

**Andrzej Ossowski**

**ANALIZA JAKOŚCIOWA  
W ZAGADNIENIACH DYNAMIKI I STEROWANIA  
UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH**



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

WARSZAWA 2007

ISSN 0208-5658  
ISBN 978-83-89687-27-2

Redaktor Naczelny:  
doc. dr hab. Zbigniew Kotulski

Recenzent:  
prof. dr hab. Bogusław Radziszewski

Praca wpłynęła do Redakcji 17 kwietnia 2007 r.

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład: 100 egz. Ark. druk. 20

Oddano do druku w grudniu 2007 roku

---

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

## Streszczenie

Tematyka niniejszej rozprawy obejmuje wybrane zagadnienia teoretyczne mechatroniki ze szczególnym nastawieniem na analizę jakościową modeli układów mechatronicznych oraz syntezę sterowań optymalnych. Głównym celem rozprawy było opracowanie możliwie uniwersalnej metody takiej analizy i syntezy oraz prezentacja możliwości jej zastosowania. W Rozprawie kreuje się do takiej roli i systematycznie rozwija metodę optymalnych funkcji Lapunowa, bazującą na koncepcji wskaźnika stabilności i wskaźnika zbieżności wykładniczej. Stosując kwadratowe funkcje Lapunowa, podano możliwie jednolite, sformalizowane podejście do analizy jakościowej szerokiej klasy układów dynamicznych (liniowych stacjonarnych z parametrami określonymi lub przedziałowymi, układów quasiliniowych, niestacjonarnych o niepewnych parametrach i/lub nieokreślonych wymuszeniach) oraz układów sterowania z zaburzeniami i zakłóceniami (nie)mierzalnymi, które mogą być modelami realnych układów mechatronicznych.

W ramach prezentowanego podejścia omówiono podstawowe własności jakościowe oraz koncepcję dwuetapowej optymalizacji układów mechatronicznych. Według tej koncepcji, w pierwszym etapie optymalizacji szacuje się własności układu i/lub wyznacza strukturę sterowania dla nieokreślonej kwadratowej funkcji Lapunowa, wykorzystując kryterium optymalizacji lokalnej (punktowej) zbieżności wykładniczej trajektorii. W drugim etapie dokonuje się optymalizacji parametrów macierzy funkcji Lapunowa w celu uzyskania najlepszych wyników analizy stabilności i wyznaczenia parametrów sterowań optymalnych. W związku z tym rozpatrzono też obliczeniowe aspekty metody optymalnych funkcji Lapunowa. W szczególności omówiono koncepcję algorytmu genetycznego znajdowania optymalnych funkcji Lapunowa dla układów o wielu stopniach swobody, a także znaleziono ścisłe rozwiązania tego problemu dla wielowymiarowych modeli pewnych klas układów mechatronicznych. Ponadto, nakreślono możliwość i potrzebę zastosowania wielowymiarowych funkcji Lapunowa w analizie jakościowej oraz wykorzystania terminologii zbiorów rozmytych do opisu jakościowych własności układów mechatronicznych.

Wykorzystując opisane koncepcje, rozpatrzono i znaleziono rozwiązania teoretyczne wielu jakościowych zagadnień stabilności i sterowania układów mechatronicznych, będących pod wpływem różnych zakłóceń i zaburzeń. W szczególności przeprowadzono analizę stabilności układów liniowych i quasiliniowych stacjonarnych o parametrach przedziałowych oraz układów z niepewnymi parametrami, podając ogólne oszacowania dla tzw. *robust stability* zarówno w przestrzeni stanu jak i w przestrzeni parametrów. Dużo uwagi poświęcono jakościowej analizie wielowymiarowych układów drgających, układów z nieliniowymi zaburzeniami oraz układów z tarcie. Ponadto omówiono problem aktywnej modyfikacji parametrycznej i siłowej oraz stabilizacji z zakłóceniami i

wahaniami parametrów. Oszacowano też wpływ niedoskonałości charakterystyk elementów wykonawczych (na przykład nasycenia, strefy nieczułości, luzu, histerezy) oraz opóźnienia w pętli sprzężenia zwrotnego na własności jakościowe układów sterowania. Uzyskane w Rozprawie formuły analityczne, są w większości oryginalne, a wynikające z nich wnioski jakościowe – zgodne z oczekiwaniami i intuicją inżynierską lub z analogicznymi wynikami znanymi z literatury.

W Rozprawie przedstawiono również ogólne filozoficzne rozważania na temat własności jakościowych układów dynamicznych, analizę porównawczą użyteczności podstawowych rodzajów stabilności oraz metod ich badania. Miało to na celu między innymi: uściślenie podstawowych pojęć i nazewnictwa, uwydatnienie zalet metody bezpośredniej Lapunowa na tle innych metod oraz uzasadnienie wyboru rozważanych zagadnień i formy prezentacji wyników.

Z uwagi na teoretyczny charakter Rozprawy, w zasadzie nie są w niej rozpatrywane konkretne układy mechatroniczne, lecz raczej modele matematyczne, które mogą takie układy opisywać. Aby jednak uczynić niniejszą rozprawę praktycznie użyteczną, w rozważanych modelach przyjmowane są założenia mające bezpośrednie odniesienie do praktyki (na przykład ograniczenia na zaburzenia i sterowania, niepewność parametrów układów oraz niedoskonałości charakterystyk elementów wykonawczych). Z punktu widzenia układów realnych są to modele, w których zaburzenia i sterowania sprowadzają się do zmian parametrów (masowych, tłumienia i sztywności) układów i/lub działania sił zewnętrznych. Na poziomie opisu matematycznego odpowiada to klasie układów, których dynamikę można modelować układami lub inkluzjami różniczkowymi zwyczajnymi, opisanymi przez funkcje stacjonarne lub niestacjonarne i/lub quasiliniowe, z parametrami niepewnymi lub przedziałowymi, z zaburzeniami, zakłóceniami i sterowaniami. Rozpatrzone są również modele opisujące się równaniami lub inkluzjami cząstkowymi, równoważnymi przeliczalnym układom równań lub inkluzji różniczkowych zwyczajnych. Dlatego adekwatnym językiem opisu modeli układów mechatronicznych, stosowanym w niniejszej rozprawie, jest język teorii inkluzji różniczkowych.

Ze zrozumiałych względów niniejsza rozprawa ma strukturę wielowątkową, ale zasadniczo składa się z części pierwszej, wprowadzającej (Rozdziały 1 – 4) i części drugiej, omawiającej zastosowania opisanej metody (Rozdziały 5 – 10). Jednak najważniejsze z punktu widzenia prezentowanej teorii i uzyskanych wyników oryginalnych są Rozdziały 3 – 9. Załączone dodatki, chociaż stanowią tylko uzupełnienie, nie są pozbawione elementu twórczego i traktując dokładniej lub ogólniej pewne zagadnienia związane z zasadniczą treścią Rozprawy, czynią ją bardziej samowystarczalną.

## SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA .....	7
UWAGI REDAKCYJNE I JĘZYKOWE .....	17
SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ .....	19
<b>1. UKŁADY MECHATRONICZNE .....</b>	<b>21</b>
1.1 Przedmiot badań mechatroniki .....	21
1.2 Struktura układów mechatronicznych .....	22
1.3 Opis układów mechatronicznych we współrzędnych uogólnionych .....	23
1.4 Opis układów mechatronicznych we współrzędnych stanu .....	25
1.5 Wyjścia, zaburzenia i sterowania w układach mechatronicznych .....	27
<b>2. ANALIZA JAKOŚCIOWA UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH .....</b>	<b>35</b>
2.1 Własności jakościowe układów dynamicznych .....	35
2.2 Koncepcja wskaźnika stabilności .....	39
2.3 Własności stabilności układów dynamicznych .....	41
2.4 Metody analizy jakościowej układów dynamicznych .....	49
2.5 Własności stabilności układów mechatronicznych .....	53
<b>3. METODA OPTYMALNYCH FUNKCJI LAPUNOWA .....</b>	<b>57</b>
3.1 Istota metody optymalnych funkcji Lapunowa .....	57
3.2 Metoda funkcji Lapunowa dla układów zależnych od parametrów .....	65
3.3 Metoda funkcji Lapunowa dla układów nieautonomicznych .....	68
3.4 Metoda funkcji Lapunowa dla układów z zaburzeniami .....	71
3.5 Metoda funkcji Lapunowa dla układów ze sterowaniem .....	72
3.6 Ocena funkcjonowania i optymalizacja układów mechatronicznych .....	77
<b>4. OBLICZENIOWE ASPEKTY METODY OPTYMALNYCH FUNKCJI LAPUNOWA ...</b>	<b>83</b>
4.1 Zagadnienia obliczeniowe metody optymalnych funkcji Lapunowa .....	83
4.2 Funkcje Lapunowa układów liniowych stacjonarnych .....	85
4.3 Szczególne postaci macierzy funkcji Lapunowa .....	90
4.4 Kanoniczne i regularne funkcje Lapunowa .....	94
4.5 Algorytmy numeryczne metody optymalnych funkcji Lapunowa .....	102
<b>5. STABILNOŚĆ UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH .....</b>	<b>113</b>
5.1 Stabilność liniowych układów stacjonarnych .....	113
5.2 Stabilność liniowych układów niestacjonarnych .....	125

5.3	Stabilność układów quasiliniowych . . . . .	145
5.4	Stabilność układów z tarciem . . . . .	152
5.5	Bifurkacje stabilności . . . . .	158
<b>6.</b>	<b>PÓŁAKTYWNE STEROWANIE UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH . . . . .</b>	<b>165</b>
6.1	Koncepcja modyfikacji parametrycznej układów mechatronicznych . . . . .	165
6.2	Modyfikacja parametryczna układów liniowych stacjonarnych . . . . .	170
6.3	Modyfikacja parametryczna liniowych układów drgających . . . . .	172
6.4	Modyfikacja parametryczna układów niestacjonarnych . . . . .	181
6.5	Modyfikacja parametryczna układów analitycznych . . . . .	185
<b>7.</b>	<b>AKTYWNE STEROWANIE UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH . . . . .</b>	<b>189</b>
7.1	Zagadnienie aktywnej modyfikacji układów mechatronicznych . . . . .	189
7.2	Aktywna modyfikacja liniowych układów stacjonarnych . . . . .	191
7.3	Aktywna modyfikacja układów analitycznych . . . . .	200
7.4	Ruch poślizgowy w układach aktywnej modyfikacji . . . . .	207
<b>8.</b>	<b>STABILNOŚĆ I STEROWANIE UKŁADÓW CIĄGŁYCH . . . . .</b>	<b>211</b>
8.1	Dyskretyzacja modeli układów o parametrach rozłożonych . . . . .	211
8.2	Zagadnienie stabilności liniowych układów ciągłych . . . . .	213
8.3	Problemy realizacji sterowania układów ciągłych . . . . .	222
8.4	Półaktywne sterowanie układów ciągłych . . . . .	223
<b>9.</b>	<b>ANALOGOWA REALIZACJA UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH . . . . .</b>	<b>233</b>
9.1	Układy ze sterowaniem liniowym . . . . .	233
9.2	Układy z nieliniowym przełączaniem sterowania . . . . .	239
9.3	Układy z opóźnieniem sterowania . . . . .	246
9.4	Układy z zaburzeniami i zakłóceniami sterowania . . . . .	248
<b>10.</b>	<b>CYFROWA REALIZACJA UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH . . . . .</b>	<b>257</b>
10.1	Koncepcja dyskretnego sterowania układów mechatronicznych . . . . .	257
10.2	Sterowniki neuronowe układów mechatronicznych . . . . .	263
10.3	Komputerowe sterowniki układów mechatronicznych . . . . .	265
	<b>DODATKI . . . . .</b>	<b>269</b>
	<b>PODSUMOWANIE . . . . .</b>	<b>301</b>
	<b>UWAGI KOŃCOWE . . . . .</b>	<b>303</b>
	<b>LITERATURA . . . . .</b>	<b>305</b>
	<b>SUMMARY . . . . .</b>	<b>314</b>

## PRZEDMOWA

Mechatronika jest interdyscyplinarną dziedziną nauki i techniki, łączącą mechanikę (układy mechaniczne i konstrukcje) z automatyką (elektronika, kontrola, regulacja i sterowanie). Przedmiotem badań mechatroniki są układy mechatroniczne, które najogólniej można by określić jako sterowane układy mechaniczne. Powstanie takiej dziedziny, podyktowane stale rosnącymi wymaganiami stawianymi układom i konstrukcjom mechanicznym, stało się możliwe dzięki ogromnemu postępowi technologicznemu, jaki dokonał się w ostatnim ćwierćwieczu w zakresie elektroniki, komputerów oraz elementów wykonawczych – tłumików i siłowników.

Jak każda nowa dziedzina interdyscyplinarna, mechatronika otwiera nowe możliwości, ale i nowe problemy (Uhl [109]). Ponieważ nie zakończył się jeszcze proces utrwalenia specyficznych dla niej paradygmatów w postaci terminologii oraz formalizacji pojęć i metod, mechatronika, jako dyscyplina naukowa, jest na etapie kształtowania się i rozwoju. Samo pojęcie układu mechatronicznego nie jest precyzyjnie określone, a teoria nie jest jeszcze spójna i ogólna. Jest to w pewnym stopniu spowodowane dużą różnorodnością układów mechatronicznych oraz stawianym im wymaganiom. Można jednak wyróżnić dwa podstawowe rodzaje układów mechatronicznych: układy, których funkcje użytkowe realizowane są przez sterowania zadawane programowo (na przykład roboty czy manipulatory) oraz układy takie jak: zawieszenia pojazdów, wibroizolatory, budynki, wieże, maszty, mosty, które bez sterowania spełniają określone funkcje statyczne, a sterowania służą do modyfikacji ich własności dynamicznych w otoczeniu pewnego nominalnego punktu stacjonarnego. W niniejszej rozprawie rozważane są układy przynależne do drugiej z wymienionych kategorii. Roboty czy manipulatory są wprawdzie sterowanymi układami mechanicznymi, ale ich funkcje są zasadniczo specyficzne i mogą być realizowane tylko w obecności sterowania. Uzasadnia to widoczne w literaturze rozróżnienie między mechatroniką a robotyką.

W zakresie tak rozumianej mechatroniki krajowa i światowa literatura przedmiotu pokazuje, że aktualnie wyraźna jest koncentracja badań naukowych wokół konkretnych układów praktycznych i ich modeli oraz wielu zagadnień szczegółowych. W kontekście zastosowań w mechatronice prowadzone są badania w zakresie zagadnień takich jak: czujniki pomiarowe; siłowniki i tłumiki piezoelektryczne (Crawley [14], Kurnik [31], Tylikowski [106]), elektromagnetyczne (Słama [100]), pneumatyczne a także tłumiki zbudowane na bazie cieczy magnetycznych (Maiti [40], Sapiński [95]); materiały i konstrukcje inteligentne (Tylikowski [107]); identyfikacja, monitorowanie, niezawodność i modelowanie konstrukcji, optymalne rozmieszczenie czujników dla uzyskania najlepszej obserwowalności stanu, optymalne rozmieszczenie siłowników i/lub tłumików dla osiągnięcia najlepszej sterowalności układu (Kanianthra [25], Warnitchal [114], Yamakawa [118]); oraz różne rodzaje i cele sterowania

aktywnego, półaktywnego i adaptacyjnego, modyfikujące dynamikę układów mechanicznych (Bogacz [9], Imielowski, Ossowski [21], Lee [35], Luo [37], Magana [38], Nagarajalah [46], Olgac [49], [50], [51], Onoda [53], Ossowski [61],[62], Flont [15], Sapiński [95], Setaren [97]).

W zakresie samych układów mechatronicznych prowadzone są badania układów mających konkretne przeznaczenie praktyczne, na przykład półaktywne zawieszenia, układy wibroizolacji lub tłumienia drgań (Ahmadan [1], Kejval [26], Kozanecka [27], Kurnik [30], Olgac [52], Ossowski [80], Sapiński [95], Turnau [105], Tylikowski [106], [107], Warburton [113], Valasek [110]).

Obecny rozwój mechatroniki jest wieloaspektowy i na tym tle stosunkowo mało jest prac ogólnych na temat samej mechatroniki a zwłaszcza jej aspektów teoretycznych i metodologicznych. (Buchacz [11], Holnicki-Szulc [19], Kundu [29], Ossowski [62],[73], [77], Tang [104], Tylikowski [107], Uhl [109], Yamakawa [118]). Porównując dorobek mechatroniki w tym zakresie na przykład z mechaniką analityczną czy mechaniką techniczną nietrudno zauważyć, że kierunek badań teoretycznych i metodologicznych w mechatronice, nie jest jeszcze w pełni doceniony i dopracowany. Większość prac dotyczących bardziej złożonych układów mechatronicznych w zasadzie sprowadza się do budowania modeli i symulacji komputerowych. Możliwości poznawcze tego rodzaju badań są ograniczone. Poza tym sposoby postępowania są zwykle bardzo indywidualne, dla różnych autorów. Przez to ocena i porównywanie wyników takich prac może być trudne. Tak się dzieje, po części, dlatego, że układy mechatroniczne stanowią obiekty znacznie trudniejsze do opisu teoretycznego, modelowania, syntezy i analizy niż układy mechaniczne bez sterowania. Intuicja inżynierska przydatna przy projektowaniu układów i konstrukcji mechanicznych może być zawodna w odniesieniu do układów mechatronicznych. Na przykład nie jest nawet oczywiste czy i jak można zmieniać w czasie rzeczywistym parametr tłumienia w układzie mechanicznym, aby poprawić efektywność tłumienia drgań. Do dziś uznawane są pewne intuicyjne, heurystyczne zasady półaktywnego tłumienia drgań (na przykład *sky-hook* i *ground-hook* (Sapiński [95])), które, jak się okazuje, nie są optymalne.

Chociaż układy mechatroniczne są układami sterowania, to jednak proste przeniesienie do mechatroniki metod i wyników teorii sterowania nie zawsze jest właściwym podejściem do problemu ich analizy i syntezy. Z uwagi na specyfikę i dużą różnorodność zadań stawianym układom mechatronicznym pracującym w różnych warunkach i wynikającą z tego pewną niespójność rozwoju mechatroniki, istnieje potrzeba opracowania możliwie uniwersalnej metody umożliwiającej analizę jakościową i syntezę (projektowanie) takich układów w ramach jednolitej metodologii. Niniejsza rozprawa podejmuje ten temat w zakresie ograniczonym klasą układów oraz zagadnień. Zgodnie z zapowiedzią, będą tu rozpatrywane układy, których funkcje użytkowe (statyczne) są z założenia realizowane w stanie stacjonarnym (nominalnym), a sterowania mają na celu poprawę ich własności



dynamicznych w otoczeniu tego stanu. Z kolei klasa rozpatrywanych zagadnień będzie ograniczona do analizy jakościowej (stabilności i przyciągalności) oraz syntezy sterowań modyfikujących i stabilizujących dla takich układów. Dzięki tym ograniczeniom możliwe stało się jednolite, sformalizowane ujęcie wymienionych problemów i opracowanie odpowiedniej metody (zwanej dalej metodą optymalnych funkcji Lapunowa) ich rozwiązywania.

Niniejsza rozprawa ma charakter głównie teoretyczny a po części filozoficzny, techniczny i numeryczny. Jeżeli naukę pod względem treści podzielić na wiedzę i metody dochodzenia do wiedzy, to niniejsza praca nastawiona jest przede wszystkim na metody. Omawiane zagadnienia zostały wybrane stosownie do założonych celów. Dlatego w pracy nie rozważa się konkretnych układów praktycznych z uwagi na to, że każdy taki układ stanowi problem sam w sobie. Rozpatrywane są tylko modele matematyczne, które mogą takie układy opisywać. W niniejszej pracy nie rozważa się kwestii na ile dany model odpowiada układowi rzeczywistemu, lecz jedynie kwestię sensowności założeń przyjętych odnośnie sterowań, zaburzeń, ograniczeń itp. Dlatego w Rozprawie położono szczególny nacisk na właściwe formułowanie problemów, przyjmowanie odnośnie modeli realnych założeń wynikających z istotnych ograniczeń technicznych i przedstawienie możliwości praktycznej realizacji rozwiązań teoretycznych.

Jeżeli przyjąć, że proces modelowania składa się w ogólności z dwóch etapów: *budowy modelu* i *badania modelu*, głównym celem teorii przedstawionej w Rozprawie jest etap drugi, czyli badanie modeli. Rozwijane w Rozprawie metody oraz uzyskane wyniki mogą stanowić istotne uzupełnienie pewnych kompleksowych opracowań dotyczących budowy modeli i optymalizacji struktury układów mechatronicznych (Pantelides [85], Yamakawa [118]).

Za względów praktycznych i metodologicznych dogodnie jest traktować układy mechaniczne i mechatroniczne jako obiekty jednej kategorii. Dlatego w Rozprawie przyjęto pewną koncepcję jednolitego opisu układów mechanicznych i mechatronicznych. Tylko na poziomie układów realnych to rozróżnienie jest uzasadnione, jeżeli przyjąć określenie, że układy mechatroniczne, to układy mechaniczne ze sterowaniem. Jednak na poziomie modeli, to rozróżnienie traci swą ostrość, albowiem modele wszystkich układów realnych powinny uwzględniać nieuchronne zaburzenia, odnośnie których musimy przyjąć założenie, że są jakby sterowaniami przeciwdziałającymi osiągnięciu odpowiedniej jakości funkcjonowania układu. Dlatego właściwym modelem układu mechatronicznego, czy realnego układu mechanicznego z zaburzeniami, będzie zwykle nieprzeliczalna klasa układów abstrakcyjnych, której dynamikę można opisać inkluzjami różniczkowymi. Takie właśnie modele matematyczne rozpatruje się w niniejszej rozprawie. W takim ujęciu różnica między zaburzeniami a sterowaniami sprowadza się do tego, że sterowania realizują strategię optymalną, a zaburzenia strategię antyoptymalną w stosunku do założonego celu.

Wykorzystanie inkluzji różniczkowych, jako najbardziej adekwatnego sposobu opisu modeli układów sterowania lub układów niestacjonarnych, nie jest ideą całkiem nową (Aubin [3], Kurzansky [32], Kurzweil [33], Ossowski [81], [82], Raczyński [87], [88], Ryan [93], Ważewski [115], Zareba [119]). Ciągłe jednak wykorzystanie koncepcji i języka teorii inkluzji różniczkowych w mechanice, mechatronice czy teorii sterowania jest mało popularne. Świadczą o tym klasyczne oraz nowsze publikacje, w których rozważa się na przykład zagadnienia równań różniczkowych z wymuszeniami ograniczonymi co do modułu (Gutowski [18]) lub zagadnienia niestacjonarnych równań różniczkowych (Gutowski [17], Sanches [94], Shahroz [98]), a które w istocie odnoszą się do inkluzji różniczkowych.

W klasie układów rozpatrywanych w niniejszej rozprawie metoda analizy i syntezy powinna być ukierunkowana na badanie, ocenę i modyfikację własności stabilności układów. W Rozprawie przyjęto za podstawę i sukcesywnie rozwija się metodę optymalnych funkcji Lapunowa, jako skuteczne i uniwersalne narzędzie do rozwiązywania różnorodnych zagadnień dynamiki i stabilności układów mechatronicznych. Metoda funkcji Lapunowa w swej klasycznej formie jest dość często stosowana do analizy układów dynamicznych, a w szczególności modeli układów mechatronicznych (Bailey [6], Gutowski [17], [18], Kaczorek [23], Krbek [28], Osiński [54], Sastry [96], Skalmierski [101]). Znane są też uogólnienia tej metody przydatne do analizy i syntezy układów sterowania (Bacciotti [5], Kalman [24]). Mimo mocnej podbudowy teoretycznej, metoda funkcji Lapunowa w zakresie zastosowań pozostała jednak na poziomie niemal niezmiennym. Cechą wspólną większości przykładów opisanych w literaturze jest odgadywanie odpowiedniej funkcji Lapunowa, a nie jej racjonalne wyznaczenie. W niniejszej rozprawie wskazuje się i wykorzystuje możliwość optymalnego doboru funkcji Lapunowa pod warunkiem odpowiedniego sformułowania celu badania rozważanych układów i ograniczenia klasy funkcji Lapunowa do form kwadratowych dodatnio określonych.

Zastosowanie kwadratowych funkcji Lapunowa sięga czasów Lapunowa. Nowa jest jednak koncepcja optymalizacji takich funkcji a znaczący wkład do jej rozwoju wnieśli polscy autorzy (Muszyńska [45], Olas [47], [48], Ossowski [55], [58], Radziszewski [89 – 92], Sławiński [102]), wykorzystując koncepcję wskaźnika stabilności, będącą pewną kontynuacją dawnych niezupełnie wykorzystanych idei (Bylov [12]). Istotnym postępem dokonany w niniejszej rozprawie jest jednolite rozszerzenie tych koncepcji na dowolne układy niestacjonarne i/lub quasilineowe z zaburzeniami i sterowaniami, modelowane za pomocą inkluzji różniczkowych (Ossowski [57], [59 – 65], [69], [73], [77], [80 – 82], [84]). Co więcej, w Rozprawie wprowadzono pojęcia zbieżności i stabilności wykładniczej według normy oraz dokonano rozróżnienia między wskaźnikiem stabilności a wskaźnikiem zbieżności wykładniczej. Na tej podstawie określono różne użyteczne w mechatronice kryteria optymalności. Pozwoliło to na wydatnie podniesienie konstruktywności metody funkcji Lapunowa oraz rozszerzenie zakresu jej stosowalności.

Celem Rozprawy było jednak również osiągnięcie większej „głębi” analizy i formułowanych wniosków jakościowych oraz ilościowych. Aby to osiągnąć, wykorzystano terminologię teorii zbiorów rozmytych do opisu jakościowych własności układów i wskazano na możliwości ścisłego znajdowania optymalnych funkcji Lapunowa oraz pewnych oszacowań dla układów nieliniowych i/lub niestacjonarnych oraz dla liniowych układów o wielu stopniach swobody z zaburzeniami i/lub ze sterowaniami. W szczególności zdefiniowano i wyznaczono użyteczne w mechatronice klasy tzw. *kanonicznych* i *regularnych* funkcji Lapunowa, których macierze są w istocie ścisłymi, analitycznymi rozwiązaniami algebraicznego równania Lapunowa (Kaczorek [23], Gutowski [17], Sastry [96]) w przypadku wielowymiarowym, zapewniającymi jednocześnie dokładną wartość wskaźnika stabilności (Ossowski [62], [84]). Wyniki te należy zaliczyć do unikalnych na tle wielu klasycznych i najnowszych publikacji podejmujących problem numerycznego rozwiązywania tego zagadnienia (Bartels [7], Zacevic [120]). W dotychczasowych publikacjach dotyczących zastosowania metody funkcji Lapunowa do analizy układów wielowymiarowych, nieliniowych czy niestacjonarnych z zasady uznawano, że jakiegokolwiek ścisłe wyniki nie są możliwe do uzyskania i poprzestawano na analizie numerycznej. Wyniki niniejszej rozprawy wskazują, że to przekonanie jest z gruntu nieprawdziwe.

Mając na względzie różnorodność układów mechatronicznych rozważanych w niniejszej rozprawie, można by na koniec zadać pytanie, czy formy kwadratowe nie są oby zbyt wąskim zawężeniem klasy funkcji Lapunowa, jeżeli mają stanowić podstawę uniwersalnej metody analizy i syntezy. Istnieją wszakże przykłady układów niestacjonarnych lub nieliniowych, dla których oszacowania uzyskiwane za pomocą kwadratowych funkcji Lapunowa są dość konserwatywne, a można je wydatnie poprawić stosując funkcje Lapunowa innej postaci i/lub zależne od czasu (Bogusz [10], Hu [20], Johanson [22], Sierra [99], Vanelli [111]). Otóż cechą wspólną tego typu koncepcji jest ich ograniczona stosowalność do układów lub zagadnień szczególnej postaci oraz brak możliwości uzyskania ścisłych wyników analitycznych. Jeżeli więc chcemy utrzymać zadowalającą ogólność, uniwersalność, analityczną operacyjność i racjonalność metody, to przy obecnym stanie wiedzy, musimy uznać, że klasa stacjonarnych funkcji Lapunowa w postaci dodatnio określonych form kwadratowych stanowi jedyną możliwość. Dla układów quasilineowych o nominalnym stanie stacjonarnym zastosowanie kwadratowej funkcji Lapunowa nie wydaje się być poważnym ograniczeniem w sensie rozwiązywalności zagadnienia, lecz co najwyżej w sensie dokładności uzyskiwanych oszacowań własności stabilności. Poza tym, mimo historycznej roli kwadratowych funkcji Lapunowa, nie wydaje się, aby kwestia ich użyteczności i zakresu stosowalności oraz optymalizacji była zamknięta. Świadczą o tym coraz to nowe publikacje na ten temat w poważnych czasopismach (na przykład Guo [16], Olas [47], [48], Zecevic [120]) a także wyniki uzyskane w niniejszej rozprawie.

Jeżeli zależy nam na poprawieniu oszacowań uzyskanych za pomocą kwadratowych funkcji Lapunowa, to w każdym indywidualnym przypadku warto rozważyć możliwość zastosowania funkcji Lapunowa specjalnej postaci lub w ogóle jakichkolwiek innych metod analizy jakościowej i syntezy, ale jako procedury wspomagającej. Pewnym sposobem poprawy oszacowań własności stabilności układów może być też jednoczesne zastosowanie wielu optymalnych kwadratowych funkcji Lapunowa, czyli tzw. *wielowymiarowych funkcji Lapunowa* (Ossowski [58], [79]). Koncepcja ta, polegająca na niezależnej optymalizacji kwadratowej funkcji Lapunowa według różnych kryteriów optymalności, może być przydatna do badania stabilności układów niestacjonarnych z zaburzeniami. Co ważne, jest to koncepcja oryginalna, w tym sensie, że nie sprowadza się do podobnej koncepcji tzw. *wektorowych funkcji Lapunowa* (Bellman [8], Hu [20], Lakshmikanthan [34]).

Za zrozumiałych względów Rozprawa ma strukturę wielowątkową, ale zasadniczo składa się z części pierwszej, wprowadzającej (Rozdziały 1 – 4), części drugiej (rozdziały 5 – 10), omawiającej zastosowania teoretycznych koncepcji zawartych w części pierwszej oraz z dodatków.

Celem Rozdziału 1 jest przede wszystkim określenie klasy układów (modeli) i zagadnień rozpatrywanych w niniejszej rozprawie, uściślenie oznaczeń, sprecyzowanie podstawowych definicji i nazewnictwa. W szczególności dokonano rozróżnienia między parametrami przedziałowymi a parametrami niepewnymi oraz między zaburzeniami zewnętrznymi (siłowymi), zaburzeniami parametrycznymi oraz zakłóceniami układów mechatronicznych i podano typowe dla nich ograniczenia (Ossowski [62], [73]). Ponadto określono podstawowe ograniczenia na sterowania oraz sformułowano typowe sposoby sterowania w układach mechatronicznych. Rozdział ten pełni głównie funkcję porządkującą, ale w połączeniu z dodatkami (D1–3) zawiera pewien element twórczy w postaci sformułowania klasy analitycznych modeli układów mechatronicznych w języku inkluzji różniczkowych oraz jego uzasadnienia (Ossowski [82]).

Należy podkreślić, że inkluzje różniczkowe są rozumiane w niniejszej pracy nieco ogólniej albo trochę inaczej niż są opisane w literaturze (Aubin [3]). Nie jest jednak celem Rozprawy określanie relacji podanych definicji i twierdzeń z dorobkiem światowym w tej dziedzinie. Inkluzje są tu tylko środkiem do celu, dogodnym zapisem i językiem wyrażania myśli. Dlatego niektóre stosowane określenia i oznaczenia dotyczące inkluzji różniczkowych zostały wprowadzone tylko na użytek niniejszej Rozprawy [D1], a to ze względu na brak ich dokładnych odpowiedników w literaturze światowej. Nie pretendują one jednak do rozpowszechnienia w rozwijającej się na świecie teorii inkluzji.

Rozdział 2 stanowi wstęp do analizy jakościowej układów mechatronicznych. Przedstawiono filozoficzną analizę podstawowych kwestii takich jak: własności jakościowe a ilościowe układów dynamicznych, metody jakościowe na tle innych metod badania układów (Ossowski [74]). Następnie omówiono koncepcje

wskaźnika stabilności oraz przeprowadzono analizę porównawczą definicji podstawowych własności jakościowych (stabilności i przyciągalności) pod kątem ich przydatności do opisu układów mechatronicznych. Wskazano na wyróżnioną rolę pojęcia stabilności wykładniczej oraz stabilności kwadratowej (Ossowski [55], [69]) w opisie jakościowych własności modeli w postaci inkluzji różniczkowych. Wprowadzono nowe pojęcie tzw. *stabilności wykładniczej według normy*, które okazało się bardzo użyteczne w metodzie optymalnych funkcji Lapunowa (Ossowski [55], [58]). Sformułowano podstawowe zagadnienia opisu i optymalizacji własności układów mechatronicznych. Nakreślono możliwość wykorzystania do tego celu pojęć wywodzących się z teorii zbiorów rozmytych (Ossowski [84]).

Zamieszczone odniesienia filozoficzne, będące wyrazem zainteresowań autora Rozprawy, miały na celu wypuklenie głębszej istoty omawianych w Rozprawie zagadnień, koncepcji i metod. Dzięki temu możliwe stało się nie tylko wskazanie nowych sposobów podejścia do pewnych zagadnień mechatroniki, lecz również uzasadnienie zastosowanych metod i koncepcji, a przez to lepsze ich zrozumienie.

W Rozdziale 3 sformułowano są podstawowe definicje, koncepcje i twierdzenia stanowiące podstawę metody optymalnych funkcji Lapunowa w zastosowaniu do analizy jakościowej i syntezy szerokiej klasy układów, określonej szczegółowo w Rozdziale 1. Metodę oparto na kwadratowych funkcjach Lapunowa oraz koncepcji dwuetapowej optymalizacji. W pierwszym etapie wyznaczana jest struktura układu zależna od nieokreślonej jeszcze kwadratowej macierzy funkcji Lapunowa. W etapie drugim dokonywana jest optymalizacja parametrów tej struktury (czyli optymalizacja funkcji Lapunowa) w celu wyznaczenia najlepszych oszacowań własności jakościowych układu lub w celu uzyskania optymalnej efektywności sterowania. Wiele z opisanych tu koncepcji i faktów, w formie rozproszonej lub nie do końca dopracowanej, można odnaleźć w literaturze nie tylko najbardziej aktualnej. Rozdział 3 stanowi ich łączne, kompleksowe, sformalizowane i jednolite ujęcie, co stanowi istotny element jego oryginalności. Oryginalne są również niektóre koncepcje, na przykład koncepcja *wielowymiarowych funkcji Lapunowa* (Ossowski [58], [69], [78]), rozróżnienie między wskaźnikiem stabilności a wskaźnikiem zbieżności oraz średnim wskaźnikiem zbieżności, rozróżnienia między parametrami niepewnych a parametrami przedziałowymi oraz zastosowanie zbiorów rozmytych do opisu własności jakościowych układów (Ossowski [84]).

W Rozdziale 4 omówione są różne problemy i koncepcje związane z wyznaczaniem optymalnych, kwadratowych funkcji Lapunowa dla układów wielowymiarowych. Wykazano między innymi twierdzenie o wskaźniku stabilności układu złożonego z niezależnych podukładów, które stanowi uzasadnienie do stosowania klatkowych macierzy funkcji Lapunowa dla systemów zawierających podukłady słabo oddziałujące. Oryginalna jest związana z tym koncepcja *kanonicznych funkcji Lapunowa* (Ossowski [59]) oraz *regularnych funkcji Lapunowa* (Ossowski [62], [84]), dzięki którym możliwe stało się znalezienie

ścisłych analitycznych rozwiązań pewnych zagadnień stabilności i sterowania wielowymiarowych układów dynamicznych, niekoniecznie liniowych i stacjonarnych. Oryginalna są również koncepcje *statystycznego algorytmu genetycznego* oraz pewnych procedur wspomagających proces numerycznego znajdowania optymalnych funkcji Lapunowa (Ossowski [64], [66 – 68], [75]).

Rozdziały 5, 6, 7 można uznać za całkowicie oryginalne. Większość zawartych w nich koncepcji (na przykład bifurkacje stabilności), opisów (na przykład własności ruchu poślizgowego wielowymiarowych układów sterowania) i wyników szczegółowych (na przykład dla układów z tarcieciem czy układów z nieliniowymi zaburzeniami), a zwłaszcza uzyskane formuły analityczne, opisujące własności stabilności różnego rodzaju układów, jest zasadniczo nowa i tylko niektóre wnioski (na przykład o stabilności układu quasiliniowego o stabilnej części liniowej i stacjonarnej) stanowią fakty znane, ale wyrażone w języku optymalnych funkcji Lapunowa. Wiele uwagi poświęcono zwłaszcza liniowym układom drgającym, układom o niestacjonarnych zaburzeniach, układom z tarcieciem oraz układom ze sterowaniem aktywnym lub półaktywnym. Nie wszystkie jednak koncepcje sformułowane w czterech pierwszych rozdziałach są wykorzystane w tej części pracy. Rozważone przykłady i problemy dobrane są raczej pod kątem ilustracji możliwości i ograniczeń metody optymalnych funkcji Lapunowa, a więc nie koncentrują się na samym układzie, lecz na metodzie jego analizy. Dobór przykładów i problemów miał na celu objęcie najbardziej typowych sytuacji, z jakimi mamy do czynienia z mechatronice. Siłą rzeczy wybór ten nie jest kompletny i w pewnym stopniu subiektywny. Dlatego nie tyle same wyniki są tu ważne (gdyż zawsze można je uzupełnić o kolejne przykłady), co sposoby dochodzenia do nich. Te sposoby, wynikające z istoty metody optymalnych funkcji Lapunowa, stanowią potwierdzenie jej możliwości. Wiele z rozważonych zagadnień i prezentowanych wyników można w obszerniejszej postaci odnaleźć w pracach autora Rozprawy (Ossowski [55], [57 – 63], [69], [72], [78], [82 – 84]).

Rozdział 8 zawiera rozważania na temat problemów mechatroniki układów ciągłych. Z konieczności, rozdział ten nie stanowi kompletnego opracowania tematu, lecz jedynie określa możliwości i ograniczenia zastosowania metody optymalnych funkcji Lapunowa do analizy i syntezy tego typu układów. Rozważono kilka przykładowych zagadnień, a wśród nich rozwiązanie zagadnienia stabilności belki swobodnie podpartej, poddanej obciążeniom niestacjonarnym oraz kompletne oryginalne rozwiązanie zagadnienia stabilności kolumny sprężystej poddanej nieokreślonym, lecz ograniczonym siłom ściskającym (Ossowski [81]). Rozważono również zagadnienie półaktywnego sterowania drganiami belki Eulera (Ossowski [80]).

