon F^C(\mathbf{u}, A) \equiv \min \left\{ F^C(\mathbf{v}, A) + \frac{1}{\varepsilon} \int_A |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 dx \mid \mathbf{v} \in [H^1(A \setminus C)]^N \right\}. \quad (6.81)$$

Tutaj  $\mathbf{w}_i$  należy do przeliczalnie gęstego podzbioru  $[H^1(\mathbb{R}^N)]^N$ , podczas gdy  $\{B_k\}$  jest przeliczalnie gęstym podzbiorem  $\mathcal{A}^0$ . Jasne jest, że

$$F^C = F^D \iff C = D, \quad (6.82)$$

tj., gdy rozkłady szczelin pokrywają się.

Losowy funkcjonal opisujący materiał spękany jest zdefiniowany jako pewna funkcja mierzalna

$$F^C : \Omega \rightarrow \mathcal{F}', \quad (6.83)$$

w której  $\mathcal{F}'$  jest wyposażone w  $\sigma$ -ciało  $\Sigma_B$  generowane przez metrykę  $d$ . Oznacza to, że funkcja  $\omega \rightarrow F^C(\omega)(\mathbf{u}, A)$  jest rozszerzoną zmienną losową, a więc jest funkcją mierzalną pomiędzy  $(\Omega, \Sigma, P)$  i  $\mathbb{R}^1$  z borelowską rodziną zbiorów otwartych. Załóżmy, że  $F^C(\omega) = F^{C(\omega)}$ , a więc „losowość” naszego zagadnienia jest określona przez losowy rozkład szczelin.

Podobnie, jak w rozdziale poprzednim, dla każdego  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^N$  i każdego  $\varepsilon > 0$  zdefiniujemy operatory translacji i podobieństwa

$$\tau_{\mathbf{z}, \rho_\varepsilon} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \tau_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{z}, \quad \rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}. \quad (6.84)$$

Niech  $F_\varepsilon^C(\omega)$  ( $\varepsilon > 0$ ) będzie rodziną losowych funkcjonałów „ze szczelinami”, zdefiniowanych na tej samej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \Sigma, P)$ . Powiemy, że  $F_\varepsilon^C(\omega)$  jest procesem stochastycznej homogenizacji modelowanym przez losowy funkcjonał „ze szczelinami”  $F^C(\omega)$  na  $\Omega$ , jeżeli

$$F_\varepsilon^C(\omega) \sim \rho_\varepsilon F^C(\omega), \quad \text{dla każdego } \varepsilon > 0, \quad (6.85)$$

to jest, jeśli  $F_\varepsilon^C(\omega)$  i  $\rho_\varepsilon F^C(\omega)$  mają to samo prawo rozkładu. Powiemy, że proces  $F^C(\omega)$  jest *stochastycznie periodyczny* z okresem  $T > 0$ , jeżeli  $F^C(\omega) \sim \tau_{\mathbf{z}} F^C(\omega)$ , dla każdego  $\mathbf{z} \in \tilde{\mathbb{Z}}^N$ , gdzie  $\tilde{\mathbb{Z}}^N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x}/T \in \mathbb{Z}^N\}$ . Założymy, że własności sprężyste materiału spękanego są deterministyczne i nie zależą od  $\varepsilon$ . Dla prostoty założymy, że  $T = 1$ . Stochastyczna homogenizacja naszego zagadnienia oznacza przejście z  $\varepsilon$  do 0, następującego ciągu zagadnień minimalizacji:

$$\inf_{K^\varepsilon(\omega, A_0)} \left\{ \int_{A_0 \setminus C^\varepsilon(\omega)} J[\mathbf{e}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))] d\mathbf{x} - \int_{A_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\}, \quad (6.86)$$

gdzie  $C^\varepsilon(\omega)$  oznacza losowy rozkład mikroszczelin,  $C^\varepsilon(\omega) = \bigcup_i C_i^\varepsilon(\omega)$ ,  $\mathbf{x} \in C^\varepsilon(\omega) \Leftrightarrow \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \in C(\omega)$ , dla każdego  $\omega \in \Omega$  i  $\varepsilon > 0$ , a ponadto

$$K^\varepsilon(\omega, A_0) = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(A_0 \setminus C^\varepsilon(\omega))]^N \mid \right. \\ \left. \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ na } \partial A_0, \llbracket u_i n_i \rrbracket \geq 0 \text{ na } \bigcup_i C_i^\varepsilon(\omega) \right\}. \quad (6.87)$$

Powyższe rozważania umożliwiają sformułowanie następującego **twierdzenia o stochastycznej homogenizacji dla przypadku periodycznie stochastycznego rozkładu mikroszczelin**.

**Twierdzenie 6.4** Niech  $F_\varepsilon^C(\omega)$  będzie procesem stochastycznej homogenizacji modelowanym przez periodycznie stochastyczny funkcjonał ze szczelinami  $F^C(\omega)$ . Założymy, że istnieje stała  $M > 0$  taka, że dwie rodziny zmiennych losowych:

$$F^C(\cdot)(\mathbf{u}, A), \quad F^C(\cdot)(\mathbf{u}, B), \quad \mathbf{u} \in [L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)]^N, \quad (6.88)$$



są niezależne gdy  $A, B \in \mathcal{A}^0$  oraz  $\text{dist}(A, B) \geq M$ . Wówczas  $F_\varepsilon^C(\omega)$  zbiega w prawdopodobieństwie przy  $\varepsilon \rightarrow 0$  do funkcjonału  $F_0 \in \mathcal{F}$  niezależnie od  $\omega$  danym przez

$$F_0(\mathbf{u}, A_0) = \begin{cases} \int_{A_0} J_0[\mathbf{e}(\mathbf{u}(x))] dx & \text{gdy } \mathbf{u} \in [H^1(A_0)]^N, \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (6.89)$$

gdzie

$$J_0(\mathbf{E}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \min_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \int_{Q_{1/\varepsilon} \setminus C(\omega)} J[\mathbf{e}(\mathbf{u}(x))] dx \mid \mathbf{u} - \mathbf{E}x \in [H^1(Q_{1/\varepsilon} \setminus C(\omega))]^N, \right. \\ \left. \mathbf{u} - \mathbf{E}x = \mathbf{0} \text{ na } \partial Q_{1/\varepsilon}, \quad [u_i n_i] \geq 0 \text{ na } C(\omega) \right\} dP(\omega) \quad (6.90)$$

$$\mathbf{E} \in \mathbb{E}_s^N, \quad Q_{1/\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < \frac{1}{\varepsilon}, i = 1, \dots, N \right\}, \quad |Q_{1/\varepsilon}| = \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^N.$$

Można pokazać, że

$$m^\varepsilon = \min_{\mathbf{u} \in K^\varepsilon(\omega, A_0)} \left\{ F_\varepsilon^C(\omega)(\mathbf{u}, A_0) - \int_{A_0} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{u}(x) dx \right\} \quad (6.91)$$

zbiega w prawdopodobieństwie do

$$m^0 = \min_{\mathbf{u} \in [H_0^1(A_0)]^N} \left\{ F_0(\mathbf{u}, A_0) - \int_{A_0} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{u}(x) dx \right\}. \quad (6.92)$$

Wzór (6.90) określa efektywny (makroskopowy) potencjał sprężysty materiału splekanego w sposób bardziej skomplikowany niż dla przypadku periodycznego por. [155].

### 6.3.3. Zhomogenizowany potencjał dualny

#### (i) Przypadek zagadnienia skalarnego bez szczelin

Rozpatrzmy następujący całkowy funkcjonał, badany uprzednio przez Dal Maso i Modica [53], dla  $\alpha > 1$ :

$$F(u, A) = \begin{cases} \int_A f(x, Du(x)) dx & \text{jeżeli } u|_A \in W^{1,\alpha}(A), \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (6.93)$$

Funkcjonał zhomogenizowany dany jest wówczas wzorem:

$$f_0(\mathbf{p}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \min_u \left\{ \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} F(\omega)(u, Q_{1/\varepsilon}) \mid u - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \in W_0^{1,\alpha}(Q_{1/\varepsilon}) \right\} dP(\omega), \quad (6.94)$$

gdzie  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$  oraz

$$F(\omega)(u, Q_{1/\varepsilon}) = \begin{cases} \int_{Q_{1/\varepsilon}} f\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, Du(\mathbf{x})\right) dx & \text{gdy } u \in W^{1,\alpha}(Q_{1/\varepsilon}), \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech  $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^N$ , a  $f_0^*(\mathbf{p}^*)$  oznacza dualny potencjał zhomogenizowany. W celu wyprowadzenia formuły dla  $f_0^*$  zastosujemy transformację Fenchela. Tak więc

$$f_0^*(\mathbf{p}^*) = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N} \{\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p} - f_0(\mathbf{p})\}, \quad \mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^N. \quad (6.95)$$

Po obliczeniach otrzymujemy:

$$f_0^*(\mathbf{p}^*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \inf_{Q_{1/\varepsilon}} \int f^*\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^*\right) dx \mid \sigma \in W_{\varepsilon}^{\perp} \right\} dP(\omega),$$

gdzie

$$f^*\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{p}^*\right) = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p} - f\left(\omega, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{p}\right) \right\}, \quad \mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^N,$$

$$W_{\varepsilon}^{\perp} = \left\{ \sigma \in L^{\alpha'}(Q_{1/\varepsilon})^N \mid \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ w } Q_{1/\varepsilon}, \int_{Q_{1/\varepsilon}} \sigma(\mathbf{x}) dx = 0 \right\},$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1.$$

## (ii) Ciało sprężyste ze szczelinami

Dualny (komplementarny) potencjał sprężysty materiału osłabionego statycznie periodycznym rozkładem szczelin dany jest wzorem, por. (6.90):

$$J_0^*(\Sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \inf_{Q_{1/\varepsilon} \setminus C(\omega)} \int J^*(\sigma(\mathbf{x})) dx \mid \sigma \in W_{\varepsilon}^C(\omega, \Sigma) \right\} dP(\omega),$$

gdzie

$$W_\varepsilon^C(\omega, \Sigma) = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \sigma_{ij} \in L^2(Q_{1/\varepsilon} \setminus C(\omega)), \right. \\ \left. \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ w } Q_{1/\varepsilon} \setminus C(\omega), \frac{1}{|Q_{1/\varepsilon}|} \int_{Q_{1/\varepsilon} \setminus C(\omega)} \sigma(x) dx = \Sigma, \right. \\ \left. \Sigma \in \mathbb{E}_s^N, \sigma_{ij} T_i T_j = 0 \text{ i } \sigma_{ij} N_i N_j \leq 0 \text{ na } C(\omega) \right\},$$

Tutaj  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}$  oznaczają odpowiednio, wektory normane i styczne do szczelin  $C(\omega)$  zawartych w  $Q_{1/\varepsilon}$ , a

$$J^*(\sigma) = \sup_{\eta \in \mathbb{E}_s^N} \{ \sigma \cdot \eta - J(\eta) \}, \quad \sigma \in \mathbb{E}_s^N.$$

Przypadek rozkładu periodycznego badany był w pracy [155].

Formuły na potencjały efektywne są zbyt skomplikowane, aby mogły być zastosowane do rozwiązywania problemów praktycznych, z wyjątkiem pewnych najprostszych przypadków. Zatem, istnieje potrzeba wprowadzania pewnych przybliżeń. Przede wszystkim, możemy poszukać górnych i dolnych ograniczeń na potencjał makroskopowy  $J_0(\mathbf{E})$ . W tym celu założymy, że  $J_{per}(\mathbf{E})$  oznacza potencjał makroskopowy materiału osłabionego periodycznym rozkładem szczelin. Wówczas  $J_0(\mathbf{E}) \geq J_{per}(\mathbf{E})$ , a poprzez dualność  $J_{per}^*(\Sigma) \leq J_0^*(\Sigma)$ . Innym sposobem na przybliżenie potencjału makroskopowego  $J_0(\mathbf{E})$ , byłoby rozpatrywanie funkcji korelacyjnych rozkładu szczelin. Zagadnienia takie pozostają zagadnieniami otwartymi.

## Rozdział 7

# Przykłady wpływu mikrostruktury na własności efektywne

W tym rozdziale przedstawiono przykłady obliczeniowe wpływu mikrostruktury na własności efektywne kompozytów sprężystych (7.1)-(7.3) oraz piezoelektrycznych (7.4)-(7.5).

W punkcie (7.1) pokażemy, w jaki sposób rozkład wąskich otworów prostokątnych (zagadnienie dwuwymiarowe) w izotropowej osnowie sprężystej związany jest z makroskopową anizotropią kompozytu. Procedury numeryczne budowane będą w oparciu o tzw. homogenizację jednorodną, która zakłada, że tensor materiałowy nie zależy od makrozmiennych.

W punkcie (7.2) wykorzystamy własną definicję materiału gradientowego do analizy zmiany profilu fal sprężystych przechodzących przez warstwę z materiału gradientowego. W tym punkcie posłużono się rezultatami tzw. homogenizacji niejednorodnej, w której tensor materiałowy zależy od zmiennej makroskopowej.

Homogenizacja reiterowana, czyli metoda homogenizacji uwzględniająca różne poziomy mikrostruktury, pozwoli wyznaczyć w punkcie (7.3), makroskopowe własności kości zbitiej. Niezbędna będzie znajomość izotropowych własności kolagenu i hydroksyapatytu oraz właściwe modelowaniu geometrii poszczególnych poziomów struktury rzeczywistej kości. Otrzymane wyniki, wykorzystujące własne, proste procedury numeryczne są bliższe wynikom doświadczeń, niż obliczenia MES uzyskane przez innych autorów, por. Tab. 7.1.

W punkcie (7.4) zilustrujemy wpływ parametrów geometrycznych pewnej struktury warstwowej na wybrane własności piezoelektryczne, w szczególności na elektromechaniczny tensor sprzężenia kompozytu. Zastosujemy opracowane w tym celu procedury numeryczne umożliwiające wyznaczanie własności dwufazowych kompozytów piezoelektrycznych periodycznych o geometrii: osnowa – prostopadłościennie wtrącenia. W szczególności, procedury te umożliwiają wyznaczenie własności efektywnych dla kompozytów warstwowych i włóknistych. Możliwość analizowania wpływu parametrów mikrostrukturalnych na wielkość stałych makroskopowych w kompozycie jest istotna przy ocenie wydajności urządzeń piezoelektrycznych.

W ostatnim punkcie (7.5) tego rozdziału podamy postać prawa konstytutywnego dla pewnego, nieliniowego fizycznie, dwufazowego kompozytu piezoelektrycznego. W istniejącej literaturze autorka nie znalazła podobnych wyników badań.

## 7.1. Mikroszczeliny w strukturze warstwowej

W pewnej klasie materiałów sprężystych początkowa faza zniszczenia związana jest z pojawieniem się dużej liczby mikropęknięć. Zjawisko to można zaobserwować gołym okiem jako mętnienie (utrata przezroczystości) polietylenowego pręta zginanego kilkukrotnie. Jeśli rozkład pęknięć jest „gęsty” (w pewnym sensie), makroskopowe własności takiego materiału można opisywać przy pomocy metod homogenizacji. Homogenizacja pozwala przewidzieć zachowanie się materiału, poprzez zastąpienie „niejednorodności” – w tym przypadku mikropęknięć – litym materiałem o własnościach różnych od własności osnowy. Metody homogenizacji były już wcześniej stosowane do opisu „mikrospekanych” periodycznie materiałów i płyt sprężystych, por. monografię Lewińskiego i Telegi [101] oraz cytowaną w niej literaturę. Twierdzenia matematyczne dotyczące określania efektywnych własności sprężystych osnowy osłabionej losowym rozkładem mikroszczelin z warunkami Signorini’ego na brzegach nacięć podane są w niniejszej rozprawie w Rozdziale 6. Efektywny ośrodek pracuje wtedy jak materiał nieliniowy, w szczególności prawo konstytutywne łączące naprężenie i odkształcenie jest odcinkami liniowe.

Ten podrozdział zawiera wyniki opublikowane w pracy [77]. Wyznamy w nim makroskopowe anizotropowe własności sprężyste spowodowane periodycznym rozkładem szczelin w materiale izotropowym. Szczeliny w tym przypadku modelowane są jako wąskie prostokątne otwory. Posłużymy się własnym programem umożliwiającym rozwiązanie tzw. zagadnienia na komórce jednostkowej, patrz Dodatek D.3. Wykorzystane będą również formuły opisujące laminowaną strukturę o dowolnym typie niejednorodności wyprowadzone w Rozdziale 4. Formuły te opisują zarówno struktury periodyczne jak i losowe.

### Anizotropia spowodowana rozkładem szczelin

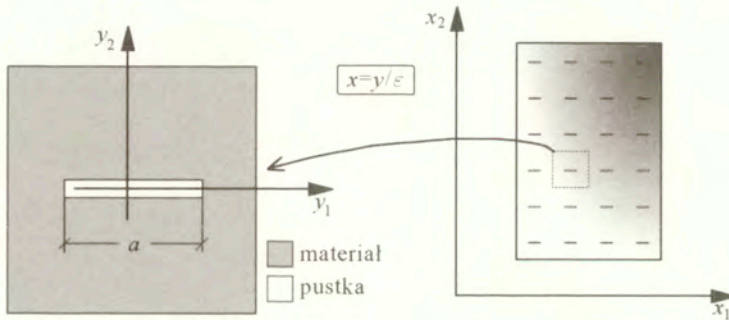
Zacniemy od opisu efektywnego sprężystego zachowania się materiału gęsto spekanego. Aby uzyskać postać tensora stałych sprężystych rozwiązujemy zagadnienie homogenizacji periodycznej. W badanym przypadku, tensor ten dany jest następującą formułą:

$$C_{ijmn}^h = \langle C_{ijmn} \rangle + \left\langle C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{mn}}{\partial y_q} \right\rangle. \quad (7.1)$$

W powyższej zależności  $Y$ -periodyczne funkcje  $\chi_p^{mn}$  są jednoznacznymi, z dokładnością do stałych, rozwiązaniami następującego zagadnienia na komórce  $Y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( C_{ijmn} \frac{\partial}{\partial y_n} (\chi_m^{pq} + \delta_m^p y_q) \right) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y. \quad (7.2)$$

Elementarna jednostkowa komórka periodyczności przedstawiona jest na Rys. 7.1.



Rysunek 7.1. Komórka elementarna

Parametr  $a$  oznacza bezwymiarową długość pojedynczej szczeliny. Szczelina jest modelowana jako cienki prostokąt. Stosunek boków prostokąta wynosi w obliczeniach 0.01.