W Rozdziale 9 rozważono ważne zagadnienie praktycznej realizacji sterowań optymalnych uzyskanych metodą optymalnych funkcji Lapunowa. Charakterystyczną cechą tych sterowań jest ich skokowa zmienność. Zbadano

własności układów sprzężenia zwrotnego w warunkach zaburzeń i zakłóceń układu mechanicznego z uwzględnieniem realnych charakterystyk elementów wykonawczych (przełączających). W szczególności oszacowano wpływ ograniczonego wzmocnienia, strefy nieczułości, luzu, histerezy, opóźnienia sterowania oraz zakłóceń pomiarowych na jakość pracy układów (jakość modyfikacji i stabilizacji). Otrzymane wyniki (Ossowski [55], [59], [60]), obowiązujące dla układów wielowymiarowych, są zasadniczo nowe (zwłaszcza dla układów z histerezą i opóźnieniem), na tle klasycznej i aktualnej literatury.

Rozdział 10 stanowi jedynie ogólne omówienie kwestii dyskretnej (cyfrowej) realizacji optymalnego sterowania układów mechatronicznych. Główny element twórczy w postaci struktury odpowiednich sieci neuronowych lub koncepcji algorytmów sterowania cyfrowego znajduje się w podanych publikacjach autora Rozprawy (Ossowski [56], [62], [64], [65], [70–72], [76], [77], [79]).

Na koniec Dodatki 1 – 16, będące integralną i nie pozbawioną elementu twórczego częścią Rozprawy, stanowią uzupełnienie zasadniczej jej treści, czyniąc ją w ten sposób bardziej samowystarczalną. W dodatkach zawarte są niektóre fragmenty dłuższych wywodów, uzupełnienia pewnych kwestii omawianych w Rozprawie oraz filozoficzne czy metodologiczne rozważania na temat teoretycznych perspektyw i praktycznych aspektów zastosowania metody optymalnych funkcji Lapunowa w mechatronice. Omówione są też pewne kontrowersyjne koncepcje matematyczne, techniczne czy filozoficzne, których znajomość nie jest konieczna dla zrozumienia zasadniczej treści Rozprawy. W szczególności zamieszczono oryginalne ujęcie inkluzji różniczkowych oraz teorii wiązek i zbiorów rozmytych w kontekście ich zastosowania do opisu własności układów mechatronicznych.

Chociaż niniejsza rozprawa ma charakter teoretyczny, przedstawiona jest w formie bardziej opisowej niż jako sucha monografia matematyczna. Aparat matematyczny Rozprawy wykorzystuje kilka nowoczesnych koncepcji możliwie prostym językiem wyłożonych. Podstawą dowodu jest więc tu dedukcja matematyczna, lecz podstawowym środkiem do formułowania hipotez i wniosków jest słowo. Dlatego stosunkowo mało jest w tekście pracy wydzielonych, formalnych twierdzeń czy definicji. Analizowane zagadnienia z pogranicza nauki i techniki są bowiem zwykle dość obszerne i nie zawsze podział toku rozważań na twierdzenia jest możliwy i uzasadniony. W zamian za to, w trakcie rozważań ogólnych w treści pracy wydzielone są liczne przykłady (zwierające analizy prostszych układów) lub nieco obszerniejsze zagadnienia określane jako *problematy*. Taka forma przedstawienia szerokiego kręgu zagadnień wydaje się bardziej adekwatna dla osiągnięcia zamierzonych celów. Autorowi Rozprawy chodziło bowiem o możliwe kompleksowe potraktowanie poruszanych zagadnień. Dlatego wychodząc z ogólnych założeń uwzględniających potrzeby i możliwości praktyki, poprzez sformułowanie zagadnienia i jego analizę teoretyczną, dochodzi się do kwestii praktycznej realizacji układów i oceny ich własności.

Szereg przykładowych modeli zamieszczonych w Rozprawie rozpatrzono głównie w celu ilustracji różnych aspektów metody funkcji Lapunowa, a nie pełnej analizy układów, które te modele mogą reprezentować. Dlatego, z uwagi na obszerność rozpatrywanych problemów i ograniczoną objętość pracy, nie wszystkie przykłady są kompletnie przeanalizowane pod względem dynamiki. Nie chodziło bowiem o zgromadzenie w niniejszej rozprawie jak największej liczby wyników szczegółowych, lecz przede wszystkim o pokazanie, jak działa metoda funkcji Lapunowa oraz jak i gdzie może być stosowana. Rozważania są jednak zwykle doprowadzone do takiego etapu, że dalszy ich tok nie budzi wątpliwości, bo nie wymaga stosowania nowych, niesprawdzonych założeń, koncepcji czy metod.

Celem niniejszej przedmowy nie było ściśle zdefiniowanie mechatroniki i określanie jej aktualnego dorobku oraz kierunków rozwoju. Przedmowa wyraża raczej osobiste odczucie autora względem tych kwestii. Dlatego zamieszczone odwołania do literatury są subiektywne i zapewne nie dość kompletne, aby rzetelnie scharakteryzować aktualny stan mechatroniki krajowej i światowej, lecz są dostateczne dla zamierzonego celu, jakim było właściwe umiejscowienie dokonań niniejszej rozprawy. W szczególności, nie uwzględniono w spisie literatury większości oryginalnych prac w języku rosyjskim dotyczących klasyki teorii stabilności, poprzestając na późniejszych opracowaniach tej teorii. Teoria stabilności nie jest tu bowiem celem samym w sobie, lecz tylko środkiem do celu, jakim jest synteza i analiza układów mechatronicznych.

Z przyczyn technicznych zrezygnowano z zamieszczania w Rozprawie jakichkolwiek wykresów, które byłyby ilustracją matematycznych zależności podanych w formie analitycznej. Z tych samych względów zrezygnowano z kolorowych ilustracji, a liczbę rysunków ograniczono do absolutnego minimum.

Z kolei rozległość oraz interdyscyplinarny charakter omawianych tematów i ograniczona objętość Rozprawy sprawiły, że jej wielowątkowa treść stała się obszerna a zarazem dość oszczędna w słowach i objaśnieniach. Wszystko to, w połączeniu z bez mała tysiącem wzorów zamieszczonych w treści Rozprawy, sprawia, że jej lektura może być zmusna.

*Mając pełną świadomość powyższych niedogodności, pragnę wyrazić szczególną wdzięczność Profesorowi Bogusławowi Radziszewskiemu za wnikliwą recenzję redakcyjną i merytoryczną Rozprawy. Chciałbym też serdecznie podziękować Profesorowi Romanowi Bogaczowi za cenne uwagi, a Doktorowi habilitowanemu Czesławowi Bajerowi – za niezłomne mobilizowanie mnie do pracy nad Rozprawą.*

*Wyrażam również swoją wdzięczność Pani magister Jolancie Wołowicz za uprzejmą pomoc w przygotowaniu manuskryptu Rozprawy oraz wszystkim osobom, które pośrednio wywarły wpływ na jej ostateczną formę.*

*Andrzej Ossowski*

*Warszawa, listopad 2007*



## UWAGI REDAKCYJNE I JĘZYKOWE

Niniejsza rozprawa (określana dalej jako Rozprawa) rozpoczyna się streszczeniem, obszerną przedmową i spisem ważniejszych oznaczeń. Zasadnicza część Rozprawy podzielona jest na dziesięć rozdziałów i uzupełniona dodatkami, podsumowaniem, uwagami końcowymi oraz spisem literatury.

Każdy rozdział, opatrzony tytułem oraz krótką przedmową napisaną kursywą, jest podzielony na paragrafy opatrzone wytłuszczonym tytułem. Rozdziały numerowane są kolejnymi liczbami arabskimi, a paragrafy – liczbami arabskimi poprzedzonymi numerem rozdziału, (na przykład Paragraf 2.1 oznacza pierwszy paragraf drugiego rozdziału). Z kolei wzory wyróżnione z tekstu są numerowane według zasady trójindeksowej. Na przykład (3.2.1) oznacza pierwszy wzór w drugim paragrafie rozdziału trzeciego. Nie wszystkie wzory są numerowane.

W Rozprawie występują wyróżnione części tekstu rozpoczynające się podkreślonym i wytłuszczonym słowem **Definicja**, **Twierdzenie**, **Lemat**, **Przykład** lub **Problem** oraz słowem *Dowód* napisanym kursywą (Pozostałe słowa w tekście Rozprawy pisane kursywą oznaczają pierwsze użycie nowego ważnego pojęcia lub określenia). **Przykład** zawiera zwykle rozwiązanie pewnego zagadnienia względnie prostego lub bardziej szczegółowego. Z kolei w **Problemacie** dyskutowane są pewne obszerniejsze lub ogólniejsze zagadnienie, ale niekoniecznie są do końca rozwiązywane. Użycie nieco przestarzałego, ale dopuszczalnego słowa *problem* będącego synonimem problemu, pozwala uniknąć niefortunnych odwołań typu: „w Problemie 5.1 rozważono problem (albo zagadnienie) ...”.

Niektóre ważniejsze definicje, twierdzenia i wzory ujęte są w ramkę. Zakończenie treści definicji lub twierdzenia nie ujętego w ramkę jest sygnalizowane znakiem #. Zakończenie przykładu lub problemu jest sygnalizowane znakiem □, natomiast zakończenie dowodu twierdzenia – znakiem ◆.

Wymienione wyżej wyróżnione części tekstu, ze względu na małą liczbę odwołań do nich z dalszych części Rozprawy, numerowane są dwiema liczbami, a więc analogicznie jak paragrafy. Na przykład zapis Problem 5.2 oznacza drugi problem w rozdziale piątym. Taki sam system numeracji przyjęto dla rysunków ze względu na niewielką ich liczbę.

Dodatki numerowane są kolejnymi liczbami naturalnymi poprzedzonymi literą D. Wzory w każdym dodatku numerowane są kolejnymi cyframi arabskimi. Przydatność zapoznania się z treścią dodatków jest sygnalizowana w tekście Rozprawy za pomocą odnośników w nawiasach kwadratowych (Na przykład [D1]). Z kolei odwołanie [D1.3] oznacza trzeci wzór w pierwszym dodatku.

Odnośniki do literatury są podawane w tekście w nawiasach okrągłych, zawierających przeważnie tylko nazwisko pierwszego autora pracy oraz numer pozycji w nawiasach kwadratowych. Lista pozycji literaturowych zamieszczona na końcu Rozprawy odnosi się do całej jej treści.

- Określenie *stabilność* i *stateczność* są traktowane jako synonimy.
- Określenia: *rozwiązanie*, jako zbiór punktów  $\{(\mathbf{x}(t), t): t \geq t_0\}$ , *trajektoria*, jako obraz geometryczny  $\{\mathbf{x}(t): t \geq t_0\}$ , czyli rzut rozwiązania na przestrzeń stanu oraz *aktualny stan*  $\mathbf{x}(t)$ , jako punkt w przestrzeni stanu, nie zawsze są rygorystycznie rozróżniane a ich znaczenie wynika z kontekstu. Na przykład powiedzenie, że trajektoria wchodzi do danego obszaru nie jest całkiem poprawne w sensie logicznym ale jest najlepszym sposobem opisu pewnej własności zachowania się układu.
- Określenia: *model układu*, *układ*, *układ mechatroniczny* jako obiekt realny lub potencjalnie możliwy do zrealizowania, nie zawsze będą ściśle rozróżniane a ich znaczenie będzie wynikać z kontekstu.
- *Obiekt* – to układ mechaniczny bez sterowania lub jego model
- *Układ sterowania* – to system złożony z obiektu i *sterownika*, czyli układu generującego sygnał sterowania. Sterowanie może być generowane w układzie otwartym (*sterowanie programowe*) lub w układzie zamkniętym (*sprzężenie zwrotne – regulacja*).
- *Układ otwarty* – to układ bez sprzężenia zwrotnego, czyli układ ze sterowaniem lub zaburzeniem zależnym tylko od czasu
- *Układ zamknięty*, *układ sprzężenia zwrotnego* – to układ sterowania ze *sprzężeniem zwrotnym*, czyli ze sterowaniem uzależnionym od aktualnego stanu obiektu.
- *Metoda bezpośrednia* bada model matematyczne w jego pierwotnej postaci.
- *Metody pośrednie* są rozumiane jako metody, które nie badają modelu matematycznego bezpośrednio lecz jego wersję przekształconą lub uproszczoną.
- Określenia: *własność*, *cecha*, *charakterystyka* jakościowa są używane zamiennie
- Określenia: *parametr*, *atrybut* lub wartość parametru nie zawsze są rozróżniane a ich użycie wynika z kontekstu.
- *Strategia antyoptimalna* (zaburzeń) to strategia najbardziej przeciwdziałająca osiągnięciu celu (wysokiej jakości) optymalnej strategii sterowań.
- **S** – ortogonalność wektorów **B**, **C** oznacza zerowanie się iloczynu skalarnego  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{C}$ .
- Określenie „macierz” oznacza tablicę liczbową o odpowiedniej liczbie wierszy i kolumn, będącą reprezentacją pewnego przekształcenia liniowego.
- Określenie „wektor” oznacza macierz jednokolumnową.
- Określenie „sieć neuronowa” oznacza sztuczną sieć jako urządzenie techniczne lub jako algorytm zapisany w pamięci komputera

### Spis ważniejszych oznaczeń

- $a, b, c, d$  – parametry rzeczywiste macierzy funkcji Lapunowa,  
 $c, r$  – promień zbioru (elipsoidy, obszaru) w przestrzeni stanu,  
 $i, j, k, l, m, n$  – indeksy naturalne albo liczba kolumn lub wierszy macierzy,  
 $h$  – histereza,  
 $k$  – wzmacnienie,  
 $m, p, q$  – stałe parametry układu,  
 $[p]$  – parametr przedziałowy,  
 $u, v, w$  – składowa sterowania,  
 $x$  – składowa wektora stanu,  
 $y$  – składowa sygnału wyjściowego,  
 $z$  – składowa zaburzeń lub zakłóceń,  
 $\alpha, \beta$  – ograniczenie składowej zaburzeń lub sterowań,  
 $\chi, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \nu, \sigma, \zeta$  – parametry liczbowe, wskaźniki lub wartości własne,  
 $\mu$  – miara zbioru (objętość) albo parametr masowy,  
 $\tau$  – odcinek czasu, stała czasowa, opóźnienie,  
 $\omega$  – częstość drgań własnych,  
 $\phi$  – zbiór pusty,  
 $\Phi$  – funkcja własna,  
 $J$  – wskaźnik jakości,  
 $Q$  – własność jakościowa,  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{M}, \mathbf{P}, \mathbf{R}$  – macierze lub wektory,  
 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  – liniowy układ sterowania  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$   
 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k)$  – liniowy układ sterowania  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u_1 + \dots + \mathbf{B}_k u_k$   
 $\mathbf{Q}$  – macierz dodatnio określona,  
 $\mathbf{S}$  – dodatnio określona macierz funkcji Lapunowa,  
 $\mathbf{Q}$  – zespół własności (cech) jakościowych,  
 $\mathbf{F}, \mathbf{f}$  – funkcja wektorowa,  
 $\mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$  – wektory stałych parametrów układu,  
 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$  – wektory: stanu, wyjścia, zaburzeń i sterowań układu,  
 $P$  – zbiór dopuszczalnych wartości parametrów układu,  
 $Z$  – zbiór dopuszczalnych wartości zaburzeń układu,  
 $U$  – zbiór dopuszczalnych wartości sterowań,  
 $\Gamma(P)$  – klasa funkcji czasu o wartościach w zbiorze  $P$ ,  
 $\Gamma(Z)$  – klasa funkcji czasu o wartościach w zbiorze  $Z$ ,  
 $\Gamma(U)$  – klasa funkcji czasu o wartościach w zbiorze  $U$ ,

$X$  – obszar w przestrzeni stanu,  
 $X_0$  – obszar stanów początkowych,  
 $X_*$  – obszar stanów przejściowych,  
 $X_\infty$  – obszar stanów asymptotycznych,

$B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x}: \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < c^2\}$  – elipsoida otwarta o promieniu  $c$ ,  
 $B[\mathbf{S}, c] = \{\mathbf{x}: \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \leq c^2\}$  – elipsoida domknięta o promieniu  $c$ ,  
 $B(\mathbf{S}, c_1, c_2) = \{\mathbf{x}: c_1^2 < \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < c_2^2\}$  – otwarta powłoka elipsoidalna,  
 $\partial B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x}: \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = c^2\}$  – powierzchnia elipsoidy,

$\gamma(\mathbf{S})$  – wskaźnik stabilności (wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ ),  
 $\gamma\langle \mathbf{S} \rangle$  – wskaźnik średni zbieżności (wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ ),  
 $\gamma[\mathbf{S}]$  – wskaźnik zbieżności wykładniczej,

$\gamma_X(\mathbf{S})$  – wskaźnik stabilności wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  w obszarze  $X$ ,  
 $\gamma_X\langle \mathbf{S} \rangle$  – wskaźnik średni zbieżności wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ ,  
w obszarze  $X$ ,  
 $\gamma_X[\mathbf{S}]$  – wskaźnik zbieżności wykładniczej na brzegu obszaru  $X$ ,

$\gamma(\mathbf{S}, c)$  – wskaźnik stabilności wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ ,  
w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ ,

$\gamma\langle \mathbf{S}, c \rangle$  – wskaźnik średni zbieżności wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ ,  
w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ ,

$\gamma[\mathbf{S}, c]$  – wskaźnik zbieżności wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ ,  
na brzegu elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ ,

$\gamma\{\mathbf{S}, \mathbf{x}_0\}$  – wskaźnik dynamiczny zbieżności (wykładniczej) trajektorii  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$   
według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ .

## 1. UKŁADY MECHATRONICZNE

*W niniejszym rozdziale omówione są ogólne koncepcje odnoszące się do układów mechatronicznych, jako układów mechanicznych z zaburzeniami i/lub sterowaniami. Rozpatrywane są modele układów mechatronicznych w postaci równań i inkluzji różniczkowych, które posłużą dalej do sformułowania podstawowych zagadnień ich analizy i optymalizacji pod względem własności stabilności. Przedstawione rozważania nie wnikają jednak w szczegóły konkretnych rozwiązań technicznych.*

### 1.1 Przedmiot badań mechatroniki

Układy mechaniczne to obiekty fizyczne lub techniczne, których istotne własności wynikają z praw mechaniki. Zwykle sama konstrukcja układu mechanicznego zapewnia realizację określonych własności użytkowych, a ich modyfikacja jest możliwa tylko w ograniczonym stopniu, na przykład poprzez zmianę niektórych parametrów układu lub dołączenie dodatkowych mas, elementów sprężystych i tłumików. Tak rozumiane układy mechaniczne są mało „elastyczne”, jeżeli chodzi o możliwość adaptacji do zmiennych warunków pracy i wahań parametrów, a ich optymalizacja jest możliwa tylko na etapie projektowania.

Współczesne układy mechaniczne, a zwłaszcza konstrukcje, muszą jednak spełniać coraz większe wymagania i wykazywać aktywną reakcję na zmienne zaburzenia, na przykład w celu tłumienia drgań lub redukcji hałasu. Poprawia to jakość i niezawodność układów oraz przedłuż okresu ich eksploatacji, co jest istotne nie tylko przy realizacji nowych obiektów, ale również wtedy, gdy zachodzi potrzeba przystosowania i przedłużenia okresu używalności obiektów częściowo zużytych lub przestarzałych konstrukcyjnie. Spełnienie takich wymagań jest możliwe dzięki zastosowaniu sterowania, które zmienia w czasie rzeczywistym parametry układu mechanicznego, kompensuje zaburzenia lub poprawia własności układu, oddziałując siłowo na jego dynamikę. Układy mechaniczne z takimi sterowaniami będziemy nazywali *układami mechatronicznymi*.

Koncepcje udoskonalenia układów mechanicznych za pomocą sterowania parametrami lub siłami nie są zupełnie nowe, lecz dopiero w ostatnim ćwierćwieczu pojawiły się realne (techniczne) możliwości praktycznej realizacji układów mechatronicznych. Zastosowanie sterowników komputerowych lub neuronalnych, sterowanych siłowników lub tłumików hydraulicznych, piezoelektrycznych i na cieczech magnetycznych oraz różnorodnych czujników pomiarowych sprawia, że w układach mechatronicznych zwykle następuje „scalenie” mechaniki z innymi dziedzinami nauki (fizyka) i techniki (na przykład elektronika, telemechanika, automatyka). Dlatego *mechatronika*, której przedmiotem badań są układy mechatroniczne, jest z zasady dziedziną interdyscyplinarną (Uhl [109]).

Zgodnie z tym, co zostało powiedziane we wstępie, w niniejszej rozprawie rozpatrywane są modele układów mechanicznych, które spełniają określone funkcje

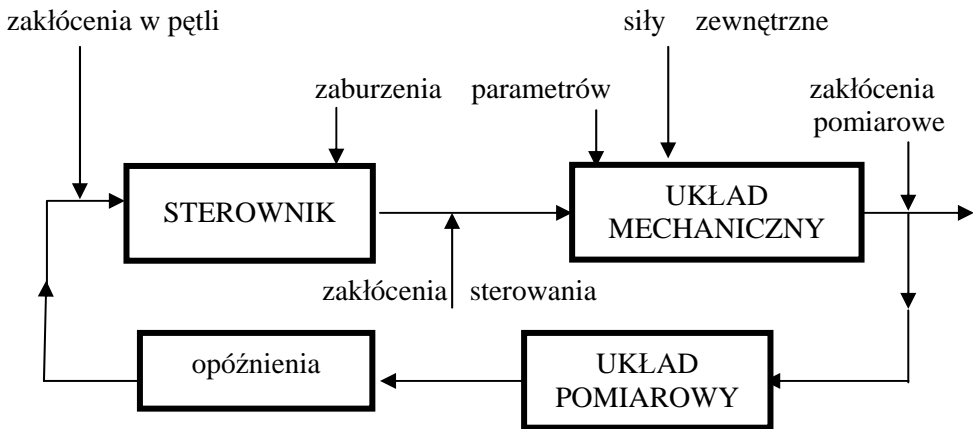
użytkowe (statyczne), a zastosowanie sterowań ma na celu jedynie poprawę ich własności. Mogą to być na przykład układy wibroizolacji, zawieszenia pojazdów, mosty, maszty, wieże, budowle antysejsmiczne, stabilizatory statków itp. Takie układy mają zwykle pewien stan nominalny, a przebywanie bieżącego stanu układu w pobliżu stanu nominalnego jest pożądanym z punktu widzenia prawidłowej pracy układu. Z uwagi na teoretyczny charakter Rozprawy, nie będziemy tu jednak omawiać technicznych realizacji układów mechatronicznych oraz sterowań, ani modeli elementów wykonawczych, siłowników czy czujników pomiarowych, stosowanych w układach mechatronicznych. Przyjmiemy tylko ogólne założenie, że odpowiednie sterowania, w postaci sprzężeń zwrotnych od stanu układu, są możliwe do realizacji przy obecnym stanie techniki, a tematyka pracy ukierunkowana będzie na teoretyczne problemy doboru sterowań optymalnych i badania modeli realnych układów z takimi sterowaniami.

## 1.2 Struktura układów mechatronicznych

Zgodnie z przyjętą koncepcją, układy mechatroniczne z zasady powinny w pewnym stopniu rozpoznawać własny stan oraz stan zewnętrznych oddziaływań i na tej podstawie dostosowywać, czy modyfikować swoje własności mechaniczne, tak aby w optymalny sposób realizować określone cele. Z tego względu układ mechatroniczny, jako *układ sterowania*, składa się na ogół z *układu mechanicznego (obiektu)* i sprzężonego z nim *bloku pomiarowego* (złożonego z czujników pomiarowych, monitorujących stan układu lub tylko pewne funkcje stanu) i *sterownika* zawierającego przetworniki A/C, system (na przykład komputer) do gromadzenia i przetwarzania informacji oraz blok wykonawczy złożony z tłumików, siłowników lub innych elementów sterowanych.

Układ mechaniczny może być w ogólności narażony na zaburzenia pod postacią wahań parametrów oraz wpływu sił zewnętrznych, jak zaznaczono na Rysunku 1.1. Jednak prócz takich zaburzeń w realizacji praktycznej układu mechatronicznego mogą pojawić się również zaburzenia parametrów samego sterownika. Co więcej, ponieważ w układzie mechatronicznym sterowanie jest zwykle realizowane za pomocą sprzężenia zwrotnego, mogą też wystąpić szkodliwe zakłócenia procesu pomiaru stanu oraz zakłócenia na drodze przekazu do sterownika informacji zwrotnej o aktualnym stanie obiektu. Tego rodzaju oddziaływania są określane jako zakłócenia występujące w pętli sprzężenia zwrotnego. Ponadto, w wielu przypadkach, gdy dynamika układu mechanicznego jest „szybka” w stosunku do dynamiki elementów wykonawczych układu sterowania, trzeba się też liczyć z wpływem opóźnienia przekazu informacji zwrotnej, co może znacznie utrudnić realizację założonego celu sterowania lub obniżyć efektywność zastosowanych sterowań.

Schemat typowego układu mechatronicznego z zaburzeniami, zakłóceniami i opóźnieniami jest przedstawiony na Rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Schemat blokowy układu mechatronicznego

Z wymienionych względów synteza i kompleksowa analiza funkcjonowania układu mechatronicznego jako systemu jest zwykle znacznie trudniejsza niż układu mechanicznego bez zaburzeń i sterowania. W mechatronice analogia i intuicja, tak pomocna inżynierom mechaniczom, nie zawsze jest użyteczna, gdyż obecność sterowania i różnych zaburzeń zwykle poważnie komplikuje zagadnienie dynamiki układu. Postać równań opisujących układ mechatroniczny jest bardziej złożona i często nietypowa w porównaniu do tych, z jakimi zwykle stykają się mechanicy. Co więcej, w przypadku układów z niepewnymi parametrami i zaburzeniami opis za pomocą równań różniczkowych jest na ogół niewystarczający a właściwym modelem dynamiki takich układów są inkluzje różniczkowe.

### 1.3 Opis układów mechatronicznych we współrzędnych uogólnionych

Podstawą do opisu dynamiki układu mechatronicznego jest odpowiedni model fizyczny układu mechanicznego (obiektu) z zaburzeniami i sterowaniami. W takim modelu, wynikającym wprost z fizycznej (mechanicznej) natury układu, poszczególne parametry i/lub składniki w równaniach dynamiki odpowiadają zwykle konkretnym, rzeczywistym elementom rozpatrywanego układu. Zazwyczaj jest to więc model strukturalny, opisujący się następującym układem równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego (Gutowski [18]):

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (1.3.1)$$

gdzie  $\mathbf{X} \in R^n$  jest wektorem przemieszczeń układu, natomiast  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{K}$  są macierzami kwadratowymi  $n \times n$ . Macierz  $\mathbf{M}$  jest macierzą mas uogólnionych (bezwładności),  $\mathbf{L}$  – macierzą tłumienia, a  $\mathbf{K}$  – macierzą sztywności układu, natomiast  $\mathbf{F}$  jest wektorem sił (wymuszeń) zewnętrznych działających na obiekt.

W ogólności, macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{K}$  układu mogą zależeć od  $\mathbf{X}$  i  $\dot{\mathbf{X}}$  oraz od wektorów parametrów: masowych (bezwładnościowych)  $\mathbf{m}$ , tłumienia  $\mathbf{l}$  i sztywności  $\mathbf{k}$  tzn.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{m}), \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{l}), \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{k}). \quad (1.3.2)$$

Przyjmijmy jednak uzasadnione założenie, że macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{K}$  rozpatrywanych układów mechanicznych zawierają pewne dominujące składowe stałe, odpowiadające nominalnym wartościom parametrów układu. Będziemy więc rozpatrywać przede wszystkim dyskretne układy liniowe lub quasiliniowe ze stałymi lub zmiennymi zaburzeniami parametrów i z wymuszeniami siłowymi. Część nominalna rozważanych układów będzie zwykle stabilna.

W klasycznej dynamice układów i konstrukcji rozważane są najczęściej układy o stałych parametrach  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{k}$  i stałych lub stacjonarnych siłach (obciążeniach)  $\mathbf{F}$  działających na układ. Jednak chcąc uwzględnić w analizie teoretycznej typowe sytuacje, jakie naprawdę mogą wystąpić w praktyce układów mechatronicznych, konieczne jest przyjęcie bardziej złożonego modelu dynamiki układu, w którym z zasady ograniczone siły i parametry mogą być funkcjami zmiennymi w czasie, o składowych kontrolowanych (sterowanych) i/lub niekontrolowanych. W ogólności należy założyć trzy składowe działających sił tzn.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_z + \mathbf{F}_c$ , gdzie

- $\mathbf{F}_0$  - siły znane (mierzone) stałe lub zmienne w czasie i niekontrolowane,
- $\mathbf{F}_z$  - siły nieznanne, stałe lub zmienne w czasie i niekontrolowane,
- $\mathbf{F}_c$  - siły kontrolowane (sterowane).

Podobnie dla parametrów należy uwzględnić składowe:

- *nominalne* – stałe, znane wartości parametrów,
- *przedziałowe* – stałe, nieznanne odchyłki parametrów,
- *zmiennie* – zmienne, znane odchyłki parametrów,
- *niewpewne* – zmienne, nieznanne odchyłki parametrów,
- *modyfikowane* – kontrolowane zmiany parametrów.

Nominalne wartości parametrów  $\mathbf{p}_0$  trzeba zawsze uwzględnić w modelu układu mechatronicznego. Pozostałe składowe sił oraz parametrów układu rozpatruje się (lub nie) w zależności od konkretnej sytuacji upoważniającej do określonych założeń lub uproszczeń. W rezultacie dostaniemy różne modele układu mechatronicznego oraz odpowiadające im różne cele analizy i syntezy.

Rozpatrywane w niniejszej rozprawie układy równań postaci (1.3.1), będą skończone (tj.  $n < +\infty$ ), gdy będziemy mówić o mechatronice układów dyskretnych albo nieskończone (przeliczalne), gdy będziemy analizować dyskretne modele układów ciągłych (o parametrach rozłożonych). Ponadto, w przypadku skończonego wymiaru  $n$  będziemy zakładali istnienie odwrotności macierzy  $\mathbf{M}$  dla każdego  $\mathbf{X}$  z interesującego nas obszaru w przestrzeni stanu. W przypadku nieskończonego wymiarowym ( $n = +\infty$ ) macierz  $\mathbf{M}$  będzie zwykle diagonalna.



### 1.4 Opis układów mechatronicznych we współrzędnych stanu

Analizę własności stabilności i syntezę układów mechatronicznych łatwiej jest przeprowadzić, wychodząc z bardziej dogodnego modelu matematycznego. Mianowicie, określając wektor stanu układu jako  $\mathbf{x} = [\mathbf{X}, d\mathbf{X}/dt]$  i wykorzystując założoną odwracalność macierzy masowej  $\mathbf{M}$ , można rozwikłać układ równań (1.3.1) ze względu na składowe drugiej pochodnej czasowej wektora przemieszczeń  $\mathbf{X}$  i przedstawić go w postaci układu równań pierwszego rzędu względem wektora stanu  $\mathbf{x}$ . Uwzględniając założenie zmienności parametrów, sterowań i zaburzeń układu, możemy w ogólnym przypadku opisać dynamikę układów mechatronicznych następującymi inkluzjami różniczkowymi zwyczajnymi [D1]:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) : \mathbf{p} \in \Gamma(P), \mathbf{z} \in \Gamma(Z), \mathbf{u} \in \Gamma(U)\}, \quad (1.4.1)$$

gdzie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in R^n$  jest wektorem stanu układu,  $\mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$  są odpowiednio: wektorami parametrów, zaburzeń i sterowań układu;  $\mathbf{F}$  jest funkcją układu,  $P \subset R^k$ ,  $Z \subset R^l$ ,  $U \subset R^m$  są zbiorami zwartymi, natomiast  $\Gamma(P)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$  są pewnymi podzbiorami przestrzeni funkcji czasu  $t \in [t_0, +\infty)$  o wartościach odpowiednio: w  $P$ ,  $Z$ ,  $U$ . Przyjmujemy dalej, że przestrzenie  $R^n$ ,  $R^k$ ,  $R^l$ ,  $R^m$  są przestrzeniami Euklidesowymi. Będziemy rozpatrywali układy w całej przestrzeni stanu  $R^n$  albo w pewnym otoczeniu  $X$  nominalnego punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , w którym  $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{p}_0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  dla pewnych parametrów nominalnych ( $\mathbf{p}_0 = \text{const}$ ) rozważanego układu. Stan nominalny  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  będzie z założenia stanem pożądanym a dynamika układu w jego otoczeniu – istotnym czynnikiem warunkującym jakość pracy układu.

Inkluzja (1.4.1) oznacza, że pochodna wektora stanu układu w każdej chwili należy do pewnego zbioru, a więc niekoniecznie jest określona jednoznacznie przez funkcję  $\mathbf{F}$  układu, jak to ma miejsce w przypadku równań różniczkowych. Wieloznaczność wskazuje na istnienie skończonej, przeliczalnej a nawet nieprzeliczalnej liczby możliwych wartości funkcji układu w dowolnej chwili. Jednak w trakcie realnego ruchu układu, pochodna stanu  $\mathbf{x}$  przyjmuje jedną określoną wartość w każdej bieżącej chwili  $t$ . Z taką sytuacją mamy zwykle do czynienia w układach rzeczywistych (na przykład w układach ze sterowaniami, zaburzeniami lub wahaniami parametrów). Dlatego modelowanie dynamiki układów mechatronicznych za pomocą inkluzji, a nie równań różniczkowych, jest bardziej adekwatne, jeśli chcemy uwzględnić wpływ sterowań  $\mathbf{u}$  oraz zmian parametrów  $\mathbf{p}$  i zaburzeń  $\mathbf{z}$  układu mechatronicznego.

Klasa układów, które można modelować inkluzjami różniczkowymi typu (1.4.1) jest dostatecznie szeroka do opisu wielu sytuacji występujących w mechatronice. Model (1.4.1) jest ponadto ogólniejszy niż (1.3.1), gdyż obejmuje też układy o nieparzystym wymiarze wektora  $\mathbf{x}$ . Zależnie od tego, które z wielkości  $\mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$  występują w układzie i są stałe lub zmienne, można modelować za pomocą inkluzji typu (1.4.1) różne układy takie jak:

- układ autonomiczny - ( $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \text{const}, \mathbf{z} = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ),
- układ o niepewnych parametrach - ( $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{z}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), (*układ z wahaniami parametrów*)
- układ z zaburzeniami ( $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \text{const}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ),
- układ sterowany programowo ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ ), (*układ otwarty*),
- układ sterowany ze sprzężeniem zwrotnym ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ), (*układ zamknięty*).

W szczególności, jeśli sterowanie  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , natomiast zaburzenia są ustaloną funkcją czasu  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ , to modelem układu będzie układ równań różniczkowych (1.4.1), gdzie inkluzja przechodzi w równanie z jednoznaczną funkcją  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t))$ . Jeżeli  $\Gamma(P)$  jest zbiorem wszystkich funkcji stałych o wartościach w pewnej domkniętej kostce w  $R^k$ , będziemy mieli do czynienia z tzw. układem o *parametrach przedziałowych*. Jeżeli zaś  $\Gamma(Z)$  jest zbiorem realizacji pewnego procesu stochastycznego, a zaburzenia  $\mathbf{z}$  są jego realizacjami, będziemy mieli do czynienia z dynamicznym układem stochastycznym. W najogólniejszym przypadku układu z niepewnymi parametrami  $\Gamma(Z)$  będzie zbiorem wszystkich funkcji czasu o wartościach w  $Z$ , a inkluzja (1.4.1) będzie zupełna w sensie określonym w Dodatku 1.

Układy mechatroniczne w ogólnym przypadku nie są ani liniowe, ani stacjonarne. Nieliniowa (quasiliniowa) zależność funkcji  $\mathbf{F}$  w inkluzji (1.4.1) od współrzędnych wektora stanu  $\mathbf{x}$  może wynikać na przykład z różnych nieliniowości geometrycznych lub materiałowych w strukturze lub elementach realnego układu. Jednak z natury układów mechatronicznych wynika, że funkcja  $\mathbf{F}$  nie może całkiem dowolnie zależeć od wektorów zaburzeń  $\mathbf{z}$  i sterowań  $\mathbf{u}$ . Funkcja ta będzie zwykle analityczna (rozwijalna w szereg) ze względu na składowe  $\mathbf{z}, \mathbf{u}$ . Wynika to między innymi z faktu, że macierze  $\mathbf{M}, \mathbf{L}, \mathbf{K}$  układu (1.3.1) są przeważnie liniowo uzależnione od składowych odpowiednich wektorów parametrów  $\mathbf{m}, \mathbf{l}, \mathbf{k}$ .

Nazwiemy zatem *analitycznym* układ opisany modelem (1.4.1) zależnym od funkcji  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$  rozwijalnej w szereg względem składowych zaburzeń i sterowania jak następuje:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, u_1, \dots, u_l) \approx \mathbf{G}_0(\mathbf{x}) + \\ + u_1 \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) + \dots + u_l \mathbf{G}_l(\mathbf{x}) + z_1 \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) + \dots + z_k \mathbf{H}_k(\mathbf{x}) + \dots \\ + \sum_{i,j=1}^l u_i u_j \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}) + \sum_{i,j=1}^k z_i z_j \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k \mathbf{I}_{ij}(\mathbf{x}) u_i z_j + \dots \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Funkcja  $\mathbf{G}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}_0(\mathbf{x})$  w (1.4.2) określa quasiliniową stacjonarną część obiektu (układu bez sterowania i zaburzeń), a macierz  $\mathbf{A}$  – jego część liniową stacjonarną. Funkcje macierzowe  $\mathbf{G}_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, l$ ;  $\mathbf{H}_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, k$  zwykle określają odpowiednio: strukturę kontrolowanych lub niekontrolowanych sił i zmian parametrów układu. Składniki nieliniowe ze względu na poszczególne składowe sterowań i zaburzeń pozwalają opisać układy mechatroniczne, w których nieliniowe

działanie sił wynika na przykład z nieliniowości geometrycznej w miejscu przyłożenia siły. Z kolei mieszane składniki stopnia drugiego ze względu na składowe sterowania i zaburzeń odpowiadają za interakcje między poszczególnymi składowymi sterowań i zaburzeń. Interakcje takie mogą wystąpić na przykład wtedy, gdy zaburzenia mają istotny wpływ na parametry struktury oddziaływania sterowanych sił.