Po rozwiązaniu numerycznym układu równań (7.2) i wstawieniu otrzymanych wartości funkcji  $\chi_p^{mn}$  do formuły (7.1), otrzymano wartości składowych efektywnego tensora sprężystości  $C_{ijmn}^h$ . Tensor ten opisuje anizotropię wymuszoną rozkładem szczelin. Tabela 7.1 podaje wartości technicznych stałych materiałowych dla różnych długości szczelin. Stałe te wyznacza się z ilorazów odpowiednich składowych tensora sztywności i podatności w sposób następujący:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{(\mathbf{C}^{-1})_{11}}, & E_2 &= \frac{1}{(\mathbf{C}^{-1})_{22}}, & E_3 &= \frac{1}{(\mathbf{C}^{-1})_{33}}, \\ \nu_{12} &= -\frac{(\mathbf{C}^{-1})_{12}}{(\mathbf{C}^{-1})_{22}}, & \nu_{21} &= -\frac{(\mathbf{C}^{-1})_{12}}{(\mathbf{C}^{-1})_{11}}, & \nu_{13} &= -\frac{(\mathbf{C}^{-1})_{13}}{(\mathbf{C}^{-1})_{33}}, \\ \nu_{31} &= -\frac{(\mathbf{C}^{-1})_{13}}{(\mathbf{C}^{-1})_{11}}, & \nu_{23} &= -\frac{(\mathbf{C}^{-1})_{23}}{(\mathbf{C}^{-1})_{33}}, & \nu_{32} &= -\frac{(\mathbf{C}^{-1})_{23}}{(\mathbf{C}^{-1})_{22}}, \end{aligned}$$

$$G_{12} = \frac{1}{(\mathbf{C}^{-1})_{66}}, \quad G_{13} = \frac{1}{(\mathbf{C}^{-1})_{55}}, \quad G_{23} = \frac{1}{(\mathbf{C}^{-1})_{44}}.$$

Jak zwykle w literaturze, moduły Younga oznaczamy literą  $E$ , współczynniki Poissona literą  $\nu$ , a moduły Kirchhoffa  $G$ .

Gdy długość szczeliny  $a$  dąży do jedności odpowiednie stałe dążą do zera.

**Tabela 7.1.** Zależność technicznych stałych materiałowych od długości szczeliny

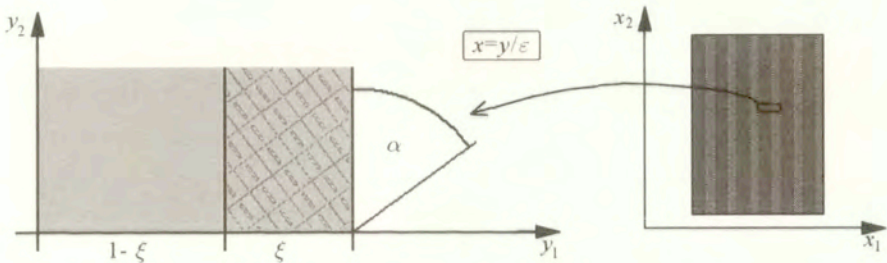
$a$	0.8	0.9	0.95	0.99	0.9999
$E_1$	0.725	0.724	0.723	0.723	0.723
$E_2$	0.722	0.713	0.698	0.599	0.032
$E_3$	0.725	0.724	0.723	0.723	0.723
$\nu_{12}$	0.458	0.453	0.444	0.381	0.020
$\nu_{21}$	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
$\nu_{13}$	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
$\nu_{31}$	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
$\nu_{23}$	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
$\nu_{32}$	0.458	0.453	0.444	0.381	0.020
$G_{12}$	0.242	0.231	0.211	0.126	0.002
$G_{13}$	0.248	0.248	0.248	0.248	0.247
$G_{23}$	0.242	0.231	0.212	0.126	0.002

Rozpatrując proste przykłady pokażemy wpływ anizotropii spowodowanej rozkładem mikroszczelin. Najpierw policzymy efektywne stałe materiału osłabionego równomiernym rozkładem szczelin. Własności te są transwersalnie izotropowe. Poniżej podajemy porównanie stałych technicznych materiału osłabionego (ze szczelinami o długości 0.9) ze stałymi materiału nie osłabionego (polietylen).

Następnie wprowadzimy strukturę warstwową poprzez laminację w kierunku osi  $x_1$ . Kolejne warstwy będą utworzone z materiału litego i osłabionego szczelinami ułożonymi pod dowolnym kątem do osi  $x_1$ , por. Rys. 7.2.

**Tabela 7.2.** Porównanie stałych technicznych materiału osłabionego szczelinami ze stałymi materiału litego

	$E_1 = E_2$	$E_3$	$\nu_{12} = \nu_{21}$	$\nu_{13} = \nu_{23}$	$\nu_{31} = \nu_{32}$	$G_{12}$	$G_{13} = G_{23}$
materiał spękany	0.56	0.72	0.56	0.46	0.36	0.18	0.12
lity	0.73	0.73	0.46	0.46	0.46	0.50	0.50



**Rysunek 7.2.** Struktura warstwowa materiału spękanego

W celu wyznaczenia stałych laminatu posłużymy się następującymi wzorami:

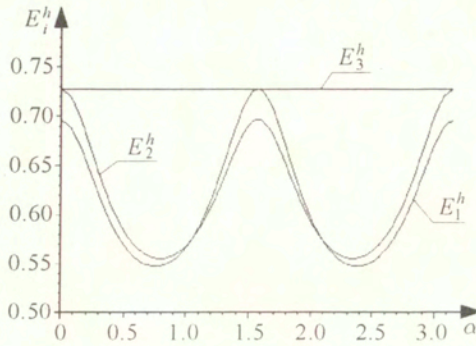
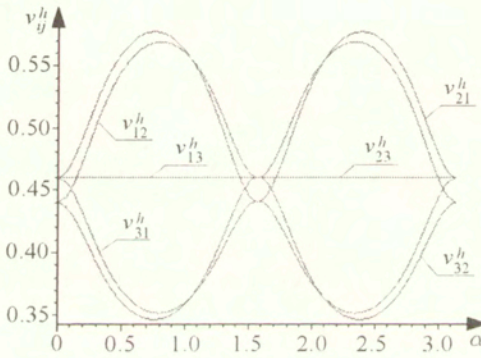
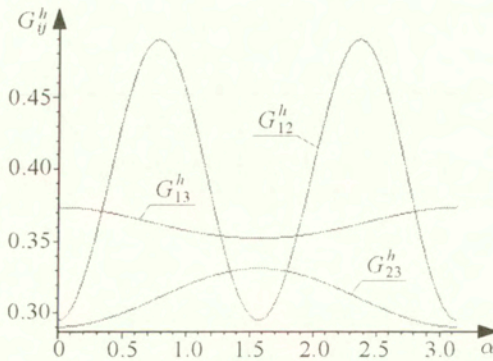
$$C_{ijpq}^h = \langle C_{ijpq}(y_1) \rangle - \langle C_{ijk1}(y_1) S_{km} C_{1mpq}(y_1) \rangle + \langle C_{ijk1}(y_1) S_{kr} \rangle \langle S_{rm} \rangle^{-1} \langle S_{mn} C_{1npq}(y_1) \rangle,$$

gdzie  $S_{jk} = S_{jk}(y_1)$  jest macierzą odwrotną do macierzy  $(C_{1jk1})$ . W rezultacie otrzymujemy pełny anizotropowy tensor Hooke'a, w którym pojawiają się nowe stałe materiałowe  $E_i^h$ ,  $\nu_{ij}^h$  oraz  $G_{ij}^h$ . Podobnie jak poprzednio, wartości  $E_i^h$  i  $G_{ij}^h$  podane są w GPa. Wszystkie znalezione stałe techniczne są funkcjami długości szczelin  $a$ , udziału materiału litego  $1 - \xi$  oraz kąta  $\alpha$  pomiędzy osią anizotropii i osią  $x_1$ .

Na rysunkach 7.3-7.5 przedstawiono zależność efektywnych technicznych stałych materiałowych od kąta  $\alpha$ , dla  $\xi = 0.5$ .

Zwróćmy uwagę, że współczynniki Poissona  $\nu_{13}^h$  i  $\nu_{23}^h$  nie zależą od kierunku rozkładu mikroszczelin.



Rysunek 7.3. Efektywne moduły Younga w zależności od zmiany kąta  $\alpha$ Rysunek 7.4. Efektywne współczynniki Poissona w zależności od zmiany kąta  $\alpha$ Rysunek 7.5. Efektywne moduły ścinania w zależności od zmiany kąta  $\alpha$

### Rozkład mikroszczelin minimalizujący (maksymalizujący) naprężenia

Aby zilustrować wpływ rozkładu mikroszczelin na różne stany naprężenia w elemencie kompozytu wyznaczmy ciśnienie hydrostatyczne

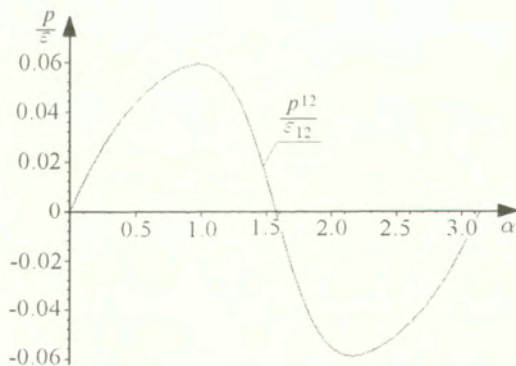
$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

i zredukowane naprężenia (Hubera-Misesa)

$$\sigma^0 = \sqrt{\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D},$$

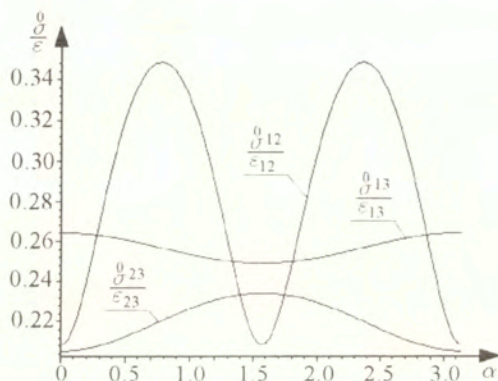
gdzie  $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$  oznacza dewiator tensora naprężenia.

Ciśnienie hydrostatyczne i zredukowane naprężenia wyznaczono dla różnych stanów odkształcenia. Na wykresach wprowadzono następujące oznaczenia. Wielkość  $p^{12}$  oznacza ciśnienie hydrostatyczne otrzymane po zadaniu tylko jednej niezerowej stanu odkształcenia  $\varepsilon_{12}$ . Podobnie, wielkość  $\sigma^{0ij}$  oznacza naprężenie zredukowane otrzymane po zadaniu tylko jednej niezerowej stanu odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$ . Na wykresach przedstawiono ciśnienie hydrostatyczne i zredukowane naprężenia w zależności od kąta  $\alpha$  (orientacja ułożenia szczelin, patrz Rys. 7.2). Podobnie, jak rozpatrywane uprzednio stałe materiałowe, wielkości  $\frac{p}{\varepsilon}$  oraz  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  są podane w GPa.



**Rysunek 7.6.** Ciśnienie hydrostatyczne w zależności od zmiany kąta  $\alpha$

Z rysunków, Rys. 7.6 i Rys. 7.7, można odczytać przy jakiej orientacji szczelin ciśnienie hydrostatyczne oraz zredukowane naprężenia osiągają wartości najmniejsze i największe. Na przykład, jeżeli szczeliny są prostopadłe lub równoległe do warstw, ciśnienie hydrostatyczne przy niezerowym stanie



Rysunek 7.7. Zredukowane naprężenia w zależności od zmiany kąta  $\alpha$

odkształcenia  $\varepsilon_{12}$  przyjmuje wartość równą zero. Maksimum osiąga dla kąta  $\frac{\pi}{3}$ , gdy element kompozytu jest ściskany, zaś minimum dla kąta  $\frac{2\pi}{3}$ , gdy element kompozytu jest rozciągany. Uzyskane wartości zredukowanych naprężeń mogą być ważne przy analizie wytrzymałości materiału kompozytowego wstępnie splekanego.

Wyniki przedstawione na Rys. 7.3-7.7 otrzymano przy pomocy obliczeń pół-analitycznych procedurami napisanymi w programie Maple. Porównano je z wynikami, w których te same związki liczono programem MES (z liczbą elementów większą od 2000 na komórce elementarnej), por. [24, 25]. Okazuje się, że zgodność liczbowa wyników obliczeń w obu metodach jest zaskakująco dobra (do czterech cyfr znaczących). Główną zaletą prezentowanego tutaj podejścia jest szybkość obliczeń, jest więc możliwość dokonania analizy dużej liczby przypadków w stosunkowo krótkim czasie. Prostota obliczeń ułatwia dyskusję zachowania się materiału i jego optymalizacji ze względu na parametry zarówno geometryczne, jak i mechaniczne.

## 7.2. Ciągły model materiału gradientowego

Rozważmy dwa jednorodne materiały sprężyste o własnościach  $c_{ijkl}^{(1)}$  i  $c_{ijkl}^{(2)}$  (tensory Hooke'a), oraz gęstościach  $\rho^{(1)}$ ,  $\rho^{(2)}$ . Przyjmijmy, że materiał (1) zajmuje półprzestrzeń  $x_3 \leq 0$ , a materiał (2) półprzestrzeń  $x_3 \geq 1$ . Obie te fazy są rozdzielone warstwą o jednostkowej szerokości. Warstwa rozdzielająca jest niejednorodna, zarówno na poziomie makroskopowym jak i mikroskopowym. Jej własności są określone funkcjami dwóch zmiennych: skalarnej,

makroskopowej  $x_3$  i wektorowej, mikroskopowej  $\mathbf{y} \in Y$ , gdzie  $Y$  jest komórką periodyczności. W celu wyznaczenia makroniejednorodności warstwy stosujemy metodę homogenizacji niejednorodnej. Makroskopowe własności warstwy są teraz ciągłymi funkcjami jednej zmiennej  $x_3$ , oznaczającej głębokość warstwy  $0 \leq x_3 \leq 1$ . Makroskopowy tensor Hooka i gęstość są można wyznaczyć stosując procedury niejednorodnej homogenizacji. Otrzymane wzory wynikają z twierdzenia podanego w Rozdz. 3.3., wzór (3.51). Formuły te uwzględniają udział objętościowy poszczególnych faz oraz geometryczną konfigurację faz. Udział objętościowy pierwszej fazy, o własnościach  $c_{ijkl}^{(1)}$ , jest oznaczany symbolem  $\xi(x_3)$ . Udział objętościowy drugiej fazy, (o własnościach  $c_{ijkl}^{(2)}$ ), jest więc równy  $1 - \xi(x_3)$ . W ogólnym przypadku, zależność  $\xi(x - 3)$  może być dowolną funkcją zmiennej  $x_3$ . Dalej założymy konkretną postać tej zależności.

Zdefiniujemy FGM (funkcjonalny materiał gradientowy) jako trójwymiarowe nieskończone ciało o tensorze sprężystości

$$C_{ijkl}(x_3) = \begin{cases} c_{ijkl}^{(1)} & \text{dla } x_3 \leq 0 \\ c_{ijkl}^h(x_3) & \text{dla } 0 \leq x_3 \leq 1 \\ c_{ijkl}^{(2)} & \text{dla } x_3 \geq 1 \end{cases} \quad (7.3)$$

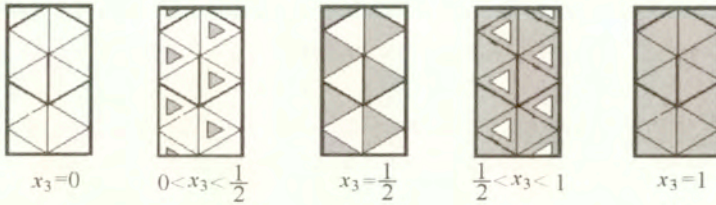
i gęstości zadanej funkcją:

$$\rho(x_3) = \begin{cases} \rho^{(1)} & \text{dla } x_3 \leq 0 \\ \langle \rho \rangle(x_3) & \text{dla } 0 \leq x_3 \leq 1 \\ \rho^{(2)} & \text{dla } x_3 \geq 1 \end{cases}, \quad (7.4)$$

gdzie  $C_{ijkl}^h(x_3)$  i  $\rho(x_3)$  są ciągłymi funkcjami zmiennej  $x_3$  oraz  $\langle \rho \rangle = \rho^{(1)}\xi(x_3) + \rho^{(2)}(1 - \xi(x_3))$ . Ograniczymy się do przypadku, gdy geometryczna konfiguracja faz na mikro poziomie jest ustalona. Tak jest w przypadku mikrowarstwowych struktur zdefiniowanych poniżej.

*Uwaga 7.1.* Pokażemy konstrukcję mikrogeometrii materiału gradientowego, która prowadzi do makroskopowych izotropowych własności sprężystych w płaskim stanie odkształcenia. Zauważmy, że jeżeli mikrostruktura jest periodyczna, to wówczas jest ona szczególnym przypadkiem struktury losowej (por. Rozdz. 6, Przykład 6.1). Przypomnijmy, że wtedy uśrednianie po ансамblu oznacza uśrednianie po komórce periodyczności. W zgodzie z definicją (7.3),

jeżeli  $c_{ijkl}^{(1)}$  i  $c_{ijkl}^{(2)}$  są izotropowe, to materiał gradientowy jest izotropowy, o ile tensor  $c_{ijkl}^{(h)}$  jest izotropowy. Taka sytuacja pojawia się np. dla szczególnej geometrii przejścia od fazy do fazy pokazanej na Rys. 7.8.



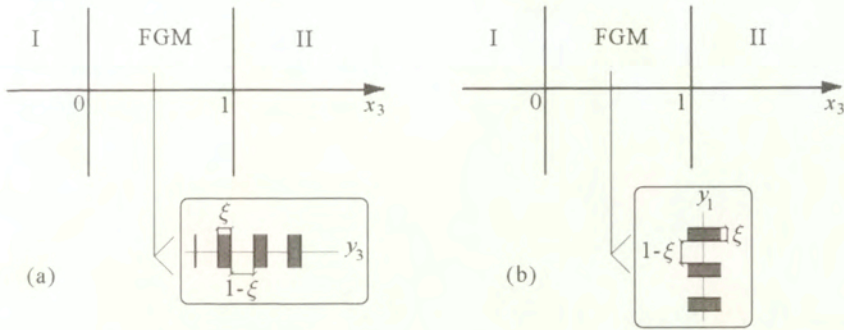
Rysunek 7.8. Przykład izotropowego materiału gradientowego

Z powodu geometrycznych symetrii, dla każdego ustalonego  $x_3$ , mamy do czynienia z izotropią sprężystą – mamy bowiem 3 osie symetrii na płaszczyźnie  $\{x_1, x_3\}$ . Taka konfiguracja zamiany fazy (1) w (2) jest też symetryczna topologicznie. Oznacza to, że zaczynając od małych wartości  $x_3 > 0$ , pojawiają się wtrącenia materiału (2) w geometrycznie spójnej osnowie wypełnionej materiałem (1). Dla większych wartości  $x_3$  ich udział objętościowy rośnie i w punkcie  $x_3 = \frac{1}{2}$  (oś symetrii) mamy mikrostrukturę geometrycznie nierozróżnialnych faz. Następnie pojawia się spójna faza (2) i wtrącenia z fazy (1), aż do pełnego wypełnienia płaszczyzny fazą (2). W takim przypadku materiał w warstwie przejścia jest makroskopowo izotropowy, ale niejednorodny. Przykład ten pokazuje, że precyzyjna definicja własności efektywnych, makroskopowych prowadzi do jednoznacznego wyniku. Oczywiście, przy założeniu określonego sposobu tworzenia się mikrostruktury dla każdego, dowolnie małego  $\varepsilon$ . Jeśli przez mikrostrukturę rozumiemy strukturę z zachowanym rozmiarem niejednorodności, to oczywiste jest, że sens „uśredniania po ансамblu” nie jest precyzyjny i może prowadzić do niejednoznacznych konkluzji. Autor pracy [123] dowodzi tezy o konieczności modelowania FGM (warstwy przejścia) przez wprowadzenie materiału sprężysto anizotropowego, przy tych samych założeniach o izotropii obu faz.

### Kompozyty mikrowarstwowe

Rozpatrzmy mikrowarstwową strukturę warstwy przejścia. Dla ustalonego  $x_3$  mamy materiał sprężysty, którego własności makroskopowe zostały wyznaczone metodą homogenizacji periodycznej struktury warstwowej. Mikroperiodyczna struktura warstwowa oznacza, że własności materiału niejednorodnego są

opisane przez współczynniki sprężystości odcinkami stałe i będące funkcjami tylko jednej mikrozmiennej.



**Rysunek 7.9.** Mikrowarstwowy materiał gradientowy: (a) mikrowarstwy równoległe do warstwy przejścia, (b) mikrowarstwy prostopadłe do warstwy przejścia

Rozważmy najpierw przypadek, w którym mikrozmianą jest zmienna  $y_3$  w kierunku prostopadłym do warstw. Oznacza to, że dla periodycznej struktury (Rys. 7.9a)

$$c_{ijkl}(y_3) = \begin{cases} c_{ijkl}^{(1)} & \text{dla } y_3 \in (0, \xi), \\ c_{ijkl}^{(2)} & \text{dla } y_3 \in (\xi, 1). \end{cases}$$

W przypadku losowym, stochastyczne współczynniki są losowymi funkcjami zależnymi od zmiennej  $y_3$  (por. przykłady jednowymiarowe w Rozdziale 6). Tak więc, kompozyt jest zbudowany z dwóch różnych materiałów. Współczynniki makroskopowe w obu przypadkach (periodycznym i stochastycznym) dane są wzorami

$$c_{ijkl}^h = \langle c_{ijkl} \rangle - \xi(1 - \xi)(\tilde{B}^{-1})^{mn} [c_{m3ij}] [c_{kln3}], \quad (7.5)$$

gdzie

$$\langle c_{ijkl} \rangle = \xi c_{ijkl}^{(1)} + (1 - \xi) c_{ijkl}^{(2)},$$

a  $\xi$  jest udziałem objętościowym fazy (1). Przypomnijmy oznaczenie skoku własności materiałowych

$$[c_{ijkl}] = c_{ijkl}^{(2)} - c_{ijkl}^{(1)},$$

gdzie

$$\tilde{B}_{mn} = \xi c_{m3n3}^{(2)} - (1 - \xi) c_{m3n3}^{(1)}.$$

Jeżeli warstwy są izotropowe to mamy

$$c_{ijmn}^{(1)} = \mu^{(1)} (\delta_{jm} \delta_{in} + \delta_{jn} \delta_{im}) + \lambda^{(1)} \delta_{ij} \delta_{mn},$$

$$c_{ijmn}^{(2)} = \mu^{(2)} (\delta_{jm} \delta_{in} + \delta_{jn} \delta_{im}) + \lambda^{(2)} \delta_{ij} \delta_{mn},$$

gdzie  $\lambda^{(i)}$  oraz  $\mu^{(i)}$  dla  $i = 1, 2$  to stałe Lamé'go fazy (1) i (2). Makroskopowe współczynniki mają wtedy następującą postać:

$$\begin{aligned} c_{3333}^h &= \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{\xi(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) + (1 - \xi)(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}, \\ c_{3322}^h &= c_{1133}^h = \frac{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + 2\mu^{(1)}\lambda^{(2)} + 2(1 - \xi)(\lambda^{(1)}\mu^{(2)} - \lambda^{(2)}\mu^{(1)})}{\xi(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) + (1 - \xi)(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}, \\ c_{3232}^h &= c_{1313}^h = \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\xi\mu^{(1)} + (1 - \xi)\mu^{(2)}}, \\ c_{2121}^h &= (1 - \xi)\mu^{(1)} + \xi\mu^{(2)}, \\ c_{2222}^h &= c_{1111}^h = \xi(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) + (1 - \xi)(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) + \\ &\quad - \frac{\xi(1 - \xi)(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)})^2}{\xi(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) + (1 - \xi)(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}, \\ c_{2211}^h &= \xi\lambda^{(2)} + (1 - \xi)\lambda^{(1)} - \frac{\xi(1 - \xi)(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)})^2}{\xi(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) + (1 - \xi)(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Zauważmy, że w powyższych wzorach udział objętościowy fazy (1)  $\xi$  zależy od  $x_3$ . Jeżeli znamy tę zależność, to mamy explicite formuły dla materiału gradientowego (FGM) zdefiniowanego przez (7.3), (7.4).

W analogiczny sposób można opisać przypadek gdy mikrowarstwy są prostopadłe do warstwy przyścia (Rys. 7.9b).

### Fale płaskie w materiale gradientowym

Równania ruchu w materiale gradientowym (FGM) mają postać

$$(C_{ijmn}(x_3)u_{m,n})_{,j} = (\rho^{(1)}\xi(x_3) + \rho^{(2)}(1 - \xi(x_3))) u_{i,tt}, \quad (7.7)$$

gdzie zmienna  $t$  oznacza zmienną czasową. Jeżeli założymy  $\mathbf{u} = (0, 0, u_3)$  i  $u_3 = u_3(x_3)e^{i\omega t}$ , to otrzymamy równania podłużnej, harmoniczej fali płaskiej

$$\frac{d}{dx_3} C_{3333}(x_3) \frac{d}{dx_3} u_3(x_3) + \left( \rho^{(1)} \xi(x_3) + \rho^{(2)} (1 - \xi(x_3)) \right) \omega^2 u_3(x_3) = 0. \quad (7.8)$$

Z założenia, długość tej fali jest nieskończenie duża w porównaniu do skali mikroniejednorodności. Jeżeli przyjmiemy  $\mathbf{u} = (u_1, 0, 0)$  lub  $\mathbf{u} = (0, u_2, 0)$  i  $u_1 = u_1(x_3)e^{i\omega t}$  lub  $u_2 = u_2(x_3)e^{i\omega t}$ , wtedy otrzymamy poprzeczne fale płaskie

$$\frac{d}{dx_3} C_{3113}(x_3) \frac{d}{dx_3} u_1(x_3) + \left( \rho^{(1)} \xi(x_3) + \rho^{(2)} (1 - \xi(x_3)) \right) \omega^2 u_1(x_3) = 0, \quad (7.9)$$

$$\frac{d}{dx_3} C_{3223}(x_3) \frac{d}{dx_3} u_2(x_3) + \left( \rho^{(1)} \xi(x_3) + \rho^{(2)} (1 - \xi(x_3)) \right) \omega^2 u_2(x_3) = 0. \quad (7.10)$$

W celu uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że  $\xi(x_3) = 1 - x_3$ , co oznacza, że udział objętościowy w fazie przejścia zmienia się liniowo. W przypadku gdy mikrowarstwy są prostopadłe do osi  $x_3$ , współczynniki materiałowe w równaniach (7.9), (7.10), (7.8) są dane związkami (7.5).

Rozpatrzmy dodatkowo przypadek, gdy mikrowarstwy są prostopadłe do osi  $x_1$ . Wtedy współczynniki materiałowe w równaniach (7.9), (7.10), (7.8) są dane związkami

$$\begin{aligned} C_{1313}^h &= \frac{\mu^{(1)} \mu^{(2)}}{(1 - \xi) \mu^{(1)} + \xi \mu^{(2)}}, \\ C_{2323}^h &= \xi \mu^{(1)} + (1 - \xi) \mu^{(2)}, \\ C_{3333}^h &= (1 - \xi)(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}) + \xi(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) + \\ &\quad - \frac{\xi(1 - \xi)(\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)})^2}{(1 - \xi)(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\xi(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

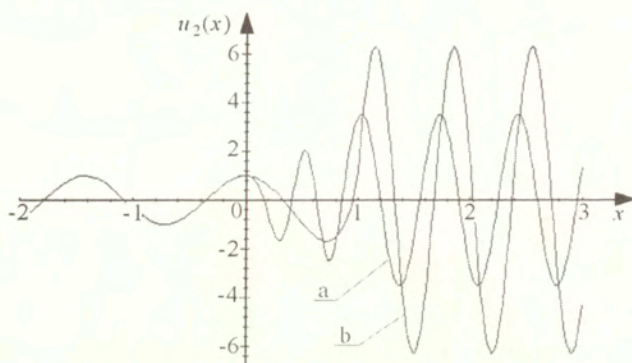
Znajdziemy rozwiązanie równań (7.8), (7.9), (7.10) w przypadku, gdy fala padająca ma jednostkową amplitudę i propaguje się z materiału o własnościach  $\lambda^{(1)}$ ,  $\mu^{(1)}$  i  $\rho^{(1)}$ . Fala w materiale rzeczywistym oczywiście ulega odbiciu, ale w naszym modelu niejednorodności są „rozmyte”, a warstwa gradientowa jest efektywnie zastąpiona materiałem o własnościach zmieniających się w sposób ciągły. W modelu tym nie ma odbicia fali, więc przechodzi ona



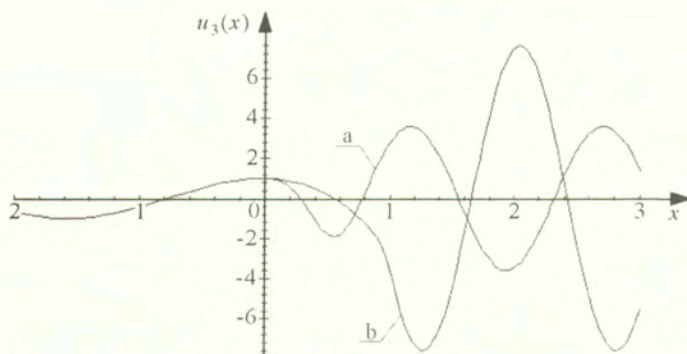
przez niejednorodną warstwę (FGM), a następnie wchodzi do jednorodnego materiału o własnościach  $\lambda^{(2)}$ ,  $\mu^{(2)}$  i  $\rho^{(2)}$ .

W obliczeniach przyjęto:  $\lambda^{(1)} = 131$  GPa,  $\mu^{(1)} = 46$  GPa,  $\rho^{(1)} = 8.9$  s<sup>2</sup>GPa/m<sup>2</sup> (miedź) i  $\lambda^{(2)} = 3.4$  GPa,  $\mu^{(2)} = 1.2$  GPa,  $\rho^{(2)} = 9.6$  s<sup>2</sup>GPa/m<sup>2</sup> (polistyren).

Wyniki obliczeń pokazano na Rys. 7.10 i Rys. 7.11. Na rysunkach tych jednostką długości jest grubość warstwy FGM.



**Rysunek 7.10.** Fale poprzeczne dla różnych mikrostruktur: a – warstwowanie prostopadłe do osi  $x_3$ , b – warstwowanie prostopadłe do osi  $x_1$

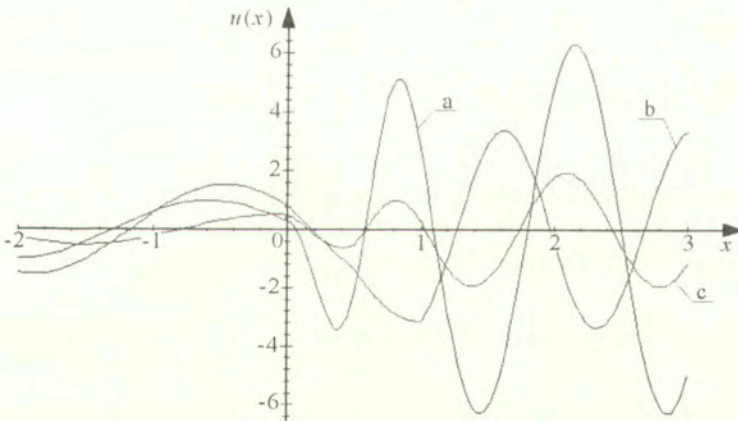


**Rysunek 7.11.** Fale podłużne dla różnych mikrostruktur: a – warstwowanie prostopadłe do osi  $x_3$ , b – warstwowanie prostopadłe do osi  $x_1$

Wprowadzimy jeszcze dwa modele „dyskretne”, w których zamiast jednej warstwy gradientowej mamy przejście od fazy do fazy realizowane przez skokową, nieciągłą zmianę własności materiału w warstwie. W obu tych dyskretnych

modelach warstwa przejścia składa się z dwóch jednorodnych warstw. Pierwszy model został nazwany „średnim” i drugi „zhomogenizowanym”. W modelach dyskretnych przechodzące fale doznają również odbicia od granicy warstw dyskretnych. W obu przypadkach wyznaczamy rozwiązania w sposób analityczny. W „średnim” modelu dyskretnym różnica między współczynnikami materiałowymi jednorodnych warstw jest taka sama (równa 1/3 różnicy stałych dla miedzi i polistyrenu). W „zhomogenizowanym” modelu dyskretnym własności warstw, w warstwie przejścia, obliczone są przy pomocy procedury homogenizacyjnej przy założeniu, że w pierwszej warstwie przejścia udział objętościowy materiału (1) wynosi 3/4, a w drugiej warstwie 1/4. Gęstość obliczamy korzystając z zależności (7.4), zaś stałe sprężyste – jako stałe zhomogenizowane dla mikrostruktury warstwowej o warstwach prostopadłych do kierunku propagacji fali.

Rozwiązania modelu ciągłego FGM i dwóch różnych modeli dyskretnych warstwy przejścia są pokazane na Rys. 7.12. Widać odbicie fali. Na wykresie po lewej stronie warstwy fala odbita nakłada się na falę padającą i obserwujemy zmieniony jej profil.



**Rysunek 7.12.** Fale poprzeczne dla modelu ciągłego i 2 różnych dwuwarstwowych modeli dyskretnych: a – model ciągły, b – „średni” model dyskretny, c – „zhomogenizowany” model dyskretny

## Podsumowanie

Powyżej pokazano, w jaki sposób zaproponowany model FGM umożliwia analizę wpływu geometrycznych charakterystyk warstwy przejścia od fazy do fazy na fale przechodzącą przez tą warstwę. Przyjęto, że zarówno zmiana udziału

objętościowego faz, jak i gęstości materiałów są ustalone. Wyraźnie widoczne są różnice w profilach fali, gdy zmieniamy geometrię mikrostruktury w warstwie przejścia. Obserwacja ta może być wykorzystana do detekcji charakteru mikrostruktury w badaniach nieniszczących, w sytuacji, gdy niedostępna jest inna technika obserwacji mikrostruktury. Model FGM bardziej realistyczny niż mikrowarstwowanie może być zbudowany przy użyciu formuł na efektywne moduły sprężystości wyprowadzone w reiterowanej homogenizacji przy dowolnej geometrii mikrostruktury oraz przez zamianę liniowych relacji między udziałem objętościowym i głębokością warstwy związkami nieliniowymi. Koncepcja modelu warstwy przejścia od fazy do fazy poprzez formuły niejednorodnej homogenizacji jest oryginalną ideą autorki prezentowaną na konferencji Solmech 98 i opublikowaną w materiałach konferencyjnych [76]. Koncepcja ta może być stosowana do mikrostruktur o wyraźnie rozdzielonych skalach „mikro” i „makro”.

### 7.3. Modelowanie kości zbitej

Celem tego rozdziału jest pokazanie w jaki sposób modelowanie własności sprężystych hierarchicznej struktury kości zbitej poprzez tzw. metodę reitrowanej homogenizacji prowadzi do wyników zgodnych zarówno z eksperymentem, jak i z obliczeniami innych autorów, por. [10, 20]. Przedstawione poniżej wyniki były opublikowane w pracy [61].

Wiadomo, że kość zbita ma hierarchiczną, wielopoziomową budowę. Poniżej uwzględnimy trzy najważniejsze poziomy z punktu widzenia makroskopowych własności mechanicznych, por. [51].

Na najniższym poziomie występuje struktura warstwowa (lamelarna), w której poszczególne warstwy są zbudowane z włókien kolagenowych umieszczonych w krystalicznej, hydroksyapatytowej osnowie. W pojedynczej warstwie wszystkie włókna mają tę samą orientację. Sąsiadujące ze sobą warstwy (lamelle) różnią się orientacją włókien. Różne układy lameli tworzą tzw. architektury.

Następny poziom mikrostruktury zawiera strukturę osteonu oraz strukturę materiału kostnego, zbudowanego ze starych, bardziej zmineralizowanych osteonów (ang. interstitial system). Osteon zbudowany jest z koncentrycznie ułożonych warstw (lameli) otaczających kanał Haversa.

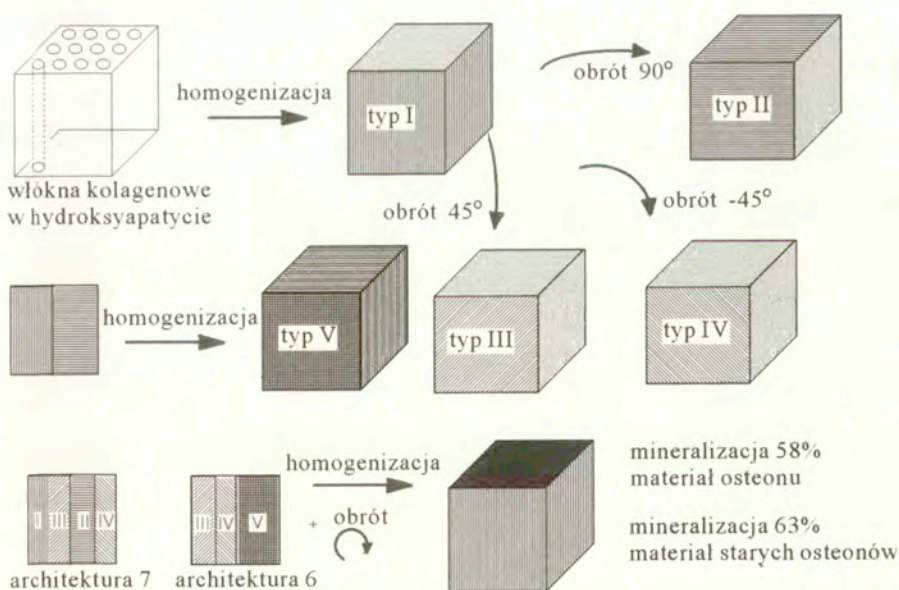
Na najwyższym poziomie struktury kość zbita traktowana jest jako kompozyt dwuskładnikowy, włóknisty, w którym włókna utworzone są z materiału osteonu, a osnowa z materiału starych osteonów. Kierunek ułożenia osteonów jest zgodny z kierunkiem długiej osi kości. Pokażemy zgodność przeprowadzonych obliczeń z wynikami eksperymentu i obliczeniami innych autorów.

### Metoda wyznaczania własności sprężystych kości zbitej

**Krok I.** Wyznaczenie własności efektywnych materiału osteonu i osnowy (starych osteonów)

Najpierw wyznaczamy własności makroskopowe materiału Typu I, który jest kompozytem włóknistym składającym się z włókien o przekroju kołowym zanurzonych w izotropowej osnowie. Wprowadzamy układ współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$ , którego oś  $x_3$  jest równoległa do włókien, patrz. Rys. 7.13. Następnie poprzez obrót włókien w osnowie wokół osi  $x_2$  o kąt:  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$ , otrzymujemy kolejno materiał typu II, III i IV. Nakładając kolejno warstwy materiału Typu I i II otrzymujemy materiał Typu V, por. [51]. Własności tych materiałów opisują tensory, które można otrzymać przez homogenizację i obrót o odpowiedni kąt tensora stałych materiałowych materiału Typu I.