W szczególności układy wielowymiarowe postaci (1.3.1) o zmiennej macierzy masowej  $\mathbf{M}(\mathbf{m})$  można w przybliżeniu opisać układami analitycznymi, gdy model układu sprowadzamy do postaci rozwikłanej ze względu na  $\dot{\mathbf{x}}$  poprzez obliczenie macierzy  $\mathbf{M}^{-1}$  i rozwinięcie jej elementów w szereg ze względu na składowe wektora parametrów  $\mathbf{m}$ .

## 1.5 Wyjścia, zaburzenia i sterowania w układach mechatronicznych

W realnym układzie mechatronicznym mogą pojawić się jakościowo nowe czynniki wpływające na układ, jeśli w układzie zastosowane jest sterowanie  $\mathbf{u}$  w postaci sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z})$ , realizowanego za pomocą dodatkowego podukładu (sterownika), jak na Rysunku 1.1. Wtedy, rzecz jasna, inkluzja (1.4.1) na ogół nie będzie jeszcze kompletnym modelem układu. Po pierwsze, prócz zaburzeń układu mechanicznego mogą pojawić się sygnały zaburzające sterowanie, które nie występowały w modelu (1.3.1). Sygnały te, pokazane na Rysunku 1.1, będziemy nazywali *zakłóceniami* (Kaczorek [23]). W ogólnej teorii rozróżnienie między zaburzeniami i zakłóceniami jest czysto formalne, gdyż analiza ich wpływu na układ nie różni się zasadniczo. Dlatego w dalszym ciągu ogólnych rozważań wszystkie zaburzenia i zakłócenia w układzie będzie zwykle reprezentował jeden wektor  $\mathbf{z}$ .

Po drugie, w przypadku układów ze sterowaniem realizowanym za pomocą sprzężenia zwrotnego istotne staje się tzw. wyjście układu tj. zespół dostępnych wielkości  $\mathbf{y}$  określających aktualny stan  $\mathbf{x}$  układu. Dostępność wektora  $\mathbf{y}$  oznacza, że jego składowe są pewnymi wielkościami wyznaczalnymi w czasie rzeczywistym (na przykład bezpośrednio z pomiarów) albo wyliczalnymi na podstawie wyników pomiarów pośrednich lub przy użyciu tzw. *obserwatora stanu* (Kaczorek [23]).

Zwykle wyjście układu może być opisane pewną funkcją  $\mathbf{g}$ , którą, rzecz jasna, trzeba dołączyć do opisu modelu układu mechatronicznego. Będziemy dalej rozpatrywali funkcje wyjścia następujących postaci

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}). \quad (1.5.1)$$

Zależność funkcji wyjścia nie tylko od stanu  $\mathbf{x}$  układu, lecz także od zakłóceń lub sterowań, wynikająca zwykle z natury (struktury) samego układu, stanowi dodatkowy problem w analizie i syntezie układów mechatronicznych.

Możemy wyróżnić zasadniczo dwa podejścia do kwestii funkcji wyjścia układu. Jeśli mamy zadaną funkcję wyjścia, staramy się dobrać optymalne sterowanie oparte na tej funkcji. Tak musimy postąpić, jeśli nie mamy wpływu na postać funkcji  $\mathbf{g}$ .

Drugie podejście, ogólniejsze, polega na tym, że najpierw znajdujemy klasę sterowań (realizujących określony cel) za pomocą pewnej metody syntezy, a następnie staramy się zrealizować jedno z nich za pomocą odpowiedniego (realizowalnego) sygnału wyjścia. Takie podejście daje już możliwość czynnego uczestnictwa w kształtowaniu wyjścia układu, gdy w grę wchodzi decyzja na przykład o tym, jakie wielkości powinny być mierzone i gdzie. Jest to ważny etap procesu projektowania (syntezy) sterowania układu mechatronicznego. W dalszym ciągu nie będziemy rozpatrywać kwestii realizowalności rozważanych w pracy sterowań wynikających z teorii (z metody funkcji Lapunowa), zakładając, że wyznaczone sterowania są realizowalne [D2], [D3].

W modelu (1.4.1) układu mechatronicznego niezmiernie istotne są też założenia czynione odnośnie samych parametrów układu, zaburzeń i sterowań. Założenia te, podyktowane względami technicznymi i praktycznymi, również powinny być włączone do modelu układu, jako istotny element opisu jego dynamiki. W niniejszej rozprawie będziemy przyjmowali przede wszystkim założenie ograniczoności, które powinno być spełnione w każdym realnym układzie. Dlatego rozpatrywane zbiory  $P$ ,  $Z$  oraz  $U$  będą na ogół zwarte (a więc domknięte i ograniczone) w odpowiednich przestrzeniach euklidesowych. W teoretycznych rozważaniach istotna będzie jednak nie tylko zwartość, ale również struktura (geometria i własności metryczne) zbiorów  $P$ ,  $Z$ ,  $U$ , które sprecyzujemy poniżej.

Odnośnie zbioru  $P$  już w zasadzie ustaliliśmy szczegóły. Jest to zbiór zwarty i – jeśli założyć funkcyjną niezależność parametrów układu – ma postać domkniętej kostki w przestrzeni  $R^k$ . Niezależność parametrów jest zapewniona, gdy każdy z nich reprezentuje pewien parametr fizyczny układu, którego niezależność od pozostałych parametrów wynika z samej jego natury. Mogą to być na przykład. sztywności i tłumienia poszczególnych elementów układu dyskretnego. Będziemy dalej zakładali, że taki warunek niezależności jest spełniony.

Również zbiór  $Z$ , jeśli założyć niezależność składowych zaburzeń układu, powinien mieć strukturę domkniętej kostki w przestrzeni  $R^l$ . Takie założenie należy przyjąć, jeśli nie dysponujemy żadną dodatkową informacją odnośnie wzajemnych zależności (korelacji) składowych zaburzeń. Wówczas dopuszczalne jest jednoczesne występowanie dowolnych, a więc i granicznych wartości wszystkich zaburzeń i zakłóceń, co jednak w praktyce zdarza się raczej rzadko. Jeżeli zaburzenia  $z$  uwzględnione w modelu danego układu mają jakąś wspólną przyczynę, to mogą być od siebie zależne (na przykład skorelowane jako sygnały losowe). Jeśli znamy tę zależność, możemy dokładniej opisać ograniczenia zaburzeń na przykład za pomocą pewnej rozmaitości  $Z$  zawartej w rozważanej kostce w przestrzeni  $R^l$ .

Często mamy jednak do czynienia z sytuacją, gdy zaburzenia losowe oscylują w pobliżu pewnej średniej wartości (na przykład w przypadku losowych zaburzeń parametrów układu), a większe wychylenia od nominalu zdarzają się stosunkowo rzadko. Powstaje pytanie, czy można, nie stosując teorii stochastycznych, opisać

taką sytuację za pomocą deterministycznych ograniczeń? Odpowiedzi na to pytanie udziela tzw. *zasada Turkstry* stosowana na przykład w budownictwie i mechanice konstrukcji. Według tej zasady, niezawodność konstrukcji ocenia się przy założeniu, że jedno z ograniczonych zaburzeń osiąga wartości graniczne, podczas gdy pozostałe zaburzenia – wartości średnie. *Zasada Turkstry* dla zaburzeń, wyrażająca w opisie deterministycznym pewne statystyczne własności sygnałów, może mieć zastosowanie w sytuacjach, gdy przewidywane prawdopodobieństwo jednoczesnego wystąpienia więcej niż jednej granicznej składowej zaburzeń jest relatywnie małe.

Adaptując powyższą zasadę do naszych potrzeb, złożymy, że zaburzenia  $z_1, \dots, z_k$  układu zazwyczaj nie przekraczają wartości średnich tzn.  $|z_i| \leq \alpha_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ , natomiast niekiedy mogą osiągać wartości szczytowe  $\beta_i > \alpha_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ . Wtedy, zgodnie z zasadą Turkstry, strukturę ograniczeń na zaburzenia będzie określał zbiór postaci  $Z_1 \cup \dots \cup Z_k$ , gdzie

$$Z_i = \{(z_1, \dots, z_k) : |z_1| \leq \alpha_1, \dots, |z_{i-1}| \leq \alpha_{i-1}, |z_i| \leq \beta_i, |z_{i+1}| \leq \alpha_{i+1}, \dots, |z_k| \leq \alpha_k\}. \quad (1.5.2)$$

Aby uwzględnić sytuację, w której jednocześnie więcej niż jedno zaburzenie osiąga wartość szczytową, można rozpatrywać uogólnioną zasadę Turkstry. Sposób takiego uogólnienia, odzwierciedlający się w strukturze zbioru  $Z$ , jest oczywisty.

Zasada Turkstry lub jej uogólnienia nadają się również do opisu deterministycznych wielowymiarowych zaburzeń układu o specyficznej współzależności składowych. Na przykład w przypadku ruchomego obciążenia poruszającego się ze stałą prędkością wzdłuż toru lub mostu poszczególne elementy układu będą kolejno obciążane z maksymalną siłą. Podobnie można opisać przypadek losowego rozkładu wielu niezależnych obciążeń ruchomych, gdy losowo wybrane elementy układu będą obciążane maksymalnie.

Struktura zbioru  $U$  dopuszczalnych wartości sterowań wynika z nałożonych ograniczeń na składowe sterowania. Dla sterowań ograniczonych, ale niezależnych zbiór  $U$  powinien być następującą wielowymiarową kostką w  $R^l$

$$U = Q(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) = \{(u_1, u_2, \dots, u_l) \in R^l : |u_1| \leq \beta_1, \dots, |u_l| \leq \beta_l\} \quad (1.5.3)$$

o krawędziach odpowiadających ograniczeniom nałożonym na poszczególne składowe sterowania. Ograniczenia zakresu zmian parametrów sterowanych są podyktowane względami technicznymi realizacji sterowanych tłumików i elementów sprężystych. Podobnie, ograniczenia wielkości maksymalnych sił wynikają z wydolności samych siłowników.

Niekiedy nakłada się jeszcze totalne ograniczenia postaci:

$$(u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots + (u_l)^2 \leq \beta \quad (\text{lub } |u_1| + \dots + |u_l| \leq \beta) \quad (1.5.4)$$

na składowe sterowania. Takie ograniczenia mają sens w odniesieniu do sterowanych sił na przykład wtedy, gdy sterownik danego układu mechatronicznego jest zasilany z wewnętrznego źródła o ograniczonej mocy. Podobnie, sumaryczne

ograniczenie na tłumienie można powiązać z maksymalną mocą pochłanianą w układzie. Wtedy zbiór ograniczeń  $U$  będzie przecięciem kostki  $Q(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$  z kulą lub drugą kostką.

Ściśle biorąc podane wyżej ograniczenia totalne na składowe siły sterujących nie stanowią prawidłowo określonych ograniczeń na moc układu zasilania sterownika. Chcąc zdefiniować takie ograniczenia musielibyśmy pomnożyć maksymalne moduły  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  sił sterowanych przez prędkości ruchu punktów przyłożenia każdej z tych sił, a następnie ograniczyć wielkość sumy takich iloczynów, czyli sumę totalnej mocy sterowania. Wówczas sterowania siłowe zależałyby od aktualnego stanu (prędkości) układu, co faktycznie oznaczałoby nałożenie na układ mechatroniczny dodatkowych więzów jednostronnych (w ogólności nieholonomicznych). Wtedy oczywiście podany model inkluzyjny (1.4.1) nie byłby dość ogólny. Zbiór  $U$  zależałby bowiem również od prędkościowych składowych wektora stanu  $\mathbf{x}$ . Aby tego uniknąć, będziemy zwykle zakładali, że napęd układów sterowania ma moc na tyle dużą w porównaniu z wydolnością siłowników, że jej ograniczenie nie będzie aktywne w rozpatrywanym zakresie ruchu.

Innym, sposobem ograniczenia sumarycznej mocy sterowań może być założenie (które można interpretować jako zasadę Turkstry dla sterowań), że w dowolnej chwili tylko  $k$  z  $l > k$  sterowań może być jednocześnie włączonych z maksymalną siłą, a reszta – wyłączona. Jest to szczególnie uzasadnione na przykład wtedy, gdy wszystkie sterowania mają to samo ograniczenie  $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_l$ , a z praktycznych względów dogodniej jest stosować sterowania typu bang-bang. Tego rodzaju sterowania są stosowane z dobrym skutkiem w mniej precyzyjnych układach (na przykład w koparkach), ale również, jak pokażemy w dalszych rozdziałach, mogą być sterownikami teoretycznie optymalnymi w pewnych zagadnieniach stabilizacji i modyfikacji układów mechatronicznych. Opisany sposób ograniczenia sterowań generuje odpowiednią, dyskretną strukturę zbioru  $U$ .

W przypadku sterowania dyskretnego (cyfrowego), gdy każde ze sterowań może przyjmować dyskretne wartości ze skończonego zbioru  $D = \{-q, \dots, -1, 0, 1, \dots, q\}$ , zbiór  $U$  też będzie dyskretny a ściśle biorąc będzie miał postać iloczynu kartezyjskiego  $D \times D \times \dots \times D$ .

Własności zbiorów  $P, Z, U$  określają jedynie chwilowe ograniczenia na wartości parametrów, zaburzeń i sterowań układu mechatronicznego, a nic nie mówią o przebiegu czasowym tych wielkości. Możemy takie założenia wprowadzić, określając klasy  $\Gamma(P), \Gamma(Z), \Gamma(U)$  funkcji zależnych od czasu, reprezentujące odpowiednio dopuszczalne realizacje czasowe parametrów, zaburzeń i sterowań.

Struktura zbioru  $\Gamma(P)$  zależy od tego, co zakładamy o parametrach układu, jeżeli chodzi o ich zmienność w czasie. Ponieważ zaburzenia  $\mathbf{z}$  i sterowania  $\mathbf{u}$  układu mogą odnosić się odpowiednio do niekontrolowanych i kontrolowanych zmian parametrów układu, będziemy zakładali, nie zmniejszając ogólności, że wartości  $\mathbf{p}$  parametrów układu będą przyjmowały wartości nominalne  $\mathbf{p}_0$ , które mogą być znane

albo nieokreślone jednoznacznie. Jeśli bowiem parametry układu są zmienne w czasie na skutek działania pewnych zaburzeń  $\mathbf{z}_0$  lub kontrolowanych oddziaływań  $\mathbf{u}_0$ , to zawsze możemy przyjąć  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{z}_0 + \mathbf{u}_0$  i włączyć wektor  $\mathbf{z}_0$  do zaburzeń, a wektor  $\mathbf{u}_0$  – do sterowań rozpatrywanego układu. Wówczas możemy taki przypadek traktować jak działanie pewnych zmiennych zaburzeń  $\mathbf{z}$  na nominalne parametry  $\mathbf{p}_0$  układu. Charakter tych zaburzeń można odzwierciedlić w strukturze zbioru  $\Gamma(Z)$ . Dlatego będziemy zwykle zakładali, że  $\Gamma(P)$  jest pewnym zbiorem funkcji stałych o wartościach w  $P$ . Jeśli przyjmujemy parametry za stałe i znane, wówczas  $\Gamma(P)$  będzie zbiorem jednoelementowym  $\{\mathbf{p}_0\}$  tzn. będzie zawierał tylko jedną stałą funkcję określoną przez wartości nominalne parametrów układu. Jeśli natomiast przyjmiemy, że stałe parametry układu nie są dokładnie określone co do wartości, wówczas zbiór  $\Gamma(P)$  będzie zawierał wszystkie funkcje stałe o wartościach mieszczących się w założonych przedziałach. W takiej sytuacji mówimy o tzw. *parametrach przedziałowych*. Może się też zdarzyć, że nie potrafimy podać nawet ograniczeń przedziałowych na parametry układu. Wówczas zbiór  $\Gamma(P)$  będzie zawierał wszystkie funkcje stałe, a nieokreślone ograniczenia przedziałowe powinny być wtedy traktowane jak dodatkowe, swobodne parametry układu, które mogą podlegać optymalizacji.

Struktura zbioru  $\Gamma(Z)$  odzwierciedla naszą wiedzę o zaburzeniach układu. Im mniej zakładamy (wiemy) o zaburzeniach, tym bogatszy jest ten zbiór. W ogólnym przypadku zaburzenia/zakłócenia  $\mathbf{z}$  mogą być funkcją deterministyczną lub losową, o znanych lub nieznanymi charakterystykach. Jeśli zaburzenia  $\mathbf{z}$  są konkretną, ustaloną funkcją czasu o wartościach w  $Z$  tzn.  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ , czyli  $\Gamma(Z) = \{\mathbf{z}(t)\}$ , natomiast  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , wówczas modelem układu mechatronicznego jest inkluzja (1.4.1), która przechodzi w równość (a więc w układ równań różniczkowych), bowiem  $\{\mathbf{f}\}$  staje się wtedy funkcją jednoznaczną  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t))$ . Gdy zakładamy tylko ograniczoność zaburzeń, musimy przyjąć, że zbiór  $\Gamma(Z)$  zawiera wszystkie funkcje ograniczone, natomiast w teorii stochastycznej – wszystkie realizacje pewnego stacjonarnego procesu stochastycznego.

W większości praktycznych sytuacji dogodnie jest też założyć stacjonarność rodziny funkcji zaburzających  $\Gamma(Z)$ . Warunek ten wymaga, aby dla każdego  $\tau \geq 0$  i każdej funkcji  $\mathbf{z}(t) \in \Gamma(Z)$  również  $\mathbf{z}(t+\tau)$  było elementem zbioru  $\Gamma(Z)$ . Stacjonarność rodziny zaburzeń  $\Gamma(Z)$  będziemy zakładali wówczas, gdy istotna będzie niezależność własności układu mechatronicznego od chwili początkowej  $t_0$ , a więc na przykład przy stale działających zaburzeniach.

Struktura zbioru  $\Gamma(U)$  zależy od tego jakimi funkcjami sterowania możemy lub chcemy oddziaływać na układ. Mogą to być na przykład funkcje ciągłe lub przedziałami stałe, albo funkcje o wartościach z pewnego zbioru dyskretnego, jeśli sterowanie jest cyfrowe.

Jest jeszcze jedno istotne ograniczenie formalne jakie należy uwzględnić, jeżeli w układzie występują jakieś sprzężenia zwrotne od stanu  $\mathbf{x}$ . W ogólności analiza

własności i synteza optymalnych układów mechatronicznych wymaga bowiem badania teoretycznych modeli postaci (1.4.1), w których zaburzenia lub sterowania są uzależnione od stanu  $\mathbf{x}$  tzn.  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Takie sprzężenia są w istocie pewnymi statycznymi więzami analitycznymi narzuconymi niezależnie od dynamiki układu, które sprawiają, że inkluzja różniczkowa (1.4.1) staje się równaniem. Aby zachować formalną zgodność z przyjętymi wcześniej założeniami, powinniśmy zagwarantować, aby dla dowolnego rozwiązania  $\mathbf{x}(t)$  tego równania, zależne od czasu funkcje  $\mathbf{z}(\mathbf{x}(t))$  lub  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$  należały do odpowiednich przestrzeni  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$ . W ogólności takie wymagania narzuca trudne do określenia ograniczenia na postać funkcji sprzężenia zwrotnego. Można uniknąć tej trudności przyjmując, że  $\Gamma(Z)$  oraz  $\Gamma(U)$  są zbiorami wszystkich funkcji czasu o wartościach w odpowiednich zbiorach  $Z$ ,  $U$ , czyli że inkluzja jest zupełna [D1].

Będziemy zatem najczęściej przyjmowali założenie, że  $\Gamma(P)$ , jest zbiorem wszystkich funkcji stałych o wartościach w  $P$ , natomiast  $\Gamma(Z)$  i  $\Gamma(U)$  – zbiorami wszystkich funkcji ograniczonych o wartościach odpowiednio w  $Z$  i  $U$ . Będziemy wtedy mówili o zupełnej inkluzji różniczkowej opisującej dynamikę układu. Dla uproszczenia, inkluzję zupełną będziemy zapisywali w skrócie następująco:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) : \mathbf{p} \in P, \mathbf{z} \in Z, \mathbf{u} \in U\}. \quad (1.5.5)$$

Założenie zupełności inkluzji modelu dynamiki układu mechatronicznego jest uproszczeniem uzasadnionym zarówno względami praktycznymi jak i teoretycznymi. W praktyce, na ogół możemy dość dobrze określić strukturę zbiorów ograniczeń  $P$ ,  $Z$ ,  $U$ , ale faktycznie nie znamy rzeczywistej zawartości poszczególnych zbiorów funkcji  $\Gamma(P)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$ . Zupełność klas funkcji  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$  oznacza, że dopuszczamy w rozważaniach teoretycznych dowolnie szybkie a nawet skokowe zmiany zaburzeń czy sterowań. Wiadomo, że w praktyce zaburzenia zawsze będą miały jakieś ograniczone widmo mocy a elementy wykonawcze sterownika – ograniczone pasmo przenoszenia. Jeśli jednak dynamika sterowanego układu mechanicznego będzie znacznie „wolniejsza”, takie założenie niewiele odbiega od rzeczywistości i może być dobrym jej przybliżeniem. Istotne jest, że zupełność inkluzji modelu znakomicie upraszcza wszelkie rozważania i analizę jego własności. Uzasadnia to przyjęte założenie zupełności rozpatrywanych inkluzji.

Takie podejście jest też wyrazem pewnej filozofii preferowanej w niniejszej rozprawie, według której lepiej jest przeprowadzić analizę i/lub syntezę układu mechatronicznego przy możliwie prostych ograniczeniach na zaburzenia i sterowania, a potem zastanawiać się, jak wyznaczone optymalne sprzężenia zwrotne zrealizować w praktyce przy użyciu dostępnych środków. W ten sposób można też lepiej określić, jakie wielkości mierzone są niezbędne do realizacji sterowania. Specjalnie tej właśnie kwestii poświęcony jest Rozdział 9 niniejszej rozprawy.

Dotychczas zostały formalnie określone podstawowe klasy zaburzeń i sterowań (w sensie dopuszczalnych funkcji), które nadają się do opisu realnych zaburzeń i



sterowań w układów mechatronicznych. Jednakże z punktu widzenia teorii i praktyki układów mechatronicznych wskazane i użyteczne jest również wyszczególnienie rodzajów zaburzeń i sterowań ze względu na sposób (fizykę) ich oddziaływania na układ. Rozumiane w tym sensie rodzaje zaburzeń i sterowań, jakie mogą oddziaływać na układy mechatroniczne, wynikają z samej natury mechanicznej takich układów.

Ogólnie rzecz biorąc, na układ mechatroniczny mogą działać *zaburzenia półaktywne* (parametryczne) oraz *zaburzenia aktywne* (siłowe). Zaburzenia półaktywne odnoszą się do parametrów układu, natomiast zaburzenia aktywne sprowadzają się do działania na układ niekontrolowanych sił zewnętrznych. Ten podział jest precyzyjny i szczególnie użyteczny wówczas, gdy mamy do czynienia z dyskretnym, a najlepiej strukturalnym modelem układu mechatronicznego, w którym łatwo można wskazać parametry fizyczne (na przykład tłumienia i sztywności) oraz realne siły. W układach ciągłych sprawa może nie być tak jednoznaczna, na przykład, gdy działanie zewnętrznej siły sprowadza się do zaburzenia parametrów układu. Taka sytuacja ma miejsce na przykład w przypadku sprężystej kolumny obciążonej siłą osiową, traktowaną jako zaburzenie. Wtedy istotą omawianego rozróżnienia powinna być wymiana energii. Powiemy zatem, że zaburzenia układu są (pół)aktywne, jeżeli (nie) następuje znacząca wymiana energii między układem a źródłem zaburzeń.

Podobnie w przypadku sterowań, jeżeli istnieje możliwość kontrolowanego oddziaływania na dany układ mechaniczny, to można wyróżnić dwa zasadnicze sposoby sterowania:

- *sterowanie półaktywne* (czyli sterowanie parametrami),
- *sterowanie aktywne* (czyli sterowanie siłami).

Oba te rodzaje sterowania mogą być realizowane niezależnie lub łącznie w sytuacji, gdy układ mechaniczny jest stabilny albo niestabilny. Jeśli dany układ mechaniczny jest stabilny, możliwe jest rozpatrzenie zagadnienia *modyfikacji* układu w celu poprawy jego własności stabilności. Zależnie od rodzaju zastosowanego sterowania będziemy wtedy mówić o półaktywnej lub aktywnej modyfikacji układu. Jeśli jednak układ jest niestabilny, wtedy rozpatruje się zagadnienie *stabilizacji* układu. Głównym celem stabilizacji jest zapewnienie stabilności układu przynajmniej w pewnym otoczeniu punktu równowagi. Dlatego poprawa własności stabilności układu nie musi dotyczyć bezpośrednio jego cech użytkowych, ale może być ważna dla prawidłowej pracy układu. W szczególności, stabilizacja układu niestabilnego może być celem sterowania, jeśli dopiero po ustabilizowaniu układ może spełnić pożądane funkcje użytkowe. Tylko w szczególnych sytuacjach celem sterowania może być *destabilizacja* a więc wzbudzanie, a nie tłumienie drgań układu.

Możemy zatem wyróżnić następujące sposoby sterowania układami mechatronicznymi:

- *modyfikacja półaktywna (parametryczna)* – sterowanie parametrami układu stabilnego,
- *stabilizacja półaktywna (parametryczna)* – sterowanie parametrami układu niestabilnego,
- *modyfikacja aktywna* – siłowe sterowanie układu stabilnego,
- *stabilizacja aktywna* – siłowe sterowanie układu niestabilnego.

Jeżeli oba rodzaje sterowania parametrami i siłami są zastosowane łącznie w danym układzie (nie)stabilnym, mówimy o (stabilizacji) modyfikacji mieszanej.

Istnieje również *modyfikacja pasywna*, zaliczająca się do metod klasycznych, polegająca na dołączeniu do układu mechanicznego dodatkowych tłumików (wiskotycznych lub ciernych) lub dodatkowych mas, zwykle dołączonych lepkosprężysto. Takie rozwiązanie umożliwia niekiedy osiągnięcie pożądanego zmiany własności dynamicznych obiektu, ale w ograniczonym zakresie i zazwyczaj tylko w pewnych pasmach częstotliwości. Modyfikacja pasywna nie jest bowiem w stanie skompensować wpływu złożonych zaburzeń układu. Dopiero modyfikacja półaktywna i modyfikacja aktywna, zaliczające się do metod mechatroniki, zapewniają zdolność adaptacji układu do zmiennych warunków pracy dzięki zastosowaniu odpowiednich sprzężeń zwrotnych od stanu.

Sterowanie aktywne lub półaktywne jest optymalne, jeżeli najlepiej realizuje założony cel według ustalonego wskaźnika jakości. W szczególności stabilizacja, jak i modyfikacja, może być optymalna. W stabilizacji chodzi głównie o jakościową zmianę własności układu (zapewnienie stabilności układu niestabilnego). Jeśli jednak przejście między układem stabilnym a niestabilnym dokonuje się płynnie przy przejściu przez zbiór punktów krytycznych (odpowiadających stabilności warunkowej), wówczas stabilizację można traktować jako szczególny przypadek modyfikacji.

## 2. ANALIZA JAKOŚCIOWA UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH

*Funkcje użytkowe układu mechatronicznego zwykle zapewnione są przez samą jego konstrukcję. Chcąc jednak powiedzieć coś na temat jakości spełnienia tych funkcji w otoczeniu nominalnego punktu stacjonarnego, niepodobna nie mówić o własnościach stabilności układu. Stabilność jest bowiem niezbędna do tego, aby dany układ w ogóle mógł być praktycznie użyteczny. Dlatego analiza jakościowa własności stabilności układów stanowi istotne zagadnienie mechatroniki rozpatrywane w niniejszej rozprawie. Wymagania stawiane układom mechatronicznym w tym zakresie wiążą się z zagadnieniem oceny, modyfikacji, stabilizacji i optymalizacji ich własności jakościowych. Do rozwiązywania tak różnorodnych zadań konieczne jest odpowiednie narzędzie badawcze w postaci możliwie uniwersalnej metody analizy jakościowej układów dynamicznych.*

*Niniejszy rozdział ma charakter ogólny, cokolwiek filozoficzny, przygotowujący do lektury rozdziału następnego, w którym pokażemy, jak można zbudować taką metodę, przyjmując za podstawę metodę funkcji Lapunowa. Dlatego omówione tu będą tylko podstawowe koncepcje jakościowych metod badania układów dynamicznych, a w tym wybrane definicje stabilności, w kontekście ich przydatności do analizy i syntezy układów mechatronicznych. W szczególności, przedstawimy koncepcję wskaźnika stabilności oraz problem jakościowej analizy inkluzji różniczkowych, jako modeli układów mechatronicznych. Na koniec sformułujemy podstawowe wymagania jakościowe odnośnie własności stabilności układów mechatronicznych oraz zasady optymalizacji takich układów.*

### 2.1 Własności jakościowe układów dynamicznych

Przedmiotem badań każdej dyscypliny naukowej są zwykle *obiekty*, jako wydzielone fragmenty rzeczywistości. Każdemu obiektowi można przypisać pewne cechy (własności) jakościowe  $Q$  i ewentualnie ich charakterystyki (miary) ilościowe  $p$ , które określa się jako cechy (*miary, parametry, atrybuty*) ilościowe obiektu. Utożsamienie danego obiektu z zespołem ( $Q, p$ ) cech jakościowych i ilościowych stanowi o naszej wiedzy o nim lub o przyjętej dokładności jego opisu (modelu).

Ponieważ w nauce często określa się coś jako *jakościowe* albo *ilościowe*, a to rozróżnienie nie zawsze jest ostre i właściwie interpretowane, sprecyzujemy wpierv samo pojęcie *własności jakościowej* i skonfrontujemy je z komplementarnym pojęciem *miary ilościowej*. Na koniec tego paragrafu dokonamy uszczegółowienia rozważań ogólnych, uwzględniając specyfikę rozpatrywanych w Rozprawie układów dynamicznych, jako modeli (obiektów) układów mechatronicznych.

W potocznym rozumieniu jakościowe jest wszystko to, co wyrażamy słowami, a ilościowe to, co wyrażamy liczbami lub ogólniej – formułami matematycznymi (ciekawe, że nie ma tu w zasadzie trzeciej możliwości). Ujmując rzecz bardziej precyzyjnie, trzeba by powiedzieć, że cechy jakościowe są z natury dyskretne, a

cechy ilościowe reprezentują wielkości z natury ciągłe. Zatem różnych pojęciowo własności jakościowych danego obiektu może być co najwyżej skończona liczba, bo nie starczyłoby słów do opisu ich nieskończonego zbioru. Cechy ilościowe mogą być znane dokładnie lub w przybliżeniu, natomiast daną cechę jakościową tylko można lub nie można przypisać danemu obiektowi.

W dalszym ciągu będziemy zatem rozważać obiekty opisane skończonym zespołem  $(\mathbf{Q}, \mathbf{p}) = (Q_1, \dots, Q_l; p_1, \dots, p_k)$  cech jakościowych oraz ilościowych.

Dyskretne z natury własności jakościowe dzielą zbiory obiektów na rozłączne klasy obiektów o tych samych cechach jakościowych. Obiekty w danej klasie różnią się co najwyżej atrybutami (miarami) ilościowymi. Opis (model) klasy obiektów jest *dostateczny*, jeżeli zestaw wartości atrybutów  $p_1, \dots, p_k$  jednoznacznie identyfikuje obiekt przynależny do klasy, czyli umożliwia rozróżnienie obiektów, które uważamy za różne. Aby zapewnić prostotę opisu obiektów postaci  $(Q_1, \dots, Q_l; p_1, \dots, p_k)$ , należy przyjąć, że wielkości  $p_1, \dots, p_k$  są też funkcyjnie niezależne. Wtedy ich liczba, określająca dokładność modelu, nie może być zredukowana bez naruszenia dostateczności.

Poznanie obiektów realnych bazuje na badaniach empirycznych, których podstawą są obserwacje i pomiary. *Obserwacja* to pozyskiwanie wiedzy o przedmiocie badań za pomocą zmysłów. Wynikiem obserwacji jest opis słowny (a więc jakościowy) tego, co zostało zaobserwowane. Taki opis badanego obiektu zwykle oparty jest na pewnym modelu  $(\mathbf{Q}, \mathbf{p})$  przyjętym a priori. Dokonując bowiem obserwacji w ramach badania naukowego, zwykle z góry wiemy, co chcemy zaobserwować lub wykluczyć.

Z kolei *miar* to pozyskiwanie wiedzy o przedmiocie badań za pośrednictwem innego obiektu (przyrządu pomiarowego). Wynikiem pomiaru jest odczyt wartości liczbowej na skali przyrządu oddziałującego z przedmiotem pomiaru.

Jest jasne, że praktycznie użyteczne własności jakościowe obiektów muszą być obserwowalne, a ich miary – mierzalne (lub wyliczalne z danych empirycznych według pewnej teorii). Wielkości  $(p_1, \dots, p_k)$  są więc ściśle związane z określonymi procedurami pomiarowymi o ograniczonym zakresie stosowalności, który powinien odpowiadać zbiorowi otwartemu w przestrzeni  $R^k$  (Ossowski [68]). Gdyby bowiem jakiś obiekt posiadał parametry  $\mathbf{p}$  leżące na granicy zakresu pomiaru, to wobec nieuniknionych zakłóceń, nie można by tego pomiaru rzetelnie wykonać daną metodą. Traktując  $(p_1, \dots, p_k)$  jako lokalny układ współrzędnych określony przez dane procedury pomiarowe, można wykazać, że klasy obiektów  $(\mathbf{Q}, \mathbf{p})$  odpowiadają pewnym rozmaitościom w przestrzeni  $R^k$  (Ossowski [68], [74]).

Jeżeli rozłączne klasy obiektów są *rozgraniczone* (czyli ich domknięcia są rozłączne), powiemy, że stanowią one odrębne kategorie, a ich własności jakościowe są *kategorialne*. Jeżeli jednak dwie klasy nie są rozgraniczone, można je zaliczyć do wspólnej kategorii, bo istnieje ciągłe przejście (w sensie parametrów  $p_1, \dots, p_l$ ) z jednej klasy do drugiej. Niepusta część wspólna domknięcia obu

rozważanych klas składa się z tzw. *punktów (parametrów) krytycznych* ( $p_1, \dots, p_k$ ), reprezentujących obiekty o niejednoznacznie określonych cechach jakościowych (Arrowsmith [2]).

Mając już określone obiekty przynależne do pewnych kategorii, możemy rozpatrywać ich zbiory, jako obiekty nowej kategorii. Na przykład zbiór dwóch obiektów  $\{(Q; \mathbf{p}), (Q'; \mathbf{p}')\}$  możemy traktować jako obiekt  $(Q, Q'; \mathbf{p}, \mathbf{p}')$  i w ten sposób utworzyć kategorię opisaną przez własności jakościowe  $Q, Q'$ . Taka konstrukcja jest jednak czysto formalna i, z oczywistych względów, nie wnosi niczego nowego do poznania naukowego. W realnym świecie mamy jednak do czynienia z naturalnie wyróżnionymi zbiorami obiektów wzajemnie ze sobą powiązanych. Wtedy mówimy, że takie obiekty tworzą pewien *system*. Aby określić system złożony z dwóch obiektów nie wystarczy tylko podać ich własności  $(Q; \mathbf{p}), (Q'; \mathbf{p}')$ , ale trzeba również określić własności (charakter) ich powiązania. Na ogół więc taki system będzie obiektem opisanym przez zestaw  $(Q, Q', Q''; \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')$  uzupełniony o własności jakościowe  $Q''$  i parametry ilościowe  $\mathbf{p}''$ , określające rodzaj i „siłę” powiązania obiektów  $(Q; \mathbf{p}), (Q'; \mathbf{p}')$ . Podobnie rzecz się ma w przypadku systemu złożonego z dowolnej, skończonej liczby obiektów.

Powiązanie obiektów w systemie niesie za sobą daleko idące konsekwencje ontologiczne, mianowicie powstanie nowej „jakości”. Ten pogląd, zwykle uznawany w odniesieniu do systemów bardzo złożonych, na przykład biologicznych, jest jednak zjawiskiem powszechnym, jeśli się głębiej nad tym zastanowić. Już bowiem w najprostszym systemie złożonym z dwóch obiektów  $(Q; \mathbf{p}), (Q'; \mathbf{p}')$  na ogół niedostatecznym będzie model  $(Q, Q', Q''; \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'')$ . Systemy, a w szczególności układy mechatroniczne, mają bowiem to do siebie, że ich własności jakościowe na ogół wykraczają poza zestawienie własności elementów składowych. W systemach pojawia się zwykle nowa, obserwowalna i mierzalna „jakość”, swego rodzaju „duch w maszynie”, którego badania nie można zredukować li tylko do analizy elementów systemu i struktury wewnętrznych powiązań.

Zastanówmy się nad tym, jak opisane rzeczy mają się w przypadku układów mechatronicznych oraz układów dynamicznych, będących ich modelami. Układy takie są specyficznymi przedmiotami badań, ponieważ wykonują pewien ruch, rozumiany jako zmiana stanu układu. Można zatem mówić o *własnościach statycznych* układu wynikających z samej jego budowy (‘anatomii’), a więc znanych a priori, oraz o *własnościach dynamicznych*, które będąc wynikiem wewnętrznych powiązań układu oraz zewnętrznych oddziaływań, ujawniają się dopiero w czasie ruchu układu. „Dynamika” jest właśnie tą nową złożoną własnością jakościową realnego systemu (układu), którą poznajemy empirycznie lub teoretycznie. W szczególności, „dynamika” realnego układu mechatronicznego, to zbiór jego wszystkich, potencjalnie możliwych zachowań. Na poziomie modelu odpowiada to zbiorowi wszystkich trajektorii odpowiedniego układu dynamicznego (Ossowski [74]).

Badając empirycznie układ rzeczywisty lub jego model, zawsze obserwujemy jakąś trajektorię. Dlatego najbardziej dogodne do opisu dynamiki są takie własności, które można przypisać (albo wykluczyć) pojedynczym trajektoriom lub odcinkom trajektorii. Aby jednak te własności były obserwowalne, muszą być własnościami, które można przypisać odcinkom wszystkich trajektorii przecinających otwarte obszary w przestrzeni stanu (lub całym trajektoriom startującym z obszaru otwartego). Jeśli bowiem dowolnie blisko danej trajektorii o pewnej własności  $Q$  przebiegałyby trajektorie, które tej własności nie posiadają, to prawdopodobnie w realnym układzie taka własność nie byłaby obserwowalna z powodu zaburzeń.