Tworząc kombinacje warstw z materiałów różnych typów otrzymujemy różne architektury zgodnie z [51]. W dalszym ciągu zajmiemy się architekturą 7 (kolejne warstwy, to materiały Typu I, III, II i IV) oraz architekturą 6 (kolejne warstwy, to materiały Typu III, IV, V).



**Rysunek 7.13.** Schemat wyznaczania własności efektywnych litego materiału kości

Zatem wyznaczamy własności materiału o architekturze 7 i 6 (por. Rys. 7.13) stosując wzory homogenizacyjne na wielowarstwową laminację kilku anizotropowych składników (wzór (4.7)). Biorąc pod uwagę, że każda warstwa w trójwarstwowej (architektura 7) lub czterowarstwowej (architektura 6) komórce periodyczności składa się z materiału różnych typów lameli, które szczegółowo będą opisane dalej. W wyniku homogenizacji takiej struktury otrzymujemy anizotropowe własności sprężyste. Ponieważ lamele są koncentrycznie ułożone w rzeczywistym osteonie, to w celu zamodelowania transversalnie izotropowych własności materiału osteonu uśredniamy te własności po wszystkich obrotach wokół osi zgodnej z kierunkiem kanału Haversa, który jest osią symetrii osteonu. W taki sam sposób wyznaczamy własności materiału kostnego, czyli materiału starych osteonów. Różnica pomiędzy własnościami materiału kostnego i materiału osteonów i polega na większym udziale w procesie homogenizacji hydroksyapatytu w starych osteonach czyli tzw. większe zmineralizowanie.

W celu wyznaczenia explicite własności materiału Typu I, czyli pojedynczej lameli, wykorzystujemy formuły Christensena, [49], przytoczone poniżej. Wzory te opisują przybliżone własności kompozytu włóknistego składającego się z włókien o przekroju kołowym zanurzonych w izotropowej osnowie. Włókna są wykonane z kolagenu, osnowa zaś z hydroksyapatytu.

W obliczeniach numerycznych przyjęto następujące stałe materiałowe dla kolagenu ([50]):  $\rho_c = 1.40$ ,  $E_c = E_1 = 1.2$ ,  $\nu_c = \nu_1 = 0.35$  oraz dla hydroksyapatytu:  $\rho_h = 3$ ,  $E_h = E_2 = 114$ ,  $\nu_h = \nu_2 = 0.27$ . Wszystkie stałe sprężyste w tym rozdziale podano w GPa.

Jeżeli  $k$  oznacza zmineralizowanie, czyli stosunek masy hydroksyapatytu do całkowitej masy elementu kości, wtedy udział objętościowy kolagenu  $\xi$  otrzymujemy ze związku

$$\xi = \frac{(1 - k)\rho_h}{k\rho_c + (1 - k)\rho_h} \quad (7.12)$$

Wzory na stałe efektywne otrzymujemy w sposób następujący, por. [49]. Wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \eta_i &= 3 - 4\nu_i, & \lambda_i &= \frac{\nu_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}, & \mu_i &= \frac{E_i}{2 + 2\nu_i}, \\ K_i &= \frac{E_i}{2(1 - 2\nu_i)(\nu_i + 1)}, & k_i &= -\frac{E_i}{3(2\nu_i - 1)}, & i &= 1, 2 \end{aligned}$$

gdzie dla

$$Az^2 + 2Bz + C = 0, \quad \mu_{12} = z\mu_2,$$

przy czym

$$\begin{aligned} A &= 3\xi(1-\xi)^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \eta_1\right) + \\ &\quad + \left(\frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} + \eta_1\eta_2 - \left(\frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} - \eta_1\right)\xi^3\right) \left(\xi\eta_2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) - \frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} - 1\right) \\ B &= -3\xi(1-\xi)^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \eta_1\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} + \xi \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) + 1\right) \left((\eta_2 - 1) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \eta_1\right) - 2 \left(\frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} - \eta_1\right)\xi^3\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\xi(\eta_2 + 1) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \eta_1 + \left(\frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} - \eta_1\right)\xi^3\right), \\ C &= 3\xi(1-\xi)^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \eta_1\right) + \\ &\quad + \left(\frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} + \xi \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) + 1\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \eta_1 + \left(\frac{\eta_2\mu_1}{\mu_2} - \eta_1\right)\xi^3\right). \end{aligned}$$

Ponadto, niech

$$\begin{aligned} E_{33} &= \xi E_1 + (1-\xi)E_2 + 4\xi(1-\xi)\mu_2(\nu_2 - \nu_1)^2 \left(\frac{\mu_2(1-\xi)}{K_1} + \frac{\xi\mu_2}{K_2} + 1\right)^{-1}, \\ \nu_{32} &= \xi\nu_1 + (1-\xi)\nu_2 + \xi(1-\xi)(\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{\mu_2}{K_2} - \frac{\mu_2}{K_1}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\mu_2(1-\xi)}{K_1} + \frac{\xi\mu_2}{K_2} + 1\right)^{-1}, \\ \nu_{31} &= \xi\nu_1 + (1-\xi)\nu_2 + \xi(1-\xi)(\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{\mu_2}{K_2} - \frac{\mu_2}{K_1}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{\mu_2(1-\xi)}{K_1} + \frac{\xi\mu_2}{K_2} + 1\right)^{-1}, \\ K_{12} &= k_2 + \frac{1}{3}\mu_2 + \xi \left( \left(k_1 - k_2 + \frac{1}{3}\mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2\right)^{-1} + \frac{1-\xi}{k_2 + \frac{4}{3}\mu_2} \right)^{-1}, \\ \mu_{32} &= \frac{\mu_2(\mu_1(1+\xi) + \mu_2(1-\xi))}{\mu_1(1-\xi) + \mu_2(1+\xi)}. \end{aligned}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned}
 C_{33} &= E_{33} + 4\nu_{32}^2 K_{12}, & C_{32} &= 2K_{12}\nu_{32}, & C_{22} &= \mu_{12} + K_{12}, \\
 C_{12} &= -\mu_{12} + K_{12}, & C_{13} &= 2K_{12}\nu_{31}, & C_{44} &= \mu_{32}, \\
 C_{55} &= \mu_{32}, & C_{66} &= \mu_{12}, & C_{11} &= C_{22}, & C_{23} &= C_{13}.
 \end{aligned}$$

Dla zmineralizowania  $k = 58\%$  (materiał osteonu oznaczany poniżej indeksem dolnym  $o$ ), mamy ze wzoru (7.12)  $\xi = 0.608$ . Sprężyste własności efektywne lameli Typu I wyznaczone z powyższych formuł są następujące:

**Tabela 7.3.** Sprężyste własności efektywne lameli Typu I

$$\mathbf{C}\mathbf{I}_o^{eff} = \begin{bmatrix} 29.21 & 7.08 & 9.99 & 0 & 0 & 0 \\ 7.08 & 29.21 & 9.99 & 0 & 0 & 0 \\ 9.99 & 9.99 & 50.94 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.06 \end{bmatrix}$$

Dla zmineralizowania  $k = 63\%$  (materiał starych osteonów oznaczany poniżej indeksem dolnym  $i$ ), z równości (7.12) otrzymujemy  $\xi = 0.557$ . Dla tensora efektywnego opisującego materiał starych osteonów otrzymano następujące wartości liczbowe:

Dla lameli Typu II, tensor efektywny otrzymujemy z tensora  $\mathbf{C}\mathbf{I}^{eff}$  przez obrót o kąt  $90^\circ$  względem osi  $x_2$ . Dla lameli Typu III tensor efektywny otrzymano z tensora  $\mathbf{C}\mathbf{I}^{eff}$  przez obrót o kąt  $45^\circ$ , a dla lameli Typu IV przez obrót o kąt  $-45^\circ$  względem osi  $x_2$ . Efektywne własności lameli Typu V obliczamy z formuł homogenizacyjnych na laminację dwu warstwowego kompozytu złożonego z dwóch materiałów: materiału Typu I i Typu II z równymi udziałami objętościowymi. Efektywne własności architektur 6 i 7 wyznaczone są ze wzorów homogenizacyjnych dla odpowiednich składników. Architektura 7 została opisana jako 3-warstwowy kompozyt lameli Typu I i Typu II z udziałami objętościowymi 0.25 oraz Typu V z udziałem objętościowym 0.5. Architektura 6 opisana jest jako ośrodek warstwowy czteroskładnikowy zbudowany z warstw materiału Typu I, II, III i IV z równymi udziałami objętościowymi 0.25. Obie

**Tabela 7.4.** Tensor efektywny opisujący materiał starych osteonów

$$CI_i^{eff} = \begin{bmatrix} 33.86 & 8.62 & 11.66 & 0 & 0 & 0 \\ 8.62 & 33.86 & 11.66 & 0 & 0 & 0 \\ 11.66 & 11.66 & 57.59 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.62 \end{bmatrix}$$

te architektury mają te same własności efektywne. Transwersalnie izotropowe własności materiału osteonu i starych osteonów otrzymujemy przez całkowanie po wszystkich kierunkach laminacji prostopadłych do osi osteonu.

Na koniec podamy wyniki obliczeń dla materiału osteonu i starych osteonów tworzących architekturę 7:

**Tabela 7.5.** Własności materiału osteonu

$$CA7_o^{eff} = \begin{bmatrix} 33.02 & 9.23 & 10.21 & 0 & 0 & 0 \\ 9.23 & 33.02 & 10.21 & 0 & 0 & 0 \\ 10.21 & 10.21 & 38.20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.90 \end{bmatrix}$$

Przejdziemy teraz do drugiego kroku metody wyznaczania własności sprężystych kości zbitej.

**Krok II.** Wyznaczanie własności osteonu z uwzględnieniem kanałów Haversa

Najpierw, korzystając z opracowanych procedur (patrz Dodatek D.3), wyznaczono metodą Ritza własności efektywne ośrodka włóknistego pustkami o przekroju kwadratu. Następnie, uśredniono otrzymany tensor po obrotach względem kierunków prostopadłych do włókien modelujących kanały Haversa.



Tabela 7.6. Własności materiału starych osteonów

$$CA7_i^{eff} = \begin{bmatrix} 38.09 & 10.86 & 11.88 & 0 & 0 & 0 \\ 10.86 & 38.09 & 11.88 & 0 & 0 & 0 \\ 11.88 & 11.88 & 43.76 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.62 \end{bmatrix}$$



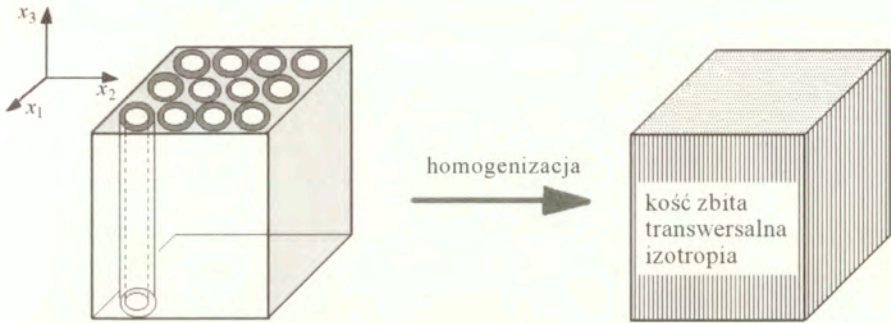
Rysunek 7.14. Homogenizacja materiału osteonu z uwzględnieniem kanałów Haversa

Otrzymano materiał transwersalnie izotropowy. Wyznaczono stałe efektywne dla różnych udziałów objętościowych kanałów Haversa, a mianowicie: 0.133, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3.

### Krok III. Obliczenie własności efektywnych kości zbitej

Efektywne własności kości zbitej wyznaczamy podobnie jak w kroku II z tym, że w miejsce kanałów Haversa (pustek) wstawiamy własności efektywne osteonu wyznaczone w kroku II, a w miejsce osnowy stałe materiału starych osteonów wyznaczone w kroku I. Udział objętościowy osteonów przyjęto 0.75. Własności transwersalnie izotropowe kości zbitej otrzymamy uśredniając odpowiednie tensory sprężystości po kątach obrotu prostopadłych do osi osteonów. Dla materiału Typu 5 i udziału objętościowego kanałów Haversa 0.3, tensor sprężystości kości zbitej ma postać:

Otrzymane techniczne stałe materiałowe pokazuje tabela Tab. 7.8. Wielkości w wierszach odpowiadają różnym udziałom objętościowym kanałów Haversa,



**Rysunek 7.15.** Homogenizacja osnowy z materiału starych osteonów wzmocnionej włóknami osteonów z kanałami Haversa

**Tabela 7.7.** Własności sprężyste kości zbitej

$$C5_Z^h = \begin{bmatrix} 20.17 & 6.04 & 6.34 & 0 & 0 & 0 \\ 6.04 & 20.17 & 6.34 & 0 & 0 & 0 \\ 6.340 & 6.340 & 30.0340 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.43 & 0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.07 \end{bmatrix}$$

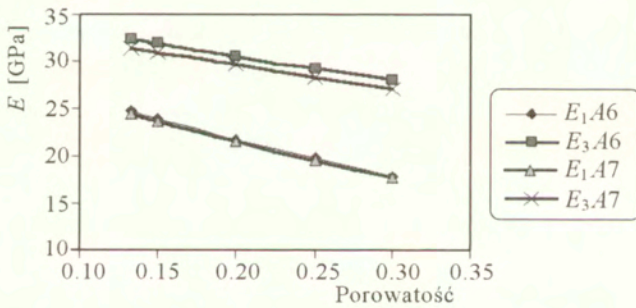
a mianowicie 1 – 0.133, 2 – 0.15, 3 – 0.2, 4 – 0.25, 5 – 0.3. Obliczenia przeprowadzono dla architektury 7. W wierszu 7 pokazano dane eksperymentalne, a w wierszu 8 wyniki uzyskane przez innych autorów wykorzystujących metody homogenizacji reiterowanej oraz pakiet MES'u.

Zależności technicznych stałych materiałowych, dla architektury 6 i 7, od porowatości (tj. udziału objętościowego kanałów Haversa) ilustrują wykresy przedstawione na Rys. 7.16 – Rys. 7.18.

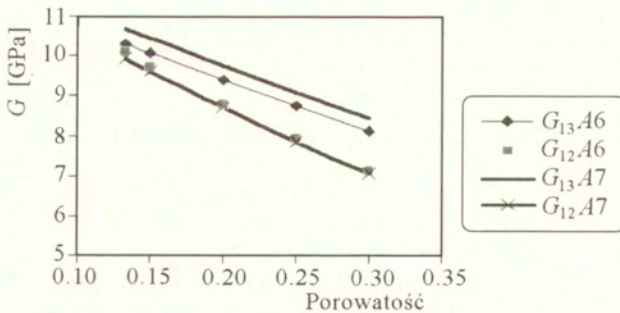
Uzyskane wyniki otrzymane są przy pomocy wielokrotnego uśredniania zgodnie z regułami homogenizacji reiterowanej. W obliczeniach korzystając z procedur w języku Maple, wykorzystano analityczne formuły na laminacje oraz metodę Ritza. Dają one bardzo dobrą zgodność z danymi eksperymentalnymi, a także obliczeniami autorów pracy [51]. W pracy [51] do obliczeń używano specjalnie skonstruowanego, niekomercyjnego pakietu MES z dużą liczbą elementów. Przedstawione w tym rozdziale postępowanie jest wielokrotnie prostsze, a wyniki są równie dokładne.

**Tabela 7.8.** Porównanie otrzymanych wyników z danymi eksperymentalnymi i obliczeniami innych autorów

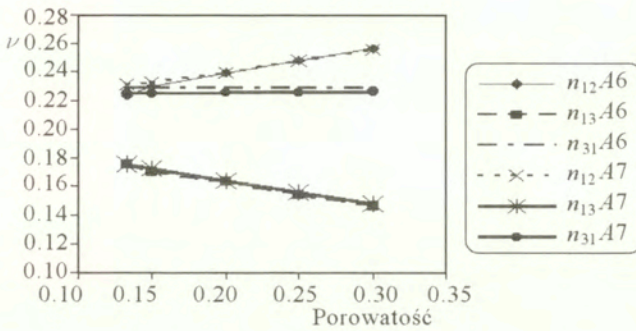
	$E_1$	$E_3$	$G_{13}$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{31}$
A7 – 1	24.33	31.12	10.69	9.95	0.22	0.19	0.24
A7 – 2	23.60	30.71	10.45	9.63	0.23	0.19	0.24
A7 – 3	21.48	29.46	9.75	8.71	0.23	0.18	0.24
A7 – 4	19.50	28.21	9.08	7.86	0.24	0.17	0.24
A7 – 5	17.66	26.98	8.43	7.07	0.25	0.16	0.24
Crolet <i>et al.</i> [51]	17.87	33.3	6.7	5.48	0.31	0.13	0.23
Yoon i Katz [177]	18.80	27.40	8.71	7.17	0.31	0.19	0.28



**Rysunek 7.16.** Moduły Younga w zależności od porowatości



**Rysunek 7.17.** Moduły ścinania w zależności od porowatości

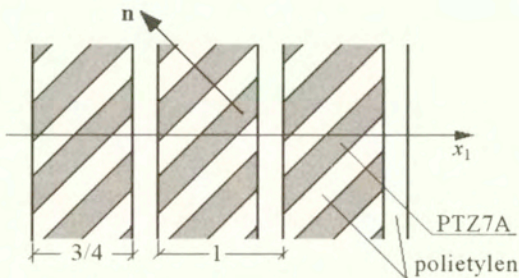


Rysunek 7.18. Współczynniki Poissona w zależności od porowatości

#### 7.4. Przykład wpływu mikrostruktury na elektromechaniczny tensor sprężenia

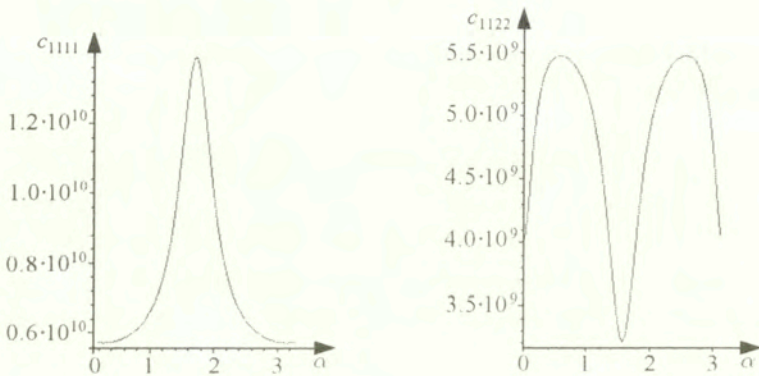
Ten rozdział ma na celu pokazanie możliwości jakie dają stosowane w pracy metody w odniesieniu do mikrostruktur kompozytów piezoelektrycznych.

Jako przykład mikrostruktury rozpatrzmy laminat utworzony z dwóch materiałów, ceramiki PZT7A i polietylenu. Najpierw wyznaczmy własności kompozytu warstwowego o ustalonym kierunku laminacji  $\mathbf{n}$  i równym udziale procentowym składników. W drugim kroku tworzymy warstwy prostopadłe do  $x_1$ , na przemian polietylen i kompozyt utworzony w pierwszym kroku laminacji. Wszystkie formuły na stałe efektywne takiego laminatu są otrzymane w sposób analityczny przy wykorzystaniu wzorów na laminację wielokrotną kompozytów piezoelektrycznych, por. Rozdz. 4.