Utożsamiając trajektorię o własności  $Q$  z jej punktem początkowym  $\mathbf{x}_0 \in R^n$ , możemy przypisać własność  $Q$  (albo jej brak) każdemu punktowi w rozpatrywanym obszarze przestrzeni stanu. Jeśli wszystkie trajektorie układu dynamicznego posiadają daną cechę  $Q$ , możemy ją przypisać całemu układowi. Wtedy mówimy, że układ ma własność  $Q$  globalnie. Jeżeli wszystkie trajektorie startujące z pewnego obszaru otwartego (na przykład otoczenia punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) posiadają cechę  $Q$ , powiemy, że układ ma lokalnie własność  $Q$  w danym otoczeniu. Zatem obserwowalne, a więc praktycznie użyteczne, mogą być jedynie własności układu dynamicznego, a nie własności pojedynczych jego trajektorii.

W powyższym sensie rozumie się na przykład określenie *obszaru przyciągania* punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , jako zbioru punktów początkowych trajektorii zbieżnych do tego punktu. Przyciągalność jest bowiem łatwo obserwowalną własnością w przeciwieństwie do stabilności. W zależności od rodzaju badanego układu i przyjętej definicji stabilności, możemy (albo nie możemy) określić *obszar stabilności* w przestrzeni stanu jako zbiór punktów początkowych stabilnych trajektorii. Powiemy o tym więcej w Paragrafie 2.3.

W ogólności obraz własności jakościowych układu dynamicznego może być złożony. Istnieją bowiem własności obserwowalne i ważne z praktycznego punktu widzenia, które można przypisywać (albo je wykluczać) lokalnie punktom lub odcinkom trajektorii układu, a niekoniecznie całym trajektoriom. Oznaczmy przez  $X_Q, X_{Q'}$  odpowiednio zbiór punktów w przestrzeni stanu o własności  $Q$  i zbiór złożony z punktów, które cechy  $Q$  nie posiadają. Zbiory te, jako obiekty empirycznie wyznaczalne, są otwarte w przestrzeni stanu i oddzielone *punktami krytycznymi*, którym nie można empirycznie przypisać cechy  $Q$  ani jej braku. Ponieważ zbiory  $X_Q, X_{Q'}$  mogą mieć w ogólności wiele spójnych składowych odpowiednio:  $X_i, i \in I, X'_j, j \in J$ , globalny opis własności układu w sensie  $Q$  wymaga określenia wszystkich tych składowych oraz ich wzajemnego rozmieszczenia w przestrzeni stanu. Do tego celu dogodnie jest posłużyć się metodą typową dla topologii algebraicznej. Polega to na tym, że strukturę składowych spójnych rozważanych klas utożsamia się ze skończonym, spójnym i

nieskierowanym grafem  $G(Q)$ , którego węzły (kolorowane własnością  $Q$  lub jej brakiem) odpowiadają poszczególnym składowym obu typów  $X_i, i \in I; X'_j, j \in J$ , a jego gałęzie (łącznie tylko sąsiadujące, czyli topologicznie nierozgraniczone składowe) – zbiorom punktów krytycznych.

Badając w sensie lokalnej własności  $Q$  klasę układów dynamicznych sparametryzowanych wektorem parametrów  $\mathbf{p} \in P \subset R^k$ , będziemy zatem mieli do czynienia ze sparametryzowaną klasą grafów  $G(Q, \mathbf{p})$ . Wtedy powiemy, że układy dynamiczne o parametrach  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  wykazują ten sam typ w sensie własności  $Q$ , jeśli odpowiednie grafy  $G(Q, \mathbf{p}), G(Q, \mathbf{p}')$  są topologicznie równoważne. Tak rozumiane własności globalne układu o danych parametrach  $\mathbf{p}$  mogą być obserwowalne tylko wtedy, gdy są tego samego typu dla wszystkich układów o zbliżonych parametrach  $\mathbf{p}$  w sensie topologii (metryki) w przestrzeni  $R^k$ . Układ o takiej własności określa się mianem układu *strukturalnie stabilnego*, przy czym chodzi tu w istocie o strukturę odpowiedniego grafu  $G(Q, \mathbf{p})$ , a nie o strukturę układu jako systemu. Z wiadomych powodów zbiór parametrów odpowiadających układom strukturalnie stabilnym musi być otwarty, a *parametry krytyczne*, odpowiadające układom strukturalnie niestabilnym, muszą tworzyć zbiór domknięty. W ten sposób dana własność  $Q$  wyznacza podział przestrzeni parametrów  $P$  na obszary odpowiadające różnym typom własności w sensie  $Q$ . Zmiany typu globalnej własności układu wywołane zmianą jego parametrów określa się mianem *globalnej bifurkacji*. W szczególności możemy mówić o *bifurkacjach stabilności*, które określimy w Rozdziale 5.

## 2.2 Koncepcja wskaźnika stabilności

Opis własności jakościowych układu dynamicznego jest praktycznie użyteczny, jeżeli potrafimy go podać w postaci struktury odpowiednich obszarów  $X_i, X'_j$  w przestrzeni stanu lub przestrzeni parametrów i uzupełnić o pewne charakterystyki ilościowe. Warto więc zastanowić się nad tym, kiedy i dlaczego taka liczbowa charakterystyka (miara) w ogóle jest możliwa i jak można ją opisać oraz wykorzystać.

Załóżmy, że badamy (ze względu na własność  $Q$ ) klasę modeli dynamicznych o parametrach ilościowych  $\mathbf{p} \in P \subset R^k$ . Użyteczna w dalszych rozważaniach będzie następująca

**Definicja 2.1:** Wskaźnikiem danej własności  $Q$  trajektorii układów o parametrach  $\mathbf{p} \in P$  nazywamy funkcję rzeczywistą  $\gamma: P \rightarrow R$ , taką że warunek  $\gamma(\mathbf{p}) > 0$  (lub  $\gamma(\mathbf{p}) < 0$ ) jest równoważny z tym, że układ o parametrach  $\mathbf{p}$  posiada własność (lub nie posiada własności)  $Q$ . Wtedy równość  $\gamma(\mathbf{p}) = 0$  określa zbiór krytycznych wartości parametrów. #

W szczególności, jeżeli własnością  $Q$  jest lokalna (globalna) stabilność układu, możemy mówić o lokalnym (globalnym) *wskaźniku stabilności* układu.

Motywacją dla takiej definicji jest analogia z maksymalną częścią rzeczywistą wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}$  układu liniowego stacjonarnego. W klasie układów liniowych stacjonarnych  $\max [\operatorname{Re} \lambda(\mathbf{A})]$  pełni bowiem rolę wskaźnika stabilności. Jednak już dla układów liniowych niestacjonarnych przykłady pokazują, że pojęcie wartości własnej zależnej od czasu jest mało użyteczne w badaniu stabilności (Gutowski [17], Radziszewski [92]) i, co gorsze, traci algebraiczny sens dla układów nieliniowych.

Jest jasne, że wskaźnik stabilności, o który by najbardziej chodziło w teorii układów mechatronicznych, powinien :

- 1) być stosowalny do szerokiej klasy układów dynamicznych nieliniowych i niestacjonarnych.
- 2) być wielkością wyznaczalną analitycznie lub numerycznie.
- 3) sprowadzać się do klasycznego wskaźnika stabilności w przypadku układów liniowych stacjonarnych.
- 4) wyrażać się ogólną formułą niealgebraiczną, zachowującą formalną aktualność dla układów niestacjonarnych i quasilineowych.
- 5) umożliwiać wyznaczenie warunków koniecznych i dostatecznych stabilności dla układów liniowych stacjonarnych oraz przynajmniej warunków dostatecznych – dla pozostałych układów.

Ważnym celem niniejszej rozprawy jest wprowadzenie i wykorzystanie pojęcia wskaźnika stabilności o podanych wyżej własnościach.

Do rozwiązania problemu znalezienia formuły na wskaźnik stabilności przydatna będzie dalej następująca

**Definicja 2.2:** *Wskaźnikiem lokalnym* danej własności  $Q$  trajektorii układu o parametrach  $\mathbf{p} \in P$ , w pewnym otoczeniu  $X$  punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  przestrzeni stanu  $R^k$  nazywamy funkcję rzeczywistą  $\delta: X \times P \rightarrow R$  o następujących własnościach:

(i) Dowolna trajektoria  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in X$  układu spełnia warunek

$$\delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}) = \inf_{t \geq t_0} [\delta(\mathbf{x}(t), \mathbf{p})] > 0, \quad (2.2.1)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy posiada własność  $Q$ .

(ii) Jeżeli spełniony jest warunek

$$\gamma(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{x}_0 \in X} [\delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})] > 0, \quad (2.2.2)$$

to układ jest lokalnie stabilny. #

Widać, że jeżeli istnieje lokalny wskaźnik  $\delta$ , to wielkość  $\delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$  charakteryzuje całe trajektorie, natomiast  $\gamma(\mathbf{p})$ , jako że spełnia warunki 2,4,5 z podanej listy



wymagań, może pełnić rolę lokalnego *wskaznika stabilności*. Trzeba tylko dobrać odpowiednią funkcję  $\delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$ , aby spełnić warunki 1,3. Wtedy za pomocą wskaźnika  $\gamma$  byłoby łatwo opisać typ własności jakościowych układu w sensie  $Q$ . Powstaje jednak pytanie, czy w ogóle istnieją własności  $Q$  trajektorii układów oraz funkcje  $\delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$ , dopuszczające lokalny wskaźnik i dla jakich rodzajów stabilności jest to możliwe. W definicji 2.2 nie zostało bowiem sprecyzowane samo pojęcie stabilności ani własności  $Q$ . Widać jednak, że własność  $Q$  nie może być dowolna. Jeżeli bowiem wszystkie trajektorie startujące z pewnego otoczenia  $X_0$  punktu stacjonarnego posiadają własność  $Q$ , to układ powinien być lokalnie stabilny.

Aby zapewnić spełnienie Warunku 3 przez wskaźnik  $\chi(\mathbf{p})$  określony w (2.2.2), należałoby wykorzystać alternatywny, w stosunku do algebraicznego, sposób wyznaczania wartości własnych macierzy, który można by uogólnić i wykorzystać do sformułowania uniwersalnej definicji wskaźnika stabilności, użytecznego również dla układów nieliniowych lub niestacjonarnych. W dalszej części niniejszej Rozprawy pokażemy, że dla szerokiej klasy układów możliwe jest podanie użytecznej definicji operacyjnej wskaźnika stabilności, jeżeli odpowiednio zdefiniuje się funkcję  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  oraz samo pojęcie stabilności.

### 2.3 Własności stabilności układów dynamicznych

Celem tego paragrafu jest konstruktywna dyskusja przydatności różnych rodzajów stabilności i innych własności jakościowych do opisu układów mechatronicznych. Pokażemy jak można stopniowo dojść do definicji stabilności, która dopuszcza wprowadzenie pojęcia *wskaznika stabilności*. Umożliwi to w następnym rozdziale wykazanie, że uniwersalną metodę badania i syntezy układów mechatronicznych można zbudować na bazie drugiej metody Lapunowa.

Rozważmy dowolny układ dynamiczny opisany następującym modelem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n, \quad (2.3.1)$$

gdzie  $\mathbf{x}$  jest stanem układu, natomiast  $\mathbf{F}$  jest funkcją wektorową, zapewniającą istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań (2.3.1). W dalszym ciągu będziemy się interesowali stabilnością powyższego układu i stabilnością jego rozwiązań. Zwykle mówiąc o stabilności układów mechatronicznych będziemy mieli na myśli stabilność rozwiązania zerowego (stacjonarnego)  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  odpowiedniego modelu układu, co oczywiście nie zmniejsza ogólności rozważań.

Podstawowe pojęcia odnoszące się do własności stabilności układów dynamicznych postaci (2.3.1) zostały określone jeszcze przez Lagrange'a, Poincaré'go i Lapunowa. Warto powiedzieć jakie są między nimi podobieństwa, a jakie istotne różnice (Magiros [39], Małkin [41]).

Podane dalej klasyczne Definicje 2.3, 2.4, 2.5, stanowiące punkt wyjścia teorii stabilności, odnoszą się do pewnego wyróżnionego punktu lub rozwiązania, ale w

istocie nakładają pewne warunki na zachowanie się trajektorii przebiegających w jego sąsiedztwie. Co istotne, definicje te operują pojęciem normy  $\|\cdot\|$  w przestrzeni stanu  $R^n$  układu, ale są od wyboru normy niezależne.

**Definicja 2.3:** Rozwiązanie (trajektoria)  $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  układu dynamicznego jest *stabilne w sensie Lagrange’a*, jeżeli istnieje stała  $M$ , taka że  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq M$  dla każdego czasu  $t \geq t_0$ . (Magiros [39], Skalmierski [101]).

**Definicja 2.4:** Rozwiązanie (trajektoria)  $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  układu dynamicznego jest *stabilne w sensie Poincare’go*, jeżeli dla każdego  $\varepsilon > 0$  i każdego  $t_0 > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że każda trajektoria  $\mathbf{x}^*(t)$ , taka że  $\|\mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  jest określona dla  $t \in T = [t_0, +\infty)$  i spełnia warunek bliskości  $\inf_{\mathbf{g} \in T} \|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{g}\| \leq \varepsilon$ , gdzie  $G = \{\mathbf{g} = \mathbf{x}(t) : t \in [t_0, +\infty)\}$ .

**Definicja 2.5:** Rozwiązanie (trajektoria)  $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  układu dynamicznego jest *stabilne w sensie Lapunowa*, jeżeli dla każdego  $\varepsilon > 0$  i każdego  $t_0 > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że każda trajektoria  $\mathbf{x}^*(t)$  spełniająca warunek  $\|\mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$  jest określona dla  $t \in T = [t_0, +\infty)$  i spełnia warunek  $\|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  dla każdego  $t \in T$  (Radziszewski [92], Sastry [96]).

Powyższe definicje określają lokalną stabilność pewnego wybranego rozwiązania (trajektorii) układu. Dopiero, gdy stabilne będą wszystkie trajektorie startujące z pewnego zbioru  $X$  w przestrzeni stanu (albo z otwartego otoczenia punktu  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ), możemy mówić o stabilności układu w zbiorze  $X$  (albo o lokalnej stabilności układu w otoczeniu punktu  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ).

Podstawową informacją o jakimkolwiek systemie jest stwierdzenie o jego istnieniu. Odpowiada to sytuacji, gdy wszystkie wewnętrzne procesy, wielkości fizyczne, a więc wartości zmiennych stanu modelu, są ograniczone dla każdego czasu  $t \geq t_0$ . Taka własność systemu jest łatwo obserwowalna i oczywiście odpowiada stabilności Lagrange’a (SLG), która nakłada ograniczenie na zachowanie się trajektorii w otoczeniu punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Układ jest lokalnie stabilny w sensie Lagrange’a w otoczeniu  $X$ , jeśli wszystkie trajektorie startujące z  $X$  są wspólnie ograniczone dla czasów  $t \geq t_0$ . Jest jasne, że układy mechatroniczne powinny być stabilne w sensie Lagrange’a. Jediną charakterystyką ilościową tej własności jakościowej jest stała  $M$  (w Definicji 2.1), którą można szacować empirycznie lub analitycznie. Ponieważ wszystkie trajektorie startujące z otoczenia  $X$  są stabilne w sensie Lagrange’a (bo są wspólnie ograniczone), lokalna stabilność SLG punktu stacjonarnego pokrywa się z lokalną stabilnością układu w otoczeniu tego punktu.

Stabilność SLG informuje jedynie o zakresie (obszarze), w którym mieści się dana trajektoria, ale nie mówi nic więcej o jej przebiegu. Bardziej szczegółowej

informacji na temat trajektorii układu dostarczają stabilności w sensie Poincare’go (*SPN*) i Lapunowa (*SLP*). Stabilność *SPN* odnosi się do geometrii całych trajektorii, natomiast *SLP* – również do ich przebiegu czasowego. Mianowicie, trajektorie startujące z punktów bliskich trajektorii stabilnej w sensie Poincare’go pozostają w „rurce epsilonowej”, wyznaczonej przez tę trajektorię. Stabilność w sensie Poincare’go gwarantuje więc bliskość całych trajektorii w sensie geometrycznym, ale niekoniecznie w każdej chwili czasu, tak jak to zapewnia *SLP*.

W przypadku stabilności w sensie *SLP* trajektorie bliskie na początku pozostają bliskie w każdej chwili czasu tzn. odległość bieżącego punktu wybranej trajektorii od bieżącego punktu trajektorii stabilnej powinna być odpowiednio mała. Z matematycznego punktu widzenia stabilność w sensie *SLP* oznacza po prostu lokalną ciągłość zależności rozwiązań układu od warunków początkowych, co oznacza zachowanie bardziej subtelnych własności jakościowych trajektorii startujących z otoczenia danej trajektorii stabilnej.

Istotne jest, że ani stabilność *SPN*, ani *SLP* nie zapewnia ograniczoności rozwiązań, czyli stabilności *SLG* (Radziszewski [92]). Co więcej, w ogólnym przypadku ze stabilności Lapunowa wynika stabilność w sensie Poincare’go, ale nie odwrotnie. Ponieważ przy badaniu stabilności rozwiązania stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  obie definicje są równoważne w klasie rozważanych tu modeli układów mechatronicznych, będziemy dale mówić tylko o stabilnościach *SLG* i *SLP*.

Charakterystykami ilościowymi stabilności w sensie Lapunowa są liczby  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , występujące w Definicji 2.3. Jednak ich praktyczne znaczenie jest niewielkie, jako że są one zależne od siebie, a ponadto trudno jest podać bezpośredni sposób ich szacowania. Oznacza to również, że stabilność *SLP* nie jest też łatwa do empirycznego uzasadnienia.

Co więcej, definicja stabilności *SLP* mówi jedynie o stabilności wybranej trajektorii. Trajektorie w otoczeniu trajektorii stabilnej muszą wykazywać pewną wspólną własność jakościową określoną w definicji 2.3. Z definicji tej nie wynika jednak, że trajektorie w pewnym otoczeniu trajektorii stabilnej w sensie *SLP* też będą stabilne w tym sensie. Przeciwnie, można podać przykłady układów dynamicznych, dla których w dowolnym otoczeniu stabilnego (w sensie *SLP*) rozwiązania stacjonarnego znajdują się trajektorie niestabilne (Radziszewski [92]). W ogólności więc, inaczej niż w przypadku stabilności *SLG*, nie możemy wnosić o stabilności *SLP* układu na podstawie stabilności *SLP* rozwiązania stacjonarnego.

Rozważane definicje stabilności opisują dość pobieżnie zachowanie się trajektorii układu. Ograniczoność i ciągła zależność od warunków początkowych zapewnia wprawdzie podobne zachowanie się sąsiadujących trajektorii w ograniczonym obszarze, jednak w praktyce często potrzebna jest bardziej szczegółowa informacja o przebiegu w czasie każdej trajektorii z osobna. Tak jest w przypadku układów mechatronicznych, gdy interesujemy się na przykład szybkością zaniku drgań układu zaburzonego. Z tego względu wprowadza się następujące

pojęcia jakościowe, uzupełniające podane definicje stabilności:

**Definicja 2.6:** Rozwiązanie (trajektoria)  $\mathbf{x}^*(t)=\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  układu dynamicznego jest przyciągające, jeżeli dla dowolnego rozwiązania  $\mathbf{x}(t)$  startującego z warunków początkowych dostatecznie bliskich  $\mathbf{x}_0$  zachodzi asymptotyczna zbieżność  $\|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow +\infty$ .

Przyciągalność, będąc własnością jednej trajektorii, jest jednocześnie własnością układu. Wszystkie bowiem rozwiązania  $\mathbf{x}(t)$  zbieżne do  $\mathbf{x}^*(t)$  zbiegają też do siebie nawzajem. Ten fakt uzasadnia poniższą definicję.

**Definicja 2.7:** Obszarem przyciągania trajektorii  $\mathbf{x}^*(t)$  układu dynamicznego jest zbiór warunków początkowych  $X_0$ , taki że dla każdego  $\mathbf{x}_0 \in X_0$  trajektoria  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$  jest zbieżna do  $\mathbf{x}^*(t)$  tzn.  $\|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow +\infty$ .

Sama przyciągalność danej trajektorii, nie gwarantuje jednak jej stabilności w sensie Lapunowa (Radziszewski [92]). Przyciągalność oznacza bowiem tylko zbieżność bliskich trajektorii (dla czasów  $t \rightarrow +\infty$ ), ale nie ciągłość ich zachowania w zależności od warunków początkowych. Gdy dana trajektoria jest przyciągająca, a nie jest stabilna w sensie Lapunowa, mamy do czynienia z dość patologiczną sytuacją, w której dowolnie bliskie trajektorie dla pewnej chwili początkowej  $t_0$  nie przebiegają dowolnie blisko w pewnej skończonej chwili  $t_1 > t_0$ , mimo asymptotycznej zbieżności. Może to być sytuacja zupełnie bez znaczenia albo praktycznie nie do przyjęcia. Dlatego zwykle staramy się zapewnić, aby interesująca nas trajektoria układu (na przykład  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) była jednocześnie przyciągająca i stabilna w sensie Lapunowa. Mówimy wówczas o tzw. trajektorii asymptotycznie stabilnej.

**Definicja 2.8:** Trajektoria  $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)$  układu dynamicznego jest *asymptotycznie stabilna* wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie stabilna w sensie Lapunowa i przyciągająca.

Asymptotyczna stabilność trajektorii, chociaż bardzo cenna, jest własnością czysto jakościową. Nie ma bowiem żadnych charakterystyk ilościowych przyciągalności prócz granic obszaru przyciągania. Istnieją jednak definicje stabilności, które zapewniają taką ilościową charakterystykę. Przykładem tego jest tzw. *stabilność wykładnicza (SW)*.

**Definicja 2.9:** Rozwiązanie (trajektoria)  $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  układu dynamicznego jest stabilne wykładniczo, jeżeli istnieją stałe  $\eta \geq 1, \gamma > 0$ , takie że dla każdej trajektorii  $\mathbf{x}^*(t)$  startującej z pewnego otoczenia  $X_0$  punktu  $\mathbf{x}_0$  i każdego  $t > t_0$  zachodzi oszacowanie

$$\|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq \eta \cdot \|\mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| \cdot \exp[-\gamma(t - t_0)]. \quad (2.3.2)$$

Jeśli oszacowanie (2.3.2) będzie prawdziwe dla danej trajektorii  $\mathbf{x}^*(t)$ , będziemy mówić, że trajektoria ta zbiega wykładniczo do stabilnej trajektorii  $\mathbf{x}(t)$ . Określenie *wykładnicza zbieżność (stabilność)* jest uzasadnione tym, iż parametr  $\gamma$ , zwany *wskaźnikiem zbieżności wykładniczej*, określa szybkość wykładniczego zaniku normy różnicy rozwiązań zaburzonego i stabilnego. Z kolei parametr  $\eta$ , z oczywistych względów zawsze nie mniejszy od jedności, zabezpiecza prawdziwość oszacowania (2.3.2) dla małych czasów. Stabilność SW gwarantuje bowiem tylko tyle, że po upływie dostatecznie długiego czasu norma rozwiązania jest mniejsza od normy początkowej i maleje wykładniczo. Parametr  $\eta$  może być znacznie większy od jedności, a wtedy oszacowanie (2.3.2) będzie bezużyteczne dla małych czasów.

Parametry  $\eta$ ,  $\gamma$  będące operacyjnie użytecznymi charakterystykami ilościowymi stabilności wykładniczej, stanowią o zaletach tego rodzaju stabilności. Znając bowiem wartości tych parametrów, jesteśmy w stanie oszacować otoczenie, w którym znajduje się aktualny punkt  $\mathbf{x}(t)$  dowolnej trajektorii zbieżnej wykładniczo, jeżeli znaliśmy tę normę w pewnej chwili początkowej  $t_0$ . Zatem wykazanie wykładniczej stabilności jako pewnej własności jakościowej dostarcza również informacji ilościowej o tym jak zbiegają trajektorie.

Nietrudno wykazać, że wykładnicza stabilność implikuje stabilność w sensie Lapunowa określoną w Definicji 2.3., czyli  $SW \Rightarrow SLP$ . Co więcej, bezpośrednią konsekwencją równoważności norm w przestrzeniach Euklidesowych jest fakt, że stabilność wykładnicza jest niezależna od wyboru normy, podobnie jak  $SLG$ ,  $SLP$  [D7]. Zatem również stabilność wykładnicza jest własnością topologiczną trajektorii układu.

Stabilności  $SLG$ ,  $SLP$  oraz stabilność wykładnicza opisują zachowanie układu wytraconego ze stanu równowagi. Odpowiada to wymuszeniu zbliżonemu do impulsowego, którego własności nie określa się, gdyż istotny jest tylko stan początkowy układu zaraz po zadziałaniu wymuszenia. Dalsza ewolucja stanu odbywa się już przy założeniu braku wymuszeń (tzn. dla układu swobodnego).

Innego typu zachowania jakościowe układu ujawniają się w wyniku jego reakcji na stale lub okresowo działające wymuszenia takie jak: deterministyczne lub losowe zaburzenia parametrów lub wymuszenia siłowe. Prowadzi to do bardziej złożonych zagadnień dynamiki i stabilności takich jak: *niezawodna stabilność (robust stability)*, *analiza przedziałowa*, *drgania i rezonanse parametryczne*, zmiany własności jakościowych układu, czyli *bifurkacje* a w szczególności *bifurkacje stabilności*. Dlatego praktyczne sytuacje wymuszają rozpatrywanie w teorii stabilności jeszcze bardziej szczegółowych definicji stabilności takich jak: *stabilność przy zaburzeniach stale działających* czy *stabilność techniczna* (Bogusz [10], Skalmierski [101]). Tego typu stabilności są jednak dość kłopotliwe w konkretnych zastosowaniach. Dlatego nie będziemy ich wykorzystywali w wersji znanej z literatury. Analogiczne lecz dogodniejsze dla naszych celów ujęcie kwestii stabilności układów z zaburzeniami będzie podane w Rozdziale 3.

Wykładnicza stabilność jest naturalną własnością stabilnych układów liniowych stacjonarnych, wynikającą z ogólnej postaci ich rozwiązań. Uzasadnia to badanie tego typu stabilności w klasie układów quasiliniowych i/lub niestacjonarnych. Z uwagi na niewątpliwą dogodność pojęcia wykładniczej stabilności układów i zbieżności wykładniczej trajektorii, dobrze by było zastosować te pojęcia do opisu i badania jakościowych własności układów mechatronicznych. Pokażemy, że jest to możliwe i wskazane, ale wymaga pewnych modyfikacji na poziomie definicji jak również – samej filozofii metod jakościowych.

W teorii stabilności uznaje się za pożądane formułowanie takich definicji stabilności i innych własności jakościowych, które byłyby własnościami samych układów, a nie narzędzi służących do ich badania czy opisu. W szczególności więc uważa się, że własności te powinny być niezależne od wyboru normy. Podane definicje stabilności i przyciągalności oczywiście spełniają ten wymóg. Jednak na przykładzie stabilności wykładniczej najlepiej widać, że ta niezależność od normy jest zaletą tylko z pozoru a właściwie nie ma większego znaczenia. Zmiana normy w przestrzeni stanu pociąga za sobą na ogół tylko zmianę współczynnika  $\eta$ , bowiem wskaźnik zbieżności  $\gamma$  nie zmienia się. Współczynnik  $\eta$  uzyskany z oszacowań może być różny a niekiedy dość duży. Wtedy na podstawie oszacowania (2.3.2) właściwie nic nie da się powiedzieć o zachowaniu trajektorii dla małych czasów. Pod względem jakości oszacowań różne normy na ogół wcale nie będą równoważne. Przeciwnie, wykorzystując pojęcie wykładniczej stabilności, należy optymalizować dobór normy, aby minimalizować współczynnik  $\eta$ , w celu uzyskania najlepszych oszacowań ilościowych. Jeśli uznamy, że analiza jakościowa układu ma nie tylko orzekać o stabilności, ale również o zachowaniu się trajektorii w chwilach przejściowych, to lepsze mogą być inne definicje stabilności niekoniecznie od normy niezależne. Uznanie takiego podejścia nie jest łatwe, ponieważ wymaga zmiany na poziomie filozofii i metodologii analizy jakościowej układów. Argumentacja podana poniżej, ma na celu uzasadnienie takiego stanowiska.

W przypadku, gdy dla danej normy  $\|\bullet\|$  parametr  $\eta = 1$  a wskaźnik  $\gamma > 0$ , będziemy mówić o stabilności wykładniczej układu według normy (SWN).

**Definicja 2.10:** Rozwiązanie (trajektoria)  $\mathbf{x}_0(t)=\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0,t_0)$  układu dynamicznego jest wykładniczo stabilne według normy  $\|\bullet\|$ , jeżeli istnieje stała  $\gamma > 0$ , takie że dla każdej trajektorii  $\mathbf{x}(t)$  startującej z pewnego otoczenia punktu  $\mathbf{x}_0$  i dla każdego  $t > t_0$  prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)\| \cdot \exp[-\gamma(t - t_0)]. \quad (2.3.3)$$

Tego typu stabilność jest szczególnie dogodna, ponieważ jednocześnie zapewnia stabilność w sensie *SLP*, wykładniczą zbieżność trajektorii startujących z pewnego otoczenia trajektorii stabilnej oraz oszacowanie wykładniczego zaniku normy

trajektorii dla wszystkich czasów  $t > t_0$ , a nie tylko dla czasów dostatecznie dużych. Istotne jest to, że tego typu stabilność odnosi się do danej normy, a zmiana normy powoduje na ogół zmianę wskaźnika zbieżności  $\gamma$ . Daje to możliwość optymalizacji normy. Stabilność *SWN* nie jest więc własnością topologiczną trajektorii układu, ale właśnie przez to wnosi więcej informacji na temat zachowania się trajektorii układu. Opisuje bowiem własności geometryczne trajektorii, na przykład wnikanie trajektorii do wnętrza kul wyznaczonych przez daną normę w przestrzeni stanu. Co więcej, różne normy, chociaż topologicznie równoważne, mogą nie być równie dogodne do przeprowadzenia konkretnych obliczeń i oszacowań. Niekiedy pewne obliczenia łatwiej jest wykonać dla specjalnie dobranych norm. Będzie o tym mowa w Paragrafie 4.4, poświęconym *kanonicznym i regularnym funkcjom Lapunowa*.

Własność stabilności *SWN* dostarcza więc jeszcze bardziej szczegółowej informacji na temat przebiegu trajektorii układu niż stabilność wykładnicza w zwykłym sensie. Dany układ może być bowiem stabilny wykładniczo według jednej normy, a nie być stabilny według innej normy. To właśnie stwierdzenie budzi nieraz kontrowersje i sceptycyzm. Jednak filozofia, według której stabilność powinna być jedynie własnością układu, a nie narzędzia do jej badania, niezupełnie jest słuszna. Ze stabilnością jest bowiem podobnie jak z ciągłością, która może zależeć od topologii. Na przykład w analizie funkcjonalnej stosuje się różne topologie, aby lepiej zbadać własności pewnych odwzorowań. W rozważanej tu koncepcji badania stabilności ważniejszy jest fakt, że wskaźnik zbieżności wykładniczej według danej normy jest jedyną ilościową charakterystyką tej własności jakościowej i może być traktowany jako miara (wskaźnik) stabilności wykładniczej. Ponieważ definicja stabilności *SWN* konkretyzuje normę, tego typu stabilność jest łatwo empirycznie dostępna (sprawdzalna), podobnie jak *SLG*. Może to mieć zasadnicze znaczenie na przykład przy konstrukcji adaptacyjnych układów sterowania omówionych w Rozdziale 10. Stabilność *SWN* spełnia więc ogólne wymogi *operacjonizmu* – współczesnego nurtu filozoficznego, według którego w nauce (a zwłaszcza w naukach technicznych i stosowanych) powinno się używać pojęć (wielkości) mających dobrze określone *definicje operacyjne*, czyli procedury empiryczne i obliczeniowe niezbędne do ich wyznaczenia (Ossowski [68], [74]). Definicje stabilności posługujące się kwantyfikatorem ogólnym typu  $\forall(\varepsilon > 0)$ , a więc na przykład stabilność *SLP*, tego warunku oczywiście nie spełniają.

Bezpośrednio z definicji wynika, że lokalna stabilność wykładnicza rozwiązania stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  implikuje lokalną stabilność *SW* układu tzn. wszystkie trajektorie wykładniczo zbieżne w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego są również wykładniczo stabilne. Możemy więc mówić o obszarze stabilności wykładniczej jako o zbiorze punktów początkowych stabilnych trajektorii układu. Z kolei stabilność *SWN* rozwiązania stacjonarnego implikuje stabilność *SW* wszystkich trajektorii przebiegających w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Uzasadnione będzie więc mówienie o (lokalnej) stabilności wykładniczej układu, jeśli wszystkie

trajektorie układu będą (lokalnie) zbieżne wykładniczo. Podobnie powiemy, że układ jest (lokalnie) wykładniczo stabilny według określonej normy, jeśli wszystkie jego trajektorie będą (lokalnie) wykładniczo zbieżne według tej normy.

Z powyższego wynika, że stabilności  $SW$ ,  $SWN$  są łatwiejsze do empirycznego badania. Wystarczy w tym celu porównywać normę stanu układu w określonych chwilach czasu i na tej podstawie szacować szybkość jej zaniku. Umożliwia to empiryczne wyznaczanie chwilowej szybkości zbieżności trajektorii, co ma zasadnicze znaczenie w komputerowych układach sterowania. Tę kwestię omówimy dokładniej w Rozdziale 10.

Istotna dla dalszych rozważań będzie jeszcze jedna definicja stabilności.

**Definicja 2.11:** (Mao [42], Ossowski [58], [69])

Układ dynamiczny (2.3.1) jest *kwadratowo stabilny* w obszarze  $X$ , jeżeli istnieje dodatnio określona macierz  $\mathbf{S}$ , stała  $\lambda > 0$  i norma  $\|\cdot\|$  w przestrzeni stanu, taka że dla każdego  $\mathbf{x} \in X$  zachodzi następujące oszacowanie:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S} \mathbf{x} \leq -\lambda \|\mathbf{x}\|^2. \quad (2.3.4)$$

Jak łatwo zauważyć, stabilność  $SQR$  jest własnością pokrewną ze stabilnością wykładniczą według normy, ale od niej ogólniejszą, ponieważ  $SWN$  implikuje  $SQR$ , ale nie odwrotnie. Istotnie, z równoważności norm wynika, że oszacowanie (2.3.4) pociąga za sobą oszacowanie  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S} \mathbf{x} \leq -2\gamma \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2$ , gdzie  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = V_{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ , natomiast  $\gamma$  jest pewną stałą dodatnią. Ponieważ na trajektoriach układu  $\dot{V}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S} \mathbf{x}$ , funkcja  $V_{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$  musi spełniać nierówność różniczkową  $\dot{V}_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \leq -2\gamma V_{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ , której rozwiązanie prowadzi do oszacowania (2.3.1) dla rozwiązania stacjonarnego [D11]. Stabilność  $SQR$  w obszarze  $X$  zapewnia więc tylko to, że układ jest lokalnie (w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c) \subset X$ ) stabilny wykładniczo według pewnej normy  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}$ , ale tej normy nie precyzuje. Ta subtelna własność stabilności  $SQR$ , mało istotna dla układów dynamicznych, staje się bardzo przydatna do opisu i badania inkluzji różniczkowych.

Na tym etapie pozostaje otwarta kwestia: czy i kiedy dla danego układu dynamicznego istnieje norma, według której układ byłby wykładniczo stabilny i jak taką normę znaleźć? Ważna jest też kwestia wyznaczenia lub oszacowania wartości wskaźnika zbieżności wykładniczej dla danego układu. Patrząc na zbieżność wykładniczą z punktu widzenia dwóch trajektorii, jako rozwiązań  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$ , startujących z pobliskich punktów  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$ , prawidłowe oszacowanie wskaźnika  $\gamma$  można otrzymać obliczając tzw. *wykładnik Lapunowa* określony następującym wzorem (Ossowski [58]):



$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \log \left( \frac{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\|} \right) \right]. \quad (2.3.5)$$

Wzór ten nadaje się do oszacowań numerycznych (na przykład w badaniach układów chaotycznych wykonywanych na modelu komputerowym lub w analizie danych uzyskanych z pomiarów na układzie rzeczywistym), lecz jego teoretyczne szacowanie dla klas trajektorii jest praktycznie niewykonalne. Wymagałoby to bowiem znajomości tych trajektorii, a właśnie stosując metody jakościowe chcielibyśmy tego uniknąć. W Rozdziale 3 pokażemy inny sposób szacowania wskaźnika stabilności, co uczyni to pojęcie użytecznym również w teorii.

## 2.4 Metody analizy jakościowej układów dynamicznych

Wszelkie metody badawcze mają na celu dostarczenie informacji i wiedzy o własnościach badanego obiektu – przedmiotu badań. Skoro własności mogą być jakościowe, a ich miary ilościowe, przyjęło się mówić o jakościowych oraz ilościowych metodach badań, chociaż rzadko precyzuje się dokładnie na czym polega to rozróżnienie. Co więcej, funkcjonuje dość powszechne, a niezupełnie trafne mniemanie, że metody jakościowe stanowią jedynie uzupełnienie dla metod ilościowych, które to dostarczają konkretnych, liczbowych i praktycznych informacji. Aby wykazać, że jest to przekonanie niesłuszne, musimy dokładniej sprecyzować istotę metod obu tych rodzajów.

Przed wszystkim trzeba powiedzieć, że każda metoda badania, jeżeli ma być praktycznie użyteczna, powinna dostarczać informacji zarówno jakościowej jak i ilościowej o przedmiocie badań. Jeśli na przykład wykażemy, że układ dynamiczny jest lokalnie stabilny, ale nie określimy miary (wielkości) obszaru stabilności, to taki wniosek będzie praktycznie bez znaczenia. Podobnie bezwartościowe będzie wyznaczenie (empiryczne lub numeryczne) jakichś wartości liczbowych, bez podania ich odniesienia do konkretnych własności jakościowych układu. Zatem podział metod badawczych ze względu na ilościową lub jakościową treść pozyskiwanych informacji nie za bardzo odpowiada istocie rzeczy.

Poruszane tu sprawy dotyczą ważnych kwestii filozoficznych. W myśl ogólnego podziału sądów według Kanta, wnioskowanie odnośnie własności złożonego systemu, które nie są własnościami jego elementów (a takimi są na przykład własności dynamiczne układów mechatronicznych), jest formułowaniem tzw. *sądów syntetycznych* odnośnie systemu. Zależnie od tego czy badanie takie będzie oparte o czyste rozumowanie matematyczne, czy też o dane doświadczalne, będziemy mieli do czynienia z *sądami syntetycznymi a priori* lub *sądami syntetycznymi a posteriori*. Wszelkie wnioski wynikające z analizy matematycznej fizycznego modelu układu i logicznej dedukcji są oczywiście *sądami syntetycznymi a priori*. Z kolei wnioski wynikające ze skończonego zbioru danych, pozyskanych z doświadczenia lub

symulacji komputerowych, będą sędami syntetycznymi a posteriori. Badania numeryczne modelu, podobnie jak badania doświadczalne układu realnego, należy więc zaliczyć do badań empirycznych, których wynikiem mogą być tylko skończone zbiory danych.