Rysunek 7.19. Dwupoziomowa struktura warstwowa

Z otrzymanych własności tej struktury możemy wyznaczyć wszystkie inne parametry materiałowe, w szczególności składowe tensora sprzężenia elektro-mechanicznego (ECT), szczegółowo opisanego w Dodatku D2. Na Rys. 7.20-7.22 przedstawiono dwie składowe efektywnego tensora sprężystego  $c_{1111}$ ,  $c_{1122}$ , współczynnik dielektryczny  $\kappa$  i piezoelektryczny  $g_{311}$ , oraz składowe ECT:  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{22}$ , w zależności od kierunku laminacji w pierwszym kroku. Z podanych wykresów można odczytać informację, dla jakiego kierunku laminacji w pierwszym kroku, wartości składowych tensora ECT osiągają ekstrema. Wtedy kompozyt piezoelektryczny uzyskuje optymalne sorżęcie pola naprężeń i pola elektrycznego. W każdym konkretnym zagadnieniu technicznym należy analizować inne składowe tensorów piezoelektrycznych.

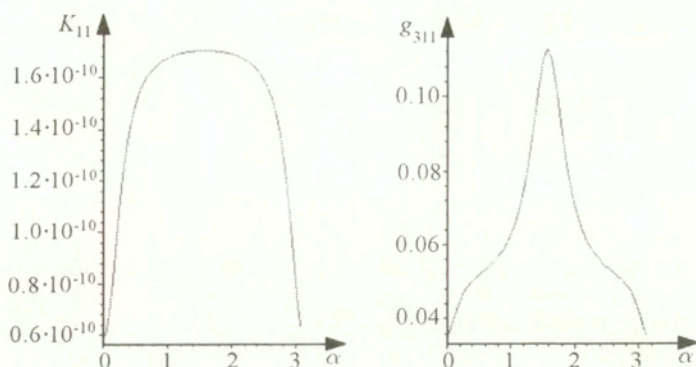


**Rysunek 7.20.** Współrzędne tensora sprężystości dla kompozytu o dwupoziomowej strukturze warstwowej jako funkcje kierunku laminacji w pierwszym kroku tworzenia warstw

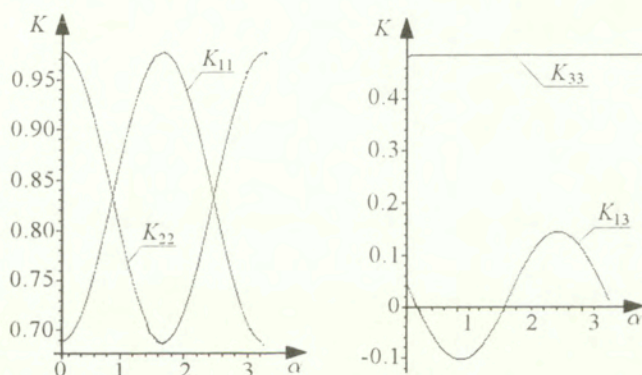
W projektowaniu urządzeń piezoelektrycznych istotne są wartości pewnych kombinacji składowych tensora  $\mathbf{K}$ . Stworzone procedury numeryczne dają możliwość szybkiego wybierania takich wartości i optymalnych struktur. Z drugiej strony, znajomość zależności tensorów  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\kappa$  i  $\mathbf{K}$  od parametrów opisujących strukturę laminatów umożliwia analizę danych doświadczalnych i dobór mikrostruktury kompozytu.

## 7.5. Przykład homogenizacji nieliniowego kompozytu piezoelektrycznego

Niech energia wewnętrzna będzie określona przez (3.4) i (3.5). Rozpatrzmy ośrodek warstwowy, w którym warstwy są prostopadłe do osi  $x_3$ . Założymy, że wszystkie funkcje periodyczne zależą jedynie od zmiennej  $y_3$ , którą dalej



**Rysunek 7.21.** Współrzędne tensora dielektrycznej przewodności i tensora piezoelektrycznego dla kompozytu o dwupoziomowej strukturze warstwowej jako funkcje kierunku laminacji w pierwszym kroku tworzenia warstw



**Rysunek 7.22.** Współrzędne tensora sprzężenia elektromechanicznego  $\mathbf{K}$  dla kompozytu o dwupoziomowej strukturze warstwowej jako funkcje kierunku laminacji w pierwszym kroku tworzenia warstw

będziemy oznaczać przez  $y$ . Wtedy niezerowe składowe lokalnych odkształceń występujących w wzorze (3.13), opisującym makroskopową energię kompozytu piezoelektrycznego, są następujące:

$$e_{13}^y = \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dy}, \quad e_{23}^y = \frac{1}{2} \frac{dv_2}{dy}, \quad e_{33}^y = \frac{dv_3}{dy},$$

podczas gdy wektor lokalnej indukcji elektrycznej ma postać

$$\mathbf{d} = (d_1(y), d_2(y), 0).$$

Komórka elementarna  $Y$  zawiera dwie warstwy: jedna wypełniona jest materiałem liniowym, druga nieliniowym. Założymy również, że

$$b_{ijkl}(y) = b(y)\delta_{ij}\delta_{kl},$$

gdzie

$$b(y) = \begin{cases} b & \text{w „nieliniowej” warstwie o udziale objętościowym } \varphi_1, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja energii  $U_1$  w (3.4) jest taka sama w obu warstwach i materiał wykazuje symetrię ceramiki PZT7A. Rozwiązując zagadnienie minimalizacji energii opisanej wzorem (3.13) względem  $\mathbf{v}$ , znajdujemy następujące wartości odkształceń:

$$\hat{e}_{13}^y = \frac{h_{15}}{a_{44}}d_1(y), \quad \hat{e}_{23}^y = \frac{h_{15}}{a_{44}}d_2(y).$$

Tutaj  $h_{15}$  jest współczynnikiem piezoelektrycznym, a  $a_{44}$  oznacza moduł sprężystości w notacji Voigt'a. Wtedy związek (3.13) redukuje się do

$$U_h(\rho) = \inf \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{1}{4}b(y) \left( (d_1(y) + \rho_1)^2 + (d_2(y) + \rho_2)^2 + \rho_3^2 \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2}k \left( (d_1(y) + \rho_1)^2 + (d_2(y) + \rho_2)^2 \right) \right] dy \mid d_1, d_2 \text{ są } Y\text{-periodyczne, } \langle \mathbf{d} \rangle = \mathbf{0} \right\}, \quad (7.13)$$

gdzie  $k = \kappa_{11} - \frac{h_{15}^2}{a_{44}}$ , i  $\kappa_{11}$  jest współczynnikiem dielektrycznym.

Ponieważ

$$D_\alpha(y) = \rho_\alpha + d_\alpha(y), \quad (7.14)$$

$$\int_0^1 D_\alpha(y) dy = \rho_\alpha,$$

dla  $\alpha = 1, 2$ , to lokalne równania Eulera mają postać

$$\frac{d}{dy} \left( b(y)(D_1^2 + D_2^2 + \rho_3^2)D_1 + kD_1 \right) = 0 \quad \text{w } Y, \quad (7.15)$$

$$\frac{d}{dy} \left( b(y)(D_1^2 + D_2^2 + \rho_3^2)D_2 + kD_2 \right) = 0 \quad \text{w } Y. \quad (7.16)$$

Zatem

$$D_1 \left( b(y)(D_1^2 + D_2^2 + \rho_3^2) + k \right) = c_1 \quad \text{w } Y, \quad (7.17)$$

$$D_2 \left( b(y)(D_1^2 + D_2^2 + \rho_3^2) + k \right) = c_2 \quad \text{w } Y. \quad (7.18)$$

Powyższe równania wraz z warunkami (7.14) prowadzą do równań na bezwymiarowe zmienne  $\bar{D}_1, \bar{D}_2$

$$\bar{D}_1 \left[ \bar{b}(y) \bar{D}_1^2 \left( 1 + \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right) + \bar{b}(y) + \bar{k} \right] = \bar{c}, \quad \bar{D}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \bar{D}_1, \quad (7.19)$$

gdzie

$$E_i = \kappa_{11} \rho_3 \bar{E}_i, \quad D_i = \rho_3 \bar{D}_i, \quad h_{ijk} = \kappa_{11} \rho_3 \bar{h}_{ijk},$$

$$b = \frac{\kappa_{11}}{(\rho_3)^2} \bar{b}, \quad k = \kappa_{11} \bar{k}, \quad c_1 = \kappa_{11} \rho_3$$

$$a_{ijkl} = \kappa_{11} (\rho_3)^2 \bar{a}_{ijkl},$$

Tak więc

$$\bar{D}_1 = \bar{c} \frac{1}{\bar{b}(y) + \bar{k}} G \left( \frac{[\bar{b}(y)(1 + (\frac{\rho_2}{\rho_1})^2)]^{\frac{1}{2}} |\bar{c}|}{(\bar{b}(y) + \bar{k})^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (7.20)$$

Całkowanie po komórce  $Y$  określa zależność bezwymiarowej zmiennej  $\bar{\rho}_1$  od pozostałych wielkości

$$\bar{\rho}_1 = \bar{c} \left\{ \varphi_1 \frac{1}{\bar{b} + \bar{k}} G \left( \frac{[\bar{b}(1 + (\frac{\rho_2}{\rho_1})^2)]^{\frac{1}{2}} |\bar{c}|}{(\bar{b} + \bar{k})^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{1 - \varphi_1}{\bar{k}} G(0) \right\}, \quad (7.21)$$

gdzie funkcja  $G(x)$  jest określona równaniami

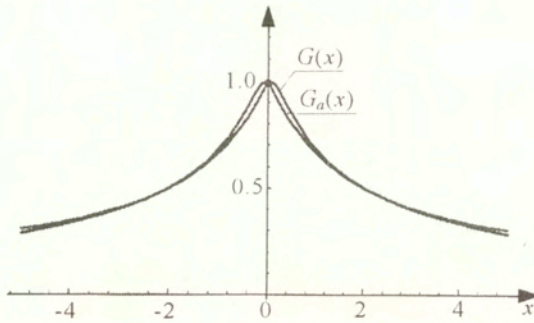
$$G(x)x = y, \quad y^3 + y = x.$$

Dla  $x$  z przedziału  $[-5, 5]$ , funkcja  $G$  może być przybliżona przez

$$G_a(x) = \frac{2}{2 + |x|}.$$

Różnicę pomiędzy funkcjami  $G(x)$  i  $G_a(x)$  pokazuje Rys. 7.23.

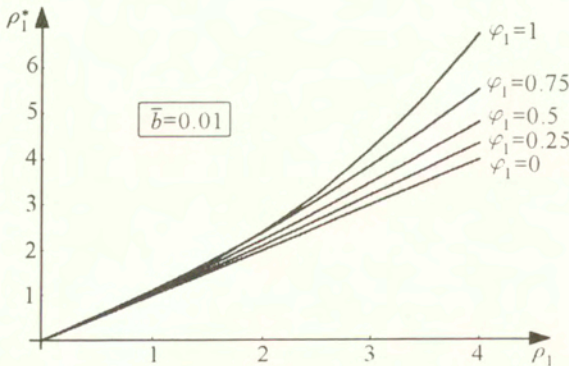


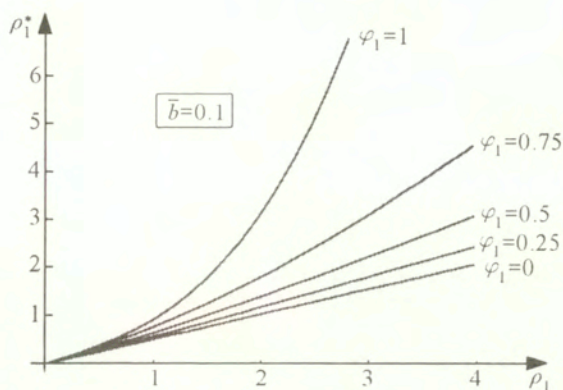
Rysunek 7.23. Wykres funkcji  $G(x)$  i  $G_a(x)$ 

W celu uzyskania graficznej ilustracji nieliniowości związków konstytutywnych w materiale zhomogenizowanym, w obliczeniach numerycznych przyjęto szereg uproszczeń:  $\rho_1 \neq 0$ ,  $\rho_2 = 0$ ,  $\rho_3 = 1$ ,  $\epsilon_{13} = 0$  oraz aproksymowano funkcję  $G$  funkcją  $G_a$ . Dla materiału PZT7A wyznaczamy stałą  $k = 0.246 - (2.3)^2/47.2 \frac{\text{m}}{\text{nF}}$ . Makroskopowa relacja konstytutywna wiążąca w sposób jawny pole elektryczne  $\mathbf{E} = \boldsymbol{\rho}^*$  z indukcją elektryczną  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\rho}$  przyjmuje, przy założonych uproszczeniach, postać

$$\rho_1^* = \frac{\partial U_h(\rho)}{\partial \rho_1} = c_1(\rho_1),$$

gdzie  $c_1(\rho_1)$  jest wyznaczone z postaci energii zhomogenizowanej 7.13.

Rysunek 7.24. Pole elektryczne jako funkcja indukcji,  $\bar{b} = 0.01$



Rysunek 7.25. Pole elektryczne jako funkcja indukcji,  $\bar{b} = 0.1$

Na rysunkach Rys. 7.24 i 7.25 przedstawiono zależność  $\bar{\rho}_1^*$  od  $\bar{\rho}_1$ , dla różnych udziałów objętościowych  $\phi_1$ , materiału nieliniowego w kompozycie piezoelektrycznym. Przyjęto  $\bar{b} = 0.01$  (Fig. 7.24) i  $\bar{b} = 0.1$  (Fig. 7.25)

Zuważmy, że dla czystej fazy nieliniowej, tj. dla  $\varphi_1 = 1$ , otrzymujemy założony dla tej fazy nieliniowy związek konstytutywny, podczas gdy dla kompozytu będącego mieszaniną warstwową materiału liniowego i nieliniowego uzyskujemy „słabsze” nieliniowości. Oczywiście dla czystej fazy liniowej mamy związek liniowy, tj. przypadek, gdy  $\varphi_1 = 0$ . „Prędkość” narastania nieliniowości w materiale nieliniowym silnie zależy od wielkości współczynnika materiałowego  $b$ , por. Rys. 7.24 i Rys. 7.25. Przykład ten pokazuje, że nawet nieznaczna domieszka materiału pracującego nieliniowo prowadzi do nieliniowego zachowania się kompozytu.

## Dodatek D

### D.1. Liniowa piezoelektryczność

Piezoelektryczność opisuje liniowe (pierwszego rzędu) sprzężenie pomiędzy zjawiskami sprężystymi i dielektrycznymi. Dla anizotropowego, jednorodnego ciała stałego, w warunkach izotermicznych i przy zaniedbaniu efektów magnetycznych, składowe tensora deformacji sprężystej  $e_{ij}$  są dane relacją

$$e_{ij} = S_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{ijk} E_k + \text{człony wyższego rzędu}, \quad (\text{D.1})$$

gdzie  $\sigma$  oznacza tensor naprężenia, a  $\mathbf{E}$  wektor pola elektrycznego. Współczynniki  $S_{ijkl}^E$  są składowymi tensora podatności mierzonymi przy stałym polu elektrycznym (ciało elektrycznie swobodne). Składowe  $d_{ijk}$  tensora piezoelektrycznego definiują sprzężenie elektromechaniczne. W pierwszym przybliżeniu zaniedbujemy człony wyższych rzędów w równaniu (D.1). Jeżeli statyczne pole elektryczne jest przyłożone do piezoelektrycznego materiału, który ma swobodę przybrania dowolnego kształtu, całkowite naprężenie  $\sigma$  jest równe zeru, (materiał „rozwany mechanicznie”, [152]), a więc równanie (D.1) redukuje się do związku  $e_{ij} = d_{ijk} E_k$ . Człon piezoelektryczny wiąże teraz odkształcenie mechaniczne z polem elektrycznym, które je wywołało. Z tego powodu tensor  $\mathbf{d}$  nazywa się piezoelektrycznym deformacyjnym współczynnikiem sprzężenia (ang. *piezoelectric strain coefficient*), a efekt sprzężenia nazywa się odwrotnym efektem piezoelektrycznym. W alternatywnym opisie liniowego anizotropowego i jednorodnego ciała spolaryzowanego, wektor indukcji elektrycznej  $\mathbf{D}$  dany jest związkiem

$$D_i = d_{ijk} \sigma_{jk} + \epsilon_{ij}^{\sigma} E_j + \text{człony wyższego rzędu}, \quad (\text{D.2})$$

gdzie  $\epsilon_{ij}^{\sigma}$  są składowymi tensora przenikalności dielektrycznej mierzonymi przy stałych naprężeniach. Jak poprzednio, człony wyższego rzędu w równaniu (D.2) pomijamy. Jeżeli pole naprężenia przyłożymy do próbki, która jest elektrycznie swobodna, to pole elektryczne  $\mathbf{E}$  w materiale próbki zniknie i z równania (D.2) otrzymujemy związek:  $D_i = d_{ijk} \sigma_{jk}$ . W tym przypadku, człon piezoelektryczny  $\mathbf{d}$  wiąże ładunek zgromadzony na powierzchni próbki i naprężenia pod wpływem których powstał ten ładunek. Współczynnik  $\mathbf{d}$  jest nazywany „ładunkowym” współczynnikiem piezoelektryczności, a samo zjawisko pojawienia się ładunków

wskutek przyłożonych naprężeń nosi nazwę prostego efektu piezoelektrycznego. Piezoelektryczny tensor  $\mathbf{d}$  dla efektu prostego i odwrotnego jest równoważny w tym sensie, że

$$(\mathbf{d}_{\text{odwrotnego}})^T = \mathbf{d}_{\text{prostego}},$$

gdzie  $T$  oznacza odpowiednią transpozycję tensora 3-go rzędu.

W przedstawionym wyżej modelu równania konstytutywne budowane są na pojęciu energii sprężonej, która jest funkcją pola naprężeń i pola elektrycznego. Możliwe są 3 inne, równoważne sformułowania równań konstytutywnych, a mianowicie bazujące na pojęciu energii będącej funkcją pola odkształceń i pola indukcji elektromagnetycznej, entalpii oraz entalpii sprężonej. Poniżej podamy podstawowe oznaczenia i związki konstytutywne liniowej piezoelektryczności, które są wykorzystywane w prezentowanej pracy.

Niech  $V$  oznacza ograniczony, dostatecznie regularny obszar w  $\mathbb{R}^3$ , przy czym domknięcie  $\bar{V}$  pokrywa się z rozpatrywanym ciałem piezoelektrycznym w stanie nieodkształconym. Przez  $\Gamma = \partial V$  oznaczmy brzeg obszaru  $V$ . Niech  $\mathbf{u} = (u_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , będzie wektorem przemieszczeń,  $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = (e_{ij}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ ,  $\mathbf{x} \in V$ , tensorem odkształceń zaś  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  tensorem naprężeń. Przez  $\mathbf{D} = (D_i)$ ,  $\mathbf{E} = (E_i)$ ,  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  oznaczmy odpowiednio wektor indukcji elektrycznej (zwanej także przemieszczeniem elektrycznym) i wektor pola elektrycznego, natomiast  $\varphi$  oznacza potencjał pola elektrycznego.