Istotna różnica między metodami jakościowymi a ilościowymi nie polega więc na treści (jakościowej czy ilościowej) pozyskiwanej wiedzy, lecz na samym sposobie jej pozyskiwania. W metodach jakościowych najpierw dowodzi się matematycznie pewnych własności jakościowych (dynamiki układu), a potem wyznacza (ściśle lub numerycznie) odpowiadające im charakterystyki ilościowe. Formułowane są wtedy sądy syntetyczne a priori. Własności jakościowe wykazane w ten sposób stanowią informację pewną, a jej użyteczność określona jest tylko dokładnością oszacowań parametrów ilościowych.

Z kolei w metodach ilościowych najpierw gromadzona jest informacja ilościowa pozyskana z pomiarów lub symulacji komputerowych i na jej podstawie wyciąga się wnioski lub formułuje hipotezy (sądy syntetyczne a posteriori) o pewnych jakościowych własnościach układu, bazujące na uogólnieniu czyli tzw. *indukcji*. Metody empiryczne, a w tym również symulacje komputerowe, obarczone są więc problemem *indukcji* podniesionym przez Hume'a i problemem *falsyfikowalności* twierdzeń nauki sformułowanym przez Poppera. Według tych koncepcji, żadnego ogólnego twierdzenia czy prawa nie da się niezbitnie wykazać na podstawie skończonej liczby przykładów potwierdzających. Wystarczy jednak tylko jeden kontrprzykład, aby dane twierdzenie obalić (*sfalsyfikować*). Dlatego własności jakościowe wykazane metodami ilościowymi zawsze są hipotetyczne, a użyteczność wniosków uzyskanych takimi metodami można wykazać tylko w praktyce.

Metody jakościowe pozwalają na uzyskanie niezawodnych informacji o dynamice układu na podstawie samych równań (czy inkluzji) modelu, bez konieczności ich rozwiązywania, w przeciwieństwie do metod ilościowych, które wymagają rozwiązywania równań modelu albo wykonywania doświadczeń na układzie rzeczywistym. Zważywszy na fakt, że realne układy rzadko są w pełni dostępne empirycznie dla naukowca, a ich modele matematyczne – rzadko rozwiązywalne ściśle, metody jakościowe należy uznać za podstawę badania dynamiki układów. Dlatego w mechatronice, gdy mamy już sformułowane i zidentyfikowane modele układów, badania ich własności powinny rozpoczynać się od zastosowania metod jakościowych, zaś kończyć wykonaniem eksperymentów i obliczeń numerycznych, a nie na odwrót.

Metody jakościowe badania układów dynamicznych, na których teraz skoncentrujemy uwagę, można dalej podzielić na *metody bezpośrednie* i *metody pośrednie*, w zależności od tego, czy metoda opiera wnioskowanie na oryginalnych równaniach modelu, czy na równaniach odpowiednio przekształconych. *Metody pośrednie* (to określenie oficjalnie nie funkcjonuje w nauce i jest tu przyjęte tylko dla spójności wypowiedzi) polegają w ogólności na wstępnym przekształceniu

równań układu za pomocą określonych procedur matematycznych, a następnie – na pewnym wnioskowaniu uzasadnionym jakąś teorią odnoszącą się do badanych własności. Typowymi etapami takiej analizy są oszacowania pewnych funkcji zależnych od układu albo, o ile to możliwe, pewne obliczenia algebraiczne na takich funkcjach lub macierzach, jak to ma miejsce na przykład w przypadku badania stabilności układów liniowych stacjonarnych. Sposób postępowania nie zawsze jest z góry określony, raczej indywidualny i w znacznym stopniu może zależeć od pomysłowości badającego dany układ. W rezultacie można otrzymać lepsze lub gorsze wyniki analizy, które zależą nie tylko od układu, ale również od sposobu jego badania. Niepodobna wtedy stwierdzić, czy można te wyniki poprawić i jak należałoby zmodyfikować sposób postępowania. Stanowi to pewien mankament metod pośrednich badania własności jakościowych i stabilności układów.

Istotną wadą metod pośrednich jest też fakt, że wnioskowanie odbywa się w nich na podstawie przekształconych równań modelu. Na mocy odpowiednich twierdzeń lub teorii równania te zachowują badaną własność jakościową (na przykład stabilność w sensie Lapunowa), ale niekoniecznie inne własności jakościowe oraz ich miary ilościowe. Zatem zastosowanie metody pośredniej mocno ogranicza zakres wnioskowania, przeważnie tylko do jednej badanej własności.

Przykładem metody pośredniej badania stabilności układów nieliniowych jest tzw. *pierwsza metoda Lapunowa*, polegająca na *linearyzacji* (operacja analitycznego przekształcenia równań modelu) oraz *wyznaczeniu wartości własnych* macierzy jego części liniowej (analiza algebraiczna). Odpowiednie twierdzenie Lapunowa określa czy i kiedy stabilność układu zlinearyzowanego zapewnia lokalną stabilność układu badanego, nie zapewnia jednak zachowania innych własności tego układu.

Z kolei *metody bezpośrednie* badania układów, w przeciwieństwie do metod pośrednich, bazują na oryginalnych równaniach modelu, co jest ich ważną zaletą. Dlatego metody te gwarantują (bez konieczności odwoływania się do jakichś twierdzeń), że wszelkie wnioski jakościowe, uzyskane za ich pomocą dotyczą badanego modelu. Przykładem metody bezpośredniej jest tzw. *druga metoda Lapunowa*, czyli *metoda bezpośrednia Lapunowa* albo po prostu *metoda funkcji Lapunowa*, którą to metodę zasadniczo odróżnia od metod pośrednich również pewna standaryzacja procedury postępowania, jednakowoż przy użyciu niestandardowego narzędzia, jakim jest *funkcja Lapunowa* dla danego układu.

Metoda funkcji Lapunowa pełni wyróżnioną rolę pośród metod bezpośrednich, co uzasadnia jej wybór jako podstawy uniwersalnej metody analizy i syntezy układów mechatronicznych. Inne metody bezpośrednie, jeśli uznać ich istnienie wykraczające poza szczególne przypadki, polegają z grubsza na szacowaniu na przykład normy rozwiązań poprzez bezpośrednie zastosowanie nierówności różniczkowych lub całkowych do równań modelu w wersji różniczkowej lub całkowej. Ponieważ przebieg takich szacowań zależy od zastosowanych nierówności i innych przybliżeń lepiej lub gorzej dostosowanych do problemu, trudno jest

uzyskać, a nawet uzasadnić wynik optymalny. Poza tym również w tym przypadku wynik będzie dotyczył z reguły tylko jednej własności lub będzie rozstrzygał jedną kwestię. Co gorsze, zastosowanie tak rozumianych metod bezpośrednich do układów z zaburzeniami i sterowaniami, nie jest oczywiście o ile w ogóle możliwe.

W porównaniu z tym, metoda funkcji Lapunowa pozwala uzyskiwać różne wyniki analizy poprzez samo zastosowanie różnych funkcji (próbnych) Lapunowa. Dzięki temu można starać się dobrać do problemu funkcję najlepszą, czyli przeprowadzić optymalizację funkcji Lapunowa. Mając funkcję Lapunowa dla danego układu, można ją też wykorzystać do badania lub szacowania jeszcze innych jego własności (na przykład funkcjonalnych wskaźników jakości). Co więcej, zastosowanie metody funkcji Lapunowa do szerokiej klasy układów niestacjonarnych, quasiliniowych, z zaburzeniami lub sterowaniami nie stwarza istotnych trudności metodologicznych. Zatem przyjęcie tej metody jako narzędzia do badania własności układów mechatronicznych jest w pełni uzasadnione.

Aby klasyczną metodę funkcji Lapunowa ściślej sprecyzować, rozważmy model (2.3.1) układu dynamicznego bez zakłóceń, zaburzeń i sterowań. Istnieje szereg twierdzeń dotyczących stabilności takiego układu. Na użytek niniejszej pracy przytoczymy dwa z nich, kiedy to *funkcja Lapunowa* jest definiowana jako dodatnio określona funkcja klasy  $C^1$  względem zmiennych stanu  $\mathbf{x} \in R^n$  badanego układu, niezależna jawnie od czasu, której pochodna zupełna na trajektoriach układu jest niedodatnia (lub określona ujemnie) [D9].

**Twierdzenie 2.1(2.2):** (*Lapunowa o stabilności*) (Radziszewski [92])

Niech  $V(\mathbf{x})$  będzie dodatnio określoną funkcją klasy  $C^1$ , taką że  $V(\mathbf{x}) \leq \chi(\|\mathbf{x}\|)$ , gdzie  $\chi$  jest funkcją klasy  $K$ , natomiast  $W(\mathbf{x})$  będzie ciągłą i nieujemną (dodatnio określoną) funkcją taką, że  $V(\mathbf{0}) = W(\mathbf{0}) = 0$ . Jeśli pochodna czasowa funkcji  $V(\mathbf{x})$  na trajektoriach układu (2.3.1) spełnia nierówność  $dV(\mathbf{x})/dt \leq -W(\mathbf{x})$  w pewnym otoczeniu punktu  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , to punkt ten jest lokalnie (asymptotycznie) stabilny w sensie Lapunowa (Sastry [96]).

Badanie własności stabilności układów przy użyciu odpowiednich funkcji  $V$ ,  $W$ , określane mianem metody funkcji Lapunowa, sprowadza się z grubsza biorąc do wyboru pewnej funkcji dodatnio określonej  $V(\mathbf{x})$  i badaniu znaku jej pochodnej zupełnej na trajektoriach układu. Jeśli ta pochodna okaże się niedodatnia (albo ujemnie określona), czyli gdy  $V(\mathbf{x})$  będzie funkcją Lapunowa dla danego układu, wówczas badany układ będzie stabilny w sensie Lapunowa (albo asymptotycznie stabilny), na mocy odpowiedniego twierdzenia Lapunowa. W przeciwnym razie nie możemy wnosić o stabilności układu przy pomocy wybranych funkcji  $V$ ,  $W$ .

Podane twierdzenia są dość ogólne, ale niezbyt konstruktywne. Nie jest bowiem powiedziane jak dobrać funkcje  $V$ ,  $W$ , które spełniałyby podane wymagania, a tym bardziej trudno byłoby wskazać optymalne funkcje  $V$ ,  $W$  zapewniające najlepsze

oszacowania obszaru stabilności. Niedobór racjonalnych metod postępowania, będący zasadniczym mankamentem metody funkcji Lapunowa, sprawia, że znajdowanie funkcji Lapunowa dla danego układu jest w znacznym stopniu sztuką (Kalman [24]). W Rozdziale 3 pokażemy jak można udoskonalić metodę funkcji Lapunowa pod względem jej konstruktywności i zakresu stosowalności.

## 2.5 Własności stabilności układów mechatronicznych

Dotychczas rozważaliśmy koncepcje analizy jakościowej układów dynamicznych opisujących się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Teraz dokonamy odpowiedniego ich uogólnienia na inkluzje różniczkowe postaci (1.4.1), będące modelami układów mechatronicznych [D1].

Na wstępie warto podkreślić zasadniczą trudność badania modeli w postaci inkluzji różniczkowych, które tym różnią się od równań, że dla każdego warunku początkowego  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in X_0 \times T$  może istnieć (nieskończenie) wiele trajektorii. Praktycznie oznacza to, że w przypadku inkluzji nie mamy nawet możliwości znalezienia przybliżonych rozwiązań analitycznych czy numerycznych. Symulacje numeryczne mogą jedynie pełnić funkcje pomocniczą. Kluczowe znaczenie metod jakościowych, które z zasady nie wymagają znajomości rozwiązań, staje się w tym przypadku jasne. W zasadzie nie ma innego sposobu badania tego typu modeli.

Badanie własności inkluzji różniczkowych wiąże się z nowymi problemami teoretycznymi takimi jak: kwestia definicji własności jakościowych, definicji rozwiązań ogólnych i szczególnych oraz kwestia ich istnienia i jednoznaczności. Pełniejszy opis podstaw teorii inkluzji różniczkowych podany jest w Dodatku 1. Ponieważ w niniejszej rozprawie zajmujemy się modelami układów spełniających funkcje użytkowe w otoczeniu stanu stacjonarnego  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , skupimy uwagę na własnościach dynamicznych inkluzji w otoczeniu tego punktu [D14]. Przede wszystkim rozważymy kwestię uogólnienia definicji (lokalnej) stabilności *SW*, *SWN*, *SQR* dla inkluzji.

Powiemy, że dana inkluzja różniczkowa ma daną własność jakościową *Q* w obszarze *X*, jeśli ma ją w każdym punkcie tego obszaru, natomiast ma własność w danym punkcie, jeśli wszystkie trajektorie startujące z tego punktu mają tą własność. Tą własnością może być na przykład stabilność wykładnicza.

Stabilność wykładniczą *SWN* rozwiązania zerowego inkluzji określa poniższa

**Definicja 2.12:** Rozwiązanie stacjonarne  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  inkluzji różniczkowej jest wykładniczo stabilne według normy  $\|\cdot\|$ , jeżeli istnieje stała dodatnia  $\gamma > 0$ , taka że dla każdej trajektorii startującej z pewnego otoczenia *X* punktu  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  i dla wszystkich czasów  $t > t_0$  prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| \cdot \exp[-\gamma(t - t_0)]. \quad (2.5.1)$$

Podobnie, w pozostałych definicjach stabilności, przyciągalności itp., aby dokonać ich uogólnienia na inkluzje różniczkowe, wystarczy zmienić określenie „trajektoria startująca z jakiegoś punktu” na „rodzina wszystkich trajektorii startujących ....”.

Jak widać uogólnienie na inkluzje różniczkowe pojęcia stabilności *SLG*, *SLP*, *SW* i *SWN* oraz przyciągalności nie wnosi niczego nowego. Jednak w przypadku *SQR* takie uogólnienie daje użyteczne rozszerzenie pojęcia stabilności.

**Definicja 2.13:** Inkluzja różniczkowa  $\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \Gamma(Z)\}$  jest kwadratowo stabilna w obszarze  $X \subset R^n$ , jeżeli

$$\forall_{\mathbf{z} \in \Gamma(Z)} \exists_{S>0} \exists_{\gamma>0} \forall_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{S} \mathbf{x} \leq -2\gamma \|\mathbf{x}\|_S^2. \quad (2.5.2)$$

Powyższa definicja stabilności *SQR* mówi o tym, że dla każdej realizacji  $\mathbf{z} \in \Gamma(Z)$  istnieje norma  $\|\cdot\|_S$ , według której dany układ jest wykładniczo stabilny z obszarem przyciągania  $X(S, c)$ . Taka definicja sprawia, że model w postaci inkluzji może być w różny sposób stabilny dla różnych realizacji procesu  $\mathbf{z}$ , ale dzięki temu lepiej można oszacować obszar przyciągania za pomocą wielu norm (Ossowski [58], [78]). Odpowiada to potrzebom praktyki, gdzie często ważniejszy jest obszar przyciągania i asymptotyczna zbieżność trajektorii niż konkretna forma stabilności.

Badając lub projektując realny układ mechatroniczny, zwykle najpierw formułujemy werbalnie pożądane własności układu. Dlatego własności te mają przeważnie charakter jakościowy, zaś parametry ilościowe stanowią jedynie ich liczbową charakterystykę. W szczególności, mówiąc o własnościach stabilności układu, mamy na myśli nie tylko określony rodzaj stabilności układu albo asymptotyczną zbieżność lub przyciągalność pewnych trajektorii, lecz również szereg charakterystyk ilościowych, określających nie tylko czy, ale również jak dany układ jest stabilny. W ogólności, prócz zapewnienia stabilności chcielibyśmy znać oszacowania obszaru przyciągania, zakresu procesów przejściowych, wielkości zbioru granicznego (jeśli trajektorie układu nie zmierzają ściśle do punktu stacjonarnego) i szybkość zbieżności trajektorii. Tego rodzaju informacje są już jak najbardziej ilościowe. Tylko precyzując ściśle te własności, możemy poprawiać ich spełnienie poprzez dobór parametrów układu lub sterowań.

Własności stabilności modeli układów mechatronicznych można z grubsza podzielić na: *własności geometryczne* trajektorii (jako obiektów w przestrzeni stanu) oraz ich *własności dynamiczne* (czasowe). Własności pierwszej kategorii określają obszary, w których przebiegają trajektorie, czyli zakresy, w których odbywa się ruch układu w określonych warunkach. Z kolei własności kategorii drugiej mówią o tym, jak po tych trajektoriach przemieszcza się w czasie aktualny stan układu.

Wprost z definicji wynika, że do badania i opisu geometrii trajektorii układów mechatronicznych bez zaburzeń jawnie występujących w modelu, możemy stosować

w otoczeniu stanu nominalnego stabilności *SLG* i *SLP*, natomiast stabilności *SWN* i *SQR* – do badania przebiegu czasowego trajektorii za pomocą oceny zbieżności wykładniczej. Oczywiście tego rodzaju opis charakteryzuje odpowiedź układu na nagłą zmianę warunków początkowych, czyli reakcję na krótkotrwałe wymuszenia nie uwzględnione w modelu.

Kompletny opis własności jakościowych układu mechatronicznego wymaga jeszcze określenia jego funkcjonowania w warunkach zaburzeń lub zakłóceń *stale działających*  $\mathbf{z}$ , czyli takich, które występują jawnie w modelu układu. W teorii stabilności stosuje się w tym celu specjalnie do tego przystosowane pojęcia, na przykład tzw. *stabilność przy zaburzeniach stale działających* lub *stabilność techniczną* (Bogusz [10]). W dalszym ciągu nie będziemy korzystali z tego rodzaju pojęć, stosując analogiczne ujęcie bardziej dostosowane do metody optymalnych funkcji Lapunowa opisanej w Rozdziale 3. W szczególności pokażemy, że można z powodzeniem opisywać własności układów z zaburzeniami stale działającymi za pomocą stabilności *SWN* oraz *SQR*, definiując odpowiednio wskaźnik stabilności i wskaźnik zbieżności.

Ruch stabilnego układu mechatronicznego wytraconego z nominalnego stanu równowagi zwykle przebiega według pewnego schematu czasowego, który można zapisać symbolicznie jako:  $X_0 \uparrow X_{\sim} \rightarrow X_{\infty}$ , gdzie  $X_0$  oznacza obszar punktów początkowych trajektorii, natomiast zbiory  $X_{\sim}$ ,  $X_{\infty}$  opisują odpowiednio: zachowanie przejściowe i asymptotyczne trajektorii układu startujących z  $X_0$ . Podany schemat zachowania się układu mechatronicznego należy więc rozumieć w ten sposób, że trajektorie startujące z obszaru  $X_0$  przebiegają wewnątrz obszaru  $X_{\sim}$  i dążą do obszaru asymptotycznego  $X_{\infty}$ , gdy  $t \rightarrow +\infty$ .

Obszar  $X_0$  określony jest zwykle przez krótkotrwałe wymuszenia, które mogą mieć charakter przypadkowych zaburzeń albo zamierzonych zmian stanu związanych z funkcjonowaniem układu. Z kolei obszar  $X_{\sim}$  określa zakres ruchu układu startującego z obszaru  $X_0$  osiąganym dla skończonych czasów  $t < +\infty$ . Geometria (kształt i wielkość) tego obszaru jest określona przez dynamikę układu oraz obszar początkowy  $X_0$ . *Obszar asymptotyczny*  $X_{\infty}$  jest natomiast *zbiorem granicznym*, do którego dążą wszystkie trajektorie gdy  $t \rightarrow +\infty$ . Zbiór graniczny pokrywa się z punktem  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  układu tylko przy braku zaburzeń stale działających na układ asymptotycznie (wykładniczo) stabilny. Wtedy powiemy, że mamy do czynienia z *asymptotyczną stabilnością* (*zbieżnością*) *trajektorii do punktu*. W obecności zaburzeń stale działających, na jakie zwykle narażony jest realny układ mechatroniczny, zbiór graniczny jest pewnym otoczeniem punktu stacjonarnego. Wtedy będziemy mówili o *asymptotycznej stabilności* (*zbieżności*) *trajektorii układu do zbioru*  $X_{\infty}$ . Jest przy tym jasne, że geometria (kształt i wielkość) tego zbioru jest określona przez dynamikę układu oraz charakter i intensywność zaburzeń stale działających.

Opis jakościowy zachowania się układu w otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (bazujący na geometrycznych własnościach trajektorii) można zatem przedstawić za pomocą odpowiednich zbiorów  $X_0, X_-, X_\infty$ , które powinny być jednospójne i zawierać w swoim wnętrzu interesujący nas punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Ponieważ z istoty rzeczy wynikają inkluzje  $X_0 \subset X_-$ ,  $X_\infty \subset X_-$ , możemy określić zbiory rozmyte  $(X_0, X_-)$  oraz  $(X_\infty, X_-)$ , opisujące odpowiednio własności przejściowe i asymptotyczne trajektorii układu [D6]. Łatwo zauważyć, że szacowanie zbioru rozmytego  $(X_0, X_-)$  odpowiada badaniu stabilności technicznej układu, natomiast szacowanie zbioru  $(X_\infty, X_-)$  – asymptotycznej stabilności (zbieżności do zbioru) układu przy zaburzeniach stale działających (Bogusz [10]). Liczbowe *funkcje przynależności* dla tych zbiorów można określić dopiero wtedy, gdy będziemy dysponować odpowiednią metodą analizy jakościowej, zapewniającą również pewne oszacowania ilościowe. Tę kwestię omówimy szerzej w Rozdziale 3.

Dokładna postać zbiorów  $X_0, X_-, X_\infty$  na ogół nie jest możliwa do wyznaczenia dla złożonych układów. Wtedy zwykle poszukujemy oszacowań tych zbiorów w postaci dostosowanej do danej metody analizy jakościowej. Jeżeli będzie to metoda bazująca na kwadratowych funkcjach Lapunowa, to najdogodniejsze będą oczywiście oszacowania w postaci odpowiednich elipsoid  $B(\mathbf{S}, c_0), B(\mathbf{S}, c_-), B(\mathbf{S}, c_\infty)$  określonych przez macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa.

Jeżeli z jakichś względów poszukujemy obszarów  $X_0, X_-, X_\infty$  w postaci zbiorów przynależnych do pewnej klasy  $\{X(r): r \geq 0\}$ , to wówczas szacujemy te obszary odpowiednio za pomocą zbiorów  $X(\underline{r}(\mathbf{S}, c_0)), X(\bar{r}(\mathbf{S}, c_-)), X(\bar{r}(\mathbf{S}, c_\infty))$  określonych w Dodatku 6. Wtedy będziemy mieli zagwarantowane, że zachowanie jakościowe trajektorii układu według schematu  $B(\mathbf{S}, c_0) \uparrow B(\mathbf{S}, c_-) \rightarrow B(\mathbf{S}, c_\infty)$  implikuje schematy  $X(\underline{r}(\mathbf{S}, c_0)) \uparrow B(\mathbf{S}, c_-) \rightarrow X(\bar{r}(\mathbf{S}, c_\infty))$ , przy czym elipsoida  $B(\mathbf{S}, c_-) \subset X(\bar{r}(\mathbf{S}, c_-))$ .

Własności czasowe trajektorii układu rozważanego układu są określone przede wszystkim przez szybkość ich zbieżności w obszarze rozmytego brzegu  $X_- - X_\infty$ . Różne wskaźniki szybkości zbieżności trajektorii wyliczane lub szacowane w ramach metody optymalnych funkcji Lapunowa będą omówione w Rozdziale 3.



### 3. METODA OPTYMALNYCH FUNKCJI LAPUNOWA

*Badanie własności stabilności i optymalizacja sterowania układów mechatronicznych, wymagające rozpatrywania różnego rodzaju modeli w postaci równań lub inkluzji różniczkowych z zaburzeniami, sterowaniami i wahaniami parametrów, nie jest łatwe przy użyciu standardowych metod i nierzadko wymaga indywidualnego podejścia do problemu. Istnieje zatem potrzeba wypracowania uniwersalnej metody analizy stabilności i syntezy układów mechatronicznych*

*Głównym celem niniejszego rozdziału jest omówienie podstawowych koncepcji i zagadnień metody funkcji Lapunowa, jako podstawy uniwersalnej metody badania i syntezy układów mechatronicznych, którym stawia się wymagania odnośnie własności stabilności. Metoda funkcji Lapunowa, zwana również drugą (lub bezpośrednią) metodą Lapunowa, zwykle kojarzy się z badaniem stabilności układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Naszym celem będzie formalne poszerzenie obszaru stosowalności tej metody i zwiększenie jej konstruktywności oraz pogłębienie zakresu analizy jakościowej. Pokażemy, że metodą funkcji Lapunowa można analizować problemy stabilności układów mechatronicznych modelowanych inkluzjami różniczkowymi, jak również zagadnienia syntezy sterowania, optymalnej stabilizacji i modyfikacji parametrycznej takich układów. Koncepcje tego typu są rozpatrywane w literaturze w różnych kontekstach. Niniejszy rozdział stanowi ich możliwie ogólne, łączne, sformalizowane i oryginalne ujęcie, będące podstawą rozszerzonej drugiej metody Lapunowa, zwanej dalej metodą optymalnych funkcji Lapunowa.*

*Podane rozważania odnoszą się do klasy funkcji Lapunowa w postaci dodatnio określonych form kwadratowych. Wtedy problem doboru funkcji Lapunowa sprowadza się do optymalizacji parametrów odpowiedniej formy kwadratowej. Abstrahując w tym rozdziale od obliczeniowych kwestii takiej optymalizacji, co jest tematem Rozdziału 4, sformułowane zostaną zasady i kryteria doboru funkcji Lapunowa oraz ich interpretacja i sens praktyczny.*

#### 3.1 Istota metody optymalnych funkcji Lapunowa

W drugiej metodzie Lapunowa wyniki analizy stabilności z zasady zależą nie tylko od badanego układu, ale i od przyjętej funkcji Lapunowa  $V(\mathbf{x})$ . Jednak twierdzenia (Lapunowa) 2.1, 2.2, chociaż dość ogólne, nie są konstruktywne, ponieważ nie mówią o tym, jak dobrać optymalne funkcje  $V(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$ , zapewniające na przykład najlepsze oszacowania obszaru stabilności. Niedobór racjonalnych i możliwie ogólnych metod postępowania w tej kwestii, będący zasadniczym mankamentem metody bezpośredniej Lapunowa, sprawia, że znajdowanie funkcji Lapunowa dla dowolnego układu zawsze było w pewnym stopniu sztuką (Kalman [24]).

Konstruktywność metody funkcji Lapunowa można wydatnie poprawić, ograniczając klasę dopuszczalnych funkcji  $V(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$ . Najbardziej naturalnym i

dogodnym ograniczeniem jest poszukiwanie funkcji Lapunowa  $V(\mathbf{x})$  w postaci dodatnio określonej formy kwadratowej. Uzasadnieniem tego jest sama mechanika, gdyż na przykład całkowita energia liniowych układów drgających z tłumieniem jest właśnie dodatnią formą kwadratową, której pochodna na trajektoriach układu jest niedodatnia. Można więc na jej podstawie wnosić o stabilności  $SLP$  układu. Wiadomo też, że dla dowolnego stabilnego układu liniowego stacjonarnego istnieją kwadratowe funkcje Lapunowa. Zatem również dla układów quasiliniowych z zaburzeniami, których część główną stanowi stabilny i stacjonarny układ liniowy, można oczekiwać, że będą istniały takie funkcje Lapunowa. Co więcej, ponieważ pochodna formy kwadratowej na trajektoriach dowolnego układu liniowego stacjonarnego jest formą kwadratową, to funkcja  $W(\mathbf{x})$  występująca w Twierdzeniu 2.1 (2.2) też powinna być formą kwadratową. Zatem dla rozważanej klasy układów mechatronicznych w pełni uzasadnione i niezbyt ograniczające będzie poszukiwanie funkcji  $V(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$  w postaci dodatnio określonych form kwadratowych.

Okazuje się jednak, że nawet w klasie form kwadratowych znalezienie dobrej funkcji Lapunowa wcale nie jest proste. Poza tym z faktu, że jedna forma kwadratowa jest funkcją Lapunowa danego układu bynajmniej nie wynika, że inne formy też będą funkcjami Lapunowa. Można się o tym przekonać choćby na przykładzie prostych układów mechanicznych dysypatywnych [D15]. Co więcej, różne formy kwadratowe, jako funkcje Lapunowa, nie są też równoważne operacyjnie na etapie badania znaku ich pochodnej. Istnieje więc kwestia optymalnego doboru kwadratowej funkcji Lapunowa tak ze względu na analityczną dogodność, jak i jakość uzyskiwanych wyników analizy stabilności. Niekiedy uzasadniona może być nawet optymalizacja funkcji Lapunowa w pewnej podklasie form kwadratowych, gdy prowadzi to do korzyści wynikających nie tylko z ograniczenia liczby parametrów optymalizacji, ale również z uproszczenia pewnych operacji analitycznych. Dzięki temu częstokroć możliwe jest uzyskanie prostszych oszacowań, a niekiedy nawet ścisłych wyników analizy stabilności dla układów nieliniowych lub wielowymiarowych. Ta kwestia będzie omówiona w następnym rozdziale, w Paragrafie 4.4 o tzw. *kanonicznych i regularnych funkcjach Lapunowa*.

Ograniczenie klasy funkcji  $V(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$  do form kwadratowych dodatnio określonych sprowadza kwestię doboru funkcji Lapunowa do optymalizacji parametrów formy kwadratowej, co stanowi istotę *metody optymalnych funkcji Lapunowa*. Głównym celem tego rozdziału jest zdefiniowanie pojęć, narzędzi i metod niezbędnych do sformułowania i przeprowadzenia takiej optymalizacji.

Dopóki operujemy dowolną formą kwadratową jako *próbna funkcją Lapunowa*, wyniki analizy stabilności zależą zarówno od układu jak i od nieokreślonych parametrów funkcji Lapunowa, natomiast po przeprowadzeniu optymalizacji tej funkcji – już tylko od własności układu. Dlatego istotnym punktem metody optymalnych funkcji Lapunowa, jako pewnej metody analitycznej, jest nie tyle sama optymalizacja, którą można przeprowadzić ściśle (nienumericznie) raczej w

wyjątkowych przypadkach, co prowadzenie wszelkich analiz jakościowych w taki sposób, aby zawsze była widoczna zależność uzyskiwanych wyników od parametrów funkcji Lapunowa. Tylko wtedy bowiem można formułować wyliczalne zagadnienie optymalizacji funkcji Lapunowa dostosowane do danego problemu stabilności. W klasycznej metodzie funkcji Lapunowa nikt nie troszczył się zbyt o tę sprawę. Zwykle przyjmowano jakąś formę kwadratową i sprawdzano, czy jest ona funkcją Lapunowa dla badanego układu. Następnie, jeśli forma spełniała te oczekiwania, wyznaczano jej pochodną oraz oszacowania obszarów stabilności badanego układu, bez możliwości poprawy uzyskanych wyników.

W niniejszej rozprawie macierz formy kwadratowej będącej funkcją Lapunowa będziemy zwykle oznaczali przez  $\mathbf{S}$ , a kwadratową funkcję Lapunowa  $V(\mathbf{x})$  o macierzy  $\mathbf{S}$  – przez  $V_{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ . Macierz  $\mathbf{S}$ , z definicji, będzie rzeczywistą, symetryczną i dodatnio określoną macierzą o wymiarach  $n \times n$ . Poszukiwanie funkcji Lapunowa będzie sprowadzało się do znalezienia parametrów odpowiedniej macierzy  $\mathbf{S}$ .

Prócz tego, bardzo istotną zaletą kwadratowej funkcji Lapunowa  $V_{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ , jest fakt, że taka funkcja jest kwadratem pewnej normy i wyznacza iloczyn skalarny w przestrzeni stanu badanego układu, co precyzują następujące oznaczenia:

$$V_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{y}. \quad (3.1.1)$$

Opis i badanie własności jakościowych danego układu przy użyciu normy i iloczynu skalarnego określonego przez kwadratową funkcję Lapunowa są szczególnie dogodnie analitycznie. Stosując kwadratowe funkcje  $V(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$ , możemy też zdefiniować szereg wskaźników i wykazać kilka twierdzeń będących podstawą omawianej tu uniwersalnej metody analizy jakościowej układów dynamicznych.

Kluczową rolę w metodzie optymalnych (i kwadratowych) funkcji Lapunowa pełni następujące

**Twierdzenie 3.1:** Jeżeli dla układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  (gdzie  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ) i dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{S}$  o wymiarach  $n \times n$  wskaźniki:

$$\sigma(\mathbf{S}) = - \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}, \quad \gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (3.1.2)$$

obliczone na pewnym otoczeniu  $X \subset \mathbb{R}^n$  punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  są dodatnie, to dla dowolnej trajektorii układu  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$  startującej z punktów początkowych  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  należących do dowolnej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x}: \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \leq c^2\} \subset X$ , spełnione są następujące oszacowania:

$$\forall_{t \geq t_0} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}} \exp[-\sigma(t-t_0)] \leq \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}} \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathbf{S}} \exp[-\gamma(t-t_0)]. \quad (3.1.3)$$

Dowód: Ponieważ rozpatrujemy tu skończone wymiarowe przestrzenie euklidesowe jako przestrzenie stanu, z równoważności norm w takich przestrzeniach wynika, że dla dowolnych dodatnich form kwadratowych  $V(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$  istnieją pewne stałe dodatnie  $\gamma$ ,  $\sigma$  takie, że  $2\gamma V(\mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}) \leq 2\sigma V(\mathbf{x})$  dla każdego  $\mathbf{x} \in R^n$ . Jeśli więc formy  $V(\mathbf{x})$ ,  $W(\mathbf{x})$  spełniają nierówność  $dV(\mathbf{x})/dt \leq -W(\mathbf{x})$  (albo  $dV(\mathbf{x})/dt \geq -W(\mathbf{x})$ ) na trajektoriach układu (2.2.1), to będzie też spełnione następujące oszacowanie:

$$dV(\mathbf{x})/dt \leq -2\gamma V(\mathbf{x}) \quad (\text{albo } dV(\mathbf{x})/dt \geq -2\sigma V(\mathbf{x})). \quad (3.1.4)$$

Powyższe nierówności różniczkowe, dzięki temu, że zależą już tylko od jednej nieznannej funkcji  $V(\mathbf{x})$ , mogą być rozwiązane ściśle [D11]. Jeśli przyjmiemy, że funkcja  $V(\mathbf{x}) = V_S(\mathbf{x})$ , to nietrudno sprawdzić, rozwiązując nierówności (3.1.4), że na trajektoriach układu prawdziwe są oszacowania (3.1.3), które oznaczają między innymi stabilność wykładniczą układu według normy  $\|\mathbf{x}\|_S$ .

Teraz pozostaje już tylko kwestia wartości wskaźników  $\sigma(\mathbf{S})$ ,  $\gamma(\mathbf{S})$ . Ponieważ  $dV_S(\mathbf{x})/dt = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S} \mathbf{x}$ , a macierz  $\mathbf{S}$  jest symetryczna, nierówności (3.1.4) dla  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  można zapisać w następującej postaci:

$$\{ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{S} \mathbf{x} \} / \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) / \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \leq -2\gamma \quad (\text{lub } \geq -2\sigma). \quad (3.1.5)$$

Z faktu, że powyższe nierówności powinny być spełnione dla każdego  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  wynika natychmiast, że najlepsze oszacowania wskaźników  $\gamma(\mathbf{S})$ ,  $\sigma(\mathbf{S})$  mogą być wyznaczone ze wzorów (3.1.2) [D11]. ♦

Nietrudno zauważyć, że  $\sigma(\mathbf{S}) \geq \gamma(\mathbf{S})$  a oszacowania (3.1.3) są w pełni analogiczne do tzw. *nierówności Ważewskiego* dla układów liniowych niestacjonarnych ([D11], Gutowski [17]). Oszacowania (3.1.3) są jednak ogólniejsze ze względu na klasę układów dynamicznych, którą obejmują oraz ze względu na ich operacyjną użyteczność i dokładność. Nawet dla najprostszych układów liniowych niestacjonarnych nierówność Ważewskiego daje znacznie słabsze oszacowania niż te, możliwe do uzyskania na podstawie nierówności (3.1.3). Zastosowanie tych nierówności jest jednak uzależnione od możliwości wyznaczenia oszacowań wskaźników (3.1.2).

Wskaźniki  $\gamma(\mathbf{S})$ ,  $\sigma(\mathbf{S})$  będziemy nazywali odpowiednio: *wskaźnikiem stabilności* i *wskaźnikiem niestabilności wykładniczej* układu według normy  $\|\cdot\|_S$ . Łatwo jest to uzasadnić. Jeżeli wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  jest dodatni, to, jak wynika z (3.1.3), rozważany układ jest lokalnie wykładniczo stabilny według normy  $\|\cdot\|_S$ , a forma kwadratowa  $V_S(\mathbf{x})$  jest jego funkcją Lapunowa. Jeżeli warunek  $\gamma(\mathbf{S}) > 0$  nie jest spełniony, to nie wykluczona jest jeszcze wykładnicza stabilność układu według innej normy. Jeżeli jednak wskaźnik  $\sigma(\mathbf{S})$  jest ujemny, to wszystkie trajektorie układu są wykładniczo rozbieżne w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , co oczywiście wyklucza wykładniczą stabilność układu według jakiegokolwiek normy.

Porównując oszacowania (3.1.3) z nierównościami Ważewskiego dla układów liniowych widać, że wskaźniki  $\gamma(\mathbf{S})$ ,  $\sigma(\mathbf{S})$  spełniają analogiczną rolę jak minimalna i maksymalna wartość własna symetrycznej części macierzy układu liniowego stacjonarnego [D11]. Jednak dzięki temu, że oba te wskaźniki są wyliczalne z formuł analitycznych (3.1.2) zamiast algebraicznych, mogą być stosowane również do układów nieliniowych i/lub niestacjonarnych. W szczególności, wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  spełnia wymagania odnośnie wskaźnika stabilności sformułowane w Paragrafie 2.2. W następnych paragrafach pokażemy, że formuły (3.1.2) można uogólnić na przypadek układów nieliniowych ze sterowaniami i/lub niestacjonarnymi zaburzeniami. W ten sposób wykażemy, że wskaźniki (3.1.2), a zwłaszcza wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$ , mogą stanowić podstawę metody optymalnych funkcji Lapunowa.

Z oszacowania (3.1.3) widać, że iloraz  $-\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) / \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  (ze znakiem minus) można interpretować jako szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii układu w danym punkcie  $\mathbf{x}$  przestrzeni stanu, natomiast iloczyn skalarny  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})$  – jako pewną miarę kąta wnikania trajektorii do elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}})$ . Tego typu określenie jest cokolwiek związane z *metodą punktów wejścia* Ważewskiego (Ważewski [116]). Nietrudno uzasadnić następujące:

**Twierdzenie 3.2:** Jeżeli dla układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$  i dodatkowo określonej formy kwadratowej  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  wskaźnik:

$$\sigma[\mathbf{S}, c] = - \inf_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} = c} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}, \quad \left( \gamma[\mathbf{S}, c] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} = c} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \right) \quad (3.1.6)$$

jest ujemny (dodatni), to wszystkie trajektorie układu, mające część wspólną z brzegiem elipsoidy  $B[\mathbf{S}, c] = \{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} = c\}$  wychodzą na zewnątrz (wchodzą do wnętrza) tej elipsoidy (Ossowski [57], [69]).

Wielkości  $\gamma[\mathbf{S}, c]$ ,  $\sigma[\mathbf{S}, c]$  będziemy nazywali odpowiednio *wskaźnikiem zbieżności* i *wskaźnikiem rozbieżności* wykładniczej według normy  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}$ , ponieważ wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, c]$  szacuje z dołu najwolniejszą zbieżność wykładniczą trajektorii układu, natomiast wskaźnik  $\sigma[\mathbf{S}, c]$  szacuje z góry ich zbieżność najszybszą.

Z powyższych rozważań wynika też wniosek, że wyrażenie  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}) / \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ , w myśl Definicji 2.2, jest lokalnym wskaźnikiem zbieżności wykładniczej, a  $\gamma(\mathbf{S})$  – odpowiadającym mu wskaźnikiem stabilności.

Wskaźniki (3.1.2) można w zasadzie obliczać na dowolnym podzbiórze  $X$  w przestrzeni stanu i ich sens jest oczywisty. Jeśli ten podzbiór będzie istotny w rozważaniach, będziemy stosować dla wskaźników (3.1.2) bardziej precyzyjne oznaczenia  $\sigma_X(\mathbf{S})$ ,  $\gamma_X(\mathbf{S})$ . Ponieważ jednak w przypadku, gdy  $\gamma(\mathbf{S}) > 0$ , oszacowania

(3.1.3) są zagwarantowane dla wszystkich  $t \geq t_0$  tylko w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ , będziemy zwykle stosować do badania układów następujące wskaźniki:

$$\sigma(\mathbf{S}, c) = -\inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}, \quad \gamma(\mathbf{S}, c) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (3.1.7)$$

gdzie suprema są liczone po całej elipsoidzie  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{S}, c)$ . Wtedy nierówność  $\gamma(\mathbf{S}, c) > 0$  będzie warunkiem koniecznym i dostatecznym wykładniczej stabilności układu w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ , według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ . Elipsoida  $B(\mathbf{S}, c)$  będzie wtedy też oszacowaniem obszaru przyciągania. Z kolei nierówność  $\sigma(\mathbf{S}, c) < 0$  będzie warunkiem lokalnej niestabilności układu według dowolnej normy euklidesowej.

Podsumowując powyższe rozważania możemy stwierdzić, że do pojęcia stabilności wykładniczej według normy dochodzi się zupełnie naturalnie i to w zasadzie tylko dzięki ograniczeniu klasy funkcji Lapunowa do form kwadratowych.

Dodatni wskaźnik stabilności (3.1.7) rozstrzyga o stabilności układu według danej normy, lecz tylko szacuje z dołu szybkość zbieżności trajektorii. Jeżeli już wykazaliśmy stabilność układu, a chcielibyśmy bardziej precyzyjnie ocenić szybkość zbieżności jego trajektorii w obszarze stabilności (przyciągania), to można w tym celu posłużyć się następującym *średnim wskaźnikiem zbieżności*:

$$\gamma < \mathbf{S}, c > = \frac{1}{|B(\mathbf{S}, c)|_{B(\mathbf{S}, c) \setminus \{\mathbf{0}\}}} \int \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (3.1.8)$$

który jest średnią szybkością wykładniczej zbieżności trajektorii w elipsoidzie stabilności  $B(\mathbf{S}, c)$ , według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ . W razie potrzeby wskaźnik (3.1.8) można liczyć na dowolnym obszarze  $X$  i oznaczać symbolem  $\gamma_X < \mathbf{S} >$ .

Ujemny średni wskaźnik zbieżności mówi o niestabilności układu. Z kolei dodatni średni wskaźnik zbieżności, chociaż nie zapewnia stabilności układu, lepiej niż wskaźnik stabilności opisuje zbieżność trajektorii układu na przykład przy losowych zaburzeniach impulsowych. Stosując wskaźnik stabilności (albo średni wskaźnik zbieżności) możemy oszacować obszar, gdzie na pewno (albo przeważnie) znajduje się stan układu z zaburzeniami. W wyniku takiej analizy dostaniemy więc pewien zbiór rozmyty, który precyzyjniej określa własności jakościowe układu niż tylko oszacowanie obszaru stabilności. Wskaźnik stabilności pozwala oszacować zbiór, w którym znajduje się aktualny stan układu  $\mathbf{x}(t)$  dla wszystkich trajektorii startujących w pewnej chwili  $t_0$  z danej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ , natomiast wskaźnik niestabilności mówi do jakiego zbioru stan  $\mathbf{x}(t)$  na pewno nie dotarł. Dokładniej, jeśli wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, c_0)$  na pewnej elipsoidzie początkowej  $B(\mathbf{S}, c_0)$  jest dodatni, możemy oszacować w jakiej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$  muszą się znajdować w określonej chwili  $t \geq t_0$  wszystkie trajektorie startujące z  $B[\mathbf{S}, c_0]$ . Z kolei dodatni wskaźnik

niestabilności  $\sigma(\mathbf{S}, c_0)$  określa w każdej chwili  $t \geq t_0$  elipsoidę  $B(\mathbf{S}, c)$ , do której żadna z rozważanych trajektorii jeszcze nie weszła. Jest jasne, że im mniejsza jest różnica  $\sigma(\mathbf{S}, c_0) - \gamma(\mathbf{S}, c_0)$ , tym bardziej precyzyjną informację o zachowaniu się trajektorii dostarcza funkcja Lapunowa o macierzy  $\mathbf{S}$ . W szczególności, gdy  $\sigma(\mathbf{S}, c_0) = \gamma(\mathbf{S}, c_0)$  (co zachodzi dla *regularnych macierzy*  $\mathbf{S}$  opisanych w Paragrafie 4.4) informacja jest najbardziej precyzyjna, bo wtedy wiemy dokładnie na powierzchni jakiej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  znajduje się aktualny stan  $\mathbf{x}(t)$  układu w dowolnej chwili  $t \geq t_0$ . Zatem różnica  $\sigma(\mathbf{S}, c_0) - \gamma(\mathbf{S}, c_0)$  lub iloraz  $\sigma(\mathbf{S}, c_0) / \gamma(\mathbf{S}, c_0)$  są pewnymi miarami rozmycia jakościowych oszacowań dostarczanych przez omawianą tu metodę.

Między opisanymi wyżej wskaźnikami zachodzą oczywiste relacje:

$$\gamma(\mathbf{S}) \leq \gamma < \mathbf{S} > \leq \sigma(\mathbf{S}), \quad \gamma(\mathbf{S}, c) \leq \gamma[\mathbf{S}, c] \leq \gamma < \mathbf{S}, c > \leq \sigma(\mathbf{S}, c) \leq \sigma[\mathbf{S}, c]. \quad (3.1.9)$$

Nierówność między wskaźnikiem stabilności a średnim wskaźnikiem zbieżności jest na ogół ostra, jeżeli pominąć szczególne przypadki. Omówimy je w Rozdziale 4.

Wskaźniki (3.1.2) mają jeszcze inne, niezmiernie użyteczne własności. Całkując nierówności (3.1.4) po czasie, dostajemy bowiem następujące oszacowania:

$$\frac{1}{2\sigma} \cdot [V(\mathbf{x}(t_0)) - V(\mathbf{x}(t))] \leq \int_{t_0}^t V(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \leq \frac{1}{2\gamma} \cdot [V(\mathbf{x}(t_0)) - V(\mathbf{x}(t))]. \quad (3.1.10)$$

W szczególności można do powyższego wzoru wstawić czas asymptotyczny  $t = +\infty$ . Wówczas, korzystając z tego, że  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow +\infty$ , na mocy wykładniczej zbieżności dostajemy następujące oszacowania wskaźnika całkowego z kwadratowej funkcji stanu

$$\frac{1}{2\sigma} V(\mathbf{x}(t_0)) \leq \int_{t_0}^{\infty} V(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \leq \frac{1}{2\gamma} V(\mathbf{x}(t_0)). \quad (3.1.11)$$

Widzimy więc, że metoda funkcji Lapunowa uzupełniona koncepcją odpowiednich wskaźników analitycznych, daje również efektywne oszacowania klasycznych lub całkowych wskaźników jakości z kwadratowych funkcji stanu.

Omówione wskaźniki, a zwłaszcza wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$ , zależne od macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa, mogą stanowić podstawę opisywanej tu metody optymalnych funkcji Lapunowa, gdyż można za ich pomocą rozstrzygać o stabilności układów dynamicznych oraz wyznaczać użyteczne oszacowania własności stabilności takich układów. Właśnie jawne uzależnienie wyników analizy stabilności od parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ , pozwala na ich (jej) optymalizację. Szczegółowo omówimy tę kwestię w Paragrafie 3.6.

Konsekwencją przyjęcia koncepcji wskaźników stabilności i zbieżności za podstawę metody optymalnych funkcji Lapunowa jest konieczność posługiwania się pojęciem stabilności wykładniczej przy opisie jakościowych własności układów dynamicznych. Chociaż istnieją układy asymptotycznie stabilne, które nie są stabilne wykładniczo, ograniczenie to w istocie nie jest znaczące w przypadku układów mechatronicznych, których modele zwykle są liniowe lub quasiliniowe z zaburzeniami. Co więcej, ogólna teoria równań różniczkowych mówi o tym, że nawet przy dość ogólnych założeniach odnośnie funkcji  $\mathbf{F}$  modelu (2.2.1), rozwiązania są wykładniczo zbieżne lub rozbieżne [D12].

Podane w tym paragrafie definicje i twierdzenia, stanowiące podstawę metody optymalnych funkcji Lapunowa, odnoszą się formalnie rzecz biorąc do układu dynamicznego w postaci równań różniczkowych (2.3.1). W następnych paragrafach pokażemy jak można uogólnić tę metodę na klasy bardziej złożonych modeli dynamicznych zależnych od parametrów, zaburzeń i sterowań.

Istotną konsekwencją zastosowania pojęcia wykładniczej stabilności według normy jest konieczność szacowania obszarów stabilności i przyciągania za pomocą elipsoid  $B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x}: \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < c^2\}$ . Optymalizacja macierzy  $\mathbf{S}$  umożliwia wtedy otrzymanie najlepszych oszacowań elipsoidalnych. Jeśli jednak rzeczywisty obszar stabilności (lub przyciągania) danego układu ma postać mocno zdeformowaną w porównaniu do elipsoidy, to zastosowanie nawet optymalnej funkcji Lapunowa może prowadzić do dość konserwatywnych oszacowań. Skutecznym sposobem poradenia sobie z tym problemem może być jednoczesne zastosowanie wielu form kwadratowych jako funkcji Lapunowa (Krbec [28], Lakshmikantham[34], Ossowski [58], [69], [78]). W omawianej tu metodzie wymaga to rozpatrywania tzw. *stabilności kwadratowej*, określonej w Definicji 2.11.

Jeżeli układ dynamiczny (2.3.1) jest kwadratowo stabilny w pewnym otoczeniu  $X$  punktu stacjonarnego, to dla każdego  $\mathbf{x}_0 \in X$  istnieje norma  $\|\cdot\|$ , według której jest zbieżna wykładniczo trajektoria  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ , dopóki nie opuści obszaru  $X$ . Obszar kwadratowej stabilności (przyciągania) układu w przestrzeni stanu można wtedy szacować za pomocą sumy mnogościowej wielu elipsoid  $B(\mathbf{S}_1, c_1) \cup \dots \cup B(\mathbf{S}_k, c_k)$ , gdzie  $\mathbf{S}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  są macierzami różnych funkcji Lapunowa rozważanego układu, które mogą być ustalone z góry (np. względami praktycznymi) albo wyznaczane w procesie polioptymalizacji.

Jest jasne, że wykorzystanie pojęcia kwadratowej stabilności i jednoczesne zastosowanie wielu funkcji Lapunowa (czyli tzw. *wielowymiarowej funkcji Lapunowa*) do badania danego układu pozwala na uzyskanie dokładniejszych oszacowań obszarów stabilności i przyciągania w przestrzeni stanu układu. Zastosowanie *wielowymiarowych funkcji Lapunowa* daje również analogiczne korzyści w przypadku wyznaczania oszacowań obszarów stabilności w przestrzeni parametrów. W Paragrafie 3.6 omówimy sposoby optymalizacji kwadratowych funkcji Lapunowa w obu tych przypadkach.



### 3.2 Metoda funkcji Lapunowa dla układów zależnych od parametrów

W mechatronice często zdarza się analizować własności stabilności modeli układów zależnych od pewnych parametrów. Mogą to być na przykład tłumienia lub sztywności odpowiadające elementom strukturalnego modelu układu mechanicznego. W niniejszym paragrafie rozważymy taki właśnie przypadek, zakładając, że parametry  $\mathbf{p}$  układu są stałe i przynależne do pewnego zwartego zbioru  $P \subset R^k$ , ale niekoniecznie muszą być jednoznacznie określone. Jeżeli zbiór  $P$  jest określony, a parametry modelu układu są stałe lub *przedziałowe*, zwykle analizuje się własności stabilności układu w przestrzeni stanu. Są jednak sytuacje, w których nawet zakresy możliwych wartości parametrów układu nie są dane. Wtedy istotne może być nie tyle zbadanie stabilności układu dla rzeczywistych wartości parametrów (bo te nie są dostępne), co określenie zbioru wartości parametrów, dla których stabilność układu będzie zachowana. Odpowiada to badaniu stabilności układu w przestrzeni parametrów. Poniżej omówimy oba te zagadnienia, wykorzystując metodę funkcji Lapunowa oraz pojęcie wskaźnika stabilności.

W ogólnym przypadku, badając własności układów dynamicznych zależnych od parametrów, musimy rozpatrywać modele w postaci następującej inkluzji różniczkowej:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X \subset R^n, \mathbf{p} \in \Gamma(P), P \subset R^k\}, \quad (3.2.1)$$

gdzie  $\Gamma(P)$  jest rodziną funkcji stałych o wartościach w  $P$ . Inkluzja ta przechodzi w równanie różniczkowe tylko dla jednoznacznie określonych wartości parametrów  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ , kiedy to  $\Gamma(P) = \{\mathbf{p}_0\}$ . Wskaźnik stabilności układu (3.2.1) dla dowolnych ustalonych parametrów  $\mathbf{p}$  będzie wyrażał się następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (3.2.2)$$

gdzie supremum jest liczone na pewnym otoczeniu  $X_0$  punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Warunkiem lokalnej stabilności układu o danych parametrach  $\mathbf{p}_0$  jest spełnienie nierówności  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}_0) > 0$ . Najlepszym oszacowaniem obszaru stabilności układu w przestrzeni stanu będzie maksymalna elipsoida  $B(\mathbf{S}, c)$  wpisana w obszar  $X_0$ . Szybkość zbieżności trajektorii będzie wtedy określona przez wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, c)$  obliczony na elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$  według formuły (3.2.2).

Celem analizy stabilności rozważanego układu o znanych parametrach  $\mathbf{p}_0$  może być wyznaczenie optymalnej elipsoidy stabilności  $B(\mathbf{S}, c)$  albo oszacowania obszaru przyciągania za pomocą wielu elipsoid wynikających z optymalizacji wektorowej funkcji Lapunowa. Oczywiście jeżeli poszukujemy obszaru stabilności w pewnej sparametryzowanej klasie obszarów  $X(r) \subset R^n$ , tylko elipsoidy opisane na  $X(r)$  możemy rozpatrywać przy takiej optymalizacji [D6].

Jeżeli mamy do czynienia z modelem (3.2.1) o parametrach przedziałowych, to wiemy tylko tyle, że parametry  $\mathbf{p}$  są stałe i należą do pewnej  $k$  – wymiarowej kostki  $P \subset R^k$ . Własności stabilności takiego układu opisują następujące wskaźniki:

$$\gamma_-(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{p} \in P} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad \gamma^-(\mathbf{S}) = -\inf_{\mathbf{p} \in P} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (3.2.3)$$

gdzie supremum po  $\mathbf{p} \in P$  we wzorze na wskaźnik stabilności  $\gamma_-(\mathbf{S})$  wyraża fakt, że o stabilności układu o parametrach przedziałowych decydują te ich wartości, które są najbardziej niekorzystne z punktu widzenia zbieżności wykładniczej trajektorii układu w założonym obszarze  $X$ . Kolejność supremów w (3.2.3) nie może być zamieniona, gdyż parametry przedziałowe z zasady są stałe, a więc nie mogą dostosowywać się do aktualnego stanu układu. Odwrotna kolejność supremów opisuje własności układów z zaburzeniami opisanymi w następnych paragrafach.

Elipsoida  $B(\mathbf{S}, \underline{c})$ , w której  $\gamma_-(\mathbf{S}) > 0$  szacuje z dołu obszar stabilności układu z parametrami przedziałowymi, przy czym jest to stabilność niezawodna (zachowana dla każdych stałych wartości parametrów przedziałowych układu. Z kolei z warunku  $\gamma^-(\mathbf{S}) > 0$  można wyznaczyć maksymalną elipsoidę  $B(\mathbf{S}, \bar{c})$ , wewnątrz której układ może, lecz nie musi być wykładniczo stabilny dla pewnych wartości parametrów układu. Na zewnątrz tej elipsoidy układ będzie oczywiście niestabilny według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  dla wszystkich wartości parametrów  $\mathbf{p} \in P$ . Obszar stabilności w przestrzeni stanu układu o parametrach przedziałowych jest więc w ogólności zbiorem rozmytym  $(B(\mathbf{S}, \underline{c}), B(\mathbf{S}, \bar{c}))$ . Zależnie od konkretnej sytuacji praktycznej, optymalizacja macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa może odnosić się do miary ograniczenia dolnego  $B(\mathbf{S}, \underline{c})$  rozmytego obszaru stabilności (maksymalizacja) albo do miary rozmytego brzegu  $B(\mathbf{S}, \bar{c}) - B(\mathbf{S}, \underline{c})$  tego obszaru (minimalizacja).

Jeśli wskaźnik  $\gamma_-(\mathbf{S})$  określony wzorem (3.2.3) nie jest dodatni dla żadnej macierzy  $\mathbf{S}$ , powinniśmy rozpatrywać obszar stabilności układu w przestrzeni parametrów. Aby taki obszar określić, należy wpiery ustalić pewien obszar stabilności  $X$  oraz normę  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  w przestrzeni stanu. Wtedy dla rozważanego układu obszarem stabilności w przestrzeni parametrów będzie następujący zbiór:

$$I(\mathbf{S}, \bar{c}) = \{\mathbf{p} \in P : \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, \bar{c}) > 0\}, \quad (3.2.4)$$

gdzie  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, \bar{c})$  jest liczony według wzoru (3.2.2) na minimalnej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, \bar{c})$  opisanej na  $X$ . Jeżeli  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}_0, \bar{c}) > 0$  dla pewnych ustalonych wartości parametrów  $\mathbf{p}_0$ , a wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, \bar{c})$  jest ciągłą funkcją parametrów  $\mathbf{p}$ , to zbiór  $I(\mathbf{S}, \bar{c})$  będzie otwartym podzbiorem  $P$  w sensie topologii indukowanej z przestrzeni  $R^k$ .

W rozważonym przypadku forma kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  jest oczywiście funkcją Lapunowa dla układu (3.2.1), ale z zakresem parametrów obcięty do  $\Pi(\mathbf{S}, \underline{c})$ . Stosując tylko jedną funkcję  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  nie możemy bowiem rozstrzygnąć o stabilności układu (3.2.1) dla każdego  $\mathbf{p} \in P$ . Jeżeli jednak nie mamy narzuconej z góry macierzy  $\mathbf{S}$ , dogodnie jest zastosować wiele macierzy  $\mathbf{S}$  (a więc wiele norm  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ ) tak, aby zbiorami postaci  $\Pi(\mathbf{S}, \underline{c})$  pokryć cały obszar  $P$ . Dla formalnego opisu takiej procedury dogodnie jest określić *kwadratową stabilność w przestrzeni parametrów* (Ossowski [58]).

**Definicja 3.1:** Układ zależny od parametrów (3.2.1) jest *kwadratowo stabilny w obszarze  $P$* , jeżeli dla każdego  $\mathbf{p} \in P$  istnieje norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ , taka że układ jest lokalnie wykładniczo stabilny według tej normy (czyli w pewnej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ ). Innymi słowy, dla każdego  $\mathbf{p} \in P$  istnieje norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  taka, że wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, c)$  obliczony na  $B(\mathbf{S}, c)$  będzie dodatni.

Jeżeli układ jest kwadratowo stabilny w przestrzeni parametrów, to oczywiście jest stabilny kwadratowo w przestrzeni stanu, przy czym oszacowaniem obszaru tej stabilności będzie suma mnogościowa odpowiednich elipsoid  $B(\mathbf{S}, c)$ . Co ciekawe, odnośnie takiego przypadku zachodzi następujące

**Twierdzenie 3.3:** (*O kwadratowej stabilności inkluzji różniczkowych*) Jeżeli inkluzja (3.2.1) jest kwadratowo stabilna w obszarze  $P$ , a wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, c)$  jest ciągłą funkcją parametrów  $\mathbf{p}$ , to istnieje skończona liczba norm  $\|\cdot\|_i = \|\cdot\|_{\mathbf{S}_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , takich że  $\forall (\mathbf{p} \in P) \exists (i \in \{0, 1, \dots, k\})$  układ  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  jest lokalnie wykładniczo stabilny wg normy  $\|\cdot\|_i$  w pewnej elipsoidzie  $B_i = B(\mathbf{S}_i, c_i) \subset R^n$ , przy czym trajektorie startujące z elipsoidy  $B_i$  będą zbiegały wykładniczo przynajmniej ze wskaźnikiem  $\gamma_i = \gamma(\mathbf{S}_i, \mathbf{p}, c_i)$ .

*Dowód* (Ossowski [58]): Z założenia kwadratowej stabilności inkluzji (3.2.1) w obszarze  $P$  wynika, że dla każdego  $\mathbf{p} \in P$  istnieje dodatnio określona macierz  $\mathbf{S}$ , dla której wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, c)$  jest dodatni. Na mocy ciągłości wskaźnika  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, c)$  od parametrów  $\mathbf{p}$  wnosimy, że wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}, c)$  pozostaje dodatni dla każdego wektora parametrów należącego do pewnego otoczenia otwartego  $P_{\mathbf{p}} \subset P$  punktu  $\mathbf{p}$ . Jest jasne, że zbiory  $P_{\mathbf{p}}$  stanowią otwarte pokrycie zbioru  $P$ , który jest z założenia zbiorem zwartym. Zatem można z tego pokrycia wybrać podpokrycie skończone. Z tego faktu wynika już teza.

Warto dodać, że przyjęte w dowodzie założenie ciągłości jest uzasadnione, bowiem zwykle jest ono spełnione w przypadku układów mechatronicznych [D8]. ♦

Twierdzenie 3.3 mówi, że jeżeli chcemy orzekać o stabilności układu (3.2.1) zależnego od parametrów, posługując się pojęciem stabilności wykładniczej według normy, to wystarczy w tym celu dobrać skończoną liczbę norm euklidesowych. Powstaje więc problem doboru tych norm, który w swej istocie sprowadza się do optymalizacji wielowymiarowej funkcji Lapunowa dla rozważanego układu. W Paragrafie 3.6 omówimy pewien sposób takiej optymalizacji.

### 3.3 Metoda funkcji Lapunowa dla układów nieautonomicznych

W układach nieautonomicznych możemy mieć do czynienia z zaburzeniami jednoznacznie zdeterminowanymi, zaburzeniami losowymi o znanych charakterystykach albo też z zaburzeniami przynależnymi do pewnej klasy funkcji czasu. Wymienione trzy przypadki, różniące się stopniem naszej wiedzy na temat zaburzeń układu, wymagają odmiennego sposobu analizy w ramach metody funkcji Lapunowa. W niniejszej rozprawie będziemy się zajmowali przypadkiem zaburzeń całkowicie zdeterminowanych albo przynależnych do pewnej klasy funkcji czasu.

Rozważmy najpierw nieautonomiczny układ dynamiczny o jednoznacznie zdeterminowanej zależności od czasu, którego model opisany jest następującym równaniem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \mathbf{F}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X \subset R^n, t \geq t_0. \quad (3.3.1)$$

Modele tego typu często bada się przy użyciu funkcji Lapunowa zależnych jawnie od czasu. Ponieważ jednak tego typu funkcje mają postać dobieraną indywidualnie do danego modelu, takie metody postępowania trudno uznać za uniwersalne. Metoda uniwersalna powinna bazować na funkcjach określonej postaci. Poniżej pokażemy jak można badać układy typu (3.3.1) za pomocą stacjonarnych funkcji Lapunowa w postaci form kwadratowych.

Jeżeli dla układu (3.3.1) zależnego od czasu znajdziemy kwadratową funkcję Lapunowa  $V(\mathbf{x})$  taką, że  $\dot{V} \leq -2\gamma V$ , to również zależny od czasu będzie wskaźnik

$$\gamma(\mathbf{S}, t) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.3.2)$$

Rozwiązując podaną nierówność różniczkową dojdziemy do wniosku, że tym razem obowiązuje następujące oszacowanie [D11]

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}} \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathbf{S}} \exp \left[ - \int_{t_0}^t \gamma(\mathbf{S}, \tau) d\tau \right]. \quad (3.3.3)$$

Oznacza to, że o stabilności układu decyduje nie chwilowa, lecz średnia (po czasie) wartość wskaźnika zbieżności wykładniczej obliczanego według wzoru (3.3.2).

Jeśli zależność układu (3.3.1) od czasu jest stochastyczna lub zdeterminowana możemy wykorzystać informacje o przebiegu tej zależności (ściśle lub stochastyczne) i wyliczyć odpowiednią średnią czasową.

$$\langle \gamma \rangle_{t \in \langle t_0, t \rangle} = \gamma(\mathbf{S}) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \gamma(\mathbf{S}, \tau) d\tau. \quad (3.3.4)$$

W przypadku zaburzeń układu opisujących się procesem stochastycznym, ergodycznym średnia po dostatecznie długim czasie będzie niezależna od realizacji procesu i może być wykorzystana jako oszacowanie efektywnego wskaźnika zbieżności wykładniczej układu. Ściśle biorąc nie będzie to *stabilność niezawodna* (ang. *robust*), lecz *stabilność praktyczna* z pewnym prawdopodobieństwem, o ile średnia procesu  $\gamma(\mathbf{S}, t)$  będzie dodatnia. Niekiedy można dopuścić stabilność z pewnym prawdopodobieństwem układów szczególnego rodzaju, jednorazowego użytku. W układach mechatronicznych wielokrotnego lub ciągłego użytku (np. budowla antysejsmiczna) musi być jednak zapewniona stabilność niezawodna przy określonych założeniach na przykład odnośnie maksymalnej wielkości zaburzeń. Dlatego przedmiotem niniejszego paragrafu będzie właśnie stabilność niezawodna.

Aby wnioskować o niezawodnej stabilności układu, należy podać oszacowanie wskaźnika zbieżności niezależne od czasu. Gdy układ dynamiczny był autonomiczny, do wyliczenia takiego oszacowania wystarczyło znaleźć punkt w przestrzeni stanu, w którym szybkość zbieżności była najmniejsza. W przypadku nieautonomicznego układu (3.3.1), aby uzyskać oszacowanie wskaźnika zbieżności niezależne od czasu, musimy wybrać zarówno najgorszy stan  $\mathbf{x}$  układu, jak i najgorszy moment  $t$ , w którym szybkość zbieżności trajektorii będzie najmniejsza. Zatem wskaźnik stabilności powinien być wyliczony według następującego wzoru:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.3.5)$$

W szczególności dla układu nieautonomicznego postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in X \subset R^n, \quad (3.3.6)$$

gdzie  $\mathbf{z}$  są zaburzeniami układu o znanym, zdeterminowanym przebiegu czasowym  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ , wskaźnik stabilności niezależny od czasu wyraża się wzorem

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.3.7)$$

Należy przy tym pamiętać, że wartość powyższego wskaźnika będzie na ogół zależna od obszaru  $X$ , po którym liczy się odpowiednie suprema [D13].

Jeśli nie mamy jednoznacznej informacji o przebiegu zależności  $\mathbf{z}(t)$ , a jedynie wiemy, że  $\mathbf{z}(t)$  jest elementem pewnej klasy funkcji czasu  $\Gamma(Z)$ , to wówczas właściwym modelem układu będzie inkluzja różniczkowa:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \mathbf{z} \in \Gamma(Z)\}, \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X \subset R^n. \quad (3.3.8)$$

W takiej sytuacji niezależne od czasu oszacowanie wskaźnika stabilności powinno być określone dla najbardziej niekorzystnego przebiegu zaburzenia w najmniej korzystnej chwili  $t \geq t_0$  i punkcie  $\mathbf{x}$  w przestrzeni stanu, czyli powinno być liczone według następującej formuły:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{z} \in \Gamma(Z)} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.3.9)$$

Powyższy wzór oznacza, że wybieramy antyoptymalną realizację zaburzeń  $\mathbf{z}(t) \in \Gamma(Z)$ , maksymalizującą supremum (3.3.9) względem  $\mathbf{x}$ ,  $t$ .

W ogólnym przypadku wyznaczenie najbardziej niekorzystnych zaburzeń oraz wskaźnika zbieżności według powyższej formuły nie jest łatwe. Problem jednak znakomicie się upraszcza przy założeniu zupełności inkluzji (3.3.8), tzn. gdy  $\Gamma(Z)$  zawiera wszystkie funkcje czasu o wartościach w  $Z$ . Wówczas supremum względem  $\mathbf{z} \in \Gamma(Z)$  we wzorze (3.3.9) można zastąpić supremum po  $\mathbf{z} \in Z$ , które od czasu nie zależy (Takie podejście zwykle stosuje się w pracach na temat zastosowania inkluzji różniczkowych (Aubin [3], Ossowski [82], Raczyński [88]).

Korzystając z przemienności operacji supremum ([D13]), dostaniemy:

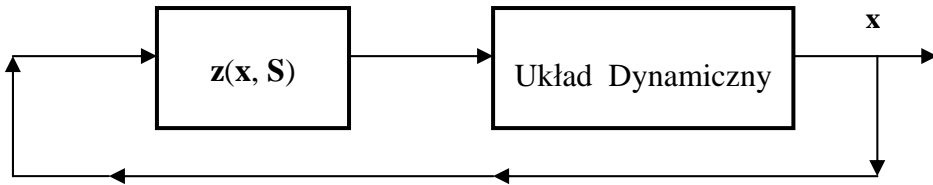
$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z} \in Z} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (3.3.10)$$

gdzie supremum po  $\mathbf{z}$  jest osiągalne dla pewnej zależności  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  zaburzeń od stanu (Ossowski [55]). Funkcję  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  można zinterpretować jako pewne sprzężenie zwrotne od stanu  $\mathbf{x}$  realizujące strategię zaburzeń, *antyoptymalną* z punktu widzenia zbieżności wykładniczej trajektorii układu według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ . Sprzężenie to będzie na ogół zależne od funkcji  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  występującej w modelu (3.3.6) oraz od ograniczeń  $Z$  nakładanych na zaburzenia  $\mathbf{z}$ .

W ten sposób sprowadziliśmy problem stabilności układu nieautonomicznego w postaci inkluzji różniczkowej (3.3.6) do zagadnienia stabilności układu stacjonarnego o następujących, zwykle nieliniowych, równaniach stanu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S})), \mathbf{x} \in X \subset R^n. \quad (3.3.11)$$

Schemat blokowy takiego układu sprzężenia zwrotnego ilustruje Rysunek 3.1.



Rys. 3.1. Schemat blokowy równoważnego układu stacjonarnego

Trzeba tu nadmienić, że podany schemat blokowy oraz sprzężenie zwrotne  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  nie są realizowane przez jakiś układ techniczny. Jest to jedynie pewna koncepcja teoretyczna potrzebna do oszacowania własności stabilności rozważanej układu.

Opisane wyżej postępowanie można określić mianem strategii nieznanych zaburzeń adekwatnej do sytuacji, gdy rzeczywiste zaburzenia nie są znane (mierzone). Strategia ta, bazująca na założeniu najgorszego z możliwych scenariuszy przebiegu zaburzeń, daje niekiedy dość konserwatywne, ale za to niezawodne oszacowania własności stabilności układów.

### 3.4 Metoda funkcji Lapunowa dla układów z zaburzeniami

W praktyce często spotykamy się z sytuacją, gdy rzeczywisty układ można opisać pewnym stacjonarnym i stabilnym układem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X \subset R^n$ , będącym pod działaniem dodatkowych zaburzeń addytywnych. Zaburzenia takie zwykle opisuje się za pomocą pewnej nieliniowej funkcji  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  spełniającej warunek  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , zależnej od stanu  $\mathbf{x}$  oraz niestacjonarnych zaburzeń  $\mathbf{z} \in \Gamma(Z)$ . Model takiego układu można opisać inkluzją różniczkową następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \alpha \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \Gamma(Z) \subset R^l\}, \quad (3.4.1)$$

gdzie  $\alpha \geq 0$  jest parametrem skalującym. W układach mechatronicznych zaburzenia mogą odnosić się do parametrów układu albo pochodzić od zewnętrznych sił działających na układ.

Rozdzielenie modelu układu na stabilną część stacjonarną i zaburzenia umożliwia postawienie problemu orzekania o stabilności układu z zaburzeniami na podstawie stabilności układu bez zaburzeń przy określonych założeniach odnośnie wielkości tych zaburzeń. Takie podejście do problemu jest uzasadnione tylko wówczas, gdy własności jakościowe układu (a w szczególności stabilność punktu stacjonarnego) zachowują się przy zaburzeniach małych w określonym sensie. Istotne jest określenie jak małe powinny być zaburzenia i jak ich „małość” rozumiemy (według jakiej miary ją określamy).

Znanych jest co najmniej kilka rodzajów stabilności dostosowanych specjalnie do opisanej wyżej sytuacji, na przykład: *stabilność na podstawie pierwszego przybliżenia*, *stabilność przy stale działających zaburzeniach w sensie Malkina*,

*stabilność techniczna oraz silna stabilność techniczna* (Bogusz [10], Skalmierski [101]). W dalszym ciągu nie będziemy bezpośrednio korzystać z definicji takich rodzajów stabilności, lecz przedstawimy cokolwiek analogiczne podejście, adekwatne do prezentowanej tu metody optymalnych funkcji Lapunowa.

Nietrudno wykazać, że wskaźnik stabilności układu modelowanego inkluzją zupełną (3.4.1) będzie wyrażał się następującym wzorem i oszacowaniem:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{S}, \alpha) &= -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z} \in Z} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \alpha \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \geq \\ &\geq -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] - \alpha \cdot \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha \cdot \delta(\mathbf{S}), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

gdzie  $\gamma_0(\mathbf{S})$  jest wskaźnikiem stabilności układu bez zaburzeń ( $\alpha = 0$ ), natomiast  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  jest antyoptymalną strategią niestacjonarnych zaburzeń  $\mathbf{z}$ . Warto zauważyć, że struktura antyoptimalnych zaburzeń  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  nie zależy od parametru  $\alpha$ , lecz tylko od funkcji zaburzeń  $\mathbf{G}$  układu, natomiast parametry tej struktury (czyli parametry macierzy  $\mathbf{S}$ ) zależą również od dynamiki układu swobodnego, czyli od funkcji  $\mathbf{F}$ . Teraz „małość” zaburzeń niezbędną do stabilności układu (3.4.1) łatwo jest wyrazić za pomocą warunku stabilności:  $\gamma(\mathbf{S}) \geq \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha \cdot \delta(\mathbf{S}) > 0$ . Wynika stąd ograniczenie na wielkość parametru  $\alpha < \alpha_{\max}(\mathbf{S}) = \gamma_0(\mathbf{S}) / \delta(\mathbf{S})$ . W takim przypadku optymalizacja macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa powinna zapewniać maksymalizację parametru krytycznego  $\alpha_{\max}(\mathbf{S})$ .

Podane wyżej rozumowanie nietrudno uogólnić na układy z wieloma różnymi zaburzeniami addytywnymi i odpowiednimi parametrami skalującymi  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , co będzie pokazane w Przykładzie 3.1 oraz w Rozdziale 5.

### 3.5 Metoda funkcji Lapunowa dla układów ze sterowaniem

Rozważmy teraz najbardziej złożony przypadek modelu układu mechatronicznego (z zaburzeniami i sterowaniem), opisującym się następująca inkluzją:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) : \mathbf{z} \in \Gamma(Z) \subset R^l, \mathbf{u} \in \Gamma(U) \subset R^m\}, \quad \mathbf{x} \in X \subset R^n, \quad (3.5.1)$$

w której  $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  i dla uproszczenia pominięto zależność od stałych parametrów  $\mathbf{p}$  układu. Dla takich układów pracujących w warunkach zaburzeń  $\mathbf{z}$  pojawia się kwestia doboru sterowania optymalnego  $\mathbf{u}$ . Aby można było mówić o sterowaniu optymalnym, trzeba najpierw określić wskaźnik optymalności sterowania lokalny lub globalny [D14]. Jeśli przy sterowaniu układami mechatronicznymi mamy na względzie przede wszystkim własności stabilności układu, dogodnym kryterium (wskaźnikiem) optymalności sterowania może być na przykład lokalna (punktowa) szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii układu, maksymalizowana przez



sterowanie optymalne. W takiej optymalizacji istotna jest informacja o tym, czy zaburzenia  $\mathbf{z}$  układu, jeśli występują, są określoną funkcją czasu, czy nieokreśloną funkcją z pewnej klasy, czy są znane a priori, czy też są mierzone w czasie rzeczywistym i mogą być wykorzystane do określenia algorytmu sterowania. W zależności od tego możemy rozpatrywać oddzielne przypadki i odpowiadające im formuły na wskaźnik stabilności układów.