Oznaczmy przez  $H(\mathbf{e}, \mathbf{E})$  entalpię elektryczną, zaś przez  $U(\mathbf{e}, \mathbf{D})$  energię wewnętrzną. Mają one postać:

$$H(\mathbf{e}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl} - g_{ijk}E_ie_{jk} - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_iE_j, \quad (\text{D.3})$$

$$U(\mathbf{e}, \mathbf{D}) = \frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} - h_{ijk}D_ie_{jk} + \frac{1}{2}\kappa_{ij}D_iD_j, \quad (\text{D.4})$$

gdzie  $\mathbf{e} \in \mathbb{M}_3^s$ , zaś  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbb{M}_3^s$  oznacza zbiór symetrycznych macierzy  $3 \times 3$ . Entalpię elektryczną  $H(\mathbf{e}, \mathbf{E})$  można wyznaczyć jako częściowo wklęsłą transformację funkcji  $U(\mathbf{e}, \mathbf{D})$ , por. [157],

$$H(\mathbf{e}, \mathbf{E}) = \inf \left\{ -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + U(\mathbf{e}, \mathbf{D}) \mid \mathbf{D} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Dokonując pełnej transformacji Fenchela funkcji  $U(\cdot, \cdot)$ , otrzymujemy sprężoną funkcję energii:

$$U^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \inf \left\{ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - U(\mathbf{e}, \mathbf{D}) \mid \mathbf{e} \in \mathbb{M}_3^s, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (\text{D.5})$$

Funkcja ta ma postać

$$U^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - d_{ijk} E_i \sigma_{jk} + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} E_i E_j. \quad (\text{D.6})$$

Przeprowadzając częściowo wklęsłą transformację Fenchela funkcji  $U^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$  względem  $\mathbf{E}$ , otrzymujemy funkcję sprzężoną do entalpii

$$H^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = \inf \left\{ -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + U^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) \mid \mathbf{E} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Związki między stałymi materiałowymi wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= a_{ijkl} - g_{mij} h_{mkl}, & \kappa_{ij} &= (\epsilon^{-1})_{ij}, \\ g_{mij} &= \epsilon_{ml} h_{lij}, & \kappa_{ij} &= (\epsilon^{-1})_{ij}, \\ h_{kij} &= (\epsilon^{-1})_{kn} g_{nij}, & a_{ijkl} &= c_{ijkl} + (\epsilon^{-1})_{rn} g_{rij} g_{nkl}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Ponadto

$$s_{ijkl} = (c^{-1})_{ijkl}, \quad c_{ijkl} = a_{ijkl} - h_{mij} (\kappa^{-1})_{mn} h_{nkl}, \quad (\text{D.8})$$

$$(\kappa^{-1})_{ij} = \kappa_{ij} - h_{ikl} (a^{-1})_{klmn} h_{jmn}, \quad d_{ijk} = -h_{lmn} (\kappa^{-1})_{il} s_{mnjk}. \quad (\text{D.9})$$

Zauważmy, że funkcja  $U$  jest wypukła względem obu argumentów, zaś funkcja  $H$  jest wypukła względem  $\mathbf{e}$  i wklęsła względem  $\mathbf{E}$ . W dalszym ciągu zakładamy, że współczynniki materiałowe występujące w (D.3) i (D.4) są istotnie ograniczone, czyli należą do przestrzeni  $L^\infty(V)$ .

Związki konstytutywne mają postać

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial e_{ij}} = c_{ijkl} e_{kl} - g_{kij} E_k, \quad (\text{D.10})$$

$$D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i} = g_{ikl} e_{kl} + \epsilon_{ik} E_k,$$

lub równoważnie:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = a_{ijkl} e_{kl} - h_{kij} D_k, \quad (\text{D.11})$$

$$E_i = \frac{\partial U}{\partial D_i} = -h_{ikl} e_{kl} + \kappa_{ik} D_k.$$

Alternatywna postać tych związków jest następująca:

$$e_{ij} = \frac{\partial U^*}{\partial \sigma_{ij}}, \quad e_{ij} = \frac{\partial H^*}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$D_i = \frac{\partial U^*}{\partial E_i}, \quad E_i = \frac{\partial H^*}{\partial D_i}.$$

W celu uproszczenia zapisu indeksowego równań (D.10) wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\sigma_{4i} = D_i, \quad e_{4i} = E_i,$$

$$c_{i4jk} = g_{ijk}, \quad c_{ij4k} = -g_{kij}, \quad c_{i44j} = \epsilon_{ij}.$$

Przy tych oznaczeniach związki konstytutywne (D.10) można zapisać w postaci uproszczonej:

$$\sigma_{\alpha i} = c_{\alpha\beta j} e_{\beta j}, \quad (D.12)$$

gdzie  $\alpha, \beta$  przebiegają ciąg wartości 1, 2, 3, 4, zaś  $i, j$  przebiegają ciąg wartości 1, 2, 3. Związki konstytutywne zapiszemy również w „blokowej” notacji absolutnej, zwanej także notacją symboliczną:

$$\Sigma = \mathbf{A} \cdot \mathcal{E}, \quad (D.13)$$

gdzie

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{g} \\ \mathbf{g} & \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (D.14)$$

Pogrubiene litery oznaczają tensory stałych materiałowych odpowiedniego rzędu, a operacja  $(\cdot)$  oznacza odpowiednie kontrakcje tensorów, zgodnie z zapisem indeksowym w (D.10).

Macierz  $\mathbf{A}$  jest oczywiście związana z entalpią elektryczną  $H$ . Podobnie macierz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{h} \\ -\mathbf{h} & \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{B})^T = \mathbf{B}, \quad (D.15)$$

jest związana z energią wewnętrzną  $U$ . Mając macierz  $\mathbf{A}$ , możemy wyznaczyć macierz  $\mathbf{B}$  i vice versa.

Związki konstytutywne można również formułować w postaciach równoważnych odwracając macierze blokowe  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ . Związki (D.14) zapisujemy w notacji Voigta, używanej w procedurach numerycznych, w postaci

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sqrt{2}\sigma_4 \\ \sqrt{2}\sigma_5 \\ \sqrt{2}\sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \sqrt{2}e_4 \\ \sqrt{2}e_5 \\ \sqrt{2}e_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \sqrt{2}c_{14} & \sqrt{2}c_{15} & \sqrt{2}c_{16} & -g_{11} & -g_{21} & -g_{31} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \sqrt{2}c_{24} & \sqrt{2}c_{25} & \sqrt{2}c_{26} & -g_{12} & -g_{22} & -g_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \sqrt{2}c_{34} & \sqrt{2}c_{35} & \sqrt{2}c_{36} & -g_{13} & -g_{23} & -g_{33} \\ \sqrt{2}c_{41} & \sqrt{2}c_{42} & \sqrt{2}c_{43} & 2c_{44} & 2c_{45} & 2c_{46} & -\sqrt{2}g_{14} & -\sqrt{2}g_{24} & -\sqrt{2}g_{34} \\ \sqrt{2}c_{51} & \sqrt{2}c_{52} & \sqrt{2}c_{53} & 2c_{54} & 2c_{55} & 2c_{56} & -\sqrt{2}g_{15} & -\sqrt{2}g_{25} & -\sqrt{2}g_{35} \\ \sqrt{2}c_{61} & \sqrt{2}c_{62} & \sqrt{2}c_{63} & 2c_{64} & 2c_{65} & 2c_{66} & -\sqrt{2}g_{16} & -\sqrt{2}g_{26} & -\sqrt{2}g_{36} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \sqrt{2}g_{14} & \sqrt{2}g_{15} & \sqrt{2}g_{16} & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \sqrt{2}g_{24} & \sqrt{2}g_{25} & \sqrt{2}g_{26} & \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \sqrt{2}g_{34} & \sqrt{2}g_{35} & \sqrt{2}g_{36} & \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

gdzie indeksy  $K = 1, 2, \dots, 6$  zostały otrzymane poprzez następującą transformację:

$$\begin{array}{cccccccc} (ij) & (11) & (22) & (33) & (23) & (32) & (13) & (31) & (12) & (21) \\ K & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & & \end{array}$$

np.  $c_{54} = c_{1323}$ ,  $g_{24} = g_{223}$ .

Liniowe równania równowagi ciała piezoelektrycznego zajmującego obszar  $V$  mają postać:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \text{w } V. \quad (\text{D.16})$$

Najczęściej przyjmowane są następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} u_i &= 0 & \text{na } \Gamma_0, & & \sigma_{ij}n_j &= f_i & \text{na } \Gamma_1, \\ \varphi &= \varphi_0 & \text{na } \Gamma_2, & & D_i n_i &= d & \text{na } \Gamma_3. \end{aligned}$$

gdzie  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ ,  $\Gamma = \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ ,  $\bar{\Gamma}_2 \cap \bar{\Gamma}_3 = \emptyset$ . Wielkość  $\mathbf{n} = (n_i)$  oznacza jednostkowy wektor prostopadły do  $\partial V$  i skierowany na zewnątrz obszaru  $V$ .

Tak sformułowane zagadnienie brzegowe posiada jednoznaczne rozwiązanie w określonej klasie funkcji, przy odpowiednich założeniach odnośnie współczynników oraz klasy funkcji  $\mathbf{f}$ .

## D.2. Tensor sprzężenia elektromechanicznego

Równania konstytutywne piezoelektryczności opisujące sprężyste lub dielektryczne zachowanie się materiału, zależą od jego sprężystych i dielektrycznych parametrów materiałowych. W literaturze, [152], jako charakterystyki materiału, powszechnie używa się tzw. współczynnika sprzężenia. Współczynnik ten definiowany jest przez następujące związki energetyczne:

$$k = \frac{U_p}{\sqrt{U_s U_d}}, \quad (\text{D.17})$$

gdzie

$$U_p = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} : \boldsymbol{\sigma}, \quad U_s = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{s} : \boldsymbol{\sigma}, \quad U_d = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}.$$

Współczynnik sprzężenia zależy od stanu naprężenia i odkształcenia wywołanego polem zewnętrznym, a więc nie opisuje samego materiału (por. [139]). Aby usunąć tę niezręczność, Avelaneda [12] wprowadził pojęcie materiałowego elektromechanicznego tensora sprzężenia  $\mathbf{K}$  (ECT – ang. *electromechanical coupling tensor*):

$$\mathbf{K}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{d} : \mathbf{s}^{-1} : \mathbf{d}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.18})$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$ .

Aby pokazać związek pomiędzy  $k^2$  i  $\mathbf{K}^2$ , wprowadzimy następujący materiałowy tensor sprzężenia

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{d} : \mathbf{s}^{-\frac{1}{2}},$$



gdzie  $\mathbf{s}^{-\frac{1}{2}} : \mathbf{s}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{s}^{-1}$ . Tensor  $\mathbf{G}$  jest tensorem trzeciego rzędu o symetriach takich, jak tensor sprzężenia  $\mathbf{d}$ . Zatem, tensor  $\mathbf{K}$  jest związany z tensorem  $\mathbf{G}$  następującym wzorem:

$$\mathbf{G} : \mathbf{G}^T = \mathbf{K}^2.$$

Wprowadźmy następujące unormowane pole elektryczne i unormowane pole naprężeń:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{U_d}} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{s}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{U_s}}.$$

Wtedy współczynnik sprzężenia elektromechanicznego  $k$  wyraża się poprzez odpowiednie nasunięcie tych pól na tensor materiałowy sprzężenia  $\mathbf{G}$ , mianowicie:

$$k = \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{G} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{lub} \quad k = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{G}^T \cdot \tilde{\mathbf{E}} \quad (\text{D.19})$$

Unormowanie pól oznacza, że:

$$\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 1, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 1.$$

Zdefiniowany w pracy [12] i opisany formułą (D.18) obiekt  $\mathbf{K}^2$ , jest obiektem tensorowym 2 rzędu, którego nazwiemy tensorem „typu elektrycznego”. Wprowadzimy teraz *nowy* tensor, ale 4 rzędu, który nazwiemy tensorem „typu sprężystego”, a który również będzie materiałowym elektromechanicznym tensorem sprzężenia. Ma on następującą postać:

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}. \quad (\text{D.20})$$

Stąd

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{s}^{-\frac{1}{2}} : \mathbf{d}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{d} : \mathbf{s}^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{D.21})$$

Dodatkowo wprowadzimy tensor blokowy, który zawiera oba tensory sprzężenia, zarówno typu „elektrycznego”, jak i „sprężystego”, a mianowicie:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.22})$$

Operacja ( $\circ$ ) oznacza odpowiednie kontrakcje tensorów (pojedyncze lub podwójne). Stąd

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{M}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} - \mathbf{a} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.23})$$

gdzie tensor sprężystości  $\mathbf{a} = \mathbf{s} - \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{d}$ . Tensory  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$  są mieralne przy zadanych odpowiednio polach odkształceń, naprężeń, indukcji elektromagnetycznej i natężenia pola elektrycznego. Szczegóły można znaleźć w monografii [152].

Do analizy sprzężenia elektromechanicznego można używać obu tensorów  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  (danych wzorem (D.22)) lub jeśli interesuje nas konkretny stan naprężenia i zadany kierunek pola elektrycznego – współczynnika  $k$  (danego wzorem (D.19)).

Zauważmy jeszcze, że prawdziwa jest następująca nierówność będąca uogólnieniem nierówności podanej w pracy [12]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.24})$$

Podkreślmy, że definicje tensorów  $\mathbf{G}$  i  $\mathbf{M}^2$  oraz wprowadzenie pól unormowanych  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  do sformułowania równań konstytutywnych piezoelektryczności stanowią wkład własny autorki do opisu sprzężenia elektromechanicznego.

### D.3. Procedura wyznaczania piezoelektrycznych stałych efektywnych

Poniżej podamy przybliżoną metodę rozwiązania zagadnienia wyznaczania efektywnych modułów piezoelektrycznych dla kompozytu typu osnowa-wtrącenia, gdy rozkład wtrąceń jest periodycznym rozkładem prostopadłościanów w przestrzeni 3-wymiarowej. Trzy bezwymiarowe parametry (stosunki długości boków prostopadłościanu do długości boku sześcienniej komórki periodyczności) opisują geometrię kompozytu. Zakładamy podnadt, że ściany prostopadłościanu są równoległe do ścian komórki periodyczności.

### Metoda Ritza rozwiązywania zagadnień lokalnych

Zagadnienie lokalne (3.49) zapisujemy w słabej postaci:

$$\int_Y \left[ c_{k\alpha\beta n}(\mathbf{y}) \frac{\partial \chi_{\beta}^{(\gamma j)}(\mathbf{y})}{\partial y_n} \frac{\partial \Psi(\mathbf{y})}{\partial y_k} \right] d\mathbf{y} = - \int_Y c_{k\alpha\gamma j}(\mathbf{y}) \frac{\partial \Psi(\mathbf{y})}{\partial y_k} d\mathbf{y}. \quad (\text{D.25})$$

gdzie  $\Psi(\mathbf{y})$  jest dowolną funkcją periodyczną.

Przybliżonych rozwiązań równania (D.25) poszukujemy w postaci

$$\chi_{\gamma}^{(\beta j)} = \sum_a X[a, \gamma, \beta, j] \phi^a(\mathbf{y}), \quad (\text{D.26})$$

gdzie  $\phi^a(\mathbf{y})$  są zadanymi funkcjami, zaś  $X[a, \gamma, \beta, j]$  wielkościami, które należy wyznaczyć.

Wielkość  $\Psi(\mathbf{y})$  przyjmujemy w postaci

$$\Psi(\mathbf{y}) = \sum_a Y^a \phi^a(\mathbf{y}), \quad (\text{D.27})$$

gdzie  $Y^a$  są dowolnymi stałymi. Wstawiając D.27 oraz D.26 do D.25, otrzymujemy następujący układ równań na niewiadome funkcje  $X[a, \gamma, \beta, j]$ :

$$\sum_{\beta=1}^4 \sum_{b=1}^3 A[a, \alpha, \beta, b] X[b, \beta, \gamma, m] = B[a, \alpha, \gamma, m], \quad (\text{D.28})$$

gdzie

$$A[a, \alpha, \beta, b] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overset{(2)}{C}_{i\alpha\beta j} F[a, i, b, j] - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [C_{i\alpha\beta j}] F[a, i, b, j],$$

$$B[a, \alpha, \gamma, m] = \sum_{i=1}^3 [C_{i\alpha\gamma m}] f1[a, i],$$

$$F[a, i, b, j] = \int_Y \frac{\partial \phi^a(\mathbf{y})}{\partial y_i} \frac{\partial \phi^b(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y},$$

$$f1[a, i] = \int_{Y_1} \frac{\partial \phi^a(\mathbf{y})}{\partial y_i} d\mathbf{y}.$$

Stałe zhomogenizowane mają postać:

$$c_{i\alpha\beta j}^h = \langle c_{i\alpha\beta j} \rangle - \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{n=1}^3 \sum_{a=1}^3 [[C_{i\alpha\gamma n}]] X[a, \gamma, \beta, j] f_1[a, n]. \quad (\text{D.29})$$

Równania (D.29) wykorzystano do opracowania procedury numerycznej w programie Maple. Odpowiednie przyjęcie funkcji bazowych  $\phi^i(y_1, y_2, y_3)$  ograniczyło ich liczbę. Mimo, że przeprowadzone obliczenia wykorzystywały tylko 3 funkcje bazowe, uzyskane wyniki dawały zaskakająco dobrą dokładność we wszystkich przypadkach, w porównaniu z obliczeniami dokonanymi przy użyciu MES'u, por. wnioski w Rozdz. 7.1 i Rozdz. 7.3. Zaznaczyć należy, że utworzone procedury, zastosowane do struktur warstwowych, prowadzą do ścisłych wyników analitycznych. Co więcej, gdy założymy znikanie sprzężenia elektromechanicznego, redukują się one do odpowiednich zagadnień sprężystych i dielektrycznych. Zagadnienie dielektryczne jest opisane takimi samymi równaniami, jak stacjonarne zagadnienie przewodnictwa ciepła czy zagadnienie przenikania pól magnetycznych. Tak więc, uzyskane dzięki opisanym procedurom wyniki mogą znaleźć zastosowanie w innych zagadnieniach fizycznych, w których istotna jest analiza własności makroskopowych materiałów kompozytowych.

## Podsumowanie

W pracy pokazano w jaki sposób własności, w tym geometryczna konfiguracja poszczególnych składników (faz) lub typów niejednorodności (takich jak wtrącenia, szczeliny lub pustki), wpływają na makroskopowe charakterystyki materiałów sprężystych, piezoelektrycznych i termosprężystych. Ponadto, w ramach matematycznej teorii homogenizacji, sformułowano i udowodniono twierdzenia oraz wyprowadzono równania umożliwiające wyznaczenie własności makroskopowych (efektywnych, zastępczych) kompozytów.

Mianowicie, w Rozdziale 3 sformułowano i podano dowód twierdzenia o homogenizacji mikroperiodycznych, fizycznie nieliniowych, kompozytów piezoelektrycznych. W Rozdziale 5 sformułowano i podano dowód twierdzenia o istnieniu projektu optymalnego dla zagadnienia poszukiwania minimum uogólnionej podatności w klasie piezoelektrycznych materiałów gradientowych. W Rozdziale 6 sformułowano i podano dowód twierdzenia o homogenizacji stochastycznie periodycznego kompozytu termosprężystego. W tym samym rozdziale sformułowano twierdzenie o stochastycznej homogenizacji dla przypadku periodycznie stochastycznego rozkładu szczelin w sprężystej osnowie. W Rozdziale 4 podano nowe, zamknięte formuły opisujące własności makroskopowe (zhomogenizowane) ośrodków warstwowych: liniowych kompozytów piezoelektrycznych i kompozytów sprężystych. Jedną z metod homogenizacji, metodę dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych, zastosowano do opisu efektów nielokalnych (Rozdz. 2) oraz efektu warstwy brzegowej (Rozdz. 3).