W pierwszym przypadku, gdy zaburzenia są z góry znaną funkcją czasu  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$  (czyli są deterministycznym wymuszeniem), sterowanie optymalne może być wyznaczone z poniższego kryterium:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{z}}(\mathbf{S}) &= \sup_{\mathbf{u} \in \Gamma(U)} \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, t \geq t_0} \left[ - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \\ &= - \inf_{\mathbf{u} \in \Gamma(U)} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

odpowiadającemu maksymalizacji szybkości zbieżności wykładniczej trajektorii układu w pewnym obszarze  $X$  w przestrzeni stanu. Sterowanie optymalne  $\mathbf{u}(t)$  będzie wówczas funkcją czasu zależną od danej realizacji zaburzeń  $\mathbf{z}(t)$  jako funkcji czasu na przedziale  $[t_0, +\infty)$ . Nie będzie natomiast możliwe podanie zależności chwilowej wartości sterowania  $\mathbf{u}(t)$  od chwilowej wartości zaburzenia  $\mathbf{z}(t)$  i stanu  $\mathbf{x}(t)$  układu. Będzie to więc sterowanie programowe w układzie otwartym (bez sprzężenia zwrotnego), czyli bez regulatora.

W praktyce częściej mamy do czynienia z sytuacją, gdy zaburzenia  $\mathbf{z}$  nie są z góry znane, ale wiadomo, że ich realizacja przynależy do pewnej klasy funkcji  $\Gamma(Z)$ . W takim przypadku, chcąc uzyskać niezawodne oszacowania, musimy założyć, iż zaburzenia będą prowadziły *antyoptymalną grę różniczkową* przeciwko „wysiłkom” sterowania tzn. będą minimalizowały wskaźnik stabilności wykładniczej trajektorii układu w rozważanym obszarze  $X$  [D10]. Oszacowanie wskaźnika stabilności wykładniczej dla układu ze sterowaniem optymalnym i nieznanymi zaburzeniami można wtedy opisać następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = \inf_{\mathbf{z} \in \Gamma(Z)} \gamma_{\mathbf{z}}(\mathbf{S}) = - \inf_{\mathbf{u} \in \Gamma(U)} \sup_{\mathbf{z} \in \Gamma(Z)} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.5.3)$$

Formułę (3.5.3) należy rozumieć w ten sposób, że dla każdego sterowania  $\mathbf{u} \in \Gamma(U)$  dobierana jest antyoptymalna realizacja zaburzenia  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t, \mathbf{u}) \in \Gamma(Z)$ , minimalizująca wskaźnik zbieżności wykładniczej trajektorii układu w obszarze  $X$ , a następnie wybierana jest taka realizację sterowania  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , która maksymalizuje wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$ . Nietrudno zauważyć, że również to sterowanie optymalne będzie realizowane w układzie otwartym.

Pozostaje do omówienia ostatni z przypadków, gdy realizacja zaburzeń nie jest z góry znana, ale zaburzenia są na bieżąco mierzone. Powstaje pytanie czy i jak można wykorzystać taką informację do syntezy sterowania. Wówczas musimy założyć najmniej korzystny przebieg tych zaburzeń, czyli taki, który minimalizuje lokalną szybkość zbieżności. Zatem w tym przypadku wskaźnik stabilności wykładniczej dla układu sterowania będzie wyrażał się wzorem.

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{z} \in \Gamma(Z)} \inf_{\mathbf{u} \in \Gamma(U)} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{S})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.5.4)$$

Powyższą formułę należy rozumieć w ten sposób, że dla każdej realizacji zaburzeń  $\mathbf{z} \in \Gamma(Z)$  dobierane jest sterowanie  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{z}) \in \Gamma(U)$ , maksymalizujące wskaźnik zbieżności wykładniczej trajektorii układu w obszarze  $X$ , a następnie wybierana jest taka realizacja zaburzeń  $\hat{\mathbf{z}}(t)$ , która minimalizuje wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$ . Otrzymane sterowanie optymalne  $\mathbf{u}(t, \hat{\mathbf{z}})$  również będzie realizowane w układzie otwartym.

W podanym wzorze (3.5.4) istotne jest to, że infimum względem sterowań poprzedza supremum względem zaburzeń, a więc odwrotnie niż było w poprzednim przypadku. Jest to wyrazem faktu, że tym razem zaburzenia są mierzone. Z własności operacji sup, inf [D13] wynika, zgodnie z oczekiwaniem, że zawsze wskaźnik (3.5.4) jest niemniejszy od wskaźnika (3.5.3).

Wyznaczenie wskaźników stabilności według podanych formuł (3.5.3), (3.5.4) może być trudne dla dowolnych klas funkcji dopuszczalnych  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$ . Dlatego, dla uproszczenia, będziemy zwykle zakładali zupełność inkluzji (3.5.1), czyli to, że klasy  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$  obejmują wszystkie funkcje czasu o wartościach w odpowiednich zbiorach  $Z$ ,  $U$ . Wtedy trudne do wyznaczenia suprema po  $\mathbf{z} \in \Gamma(Z)$ ,  $\mathbf{u} \in \Gamma(U)$  można zastąpić prostszymi supremami po  $\mathbf{z} \in Z$ ,  $\mathbf{u} \in U$ . Takie uproszczenie niesie za sobą określone niekorzystne konsekwencje, możliwe jednak do zaakceptowania. Po pierwsze, rozszerzenie klasy możliwych zaburzeń do wszystkich funkcji o wartościach w  $Z$  sprawia, że oszacowania będą bardziej konserwatywne, bo wyznaczone dla zaburzeń być może bardziej niekorzystnych niż w rzeczywistości. Zwykle jednak klasy zaburzeń  $\Gamma(Z)$  i tak nie znamy dokładnie, więc rozszerzenie jej do klasy maksymalnej jest w zasadzie konieczne, jeśli chcemy zapewnić stabilność niezawodną. Z kolei, rozszerzenie klasy sterowań  $\Gamma(U)$  do wszystkich możliwych funkcji o wartościach w  $U$  sprawia, że oszacowania wskaźników będą odnosiły się do układu z pewnym idealizowanym sprzężeniem zwrotnym, praktycznie nierealizowalnym. Wówczas pozostanie kwestia oszacowania na ile niedoskonałość praktycznej realizacji takiego sterowania pogorszy uzyskane oszacowania. Dlatego będziemy dalej stosowali dwuetapową koncepcję syntezy sterowań, według której najpierw poszukujemy sterowań optymalnych w klasie wszystkich funkcji o wartościach w zbiorze  $U$ , a następnie realizujemy tak wyidealizowane sterownia

możliwie dokładnie za pomocą sterowań dopuszczalnych z przestrzeni  $\Gamma(U)$ . Problem ten będzie oddzielnie rozważony w Rozdziale 9.

Załóżmy więc model układu w postaci inkluzji zupełnej (3.5.1). Jeżeli zaburzenia nie są mierzone, optymalną strategię sterowania oraz antyoptymalną strategię zaburzeń możemy wówczas wyznaczyć z następującego kryterium:

$$\sup_{\mathbf{u} \in \Gamma(U)} \inf_{\mathbf{z} \in \Gamma(Z)} \left[ -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = - \inf_{\mathbf{u} \in \Gamma(U)} \sup_{\mathbf{z} \in \Gamma(Z)} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.5.5)$$

Nietrudno stwierdzić, że najbardziej niekorzystne pod względem stabilności zaburzenia będą na ogół funkcją zarówno stanu jak i sterowania tzn.  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{S})$ , natomiast optymalne sterowania będą zależne tylko od stanu  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ . Istnienie odpowiednich funkcji wynika ze zwartości zbiorów  $Z, U$  oraz ciągłości funkcji  $\mathbf{F}$ .

Jak widać zupełność inkluzji prowadzi do rozwiązania zagadnienia sterowania optymalnego w postaci sprzężenia zwrotnego. Możliwe jest więc zastosowanie regulatora w układzie mechatronicznym zilustrowanym na Rysunku 3.2.

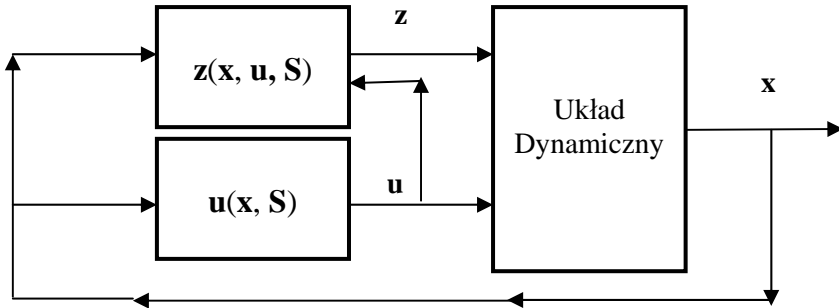
Warto nadmienić, że znalezione w ten sposób sprzężenia zwrotne pozwalają na pominięcie supremum po czasie przy szacowaniu wskaźnika stabilności wykładniczej trajektorii układu zamkniętego. Konkretnie, wskaźnik ten będzie wyrażał się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{S}) &= - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{u} \in U} \sup_{\mathbf{z} \in Z} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \\ &= - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{u} \in U} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{S}), \mathbf{u})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \\ &= - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{S}), \mathbf{S}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

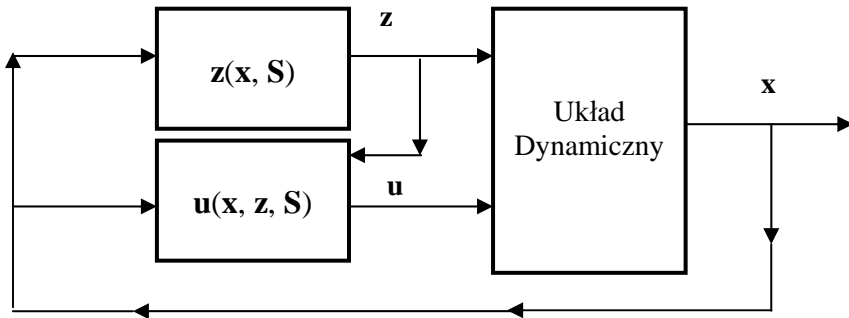
Jeżeli zaburzenia są mierzone, optymalną strategię sterowania oraz antyoptymalną strategię zaburzeń możemy wówczas wyznaczyć z następującego kryterium:

$$\inf_{\mathbf{z} \in Z} \sup_{\mathbf{u} \in U} \left[ -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = - \sup_{\mathbf{z} \in Z} \inf_{\mathbf{u} \in U} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (3.5.7)$$

Nietrudno stwierdzić, że tym razem optymalne sterowania będą zależne nie tylko od stanu, ale i od mierzonych zaburzeń tzn.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{S})$ , natomiast najbardziej niekorzystne dla stabilności zaburzenia będą na ogół funkcją zależną tylko od stanu czyli  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ . Podane sprzężenia zwrotne ilustruje Rysunek 3.3.



Rys.3.2. Schemat blokowy równoważnego układu stacjonarnego przy braku danych pomiarowych na temat zaburzeń układu.



Rys.3.3. Schemat blokowy równoważnego układu stacjonarnego z wykorzystaniem danych pomiarowych odnośnie zaburzeń układu.

Zatem również w tym przypadku możliwe jest zastosowanie regulatora. Podobnie jak poprzednio, znalezione sprzężenia zwrotne pozwalają na pominięcie suremum po czasie przy szacowaniu wskaźnika stabilności wykładniczej trajektorii układu zamkniętego. Wskaźnik ten będzie wyrażał się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 \gamma(S) &= - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z} \in Z} \inf_{\mathbf{u} \in U} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \\
 &= - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z} \in Z} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \\
 &= - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S}), \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right].
 \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Jest jasne, że z punktu widzenia własności stabilności układu korzystniejsza będzie strategia  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{S})$ , wykorzystująca w sterowaniu informację uzyskaną z pomiaru zaburzeń, niż strategie  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{S})$  i  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ , w których sterowanie nie wykorzystuje takiej informacji. Ilościowym tego potwierdzeniem może być fakt, że wskaźnik (3.5.8) jest zawsze mniejszy lub równy wskaźnikowi (3.5.7), co wynika z podstawowych własności operacji  $\sup$ ,  $\inf$  [D13]. W pewnych tylko przypadkach, gdy strategie sterowania i zaburzeń są niezależne, oba wskaźniki są sobie równe. Mówimy wówczas o tym, że rozgrywająca się tu *gra różniczkowa ma punkt siodłowy* ([D10], McKinsey [43], Szadkowski [103], Vinter [112]). W kolejnych rozdziałach zbadamy, kiedy taki przypadek zachodzi.

Formalnie rzecz biorąc, w omawianej metodzie układy z zaburzeniami nie różnią się wiele od układów ze sterowaniem. Zagadnienie stabilności układów obu tych rodzajów, modelowanych przez inkluzje różniczkowe, sprowadza się bowiem do badania układów stacjonarnych ze sprzężeniem zwrotnym. Różnica między zaburzeniami a sterowaniami tkwi tylko w tym, że sterowanie optymalne realizuje *strategię optymalną* z punktu widzenia zbieżności wykładniczej, natomiast zaburzenia krytyczne – *strategię antyoptymalną*.

Podsumowując ten paragraf, możemy powiedzieć, że w metodzie optymalnych funkcji Lapunowa problem wyznaczenia (syntezy) sterowania jest rozłożony na dwa etapy. W pierwszym etapie wyznaczana jest optymalna struktura sterowania zależna od swobodnych parametrów macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa. Z kolei w drugim etapie optymalizowane są parametry tej macierzy (a więc sterownika) pod kątem określonego wskaźnika jakości.

### 3.6 Ocena funkcjonowania i optymalizacja układów mechatronicznych

W teorii układów mechatronicznych mamy do czynienia zasadniczo z dwiema klasami problemów oceny i optymalizacji. Pierwsza odnosi się do badania własności modelu już istniejącego układu rzeczywistego. Wtedy zwykle chodzi o znalezienie najlepszych lub chociaż suboptymalnych oszacowań własności stabilności układu. Z teoretycznego punktu widzenia będzie to więc badanie własności stabilności różnego rodzaju równań lub inkluzji różniczkowych (liniowych lub quasilineowych ze sprzężeniami zwrotnymi, z wahaniami parametrów i zaburzeniami zewnętrznymi albo układów o zmiennej strukturze.

Druga klasa problemów dotyczy układów mechatronicznych na etapie projektowania (syntezy) lub w fazie dostrojenia sterowania do realizacji konkretnego zadania. Wtedy sterowanie powinno być dobrane w sposób optymalny, jako że realizuje określony cel. Krąg zagadnień rozpatrywanych w niniejszej rozprawie obejmuje głównie badanie własności stabilności układów i wpływanie na te własności za pomocą sterowania (zagadnienie modyfikacji i stabilizacji układów).

Rozważania przedstawione w poprzednich paragrafach zależne są od normy wyznaczonej przez kwadratową funkcję Lapunowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  w przestrzeni stanu

badanego układu. Dlatego wszystkie wielkości określające własności stabilności układu są na ogół uzależnione od macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa. W szczególności krytyczne zaburzenia i optymalne sterowania, wskaźnik stabilności i wskaźnik zbieżności wykładniczej oraz obszary  $X_0$ ,  $X_{\sim}$ ,  $X_{\infty}$  układów analizowanych omawianą metodą, będą na ogół zależne od macierzy  $\mathbf{S}$ . Jeżeli funkcja Lapunowa nie jest jednoznacznie zdeterminowana innymi względami, możemy wykorzystać swobodę jej wyboru, przeprowadzając optymalizację jakiegoś wskaźnika jakości, odnoszącego się do własności stabilności badanego układu. Optymalizacja funkcji Lapunowa względem parametrów macierzy  $\mathbf{S}$  z ograniczeniami na jej dodatnią określoność zapewnia najlepsze rozwiązanie postawionego zagadnienia stabilności lub sterowania, a jednocześnie rozwiązuje problem racjonalnego doboru funkcji Lapunowa w klasie dodatnich form kwadratowych o stałych parametrach [D9].

W ramach metody optymalnych funkcji Lapunowa można sformułować wiele sensownych zagadnień optymalizacji układów mechatronicznych. Obszary stabilności w przestrzeni stanu oraz w przestrzeni parametrów są wzajemnie (i na ogół antagonistycznie) uzależnione. Chcąc uzyskać najlepsze oszacowanie obszaru stabilności w jednej przestrzeni, zwykle pogarszamy oszacowanie obszaru stabilności w drugiej przestrzeni. W oderwaniu od względów praktycznych nie istnieje naturalnie wyróżnione kryterium optymalności funkcji Lapunowa dla ogólnego modelu (1.4.1) układów nieliniowych i niestacjonarnych.

Dlatego omówimy szczegółowo tylko dwa podstawowe sposoby optymalizacji funkcji Lapunowa, mianowicie: optymalizacji w przestrzeni stanu oraz optymalizacji w przestrzeni parametrów układu (Muszyńska [45], Ossowski [58],[69], Radziszewski [90],[92]), które są przejrzyste z teoretycznego punktu widzenia i najbardziej typowe w praktycznych zastosowaniach.

**Problem 3.1:** *(Optymalizacja obszaru stabilności w przestrzeni stanu)*

Optymalizację własności układu mechatronicznego w przestrzeni stanu przeprowadzamy zwykle wtedy, gdy parametry układu są ustalone. W przestrzeni stanu mamy trzy podstawowe obszary (zdefiniowane w Rozdziale 2), określające własności stabilności (geometrię trajektorii) układu, mianowicie: obszar warunków początkowych  $X_0$ , procesów przejściowych  $X_{\sim}$  oraz zachowań asymptotycznych  $X_{\infty}$ ). Praktyczny sens tych obszarów  $X_0$ ,  $X_{\sim}$ ,  $X_{\infty}$ , jednoznacznie determinuje sposób, w jaki powinniśmy je szacować (z góry, czy z dołu) i optymalizować. Istnieje tu wiele zwykle antagonistycznych możliwości, których kompletną listę trudno byłoby teraz podać. Dlatego omówimy tylko niektóre z nich, najbardziej typowe w mechatronice.

Jeżeli mamy ustalony obszar punktów początkowych  $X_0$ , to analizę stabilności układu należy rozpocząć od wyznaczenia oszacowania obszaru  $X_0$  za pomocą minimalnej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_0) = \bar{X}_0(\mathbf{S})$  opisanej na tym zbiorze. Następnie należy znaleźć elipsoidy krytyczne  $B(\mathbf{S}, c_{\sim})$ ,  $B(\mathbf{S}, c_{\infty})$  takie, że  $c_{\sim} > c_0$ ,  $c_{\infty} > c_{\sim}$ , wskaźnik

zbieżności  $\gamma[\mathbf{S}, c_-] = 0$  i  $\gamma[\mathbf{S}, c_\infty] = 0$  oraz  $\gamma[\mathbf{S}, c] > 0$  dla  $c \in (c_\infty, c_-)$ . Wtedy wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, c_\infty, c_-)$  jest dodatni, co gwarantuje, że żadna trajektoria startująca z elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_0)$  nie będzie mogła opuścić elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_-)$  i będzie asymptotycznie zbiegać do  $B(\mathbf{S}, c_\infty)$ . Jeżeli określone wyżej elipsoidy krytyczne istnieją i są już wyznaczone, to rozważany układ będzie *stabilny technicznie* w zbiorze rozmytym  $(B(\mathbf{S}, c_\infty), B(\mathbf{S}, c_-))$  (Bogusz [10]). Teraz, zależnie od względów praktycznych, możemy minimalizować procesy przejściowe, czyli obszar  $X_-$  albo minimalizować obszar asymptotyczny  $X_\infty$  względem parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ . W skrajnych przypadkach, gdy  $c_- = \infty$  (lub  $c_\infty = 0$ ) mamy do czynienia z układem globalnie wykładniczo stabilnym do zbioru lub z układem lokalnie wykładniczo stabilnym (do punktu stacjonarnego). Wówczas możemy tylko optymalizować zachowania asymptotyczne układu (albo zbieżność procesów przejściowych).

W mniej typowym, lecz ważnym w praktyce zagadnieniu optymalizacji szacujemy obszar warunków początkowych  $X_0$ , które gwarantują przebywanie procesów przejściowych wewnątrz ustalonego obszaru  $X_-$ . W takim przypadku należy najpierw wyznaczyć maksymalną elipsoidę  $B(\mathbf{S}, c_0) \subset X_-$  i taką, że wskaźnik zbieżności  $\gamma[\mathbf{S}, c_0] > 0$ . Warunek ten zapewnia, że dowolna trajektoria startująca z  $B(\mathbf{S}, c_0)$  pozostaje wewnątrz tej elipsoidy, a więc również w  $X_-$ . Elipsoidalna  $B(\mathbf{S}, c_0)$  jest więc najlepszym oszacowaniem obszaru  $X_0$ . Teraz dopiero możemy maksymalizować elipsoidę  $B(\mathbf{S}, c_0)$  względem parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ .

Aby można było mówić o optymalizacji obszarów  $X_0, X_-, X_\infty$  w przestrzeni stanu, trzeba posłużyć się odpowiednimi ich miarami  $\mu_0, \mu_-, \mu_\infty$ . Mogą to być w szczególności objętości odpowiednich obszarów  $X_0, X_-, X_\infty$  ale niekoniecznie. W ogólności, z uwagi na różnorodność zagadnień optymalizacji oraz swobodę doboru odpowiednich miar, optymalizacja funkcja Lapunowa nie jest procedurą jednoznaczną i może być w pewnym stopniu dostosowana do konkretnego problemu praktycznego. Każde z przyjętych kryteriów optymalności daje bowiem najczęściej inną optymalną funkcję Lapunowa oraz nieco inny obraz (inne oszacowania) własności stabilności badanego modelu.

Niekiedy uzasadnione może być badanie układu przy jednoczesnym użyciu wielu kryteriów optymalizacyjnych. Oznacza to badanie układu za pomocą wielu funkcji Lapunowa, co prowadzi do koncepcji *wielowymiarowych funkcji Lapunowa*. Zastosowanie takich funkcji do konkretnych układów będzie omówione dokładniej w Rozdziałach 4,5. Tu warto tylko nadmienić, że stosując wielowymiarową funkcję Lapunowa  $\{\mathbf{x}^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}, i = 1, \dots, k\}$ , możemy oszacować obszar stabilności kwadratowej (a więc obszar przyciągania) w przestrzeni stanu za pomocą sumy mnogościowej odpowiednich elipsoid  $B(\mathbf{S}_1, c_1), \dots, B(\mathbf{S}_k, c_k)$ , natomiast obszar graniczny (asymptotyczny) za pomocą części wspólnej (przecięcia) pewnych elipsoid. Zatem wielowymiarowe funkcje Lapunowa będą dawały na ogół większe oszacowania obszarów przyciągania oraz mniejsze oszacowania obszarów granicznych.

Szacując obszary  $X_0$ ,  $X_-$ ,  $X_\infty$ , za pomocą odpowiednich elipsoid  $B(\mathbf{S}, c_0)$ ,  $B(\mathbf{S}, c_-)$ ,  $B(\mathbf{S}, c_\infty)$  określa się ich promienie przy użyciu wskaźnika zbieżności, co jest konieczne dla uzyskania oszacowań pewnych (gwarantujących stabilność). Można jednak takie wyniki uzupełnić o oszacowania przybliżone, uzyskane z pomocą średniego wskaźnika zbieżności. W ten sposób otrzymamy rozmyte oszacowania obszaru stabilności, czy obszaru granicznego, będące bardziej precyzyjnym opisem własności badanego układu. Na przykład rozmyty obszar graniczny nie tylko będzie określał zakres ruchu układu (przy pewnych stale działających wymuszeniach), ale będzie też mówił o tym, w jakiej elipsoidzie stan układu będzie spędzał, średnio biorąc, najwięcej czasu. [D6].

Rozmyte oszacowania obszarów  $X_0$ ,  $X_-$ ,  $X_\infty$  można również otrzymać, stosując do zaburzeń układu *zasadę Turkstry* opisaną w Paragrafie 1.5. W przypadku wielu niezależnych zaburzeń można tą metodą określić przybliżone funkcje przynależności w postaci stref w obszarze rozmycia, które odpowiadają różnym stopniom (nie)pewności prawidłowego funkcjonowania układu (Ossowski [83]).

Wybór kryteriów optymalizacyjnych powinien być podyktowany względami praktycznymi, czyli powinien zależeć od naszych szczególnych oczekiwań odnośnie własności danego układu.  $\square$

Jeżeli parametry układu nie są ustalone, a wymagany obszar stabilności w przestrzeni stanu jest określony i chcielibyśmy osiągnąć na przykład najlepszą odporność układu na zaburzenia parametrów, alternatywnym sposobem optymalizacji funkcji Lapunowa jest optymalizacja w przestrzeni parametrów. Omówimy teraz pokrótce, na czym taka optymalizacja polega.

### **Problem 3.2:** (*Optymalizacja w przestrzeni parametrów*)

Obszarem stabilności w przestrzeni parametrów nazywamy zbiór wartości parametrów  $\mathbf{p} \in P$ , dla których badany model (1.4.1) układu mechatronicznego jest w jakimś sensie stabilny w określonym obszarze  $X$  w przestrzeni stanu. W metodzie optymalnych funkcji Lapunowa obszar stabilności w przestrzeni parametrów będzie obszarem  $\Pi(\mathbf{S}) = \{\mathbf{p} \in P : \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) > 0\} \subset P$ , gdzie  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) = \gamma_X(\mathbf{S}, \mathbf{p})$  jest wskaźnikiem stabilności układu na ustalonym zbiorze  $X$ . Z uwagi na ciągłą zależność  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p})$  od parametrów  $\mathbf{p}$ , obszar stabilności w przestrzeni  $P$  będzie na ogół otwarty [D8].

Jest zrozumiałe, że podstawowym celem optymalizacji w przestrzeni parametrów jest maksymalne oszacowanie zbioru  $\Pi(\mathbf{S})$  z dołu. W tym celu, podobnie jak w przypadku optymalizacji w przestrzeni stanu, trzeba posłużyć się pewną miarą  $\mu_P$  uzasadnioną względami praktycznymi. Maksymalizacja miary  $\mu_P(P(\mathbf{S}))$  daje w rezultacie pewną optymalną macierz  $\hat{\mathbf{S}}$  funkcji Lapunowa oraz odpowiadające jej najlepsze oszacowanie  $\Pi(\hat{\mathbf{S}})$  obszaru stabilności układu w przestrzeni parametrów. Ponieważ wybór miary  $\mu_P$  nie jest na ogół jednoznaczny, możemy wykorzystać do badań wiele kryteriów optymalizacji i wiele funkcji Lapunowa. Podobnie jak przy



optymalizacji w przestrzeni stanu, prowadzi to do koncepcji *wielowymiarowych funkcji Lapunowa* (Ossowski [58], [69]).  $\square$

Omówimy teraz pewne naturalne i użyteczne kryteria optymalizacji wielowymiarowych funkcji Lapunowa, służące do oszacowania obszaru stabilności w przestrzeni parametrów układów stabilnych w pewnym obszarze  $X \subset R^n$ .

**Przykład 3.1** (Optymalizacji wektorowej funkcji Lapunowa)

Opiszemy pewną metodę optymalizacji wektorowej funkcji Lapunowa dla układu (3.3.8), gdzie zaburzenia  $\mathbf{z}$  są określone za pomocą  $k$  parametrów ograniczeń  $\mathbf{p}=(p_1, \dots, p_k)$ . Oznaczmy przez  $\mathbf{p}_i, i = 1, \dots, k$  punkty postaci  $(0, \dots, 0, p_i, 0, \dots, 0)$ , a przez  $\gamma_X(\mathbf{S}, \mathbf{p})$  – wskaźnik stabilności w obszarze  $X(\mathbf{S}, \bar{c}) = \bar{X}(\mathbf{S})$  dla układu o parametrach  $\mathbf{p}$ . Przyjmijmy, że pożądane nominalne wartości parametrów (zaburzeń) są równe  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ , a wzrost każdej ze składowych  $p_i$  pogarsza własności stabilności układu.

Z warunków stabilności  $\gamma_X(\mathbf{S}, \mathbf{p}_i) > 0, i = 1, \dots, k$  dostaniemy ograniczenia na dopuszczalne wartości odpowiednich parametrów  $p_i < p_{i \max}(\mathbf{S})$ , w sytuacji, gdy znikają pozostałe składowe wektora parametrów. (Takie założenie odpowiada pewnej skrajnej wersji zasady Turkstry). Do kompletu optymalnych macierzy  $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$  wyznaczonych w powyższy sposób można dołączyć macierz  $\mathbf{S}_0$  wyznaczoną z kryterium maksymalizacji miary  $\mu$  (na przykład objętości) obszaru parametrów  $\Pi_0(\mathbf{S}) \subset P$ , dla których  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) > 0$ . Można też przyjąć  $\mu_0(\mathbf{S}) = p_{1 \max}(\mathbf{S}) \cdot \dots \cdot p_{k \max}(\mathbf{S})$ .

Optymalizując każdą z funkcji  $\mu(\Pi_0(\mathbf{S})), p_{i \max}(\mathbf{S}), i = 1, \dots, k$  względem parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ , dostaniemy pewną optymalną macierz  $\mathbf{S}_i$ . W ten właśnie sposób dostajemy wielowymiarową funkcję Lapunowa o macierzach  $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$  wyznaczonych z optymalizacji wybranych wskaźników jakości (Ossowski [58]):

$$\mu_0(\mathbf{S}) = \mu(\Pi_0(\mathbf{S})), \mu_1(\mathbf{S}) = p_{1 \max}(\mathbf{S}), \dots, \mu_k(\mathbf{S}) = p_{k \max}(\mathbf{S}). \quad (3.6.1)$$

Wykorzystując opisaną wyżej wielowymiarową funkcję Lapunowa dostaniemy ostatecznie następujące oszacowanie obszaru stabilności układu w przestrzeni parametrów:

$$\tilde{P}(\mathbf{S}_0, \dots, \mathbf{S}_k) = \bigcup_{i=0, \dots, k} \{\mathbf{p} \in P : \gamma_X(\mathbf{S}_i, \mathbf{p}) > 0\}. \quad (3.6.2)$$

Podobnie, ponieważ każda z optymalnych funkcji Lapunowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}$ , będąca składową wielowymiarowej funkcji Lapunowa, wyznacza pewien obszar stabilności  $X(\mathbf{S}_i, \bar{c}_i)$  w przestrzeni stanu zawierający założony wcześniej obszar  $X$ , dostajemy następujące oszacowanie obszaru stabilności kwadratowej w przestrzeni stanu:

$$\bigcup_{i=0, 1, \dots, k} X(\mathbf{S}_i, \bar{c}_i). \quad (3.6.3)$$

Powyższe miary, służące do optymalizacji wielowymiarowej funkcji Lapunowa, nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości w tym zakresie. Stosownie do

problemu można na przykład szacować maksymalny dopuszczany zakres zmian parametrów  $\mathbf{p}$  w określonym kierunku w przestrzeni  $P$ .  $\square$

Zastosowania metody opisanej w Przykładzie 3.1 podane są w Rozdziale 5.

Omówione wyżej dwa podstawowe sposoby optymalizacji nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości. Jeżeli nie wszystkie parametry układu oraz nie wszystkie obszary  $X_0$ ,  $X_\infty$  są z góry ustalone (na przykład względami praktycznymi znanymi już na etapie projektowania), to możliwe są do pomyślenia inne, bardziej złożone kryteria optymalizacji funkcji Lapunowa.

Podsumowując rozważania tego rozdziału, możemy powiedzieć, że synteza, optymalizacja i ocena modeli układów mechatronicznych przy użyciu metody optymalnych funkcji Lapunowa jest dokonywana w etapach, które mogą stanowić podstawę pewnej metodologii użytecznej w mechatronice. Etapy te można streścić w następujących punktach:

- wyznaczenie struktury (anty)optymalnych sterowań (zaburzeń) układu, zależnych od parametrów dowolnej macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa,
- teoretyczna analiza własności układu z (anty)optymalnymi sprzężeniami zwrotnymi zależnymi od dowolnej macierzy  $\mathbf{S}$ ,
- określenie zestawu istotnych własności jakościowych układu mechatronicznego i ich charakterystyk liczbowych:  $J_1, J_2, \dots, J_N = J(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$ , jako wskaźników oceny,
- Wybór jednego ze wskaźników  $J(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$  jako kryterium optymalizacji funkcji Lapunowa,
- optymalizacja macierzy  $\mathbf{S}$  według wybranego wskaźnika,
- określenie optymalnych parametrów struktury układu sterowania,
- wyznaczenie wskaźników  $J_1, J_2, \dots, J_N$  przed i po użyciu sterowania,
- badanie i ocena własności (efektywności) układu mechatronicznego.

Zależnie od celu analizy jakościowej, niektóre z powyższych punktów mogą być pominięte. Cztery pierwsze etapy stanowią podstawę metody optymalnych funkcji Lapunowa. Po ich zakończeniu zwykle wiadomo już czy i jak dany układ jest stabilny i jakich innych własności jakościowych układu można się spodziewać. Teoria nie zawsze jednak umożliwia wyznaczenie liczbowych charakterystyk tych własności. Dlatego ostatnie cztery etapy, zapewniające liczbowe uzupełnienie badania jakościowego, zwykle muszą być wykonane z pomocą badań numerycznych modelu rozważanego układu. Ponieważ jednak takie modele z określonymi (anty)optymalnymi sprzężeniami zwrotnymi opisują się już równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, a nie inkluzjami, numeryczne wyznaczanie trajektorii i badanie ich własności nie stanowi tu zasadniczej trudności.

## 4. OBLICZENIOWE ASPEKTY METODY OPTIMALNYCH FUNKCJI LAPUNOWA

*Celem analizy jakościowej jest wnioskowanie o własnościach układu dynamicznego na podstawie ścisłych rozważań matematycznych. Stosując drugą metodę Lapunowa, można uzyskać informacje czysto jakościowe o układzie bez znajomości optymalnej funkcji Lapunowa. Wystarczy mieć zagwarantowane jej istnienie. Jeżeli jednak chcemy uzyskać jakiegokolwiek oszacowania ilościowe wskaźnika stabilności, obszarów stabilności i przyciągania, kluczową sprawą jest wyznaczenie optymalnej lub choćby suboptymalnej funkcji Lapunowa. Z uwagi na złożoność modeli rozważanych w mechatronice, ściśle (nienumeryczne) wyznaczenie optymalnej funkcji Lapunowa rzadko jest możliwe. W tym względzie metoda optymalnych funkcji Lapunowa jest źródłem określonych problemów obliczeniowych, które warunkują możliwości jej praktycznego (a nie tylko teoretycznego) wykorzystania.*

*Niniejszy rozdział jest poświęcony obliczeniowym aspektom metody optymalnych funkcji Lapunowa. Nie precyzując jeszcze wskaźników optymalności, które zostaną określone w następnych rozdziałach, omówimy ogólne zasady optymalizacji funkcji Lapunowa. Zaproponowana będzie numeryczna metoda bezpośrednia oraz algorytm genetyczny takiej optymalizacji. Omówione będą również pewne przypadki szczególne, dające się rozwiązać ściśle. Podane zostaną klasy tzw. kanonicznych i regularnych funkcji Lapunowa, które umożliwiają uzyskanie analitycznych wyników dla wielowymiarowych układów mechatronicznych.*

### 4.1 Zagadnienia obliczeniowe metody optymalnych funkcji Lapunowa

Metoda funkcji Lapunowa ma dobrą podbudowę teoretyczną wywodzącą się z klasyki teorii stabilności. Jeśli jednak prześledzić w literaturze konkretne przykłady jej zastosowań, nietrudno zauważyć, że nawet w klasie form kwadratowych funkcje Lapunowa raczej nie są dobierane według jakiegoś kryterium optymalności, a rozpatrywane układy są zwykle o niewielkim wymiarze wektora stanu (na przykład układy mechaniczne o jednym lub dwóch stopniach swobody). Zwykle najpierw wybiera się jakąś funkcję, jako kandydata na funkcję Lapunowa dla danego układu, potem sprawdza się, czy jest to funkcja Lapunowa, a na koniec (jeśli wybór funkcji okazał się trafny) przeprowadza się analizę stabilności układu. Wyników otrzymanych w ten sposób na ogół nie daje się już poprawić.

W metodzie optymalnych funkcji Lapunowa przeprowadza się optymalizację parametrów kwadratowej funkcji Lapunowa względem ilościowych wyników analizy stabilności. Do tego celu najlepiej byłoby znać te wyniki, jako funkcje parametrów układu i parametrów macierzy funkcji Lapunowa. Zwykle jednak nie znamy analitycznej zależności od parametrów nawet takich wielkości jak: wskaźnik stabilności czy średni wskaźnik zbieżności wykładniczej. Wielkości te możemy wyznaczać tylko numerycznie dla ustalonych wartości parametrów. Dlatego na ogół możemy optymalizować funkcję Lapunowa danego układu tylko numerycznie.

Zasadnicza trudność numerycznej optymalizacji kwadratowej funkcji Lapunowa wynika z faktu, że wskaźnik stabilności, czy wskaźnik zbieżności oraz inne wielkości opisujące własności stabilności układu, są z zasady zależne od supremum (lub infimum) pewnych funkcji zależnych od macierzy funkcji Lapunowa. Dlatego optymalizacja funkcji Lapunowa jest w istocie procesem dwupoziomowym, bowiem optymalizacji względem parametrów macierzy  $S$  podlegają funkcje, które nie są dane jawnie, lecz same są wynikami pewnej optymalizacji względem składowych wektora stanu  $x$ . Zatem do takiej optymalizacji nie można bezpośrednio zastosować standardowych metod numerycznych, na przykład metod gradientowych.

Tym bardziej czasochłonna może być numeryczna optymalizacja funkcji Lapunowa wykonywana łącznie z optymalizacją parametrów układu mechatronicznego będącego na etapie projektowania, bowiem w takim wypadku będziemy mieli do czynienia w zasadzie z optymalizacją trzypoziomową.

Kolejny problem obliczeniowy metody optymalnych funkcji Lapunowa związany jest z wymiarem stanu badanych układów. Dla układów o jednym stopniu swobody wiele zagadnień stabilności można rozwiązać ściśle, podając formuły analityczne. Jednak dla układów wielowymiarowych sprawa się komplikuje dlatego, że liczba parametrów optymalizacji (czyli liczba niezależnych parametrów macierzy  $S$ ) rośnie kwadratowo (jak  $n(n+1)/2$ ) z wymiarem  $n$  wektora stanu układu.