Opracowano procedury numeryczne i zaadaptowano metodę Ritza do wyznaczania własności makroskopowych dla dwufazowych kompozytów liniowych sprężystych i piezoelektrycznych o geometriach innych, niż warstwowe (por. Dodatek D.3).

Podsumowując, otrzymano następujące wyniki własnych badań dotyczące poszczególnych klas materiałów.

### A. Kompozyty sprężyste

- Podano wyprowadzenie nielokalnych relacji konstytutywnych naprężenie-odkształcenie, używając metody rozwinięć asymptotycznych (Rozdz. 2.3, [78]).

Wyznaczono równania opisujące wpływ mikrostruktury na człony wyższego rzędu w nielokalnym związku konstytutywnym. Wprowadzone nielokal-

ne związki konstytutywne naprężenie-odkształcenie uwzględniające wyższe człony rozwinięcia asymptotycznego pól odkształceń. Umożliwiło to w dalszych pracach rozwinięcie badań nad wpływem mikrostruktury na makroskopowe zachowanie się kompozytów, zachowując w opisie parametr wymiaru niejednorodności, (np. [33, 59, 70]). W szczególności, na podstawie formuł (2.29), (2.36) wyznaczono efekty rozpraszania Rayleigha dla fal w kompozycie sprężystym (por. [33]).

- Wprowadzono definicję szczególnego typu materiału gradientowego FGM (ang. *Functionally Graded Material*) jako materiału otrzymanego przez proces niejednorodnej homogenizacji i przeanalizowano wpływ mikrostruktury na zmianę profilu fali podczas jej przejścia przez warstwę z materiału FGM (Rozdz. 7.2, [76]).

Definicja własności materiału gradientowego jako własności materiału „zhomogenizowanego”, makroskopowo niejednorodnego, została powszechnie przyjęta w pracach dotyczących matematycznej teorii kompozytów i stanowi podstawę rozważań w teorii projektowania materiałów gradientowych (por. Rozdz. 5 i cytowaną w nim literaturę). Dzięki tej definicji pokazano istnienie warstwy z materiału gradientowego, której własności sprężyste są izotropowe (Rozdz. 7.2, Rys. 7.9).

- Sformułowano i udowodniono twierdzenie o homogenizacji ośrodka o periodycznie stochastycznym rozkładzie szczelin w osnowie sprężystej, z założonymi warunkami Signioriniego na szczelinach, uzyskując makroskopowo nieliniowe zachowanie się ośrodka osłabionego przez szczeliny (Rozdz. 6.3, [79]).

Udowodniona teza twierdzenia o postaci efektywnej energii wewnętrznej osnowy osłabionej losowym rozkładem szczelin ma dużą wartość poznawczą. Rezultat ten stanowi uogólnienie wyniku otrzymanego dla rozkładu periodycznego, na rozkład losowy, który jest bardziej zbliżony do rzeczywistego materiału spękanego. Zaproponowano także ograniczenia na energię efektywną kompozytu losowo spękanego.

## B. Kompozyty piezoelektryczne

- Wprowadzenie zapisu absolutnego i definicji tensora sprzężenia elektromechanicznego jest propozycją ogólnego, zwarteo zapisu, który łączy opis tego sprzężenia z własnościami materiałowymi, a jednocześnie umożliwia wyznaczenie wszystkich możliwych charakterystyk modów sprzężeń elektromechanicznych w piezoelektrykach, potrzebnych w zastosowaniach (Dodatek D.2).

- Otrzymane wzory na tzw. laminaty wielokrotne (inaczej laminaty „płaszczowe” czy laminaty wyższych rzędów), dla dwuskładnikowego kompozytu piezoelektrycznego są pierwszym etapem w badaniach zbioru G-domknięcia, czyli zbioru wszystkich możliwych materiałów kompozytowych otrzymanych w wyniku homogenizacji dwu ustalonych faz wyjściowych (Rozdz. 4). Wynik ten był opublikowany jedynie w formie doniesień konferencyjnych, por. [62], [63].

Ważne pytanie, czy wśród badanej klasy materiałów wielokrotnie laminowanych są takie, które mogą pracować optymalnie przy zadanych stanach odkształcenia i pola indukcji pozostaje bez odpowiedzi. A zatem otwartym problemem jest zagadnienie istnienia tensorów będących tzw. optymalnymi ograniczeniami górnymi bądź dolnymi, które opisują własności materiałów piezoelektrycznych.

- Wyprowadzono komplet równań opisujących efekt warstwy brzegowej w kompozycie o strukturze warstwowej (Rozdz. 3.5, [75]).

Wydaje się, że coraz częstsze zastosowania piezokompozytów mikrowarstwowych będą wymagały sformułowania inżynierskich uwarunkowań, w których uzyskane przez autorkę wyniki teoretyczne mogą zostać bezpośrednio wykorzystane.

- Sformułowano i udowodniono twierdzenie o homogenizacji fizycznie nieliniowego kompozytu piezoelektrycznego (Rozdz. 3.1, [161]).

Twierdzenie to jest istotne dla wprowadzonych w dalszej części rozprawy pojęć i wyników szczegółowych. Dzięki niemu, heurystyczne rezultaty dla liniowej piezoelektryczności, otrzymane na drodze formalnych rozwinięć asymptotycznych, uzyskały matematyczne uzasadnienie. Twierdzenie nie jest prostym uogólnieniem istniejących analogicznych wyników dla liniowej sprężystości, gdyż wymaga dedefiniowania nowych przestrzeni funkcyjnych i otrzymania nowych szacowań w dowodzie. Podstawowe znaczenie dla twierdzeń o istnieniu projektów optymalnych ma pojęcie H-zbieżności dla materiałów piezoelektrycznych (Rozdz. 5).

- Wyznaczono nowe ograniczenia na własności liniowych kompozytów piezoelektrycznych (Rozdz. 3.4, [64]).

Ograniczenia na tensor blokowy stałych kompozytu piezoelektrycznego stanowią, podobnie jak w przypadku kompozytu czysto sprężystego, aparat niezbędny w teorii kompozytów. Między innymi, dla materiałów dwuskładnikowych są one punktem wyjścia do opisu zbioru G-domknięcia.

- Sformułowano i udowodniono twierdzenie o istnieniu projektu optymalnego, w zagadnieniu projektowania na minimum uogólnionej „podatności” klasy piezoelektrycznych materiałów gradientowych oraz wprowadzono pojęcie uogólnionej powierzchni wyężenia dla kompozytu piezoelektrycznego (Rozdz. 5.3 i 5.4).

Projektowanie sprężystych materiałów gradientowych na minimalną podatność jest nową dziedziną w teorii optymalizacji konstrukcji. Rozszerzenie tej koncepcji na gradientowe materiały piezoelektryczne jest prezentowane w obecnej rozprawie po raz pierwszy. Potrzeba takiego rozszerzenia ma swoje źródło w rosnącym zainteresowaniu materiałami kompozytowymi, w których jednym ze składników jest materiał piezoelektryczny. Z materiałów tych korzysta wiele nowoczesnych technologii. Zarówno definicje dotyczące piezoelektrycznego materiału gradientowego jak i twierdzenia sformułowane i udowodnione w Rozdziale 5 zostały przedstawione w niniejszej rozprawie po raz pierwszy. Dla ilustracji, pokazano przykład jednowymiarowy, gdzie obliczenia dokonano w programie Maple. Otrzymane wyniki dobrze ilustrują najważniejsze idee rozważań teoretycznych.

### C. Kompozyty termosprężyste

Sformułowano i udowodniono twierdzenie o homogenizacji stochastycznie periodycznego kompozytu termosprężystego, poprzez wprowadzenie pomocniczego zagadnienia minimum funkcjonału, dla którego równania Eulera są równaniami liniowej termosprężystości (Rozdz. 6.2, [80]).

Zagadnienia termosprężystości są ważną częścią teorii kompozytów. Dla zagadnień periodycznych istnieje szereg wyników (por. [66], [67]), ale zagadnienia losowe nie były dotychczas badane przy pomocy metod matematycznej teorii homogenizacji. Oryginalnym pomysłem, zastosowanym w tej części pracy, było wprowadzenie uogólnionego funkcjonału, który może opisywać klasę kompozytów fizycznie nieliniowych oddziaływujących z dodatkowym polem skalarnym. Przeprowadzona homogenizacja, przy zastosowaniu metody  $\Gamma$ -zbieżności, umożliwia odczytanie postaci funkcjonału granicznego, a jego redukcja do liniowego zagadnienia prowadzi do znalezienia formuł na efektywne stałe termosprężyste. Zostało to zilustrowane obliczeniami w kwadraturach, dla przypadku zagadnienia jednowymiarowego.

W Rozdziale 7 przeprowadzono analizę numeryczną wpływu mikrostruktury na własności efektywne kompozytów, która ilustruje omówione powyżej wyniki teoretyczne.



Należy podkreślić, że postęp w procesie projektowania materiałów inteligentnych będzie stymulował rozwój badań teoretycznych w zakresie projektowania elementów piezoelektrycznych z więzami narzuconymi na poziom naprężeń i pól elektrycznych. W badaniach tych punktem wyjścia może być wprowadzone w niniejszej pracy pojęcie uogólnionej powierzchni wyężenia (Rozdz. 5). Natomiast, określenie zbioru G-domknięcia dla piezokompozytów dwuskładnikowych poprzez, np. podanie zbiorów gęstych, jest kluczowym zagadnieniem przy poszukiwaniu projektów optymalnych. Badania w tym kierunku będą prowadzone przez autorkę w najbliższej przyszłości.

Zjawisko pojawiania się mikrostruktur, podczas ferroelektrycznych przejść fazowych opisywane aparatem matematycznej teorii homogenizacji (por. [26]), może zostać wzbogacone przez użycie ogólnych formuł opisujących makroskopowe własności laminatów „płaszczowych” podanych w tej rozprawie.

## Bibliografia

- [1] Abdaimi Y., Michaille G., Licht C., Stochastic homogenization for an integral functional of a quasiconvex function with linear growth, *Asymptotic Anal.*, 1997, **15**, 183–202.
- [2] Adler J.P., *The Geometry of Random Fields*, Wiley, Chichester, 1981.
- [3] Adler P.M., Thovert J.-F., Real porous media: Local geometry and macroscopic properties, *Appl. Mech. Reviews*, 1998, **51**, 537–585.
- [4] Adler P.M., Thovert J.-F., *Fracture and Fracture Networks*, Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [5] Akcoglu M.A., Krengel U., Ergodic theorems for superadditive processes, *J. Reine Angew. Math.*, 1981, **323**, 53–67.
- [6] Allaire G., *Shape Optimization by the Homogenization Method*, Springer, New York, 2002.
- [7] Allaire G., Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, **23**, 1482–1518.
- [8] Allaire G., Briane M., Multiscale convergence and reiterated homogenization, *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 1996, **126A**, 297–342.
- [9] Andrews K.T., Wright S., Stochastic homogenization of elliptic boundary-value problem with  $L^p$ -data, *Asymptotic Anal.*, 1998, **17**, 165–184.
- [10] Aoubiza B., Crolet J.M., Meunier A., On the mechanical characterization of compact bone structure using the homogenization theory, *J. Biomechanics*, 1996, **29**, 1539–1547.
- [11] Attouch H., *Variational Convergence for Functions and Operators*, Pitman, Boston, 1984.
- [12] Avellaneda M., Olson T., Effective medium theories and effective electro-mechanical coupling factors for piezoelectric composites, *J. Int. Mat. Struct.*, **4**, 1993.
- [13] Azé D., Epi-convergence et dualité. Applications à la convergence des variables primales et duales pour des suites d'optimization convexe, Publications AVA-MAC, Université de Perpignan, Report No. 84-12, 1984.
- [14] Bachvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednienie processov v periodyčeskich sredach*, Izd. Nauka, Moskwa 1984 (w j. rosyjskim)

- [15] Bahr U., Gambin B., Scattering of an elastic wave from a heterogeneous material, *Arch. Mech.*, 1977, **29**, 6, 769–783.
- [16] Bendsoe M.P., *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [17] Bendsoe M.P., Kikuchi N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1988, **71**, 197–224.
- [18] Bendsoe M.P., Sigmund O., *Topology Optimization, Theory, Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [19] Bendsoe M.P., Guedes J.M., Haber R.B., Pedersen P., Taylor J.E., An analytical model to predict optimal material properties in the context of optimal structural design, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 1994, **61**, 4, 930–937.
- [20] Bensoussan A., Lions J., Papanicolaou G., *Asymptotic Analysis for Periodic Structure*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [21] Bensoussan A., Lions J., Papanicolaou G., *Boundary Layer Analysis in Homogenization of Diffusion Equation with Dirichlet Conditions*, K. Ito (red.), J. Willey and Sons, New-York, 1978.
- [22] Benveniste Y., The determination of the elastic and electric fields in a piezoelectric inhomogeneity, *J. Appl. Phys.*, 1992, **72**, 1086–1095.
- [23] Benveniste Y., Universal relations in piezoelectric composites with eigenstress and polarization fields, Part I: Binary media – local fields and effective behavior, *J. Appl. Mech.*, 1993, **60**, 265–269; Part II: Multiphase media – effective behavior, *ibid.*, 270–275.
- [24] Berggren S.A., Lukkassen D., Meidell A., Simula L., On stiffness properties of square honeycombs and other unidirectional composites, *Composites*, Part B, 2001, **32**, 503–511.
- [25] Berggren S.A., Lukkassen D., Meidell A., Simula L., Some methods for calculating stiffness properties of periodic structures, *Applications of Mathematics*, 2003, **48**, 2, 97–110.
- [26] Bhattacharya K., A novel approach to the application of ferroelectric thin films to micro-actuation, XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Warszawa, 2004.
- [27] Bielski W., *Nonstationary Flows of Viscous Fluids Through Porous Elastic Media. Homogenization Method*, Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sci., A-29 (388), Warszawa, 2005.

- [28] Bielski W., Bytner S., Homogenization of piezoelectric medium, Abstracts of the 27th Polish Solid Mechanics Conference, August 29 – September 3, 1988, Rytro.
- [29] Bisegna P., Luciano R., Variational bounds for the overall properties of piezoelectric composites, *J. Mech. Phys. Solids*, 1996, **44**, 583–602.
- [30] Bisegna P., Luciano R., On methods for bounding the overall properties of periodic piezoelectric fibrous composites, *J. Mech. Phys. Solids*, 1997, **45**, 8, 1329–1356.
- [31] Bisegna P., Luciano R., Bounds on the off-diagonal coefficients of the constitutive tensor of a composite material, *Mech. Res. Comm.*, 1996, **23**, 239–245.
- [32] Bourgeat A., Mikelić A., Wright S., Stochastic two-scale convergence in the mean and applications, *J. Reine Angew. Math.*, 1994, **456**, 19–51.
- [33] Boutin C., Auriault J.L., Ralyeigh scattering in elastic composite materials, *Int. J. Engng Sci.*, 1993, **227**, 1669–1683.
- [34] Braides A., Omogeneizzazione di integrali non coercivi, *Ricerche di Mat.*, 1983, **XXXII**, 2, 348–368.
- [35] Buryachenko V.A., Rammerstofer F.G., Local effective thermoelastic properties of graded random structure matrix composites, *Arch. of Appl. Mech.*, 2001, **71**, 249–272.
- [36] Buryachenko V.A., Rammerstofer F.G., On the thermo-elasto-statics of composites with coated randomly distributed inclusions, *Int. J. Solids and Structures*, 2000, **37**, 3177–32.
- [37] Buryachenko V.A., Effective strength properties of elastic physically nonlinear composites, w: Marigo J.J, Rousselier G., (red.), Proceedings of the MECAMAT Conference on Micromechanics of Materials. Editions Eyrolles, Paris, 1993, 567–578.
- [38] Buryachenko V.A., Multiparticle effective field and related methods in micromechanics of composite materials, *Applied Mechanics Reviews*, 2001, **54**, 1–47.
- [39] Boccardo L., Murat F., Homogénéisation de problèmes quasi-linéaire, w: *Atti del Convegno Studia di Problemi – Limite della Analisi Funzionale*, Bressanone, 7-9 Settembre, Pitagora Editrice, Bologna, 1982, 13–51.
- [40] Boivin D., Depauw J., Spectral homogenization of reversible random walks on  $\mathbb{Z}^d$  in a random environment, *Stochastic Processes and their Appl.*, 2003, **104**, 29–56.
- [41] Bouchitté G., Convergence et relaxation de fonctionnelles convexes du calcul des variations à croissance linéaire, *Annales Fac. Sci. Toulouse*, 1987, **8**, 7–36.

- [42] Bouchitté G., Suquet P., Homogenization, plasticity and yield design, w: *Composite Media and Homogenization Theory*, G. Dal Maso, G.F. Dell' Antonio (red.), Birkhäuser, Boston, 1991, 107–133.
- [43] Bourgeat A., Mikelić A., Wright S., Stochastic two-scale convergence in the mean and applications, *J. Reine Angew. Math.*, 1994, **456**, 19–51.
- [44] Braides A., Omogeneizzazione di integrali non coercivi, *Ricerche di Mat.*, 1983, **32**, 348–68.
- [45] Braides A., Defranceschi A., *Homogenization of Multiple Integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [46] Bytner S., Gambin B., Homogenization of first strain-gradient body, *Mech. Teor. Stos.*, 1988, **26**, 3, 423–429.
- [47] Cioranescu D., Donato P., *An Introduction to Homogenization*, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [48] Chen T., Piezoelectric properties of multiphase fibrous composites: some theoretical results, *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, **41**, 1781–1794.
- [49] Christensen R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Moscow, Mir, 1982 (w j. rosyjskim).
- [50] Cowin S.C., The mechanical properties of cancellous bone, w: *Bone Mechanics*, S.C. Cowin (red.), CRC Press, Inc. Boca Raton, Florida, 1989, 129–157.
- [51] Crolet J.M., Aoubiza B., Meunier A., Compact bone: numerical simulation of mechanical characteristics, *J. Biomechanics*, 1993, **26**, 677–687.
- [52] Dacorogna B., *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [53] Dal Maso G., Modica L., Nonlinear stochastic homogenization, *Ann. Mat. Pura ed Applicata IV*, 1986, **144**, 347–389.
- [54] Dal Maso G., *An Introduction to  $\Gamma$ -Convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [55] Dal Maso G., Modica L., Nonlinear stochastic homogenization and ergodic theory, *J. Reine Angew. Math.*, 1986, **368**, 28–42.
- [56] Dunn M.L., Taya M., Micromechanics predictions of the effective electrostatic moduli of piezoelectric composites, *Int. J. Solids Structures*, 1993, **30**, 161–175.
- [57] Dumontet H., Study of a boundary layer problem in elastic composite materials, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1986, **20**, 2, 265–286.

- [58] Ekeland I., Temam R., *Convex Analysis and Variational Problems*, Amsterdam, 1976.
- [59] Fish J., Wen-Chen higher-order homogenization of initial-boundary value problems, *J. Eng. Mech.*, 2001, **127**, 1223–1230.
- [60] Francfort G.A., Homogenization and linear thermoelasticity, *SIAM J. Math. Anal.*, 1983, **14**, 696–708.
- [61] Galka A., Gambin B., Telega J.J., Tokarzewski S., Macroscopic properties of compact bone and its hierarchical structure, *Acta Bioeng. Biomech.*, 2003, **5**, Supplement 1, 155–160.
- [62] Galka A., Gambin B., Telega J.J., Wielowarstwowe kompozyty piezoelektryczne: modelowanie i optymalizacja, II Sympozjon, Kompozyty. Konstrukcje warstwowe, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław-Karpacz, 2002.
- [63] Galka A., Gambin B., Telega J.J., Multi-layered piezocomposites: homogenization and optimization; Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions; W. Szcześniak (red.), Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Dniepropietrowsk, 2003, 299–308.
- [64] Galka A., Gambin B., Telega J.J., Variational bounds on the effective moduli of piezoelectric composites, *Arch. Mech.*, 1998, **50**, 4.
- [65] Galka A., Telega J.J., Tokarzewski S., Nonlinear transport equation and macroscopic properties of microheterogeneous media, *Arch. Mech.*, 1997, **49**, 293–319.
- [66] Galka A., Telega J.J., Wojnar R., Homogenization and thermopiezoelectricity, *Mech. Res. Comm.*, 1992, **19**, 315–324.
- [67] Galka A., Telega J.J., Wojnar R., Some computational aspects of homogenization of thermopiezoelectric composites, *Comp. Assisted Mech. Eng. Sci.*, 1996, **3**, 2, 133–154.
- [68] Galka A., Telega J.J., Wojnar R., Thermodiffusion in heterogeneous elastic solids and homogenization, *Arch. Mech.*, 1994, **46**, 3, 267–314.
- [69] Gambin B., Influence of boundary on mean wave in random medium, w: *Continuous Models of Discrete Systems*, 1980, University of Waterloo Press, 551–564.
- [70] Gambin B., Long waves in random elastic composites, w: *Continuous Models of Discrete Systems*, K.H. Anthony (red.), World Sc., 1992.
- [71] Gambin B., Opis własności ciał sprężystych losowo niejednorodnych, Politechnika Poznańska, Materiały dla Studiów Doktoranckich i Podyplomowych, 13, 1986.
- [72] Gambin B., Stochastic homogenization, *Control and Cybern.*, 1994, **23**, 4, 672–676.

- [73] Gambin B., Stochastic homogenization of the first gradient strain modelling of elasticity, *J. Theor. Appl. Mech.*, 1997, **1**, 35, 83–93.
- [74] Gambin B., Two-scale asymptotic expansion in the theory of random media, Abstracts of the 27th Polish Solid Mechanics Conference, August 29 – September 3, 1988, Rytro.
- [75] Gambin B., Gałka A., Boundary layer problem in piezoelectric composite, w: *IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics*, D.F. Parker i A.H. England (red.), Kluwer Acad. Publish., 1995, 327–332.
- [76] Gambin B., Gałka A., Telega J.J., A graded material model based on homogenization; w: *Structured Media, TRECOP'01*, B.T. Maruszewski (red.), Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2002, 71–82.
- [77] Gambin B., Gałka A., Telega J.J., Tokarzewski S., Influence of anisotropy induced by microcracks on effective elastic properties, *Engng. Trans.*, 2005, **53**, 4, 363–374.
- [78] Gambin B., Kröner E., Higher-order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media, *Phys. Stat. Sol.*, 1989, (b), **151**, 513–519.
- [79] Gambin B., Telega J.J., Effective properties of elastic solids with randomly distributed microcracks, *Mech. Res. Comm.*, 2000, **27**, 697–706.
- [80] Gambin B., Telega J.J., Nazarenko L., Stationary thermoelasticity and stochastic homogenization, *Arch. Mech.*, 2002, **54**, 319–345.
- [81] Glasser A.M., The use of transient FGM interlayers for joining advanced ceramics. *Composites, Part B*, 1997, **28**, 71–84.
- [82] Gibiansky L.V., Torquato S., On the use of homogenization theory to design optimal piezocomposites for hydrophone applications, *J. Mech. Phys. Solids*, 1997, **45**, 689–708.
- [83] Golden K., Papanicolaou G., Bounds for effective parameters of heterogeneous media by analytic continuation, *Commun. Math. Phys.*, 1983, **90**, 473–491.
- [84] Hetnarski R.B., Ignaczak J., *Mathematical Theory of Elasticity*, Taylor and Francis, New York, London, 2004.
- [85] Hetnarski R.B., Ignaczak J., Generalized thermoelasticity, *J. Thermal Stresses*, 1999, **22**, 451–476.
- [86] Ichikawa K. (red), *Functionally graded materials in the 21<sup>st</sup> century*, Kluwer Acad. Publ., Boston, Dodrecht, London, 2001.

- [87] Jemioło S., Telega J.J., Representation of tensor functions and applications in continuum mechanics, IFTR Reports, 3/1997.
- [88] Jikov V.V., Asymptotic problems connected with the heat equation in perforated domains, *Math. USSR - Sb.*, 1992, **71**, 125–147.
- [89] Jikov V.V., Problems of function extension related to the theory of homogenization, *Diff. Eqs.*, 1990, **26**, 33–44.
- [90] Jikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A., *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [91] Jourdain B., Lelièvre T., Le Bris C., Existence of solution for a micro-macro model of polymeric fluid: the FENE model, *J. Func. Anal.*, 2004, **209**, 162–193.
- [92] Khoroshun L.P., Methods of the theory of random functions in determining the macroscopic properties of microheterogeneous media, *Int. Appl. Mech.*, 1978, **14**, 2, 3–17.
- [93] Khoroshun L.P., Nazarenko L.V., Thermoelasticity of orthotropic composites with ellipsoidal inclusions, *Int. Appl. Mech.*, 1990, **26**, 9, 3–10.
- [94] Koizumi M., FGM activities in Japan. *Composites, Part B*, 1997, **28**, 1–4.
- [95] Komorowski T., Olla S., On the sector condition and homogenization of diffusion with a Gaussian drift, *J. Func. Anal.*, 2003, **197**, 179–211.
- [96] Kozlov S.M., Averaging of random operators, *Math. USSR - Sb.*, 1980, **37**, 167–180.
- [97] Kycia K., Nowicki A., Gail O., Hien T.D., Calculation of effective material tensors and the electromechanical coupling coefficient of a type 1-3 composite transducer, *Arch. Acoustics*, 1996, **21**, 371–386.
- [98] Lakes R., Foam structures with a negative Poisson's ratio, *Science*, 1987, **235**, 1038–1040.
- [99] Larsen U.D., Sigmund O., Bouwstra S., Design and fabrication of compliant micro-mechanisms and structures with negative Poisson's ratio, *Journal of Microelectronic Systems*, 1997, **6**, 99–106.
- [100] Laurent P.J., *Approximation et Optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
- [101] Lewiński T., Telega J.J., *Plates, Laminates and Shells: Asymptotic Analysis and Homogenization*, Singapore, World Scientific, 2000.
- [102] Licht C., Michaille G., Global-local subadditive ergodic theorems and application to homogenization in elasticity, Preprint Département de Sciences Mathématiques, Université Montpellier II, 4, 1997.



- [103] Lipton R., Homogenization of stresses fluctuations, failure criteria and design of functionally graded materials for strength and stiffness, *J. Mech. Phys. Sol.*, 2001.
- [104] Liu G.R., Han X., Lam K.Y., Stress waves in functionally gradient materials and its use for material characterization, *Composites: Part B*, 1999, **30**, 383–394.
- [105] Luciano R., Willis J.R., Boundary-layer corrections for stress and strain fields in randomly heterogeneous materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 2003, **51**, 1075–1088.
- [106] Łydźba D., *Zastosowanie metody asymptotycznej homogenizacji w mechanice gruntów i skal*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2002.
- [107] Markworth A.J., Ramesh K.S., Parks W.P., Modelling studies applied to functionally graded materials, *Journal of Materials Science*, 1995, **30**, 2183–2193.
- [108] Maugin G.A., *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [109] Maugin G.A., Turbé N. Homogenization of piezoelectric composites via Bloch expansion, *Int. J. Appl. Electromagnetics in Mat.*, 1991, **2**, 135–140.
- [110] Messaoudi K., Michaille G., Stochastic homogenization of nonconvex integral functionals, *Math. Modelling Numer. Anal.*, 1995, **28**, 329–356.
- [111] Milton G., *The Theory of Composites*, Cambridge University Press, 2002.
- [112] Milton G., Kohn R.V. *J. Mech. Phys. Solids*, 1988, **36**, 6, 597–629.
- [113] Murat F., Compacité par compensation, *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, Classe di Scienze, Serie IV*, 1978, **5**, 489–508.
- [114] Murat F., Tartar L., H-convergence, w: *Topics in mathematical modeling of composite materials*, Birkhäuser, 1997.
- [115] Nazarenko L.V., Thermoelastic properties of porous elastic materials, *Int. Appl. Mech.*, 1997, **33**, 2, 114–121.
- [116] Nelli Silva E.C., Nishivaki S., Kikuchi N., Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducer using topology optimization. Part II, *Arch. Comp. Meth. Eng.*, 1999, **6**, 3, 191–222.
- [117] Nelli Silva E.C., Ono Fonseca J.S., Montero de Espinosa F., Crumm A.T., Brady G.A., Halloran J.W., Kikuchi N., Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducer using topology optimization. Part I, *Arch. Comp. Meth. Eng.*, 1999, **6**, 2, 117–182.
- [118] Newnham R.E., [www.personal.psu.edu/staff/r/e/ren1](http://www.personal.psu.edu/staff/r/e/ren1)

- [119] Nguetseng G., A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, 1989, **20**, 608–623.
- [120] Nowacki W., *Electromagnetic effects in deformable solids*, PWN, Warszawa, 1980 (w j. polskim).
- [121] Oksendal B., *Stochastic differential equations: An introduction with applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [122] Oleinik O.A., Yosifian G.A., Shamaev A.S., *Mathematical Problems of Strongly Nonhomogeneous Elastic Media*, Izd. Moskovskogo Universiteta, Moskva, 1990 (w j. rosyjskim).
- [123] Ostoja-Starzewski M., On the admissibility of an isotropic, smooth elastic continuum, *Arch. Mech.*, 2005, **57**, 4, 345–355.
- [124] Pankov A., *G-Convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Operators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [125] Paroni R., Homogenization of polycrystalline aggregates, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2000, **151**, 311–337.
- [126] Papanicolaou G.C., Macroscopic properties of composites bubbly fluids, suspensions and related problems, In: *Les Méthodes de L'homogénéisation: Théorie et Application en Physique*, D. Bergman, J.L. Lions, G. Papanicolaou, L. Tartar, E. Sanchez-Palencia (red.), Eyrolles, Paris 1982, 233–317.
- [127] Papanicolaou G.C., Varadhan S.R.S., Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients, In: Proc. Colloquium on Random Fields: Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, *Colloq. Mat. Soc. J. Bolyai*, 1979, North-Holland, Amsterdam, 835–873.
- [128] Pardoux E., Piatnitski A.L., Homogenization of nonlinear random parabolic differential equation, *Stochastic Processes and their Appl.*, 2003, **104**, 1–17.
- [129] Pascali D., Sburlan S., *Nonlinear Mappings of Monotone Type*, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1978.
- [130] Pellegrini Y.-P., Field distributions and effective-medium approximation for weakly nonlinear media, *Physical Review B*, 2000, **61**, 9365–9372.
- [131] Pellegrini Y.-P., Self-consistent effective-medium approximation for strongly nonlinear media, *Physical Review B*, 2001, **64**, 1–9.
- [132] Ponte Castañeda P., Telega J.J., Gambin B. (red.), *Nonlinear Homogenization and Its Applications to Composites, Polycrystals and Smart Materials*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2004.

- [133] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [134] Reiter T., Dvorak G.J., Micromechanical models for graded composite materials: II. Thermomechanical loading, *J. Mech. Phys. Solids*, 1998, **46**, 9, 1651–1673.
- [135] Reiter T., Dvorak G.J., Tvergaard V., Micromechanical models for graded composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1997, **45**, 1281–1302.
- [136] Roberts A.P., Statistical reconstruction of three-dimensional porous media from two-dimensional images, *Phys. Review E*, 1997, **56**, 3203–3212.
- [137] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [138] Rogula D. (red.), *Nonlocal Theory of Material Media*, CISM Courses and Lectures, No. 268, Springer-Verlag, Wien/New York, 1982.
- [139] Ruan X., Danforth S.C., Safari A., Chou T.-W., A theoretical study of the coupling effects in piezoelectric ceramics, *Int. J. Solids and Structures*, 1999, **36**, 465–487.
- [140] Sab K., Détermination de la résistance macroscopique d' une plaque perforée aléatoirement, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1994, **319**, 491–497.
- [141] Sab K., Homogenization of non-linear random media by a duality method. Application to plasticity, *Asymptotic Analysis*, 1994, **9**, 311–336.
- [142] Sab K., On the homogenization and simulation of random materials, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 1992, **11**, 585–607.
- [143] Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E., *Introduction aux Methods Asymptotiques et à L'homogénéisation*, Masson, Paris, 1992.
- [144] Sanchez-Palencia E., *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [145] Sevostianov I., Levin V., Kachanov M., On the modeling and design of piezocomposites with prescribed properties, *Arch. Appl. Mech.*, 2001, **71**, 733–747.
- [146] Shulga S.B., Homogenization of nonlinear variational problems by means of two-scale convergence, *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, 2002, **236**, 357–364.
- [147] Sigmund O., Torquato S., Aksay I.A., On the design of 1-3 piezocomposites using topology optimization, *J. Mater. Res.*, 1998, **13**, 4, 1038–1048.
- [148] Sobczyk K. *Fale stochastyczne*, PWN, Warszawa, 1982.
- [149] Sobczyk K., Reconstruction of random material microstructures: patterns of maximum entropy, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2003, **18**, 4, 273–287.

- [150] Sobczyk K. (red.) *Random Material Microstructure, Modelling and Mechanical Behaviour*, AMAS Lect. Notes 17, Inst. of Fundament. Tech. Res., Polish Academy of Sciences, Warsaw, 2004.
- [151] Sobczyk K., Kirkner D.J. *Stochastic modelling of microstructures*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [152] Soluch W. i inni, *Wstęp do piezoelektroniki*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 1980.
- [153] Spagnolo S., Convergence in energy for elliptic operators, w: Hubbard B. (red.), *Proceedings of the Third Symposium on Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, (College Park). Academic Press, New York, 1975, 469–498.
- [154] Talbot D.R.S., Willis J.R., Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of nonlinear composites, *IMA J. Appl. Math.*, 1987, **39**, 215–240.
- [155] Telega J.J., Homogenization of fissured elastic solids in the presence of unilateral conditions and friction, *Computational Mech.*, 1990, **6**, 109–127.
- [156] Telega J.J., Justification of a refined scaling of stiffnesses of Reissner plates with fine periodic structure, *Math. Models and Math. in Appl. Sci.*, 1992, **2**, 375–406.
- [157] Telega J.J., Piezoelectricity and homogenization. Application to biomechanics, w: *Continuum Models and Discrete Systems*, vol. 2, G.A. Maugin (red.), Longman, Scientific and Technical, Harlow, Essex, 1991, 220–229.
- [158] Telega J.J., Bielski W., Flow in random porous media: effective models, *Computers and Geotech.*, 2003, **30**, 271–288.
- [159] Telega J.J., Bielski W., Nonstationary flow through random porous media with elastic skeleton, w: *Poromechanics II*, J.-L. Auriault, C. Geindreau, P. Royer, J.-F. Bloch, C. Boutin, J. Lewandowska (red.), A.A. Balkema Publishers, Lisse, The Netherlands, 2002, 569–574.
- [160] Telega J.J., Bielski W., Stochastic homogenization and macroscopic modelling of composites and flow through porous media, *Theoret. Appl. Mech.*, 2002, **28-29**, 337–377.
- [161] Telega J.J., Gałka A., Gambin B., Effective properties of physically nonlinear piezoelectric composites, *Arch. Mech.*, 1998, **50**, 321–340.
- [162] Telega J.J., Gambin B., Effective properties of an elastic body damaged by random distribution of microcracks, w: *Continuum Models and Discrete Systems*, K.Z. Markov (red.), 1996, World Scientific, Singapore, 300–307.

- [163] Telega J.J., Gambin B., Rola nowoczesnych metod matematycznych – wariacyjnych i asymptotycznych – w modelowaniu materiałów kompozytowych i konstrukcji, w: *Nauki Techniczne u Progu XXI Wieku: wizja wybranych dyscyplin z perspektywy IPPT PAN*, M. Kleiber (red.), Drukarnia Braci Grodzickich, Warszawa, 2002, 33–40.
- [164] Telega J.J., Gambin B., Stochastic homogenization of elastic perfectly plastic Hencky solids: influence of boundary conditions, *Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci.*, 2001, **49**, 17–29.
- [165] Telega J.J., Lewiński T., Stiffness loss of cross-ply laminates with interlaminar cracks, w: *MECAMAT 93, International Seminar on Micromechanics of Materials*, Editions Eyrolles, Paris, 1993, 317–326.
- [166] Telega J.J., Tokarzewski S., Gałka A., Effective conductivity of non-linear two-phase media: homogenization and two-point Padé approximants, *Acta Appl. Math.*, 2000, **61**, 295–315.
- [167] Telega J.J., Wojnar R., Electrokinetics in random deformable porous media, w: *IUTAM Symposium on the Mechanics of Physicochemical and Electrochemical Interactions in porous Media*, May 18-23, 2003, Rolduc, Kerkade, The Netherlands, S.C. Cowin, J.M. Huyghe (red.), Kluwer, 2003.
- [168] Tiersten H.F., Equations for the extension and flexure of relatively thin electro-elastic plates undergoing large electric fields, w: *Mechanics of Electromagnetic Materials and Structures*, J.S. Lee, G.A. Maugin, Y. Shindo (red.), AMD-vd.161, ASME, New York, 1993, 21–34.
- [169] Torquato S., *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*, Springer, New York, 2002.
- [170] Torquato S., Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties, *Appl. Mech. Rev.*, 1991, **44**, 37–76.
- [171] Turbé N., Maugin G.A., On the linear piezoelectricity composite materials, *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 1991, **14**, 403–412.
- [172] Szymczyk J., Woźniak Cz., A contribution to the modelling of periodically laminated elastic solids, *Electronic Journal of Polish Agricultural Universities, Civil Engineering*, **9**, 1, 2006. Dostępne <http://www.ejpau.media.pl>
- [173] Woźniak M., On the dynamic behavior of micro-damaged stratified media *Int. J. Fract.*, 1995, **73**, 223–232.
- [174] Rychlewska J., Woźniak Cz., Modelling of functionally graded laminates revisited, *Electronic Journal of Polish Agricultural Universities, Civil Engineering*, **9**, 2, 2006. Dostępne <http://www.ejpau.media.pl>

- [175] Willis J.R., Variational estimates for the overall response of an inhomogeneous nonlinear dielectric, *Homogenization and Effective Properties of Materials and Media*, J.L. Ericksen, D. Kinderlehrer, R.V. Kohn, J.-L. Lions (red.), Springer-Verlag, New York 1986, 245-263.
- [176] Wright S., On the steady-state flow of an incompressible fluid through a randomly perforated porous medium, *J. Diff. Equations*, 1998, **146**, 261-286.
- [177] Yoon H.S., Katz J.L., Measurements of elastic properties and micro-hardness, *J. Biomech.*, 1976, **9**, 459.
- [178] Zhikov V.V., On an extension of the method of two-scale convergence and its applications, *Math. Sbornik*, 2000, **191**, 31-72.



57355