Opisana wyżej sytuacja sprawia, że optymalizacja funkcji Lapunowa jest dość złożonym problemem, który dopiero stosunkowo niedawno stał się przedmiotem bardziej systematycznych badań. Wcześniej znajdowanie funkcji Lapunowa było w dużym stopniu sztuką (Kalman [24]). W literaturze można wprawdzie spotkać opisy pewnych koncepcji optymalizacji funkcji Lapunowa różnych postaci (Hu [20], Johanson [22], Sierra [99], Vannelli [111]), ale ich zakres stosowalności jest mocno ograniczony, a złożona postać takich funkcji raczej wyklucza uzyskanie wyników analitycznych. Dlatego w niniejszej rozprawie poprzestajemy na problemie optymalizacji form kwadratowych według wskaźnika stabilności i innych kryteriów szczególnie użytecznych dla układów mechatronicznych (Krbec [28], Olas [47], [48], Ossowski [58], [62], Radziszewski [90], [92]).

W rozdziale tym będziemy dalej rozważali głównie kwestię znajdowania kwadratowych funkcji Lapunowa dla układów linowych stacjonarnych. Pokażemy, że zadanie to jest ściśle rozwiązywalne dla ważnych w mechatronice klas układów dynamicznych o wielu stopniach swobody. Ponadto omówione będą niestandardowe koncepcje i procedury optymalizacji funkcji Lapunowa bazujące na algorytmach genetycznych.

Aby uzasadnić szeroki zakres stosowalności metody optymalnych funkcji Lapunowa, pokażemy w następnych rozdziałach, że formy kwadratowe też mogą być dobrymi funkcjami Lapunowa dla szerokiej klasy układów quasilinowych lub niestacjonarnych, jeśli tylko niestacjonarne lub nieliniowe zaburzenia części liniowej stacjonarnej danego układu mechatronicznego są w pewnym sensie małe.

## 4.2 Funkcje Lapunowa układów liniowych stacjonarnych

Poszukiwanie funkcji Lapunowa dla układów liniowych może wydawać się zadaniem pozbawionym większego sensu, skoro o ich stabilności można orzekać na podstawie wartości własnych macierzy układu albo innych kryteriów algebraicznych (na przykład kryterium Hurwiza) [D16]. Okazuje się jednak, że nawet dla układów liniowych stacjonarnych metoda funkcji Lapunowa i koncepcja optymalizacji oparta na pojęciu wskaźnika stabilności oraz wskaźnika zbieżności wykładniczej umożliwiają uzyskanie głębszych wyników teoretycznych niż jest to możliwe tylko metodami algebraicznymi. Znajomość kwadratowej funkcji Lapunowa daje bowiem możliwość rozstrzygnięcia kwestii nie tylko czy, ale również jak dany układ jest stabilny. Co więcej, funkcja Lapunowa układu liniowego stacjonarnego pozwala na: ocenę przebiegu trajektorii układu (według wskaźników całkowych) oraz oszacowanie warunków dostatecznych stabilności w przypadku zaburzenia modelu stacjonarnego składnikami nieliniowymi lub niestacjonarnymi.

Aby sprawę dokładniej omówić, rozważmy w pierw układ liniowy stacjonarny

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in R^n, \quad (4.2.1)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest stałą macierzą układu o wymiarach  $n \times n$ . Z teorii równań liniowych wiemy, że układ (4.2.1) jest asymptotycznie stabilny, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Macierz  $\mathbf{A}$  o takich własnościach nazywana jest macierzą stabilną. W przeciwnym razie macierz  $\mathbf{A}$  (układ) jest niestabilna(y).

Jeżeli będziemy poszukiwali funkcji Lapunowa w postaci formy kwadratowej dla stabilnego układu (4.2.1), to wnet przekonamy się, że nie każda dodatnio określona forma kwadratowa  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  jest funkcją Lapunowa. W związku z tym, że będziemy zajmowali się tu głównie układami mechatronicznymi o stabilnej części liniowej, od razu nasuwa się pytanie czy na przykład energia całkowita takiego układu nie jest „dobrą dla niego funkcją Lapunowa. Gdyby tak było, wtedy w ogóle nie byłoby problemu doboru funkcji Lapunowa dla liniowych układów mechatronicznych. Niestety w ogólności energia całkowita jako dodatnio określona forma kwadratowa nie jest zbyt dobrą funkcją Lapunowa, ponieważ jej pochodna na trajektoriach układu zwykle nie jest ujemnie określona, lecz tylko niedodatnia. Dzieje się tak dlatego, że w punktach zawracania pochodna energii na trajektoriach osiąga wartość zero. Stosując niezbyt dogodną operacyjnie zasadę LaSalle’a (Gutowski [17], Sastry [96]) możemy wprowadzić dzięki takiej funkcji wnosić o stabilności asymptotycznej liniowego układu mechanicznego, ale nie możemy już wykorzystać tego faktu na przykład do szacowania obszarów stabilności danego układu w obecności jakichkolwiek niestacjonarnych lub nieliniowych zaburzeń. Aby coś powiedzieć o takim układzie, trzeba dobrać bardziej odpowiednią formę kwadratową jako funkcję Lapunowa. Podstawową kwestią jest tu teoretyczna

możliwość dokonania takiego wyboru [D15] i jest to problem dotyczący wszystkich układów mechatronicznych. Aby wykazać, że formy kwadratowe mogą być funkcjami Lapunowa dla takich układów, musimy przede wszystkim wykazać, że są takimi dla układów liniowych stacjonarnych.

Jeżeli forma kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  miała być funkcją Lapunowa stabilnego układu (4.2.1), to jej pochodna zupełna po trajektoriach układu powinna być określona ujemnie. Różniczkując formę  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  i korzystając z równań (4.2.1), nietrudno stwierdzić, że poszukiwanie kwadratowych funkcji Lapunowa dla układów postaci (4.2.1) sprowadza się do znajdowania dodatnio określonych macierzy  $\mathbf{S}$ , dla których macierz  $\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}$  jest określona ujemnie. Łatwo sprawdzić na prostych przykładach, że macierz  $\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}$  nie musi być dodatnio określona dla dowolnie wybranej macierzy dodatnio określonej  $\mathbf{S}$ . Podstawową przeto kwestią jest, czy dla układów asymptotycznie stabilnych (4.2.1), w ogóle istnieją kwadratowe funkcje Lapunowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  i jak je znajdować. Kwestię tę rozstrzyga następujące

**Twierdzenie 4.1:** *(O istnieniu kwadratowej funkcji Lapunowa dla układu liniowego).* Macierz  $\mathbf{A}$  danego modelu liniowego (4.2.1) jest stabilna (tzn. ma ujemne części rzeczywiste wartości własnych) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{Q}$  równanie macierzowe

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (4.2.2)$$

ma rozwiązanie ze względu na dodatnio określoną macierz  $\mathbf{S}$ . Wtedy oczywiście forma kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  jest funkcją Lapunowa dla rozważanego układu, a jego rozwiązania są wykładniczo stabilne według normy  $\|\cdot\|_S$ . Innymi słowy, dla każdej kwadratowej funkcji Lapunowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  stabilnego układu (4.2.1), istnieje odpowiednia macierz  $\mathbf{Q}$  generująca macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa. #

*Dowód:* sprowadza się do wykazania, że macierz

$$\int_0^{+\infty} e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \quad (4.2.3)$$

istnieje i jest poszukiwanym rozwiązaniem (Gutowski [17], Kaczorek [23], Sastry [96]). Spełnienie równania (4.2.2) wykazuje się różniczkując po czasie całkę (4.2.3) w granicach  $(0, t)$ , a następnie przechodząc do granicy  $t \rightarrow +\infty$ . Istnienie całki (4.2.3) wynika z tego, że funkcje wykładnicze pod całką „szybko” zanikają do zera dla  $t \rightarrow +\infty$ , jeśli macierz  $\mathbf{A}$  jest stabilna.

Odwrotnie, jeśli  $\mathbf{S}$  jest macierzą funkcji Lapunowa rozważanego układu, to pochodna zupełna na trajektoriach musi być ujemnie określona. Ponieważ  $dV/dt = \mathbf{x}^T (\mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{S}) \mathbf{x}$ , to musi istnieć macierz dodatnio określona  $\mathbf{Q}$  taka, że zachodzi równość (4.2.2). ♦

Równanie postaci (4.2.2) zwane jest *algebraicznym równaniem Lapunowa*. Macierz dodatnio określona  $\mathbf{S}$ , będąca jego rozwiązaniem, zależy w istotny sposób nie tylko od stabilnej macierzy  $\mathbf{A}$ , ale również od dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{Q}$ . Ponieważ macierz  $\mathbf{Q}$  może być zupełnie dowolną macierzą dodatnio określoną, możemy, rozwiązując równanie Lapunowa, wygenerować dowolną liczbę funkcji Lapunowa dla układu liniowego o danej macierzy  $\mathbf{A}$ . Pojawia się tu jednak kwestia optymalnego doboru macierzy  $\mathbf{Q}$ , która umożliwi znalezienie funkcji Lapunowa (czyli macierzy  $\mathbf{S}$ ) optymalnej w określonym sensie. Zatem zamiast o optymalizacji macierzy  $\mathbf{S}$ , możemy mówić o optymalizacji macierzy  $\mathbf{Q}$ .

Rozwiązywanie równania Lapunowa (4.2.2) za pomocą wzoru (4.2.3) byłoby niepraktyczne, jako że znalezienie funkcji wykładniczej macierzy  $\mathbf{A}$  (na przykład *metodą Sylwestera*) wymaga znajomości jej wartości własnych. Lepiej jest wprost rozwiązać równanie Lapunowa ze względu na elementy macierzy  $\mathbf{S}$ . Warunki rozwiązywalności (liniowej niezależności) układu  $(n^2+n-2)/2$  równań liniowych wynikających z równania macierzowego (4.2.4) będą oczywiście równoważne warunkom Hurwiza dla wielomianu charakterystycznego macierzy  $\mathbf{A}$  [D16]. Analityczne rozwiązywanie algebraicznego równania Lapunowa dla dowolnej macierzy  $\mathbf{Q}$  ma sens dla wymiarów  $n = 2, 3$ , ale już dla  $n = 4$  wzory ściśle stają się tak skomplikowane, że w zasadzie przestają być przydatne do teoretycznej analizy.

Do numerycznego rozwiązywania równania Lapunowa dla układów o kilku stopniach swobody można wykorzystać „solwery” dostępne w internecie. Chcąc jednak mieć niezależną procedurę rozwiązywania równania Lapunowa, jako jednego z elementów własnego pakietu kodów obliczeniowych, można wykorzystać na przykład *metodę eliminacji Gaussa* (Połozý [86]). W tym celu należy tylko przekształcić (numerycznie) macierzowe równanie Lapunowa do standardowej postaci układu równań liniowych ze względu na parametry macierzy  $\mathbf{S}$ , a następnie zastosować standardową procedurę rozwiązywania takich równań. Metoda ta może być z powodzeniem stosowana do układów o kilkunastu stopniach swobody, co zupełnie wystarcza do analizy wielu układów mechatronicznych. Znany jest też klasyczny algorytm specjalnie dostosowany do rozwiązywania algebraicznego równania Lapunowa (Bartels [7]), który dobrze się sprawdza dla wymiaru  $n < 100$  macierzy  $\mathbf{A}$ . Dla jeszcze większych wymiarów rozwiązywanie tego równania stanowi już poważny problem. Można wtedy zastosować genetyczne metody optymalizacji omówione w Paragrafie 4.6. W literaturze proponuje się też inne algorytmy iteracyjne, jednak skuteczne tylko dla macierzy  $\mathbf{A}$  szczególnych postaci, na przykład dla tzw. *macierzy rzadkich* (Zecevic [120]).

Jest jasne, że najbardziej pożądana jest macierz  $\mathbf{S}$  zapewniająca maksymalną wartość wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$ . Niestety macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa dla układu (4.2.1), znaleziona dla przypadkowej macierzy  $\mathbf{Q}$ , nie będzie na ogół optymalna w tym sensie. Mamy bowiem następujące oszacowanie dla funkcji Lapunowa  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ , wyznaczonej z (4.2.2):

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq -2 \cdot \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{S})} \cdot V.$$

Otrzymane z tego oszacowanie wskaźnika zbieżności wykładniczej

$$\gamma(\mathbf{S}) \geq \tilde{\gamma}(\mathbf{S}) = \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) / 2\lambda_{\max}(\mathbf{S}) \quad (4.2.4)$$

na ogół nie zapewnia warunków koniecznych i dostatecznych stabilności rozważanego układu liniowego o macierzy  $\mathbf{A}$ .

Istnieje zatem kwestia dobru optymalnej macierzy  $\mathbf{S}$  do danej macierzy  $\mathbf{A}$  układu. Formę kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  nazwiemy optymalną funkcją Lapunowa dla układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  w sensie wskaźnika stabilności, jeżeli zapewnia maksymalne oszacowanie tego wskaźnika, równe maksymalnej części rzeczywistej wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}$ . Jeżeli optymalność będziemy rozumieli w takim sensie, znane są ściśle rozwiązania tej kwestii, ale dla szczególnych macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{S}$ . Na przykład macierz  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  funkcji Lapunowa jest optymalna dla dowolnej *symetrycznej* macierzy  $\mathbf{A}$ , a nawet dla macierzy *normalnej*, tzn. spełniającej warunek  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$ . Mamy bowiem następujące oszacowania dla funkcji  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  i odpowiednio dla symetrycznej oraz normalnej macierzy  $\mathbf{A}$  (Radziszewski, Ziemia [16]):

$$\dot{V} = 2 \cdot \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} = 2 \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq -2[-\lambda_{\max}(\mathbf{A})] \cdot V, \quad (4.2.5)$$

$$\dot{V} = 2 \cdot \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{x} \leq -2[-\max_{i=1, \dots, n} \operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A})] \cdot V. \quad (4.2.6)$$

Z oszacowań tych wynika, że wskaźnik zbieżności wykładniczej jest równy minus maksymalnej części rzeczywistej wartości własnej macierzy  $\mathbf{A}$ , co właśnie oznacza, że forma kwadratowa  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$  jest optymalna w określonym wyżej sensie.

Ogólniejsze rozstrzygnięcie kwestii istnienia optymalnej funkcji Lapunowa w sensie wskaźnika stabilności wykładniczej zapewnia następujące

**Twierdzenie 4.2:** (Radziszewski [92]) Jeżeli istnieje nieosobliwa macierz  $\mathbf{P}$  zbudowana z wektorów własnych macierzy  $\mathbf{A}$  stabilnego układu liniowego stacjonarnego, to macierz  $\mathbf{S} = (\mathbf{P}^{-1}) * (\mathbf{P}^{-1})$  jest macierzą optymalnej (w sensie wskaźnika zbieżności wykładniczej) funkcji Lapunowa dla tego układu. (*symbol \* oznacza tu operację sprzężenia hermitowskiego macierzy*).

*Dowód:* Z przyjętych założeń wynika, że macierz  $\mathbf{A}$  jest diagonalizowalna, a  $\mathbf{P}$  jest macierzą zmiany bazy taką, że macierz  $\mathbf{U} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \operatorname{diag} [\lambda_1(\mathbf{A}), \dots, \lambda_n(\mathbf{A})]$ . Jeżeli zatem dokonamy liniowej zmiany współrzędnych  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ , to równanie (4.2.1) dla rozważanego układu liniowego przyjmie następującą postać diagonalną:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{U} \mathbf{y}. \quad (4.2.7)$$



Ponieważ macierz  $\mathbf{U}$  jest diagonalna, macierz optymalnej funkcji Lapunowa dla układu (4.2.7) we współrzędnych  $\mathbf{y}$  będzie macierzą jednostkową  $\mathbf{I}$ . Zatem optymalną funkcją Lapunowa dla układu (4.2.9) będzie forma  $\mathbf{y}^*\mathbf{y}$ . Wracając teraz do starych współrzędnych  $\mathbf{x}$ , dostaniemy postulowaną w twierdzeniu postać macierzy optymalnej funkcji Lapunowa rozważanego układu, albowiem

$$\mathbf{y}^*\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(\mathbf{P}^{-1})^*(\mathbf{P}^{-1})\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}. \quad \blacklozenge$$

Klasa dodatnio określonych form kwadratowych jest więc dostatecznie szeroka do badania stabilności układów liniowych stacjonarnych drugą metodą Lapunowa, ponieważ zawiera funkcje Lapunowa, zapewniające warunki konieczne i dostateczne stabilności takich układów (Muszyńska [45], Radziszewski [90]). Z powyższego twierdzenia wynika jednak, że znalezienie optymalnej kwadratowej funkcji Lapunowa dla dowolnego układu liniowego stacjonarnego wymaga znajomości wartości i wektorów własnych jego macierzy  $\mathbf{A}$ . Jest to więc zadanie niemal równoważne ze znalezieniem rozwiązań ogólnych układu. Zatem w rozważanej klasie układów badanie stabilności drugą metodą Lapunowa jest całkowicie równoważne metodzie algebraicznej. Metoda Lapunowa daje jednak więcej informacji o jakościowym zachowaniu się trajektorii układu i pozwala na pewne oszacowania ilościowe. Co najważniejsze, metoda funkcji Lapunowa (analityczna, a nie algebraiczna w swej istocie) zachowuje aktualność dla układów liniowych niestacjonarnych oraz układów quasiliniowych, dla których tracą sens pojęcia algebraiczne takie jak: wartości czy wektory własne.

Twierdzenie 4.2 pokazuje też, że nie zawsze należy i nie zawsze warto „walczyć” za wszelką cenę o optymalność funkcji Lapunowa, zwłaszcza w przypadku analizy stabilności układów o wielu stopniach swobody. Należy pamiętać, że funkcja Lapunowa nie jest celem samym dla siebie, lecz jedynie środkiem do celu, jakim jest ocena własności jakościowych układu. Najważniejsze jest, aby uzyskać możliwie dobre i proste oszacowania. Do tego wystarczą suboptymalne funkcje Lapunowa, które możemy znaleźć znacznie prościej (bez wyznaczania wartości i wektorów własnych), na przykład rozwiązując algebraiczne równanie Lapunowa za pomocą jednego z algorytmów optymalizacji bezgradientowej, opisanych w Paragrafie 4.6.

**Przykład 4.1:** (*Optymalna funkcja Lapunowa oscylatora o jednym stopniu swobody*)  
Rozważmy oscylator harmoniczny opisany modelem  $\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0$ . W postaci modelu pierwszego rzędu układ ten opisany jest macierzą:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -2p \end{bmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Rachunki analityczne dają następującą postać optymalnej macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa (Radziszewski [90],[92], Ossowski [55]):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} q & p \\ p & 1 \end{bmatrix} \text{ gdy } q < 1, p^2 < q, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} q - \sqrt{q - p^2} & p \\ p & 1 \end{bmatrix}, \text{ gdy } q > 1, p^2 < q,$$

która zapewnia maksymalną wartość wskaźnika stabilności równą tłumieniu  $p$ .  $\square$

Ciekawa jest kwestia istnienia optymalnej funkcji Lapunowa w przypadku, gdy nie istnieje baza złożona z wektorów własnych macierzy  $\mathbf{A}$ . Oczywiście można uznać taki przypadek za krytyczny i nieco zmienić parametry macierzy  $\mathbf{A}$ , aby Twierdzenie 4.2 dało się zastosować. Można też zmienić nieco parametry macierzy  $\mathbf{S}$ , aby utworzyć, formalnie rzecz biorąc, funkcję Lapunowa dla rozważanego układu. To jednak nie do końca rozwiązuje problem. W pobliżu wartości krytycznych parametrów macierzy  $\mathbf{A}$  po prostu nie możemy poprzestać na wskaźniku zbieżności wykładniczej, jako jedynym kryterium optymalizacji. Chcąc w takim przypadku sensownie optymalizować funkcje Lapunowa, musimy uwzględnić na przykład amplitudę procesów przejściowych. W pobliżu parametrów krytycznych poziomice funkcji Lapunowa, jako elipsoidy w przestrzeni stanu, stają się bowiem coraz bardziej wydłużone, a w samym punkcie krytycznym rozważana funkcja staje się kwadratem funkcji liniowej, czyli nie jest już funkcją Lapunowa. Jest to więc sytuacja, gdy rozwiązanie optymalne znajduje się na brzegu obszaru w przestrzeni parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ , a obszar ten, na mocy dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{S}$ , jest otwarty.

### 4.3 Szczególne postaci macierzy funkcji Lapunowa

Jest oczywiste, że macierz kwadratowej funkcji Lapunowa danego układu, podobnie jak i równania samego układu, zależy od wyboru współrzędnych stanu. Jeżeli zmienimy współrzędne stanu  $\mathbf{x}$  według transformacji liniowej  $\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y}$ , gdzie  $\det \mathbf{D} \neq 0$ , to funkcja Lapunowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  przekształci się do postaci  $\mathbf{y}^T \mathbf{D}^T \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{y}$ , co odpowiada transformacji macierzy  $\mathbf{S}$  do macierzy  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{D}^T \mathbf{S} \mathbf{D}$ . Zatem, formalnie rzecz biorąc, można dokonać transformacji do takich współrzędnych stanu, w których macierz (optymalnej) funkcji Lapunowa dla danego układu będzie jednostkowa. Jednak znalezienie takiej transformacji jest raczej trudne. Dlatego zwykle dokonuje się transformacji w przestrzeni stanu, w celu doprowadzenia macierzy układu  $\mathbf{A}$  do postaci chociaż dogodniejszej do znalezienia macierzy funkcji Lapunowa. W niniejszym paragrafie omówimy podstawowe postaci macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{S}$ , które mogą być wykorzystane w procedurach znajdowania optymalnych funkcji Lapunowa.

Problem znajdowania odpowiednich macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa nasila się wraz ze wzrostem wymiaru  $n$  przestrzeni stanu badanego układu. Znalezienie funkcji Lapunowa jest konieczne dla wykazania samej stabilności, ale o stabilności można też rozstrzygnąć innymi metodami (na przykład stosując kryterium Hurwiza [D16]). Warto się zatem zastanowić, jaki jest sens stosowania form kwadratowych o dużym wymiarze do opisu innych własności stabilności układów. Kwadratowa

funkcja Lapunowa o dużym wymiarze, jeśli nie ma jakiejś szczególnej postaci (na przykład klatkowej), raczej niezbyt precyzyjnie opisuje własności jakościowe układu, prócz samej stabilności. Widać to choćby na przykładzie zbieżności wykładniczej. Forma kwadratowa zależna od dużej liczby zmiennych stanu, nawet jeśli maleje wykładniczo na trajektoriach układu, nie wyklucza możliwości wystąpienia lokalnie zbyt dużych (z praktycznego punktu widzenia) wartości poszczególnych zmiennych stanu. Dlatego kwadratowa funkcja Lapunowa dla układu o dużym wymiarze wektora stanu może być przydatna głównie do wykazania stabilności układu. Aby uwidocznic jak dany układ jest stabilny lub bardziej szczegółowo zbadać inne jego własności, niekiedy lepiej jest stosować formy kwadratowe opisujące pewne istotne podukłady danego układu. Wiąże się ta kwestia ściśle z zagadnieniem faktoryzacji macierzy  $\mathbf{S}$ , czyli doprowadzaniem jej do postaci klatkowej diagonalnej.

**Problem 4.1:** (*Klatkowa macierz funkcji Lapunowa*)

Problem znalezienia funkcji Lapunowa dla układu wielowymiarowego można sprowadzić do problemu znalezienia funkcji Lapunowa dla wielu układów o niższym wymiarze, jeżeli macierz układu  $\mathbf{A}$  przedstawimy w postaci klatkowej diagonalnej  $\text{diag} [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k]$ , gdzie  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  są macierzami kwadratowymi o wymiarze mniejszym od wymiaru  $n$  macierzy  $\mathbf{A}$ . Układ dekomponuje się wtedy na  $k$  niezależnych podukładów, a macierzowe równanie Lapunowa (4.2.4) można rozwiązywać dla macierzy  $\mathbf{Q}$  postaci  $\mathbf{Q} = \text{diag} [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_k]$ , gdzie  $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_k$  są macierzami dodatnio określonymi o wymiarach odpowiadających klatkowej strukturze macierzy  $\mathbf{A}$ . Wówczas rozpatrywane równanie Lapunowa faktoryzuje się na  $k$  niezależnych równań Lapunowa  $\mathbf{A}_i^T \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_i \mathbf{A}_i = -\mathbf{Q}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  o niższym wymiarze. Rozwiązując te równania, dostajemy w rezultacie klatkową macierz funkcji Lapunowa  $\mathbf{S} = \text{diag} [\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k]$ , która odpowiada sfaktoryzowanej funkcji Lapunowa całego układu w postaci sumy

$$V_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{x}_1^T \mathbf{S}_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k, \quad (4.3.1)$$

gdzie poszczególne formy kwadratowe są funkcjami Lapunowa dla odpowiednich podukładów.  $\square$

Powyższy wniosek precyzuje następujące

**Twierdzenie 4.3:** Jeżeli dany układ jest złożony z  $k$  niezależnych i stabilnych podukładów liniowych, to suma funkcji Lapunowa tych podukładów jest funkcją Lapunowa dla rozważanego układu. Co więcej, wskaźnik stabilności układu złożonego będzie wtedy równy

$$\gamma = \min[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k],$$

gdzie  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in R_+$  są wskaźnikami stabilności jego podukładów. #

*Dowód:* Oznaczmy przez  $V_i = \mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  funkcje Lapunowa poszczególnych podukładów układu (4.2.1), dla których wskaźniki stabilności są dodatnie i oznaczone odpowiednio przez  $\gamma_i = \gamma_i(\mathbf{S}_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Aby wykazać, że funkcja  $V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + \dots + V_k(\mathbf{x}_k)$  o macierzy  $\mathbf{S} = \text{diag}[\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k]$  jest funkcją Lapunowa dla całego układu o macierzy  $\mathbf{A}$ , oszacujmy wskaźnik stabilności (określony wzorem (3.1.12)) jak następuje:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{S}) &= -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k^T \mathbf{S} \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k^T \mathbf{S} \mathbf{x}_k} \right] \geq \\ &\geq -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k^T \mathbf{S} \mathbf{x}_k} \right] - \dots - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}_n^T \mathbf{S} \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n^T \mathbf{S} \mathbf{x}_n} \right] \geq \\ &\geq \tilde{\gamma}(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}_1} \right] - \dots - \sup_{\mathbf{x}_n \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{S} \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{S} \mathbf{x}_k} \right], \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

gdzie ostatnie suprema nie są niezależne, lecz są liczone po  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  z warunkiem  $V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + \dots + V_k(\mathbf{x}_k) = 1$ . Nietrudno wykazać, że  $\tilde{\gamma}(\mathbf{S}) = \min[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k] > 0$ . Zatem funkcja  $V(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}_1) + \dots + V_k(\mathbf{x}_k)$  jest funkcją Lapunowa rozważanego układu złożonego. ♦

Funkcja Lapunowa postaci (4.3.1) jest szczególnym przypadkiem tzw. *wektorowej funkcji Lapunowa* (Bellman [8], Hu [20]), którą można również wykorzystać do znajdowania suboptymalnych funkcji Lapunowa dla pewnej klasy układów mechatronicznych złożonych ze słabo związanych podukładów. (Przykładem takiego układu może być zawieszenie pojazdu czterokołowego, którego pełny model rzadko jest rozpatrywany. Przeważnie w pracach na ten temat przedstawia się uproszczoną analizę teoretyczną i wyniki obliczeń dla modelu  $\frac{1}{4}$  lub  $\frac{1}{2}$  zawieszenia, pomijając sprzężenie zawieszonych poszczególnych kół). To stwierdzenie jest konsekwencją ogólniejszego faktu wynikającego z ciągłej zależności wskaźnika stabilności od parametrów [D8]. Mianowicie, jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  układu (4.2.1) jest liniowo zależna od pewnych parametrów  $a_1, \dots, a_k$ , czyli da się zapisać jako  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + a_1 \mathbf{A}_1 + \dots + a_k \mathbf{A}_k$ , zaś  $\mathbf{S}_0$  jest macierzą funkcji Lapunowa układu o stabilnej macierzy  $\mathbf{A}_0$ , to  $\mathbf{S}_0$  będzie też macierzą funkcji Lapunowa dla układu o parametrach  $(a_1, \dots, a_k)$  należących do pewnego otoczenia punktu  $\{\mathbf{0}\} \in \mathbb{R}^k$ . Granice tego obszaru można wyznaczyć na ogół numerycznie, badając wartości wskaźnika stabilności w różnych kierunkach w przestrzeni parametrów  $(a_1, \dots, a_k)$ .

Jak z powyższego wynika, ważną sprawą jest doprowadzenie macierzy  $\mathbf{A}$  układu do postaci klatkowej diagonalnej z ewentualnie małymi elementami poza strukturą

klatkową. Znanych jest szereg sposobów znajdowania odpowiedniej do tego transformacji współrzędnych w przestrzeni stanu.

Jeżeli model strukturalny układu charakteryzuje się skończoną *grupą symetrii*, to można dokonać rozkładu macierzy  $\mathbf{A}$  na klatki według nieprzywiedlnych reprezentacji tej grupy. Zaletą takiego rozkładu jest fakt, że wynika on z samej symetrii układu, a nie z konkretnych wartości jego parametrów. Dlatego macierz transformacji współrzędnych  $\mathbf{x}$  do współrzędnych symetrycznych nie zależy od tych parametrów. Ma to istotne znaczenie przy analizie własności stabilności w przestrzeni parametrów lub przy syntezie układu modyfikacji parametrycznej.

Innym sposobem faktoryzacji jest sprowadzenie macierzy  $\mathbf{A}$  układu do postaci *kanonicznej Jordana*. Macierze rzeczywiste w tej postaci zawierają klatki jordanowskie pierwszego i drugiego rodzaju w zależności od wartości własnych, które reprezentują. Metoda ta umożliwiła wprowadzić faktoryzację macierzowego równania Lapunowa (4.2.4) do rozmiaru poszczególnych klatek jordanowskich, ale jej użyteczność jest jednak ograniczona, ponieważ wymaga ona wyznaczenia wartości własnych macierzy układu.

Prostszym sposobem faktoryzacji macierzy układu jest sprowadzenie jej do tzw. *postaci klatkowej Frobeniusa*. Jeżeli dla macierzy nieosobliwej  $\mathbf{A}$  i wektora  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  wektory  $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$  są liniowo niezależne, to wówczas tworzą one tzw. *bazę cykliczną* (Frobeniusa), w której macierz  $\mathbf{A}$  przyjmuje postać kanoniczną zwaną właśnie przedstawieniem Frobeniusa [D16].

Układ oscylatora o jednym stopniu swobody, układy reologiczne wyższego rzędu i wiele innych układów mechanicznych, czy fizycznych w naturalny sposób opisuje się równaniami liniowymi z macierzą tej postaci. Odpowiednie parametry macierzy  $\mathbf{A}$  są wówczas współczynnikami wielomianu charakterystycznego, a jednocześnie mają bezpośrednią interpretację fizyczną. Wtedy stosunkowo łatwo jest w takiej bazie określić zapas stabilności układu w przestrzeni parametrów fizycznych, stosując na przykład *kryterium Hurwiza* lub *Kharitonowa* [D16].

Nie każda macierz  $\mathbf{A}$  da się przedstawić w postaci Frobeniusa, ale zawsze można sprowadzić macierz  $\mathbf{A}$  do postaci klatkowej diagonalnej, w której klatkami będą macierze postaci Frobeniusa. W mechanice istnieją sytuacje, w których postać klatkową macierzy układu uzyskuje się w sposób naturalny. W szczególności, za pomocą odpowiedniej transformacji współrzędnych można dokonać rozkładu modelu liniowego układu drgającego o dowolnej liczbie stopni swobody na oscylatory modalne (wykonujące drgania własne) (Gutowski [18], Osiński [54]). Odpowiada to sprowadzeniu macierzy układu (zapisanego w postaci równań pierwszego rzędu) do postaci klatkowej Frobeniusa. W ogólnym przypadku zagadnienie to nie jest rozwiązywalne analitycznie. Istnieją jednak szczególne postaci macierzy  $\mathbf{A}$ , dla których znane są rozwiązania ściśle (Wojewodin [117]).

Podstawową zaletą opisanych metod faktoryzacji jest typowa postać klatek macierzy. Umożliwia to znalezienie ogólnych, a nawet analitycznych rozwiązań

zagadnienia (czyli wyznaczenia macierzy funkcji Lapunowa) dla klatek o niskich wymiarach 2,3,4. Dysponując takim zestawem rozwiązań, zagadnienie znajdowania kwadratowej funkcji Lapunowa dla wielowymiarowych układów liniowych można sprowadzić do standardowych procedur numerycznych algebry liniowej.

#### 4.4 Kanoniczne i regularne funkcje Lapunowa

Ścisłe wyznaczenie wskaźnika zbieżności wykładniczej względem określonej normy w przestrzeni stanu dla dowolnego układów wielowymiarowego jest na ogół niemożliwe nawet w przypadku liniowym. Istotnie, korzystając z (3.1.12) nietrudno wykazać, że wskaźnik stabilności wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_S$  układu (4.2.1) wyraża się wzorem

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = -\sup_{\|\mathbf{x}\|_S=1} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}) \mathbf{x} \right], \quad (4.4.1)$$

gdzie  $\mathbf{P}$  jest pierwiastkiem macierzy  $\mathbf{S}$ , czyli taką macierzą nieosobliwą, że  $\mathbf{S} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$ . Wskaźnik stabilności układu liniowego stacjonarnego jest więc minimalną wartością własną macierzy symetrycznej  $[-(\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P})/2]$ . Zatem problem wyznaczenia wskaźnika stabilności układu dla danej macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa sprowadza się wyliczenia wartości własnych, co wymaga rozwiązywania równań algebraicznych wyższego stopnia. Analityczne wzory wyrażające pierwiastki takich równań za pomocą funkcji elementarnych – jak wiadomo – nie istnieją. Można jednak podać analityczne formuły dla pewnych szczególnych klas wielomianów o odpowiednio dobranych parametrach. W przypadku wskaźnika stabilności mamy analogiczną sytuację. Ponieważ wskaźnik stabilności jest ciągłą funkcją parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ , w przypadku formy kwadratowej wyższego wymiaru mamy dość dużą swobodę doboru parametrów, dla których wskaźnik zbieżności jest dodatni, choć niekoniecznie maksymalny.

Okazuje się, że w wielu przypadkach można obniżyć wymiar problemu lub wręcz wyprowadzić ścisły wzór na wskaźnik stabilności, nie poprzez transformację macierzy układu, lecz poprzez odpowiedni dobór parametrów funkcji Lapunowa. Oznacza to, że czasem można określić analityczną zależność wskaźnika zbieżności przynajmniej od pewnych istotnych parametrów układu, ale w ograniczonej klasie form kwadratowych. Tego typu formy kwadratowe będziemy określali mianem *kanonicznych funkcji Lapunowa* dla rozpatrywanego układu.

**Definicja 4.1:** Dodatnio określona macierz  $\mathbf{S}$  jest kanoniczna dla układu dynamicznego zależnego od pewnych parametrów  $\mathbf{p}$ , jeżeli można wyznaczyć ścisłą analityczną zależność wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p})$  (określonego wzorem (4.4.1)) od tych parametrów. #

Podana definicja kanoniczności jest bardzo ogólna i, co więcej, nie żąda, aby macierz  $\mathbf{S}$  była macierzą funkcji Lapunowa. Zatem kanoniczne macierze  $\mathbf{S}$  mogą być też stosowane do układów niestabilnych  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , ale sterowalnych (Rozdział 7). Parametry  $\mathbf{p}$  mogą być dowolnie wybrane spośród wszystkich parametrów modelu (w szczególności może to być jeden parametr). Istotne jest tylko to, aby można było wyznaczyć analitycznie zależność wskaźnika stabilności od tych parametrów.

Poszukiwanie rozwiązań zagadnień mechatroniki za pomocą kanonicznych funkcji Lapunowa może być bardzo pożyteczne, ponieważ umożliwia często wyznaczenie analitycznych zależności wskaźnika zbieżności, na przykład od amplitudy sterowań czy zaburzeń układu o wielu stopniach swobody. Jak to stosuje się do konkretnych modeli układów pokażemy w następujących rozdziałach.

Postać warunków jakie powinna spełniać kanoniczna funkcja Lapunowa wynika na ogół zarówno z równań układu jak i z celu przeprowadzanej analizy własności układu. Istnienie macierzy  $\mathbf{S}$ , dodatnio określonych i spełniających odpowiednie warunki kanoniczności stanowi oddzielny problem, nie zawsze łatwy do rozwiązania. W analizie stabilności układów często można jednak dość prosto znaleźć pewną klasę macierzy kanonicznych, która jest jeszcze dostatecznie bogata do przeprowadzenia sensownej optymalizacji funkcji Lapunowa.

Poniżej określimy szczególnie ważny przykład kanonicznych macierzy  $\mathbf{S}$  mających zastosowanie do analizy układów liniowych ze sterowaniami i zaburzeniami addytywnymi.

**Definicja 4.2:** (Ossowski [57], [59]) Dodatnio określona macierz  $\mathbf{S}$  nazywamy macierzą kanoniczną dla układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , gdzie  $\mathbf{B} \in R^n$ , gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}) \tilde{\mathbf{x}} = 0 \quad (4.4.2)$$

dla każdego  $\tilde{\mathbf{x}}$  należącego do przestrzeni  $\mathbf{B}_S^\perp = \{\mathbf{x} : \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0\}$ , która jest  $\mathbf{S}$ -ortogonalna do wektora  $\mathbf{B}$ , a wskaźnik

$$\gamma_\infty = -\sup_{\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}} \right] \quad (4.4.3)$$

jest obliczony na podprzestrzeni  $\mathbf{B}_S^\perp$ , jest dodatni. #

Warunki (4.4.2), (4.4.3) oznaczają, że podprzestrzeń  $\mathbf{B}_S^\perp$  jest niezmiennicza względem przekształcenia o macierzy  $\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A})$  a rzut trajektorii układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  na podprzestrzeń  $\mathbf{B}_S^\perp$  jest wykładniczo zbieżny.

Podobnie można zdefiniować kanoniczne funkcje Lapunowa dla układu liniowego  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k)$  lub dla pewnych klas układów quasiliniowych.

Dogodność kanonicznych macierzy  $\mathbf{S}$  ilustruje następujący

**Przykład 4.2:** (Wyznaczenie wskaźnika stabilności względem normy kanonicznej)  
Wykorzystując warunki kanoniczności macierzy  $\mathbf{S}$  łatwo wykazać następujący fakt:

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{S}) &= -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = -\sup_{\lambda, \tilde{\mathbf{x}}} \left[ \lambda^2 \mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B} + \lambda \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} \right] = \\ &= -\sup_{\lambda, \tilde{\mathbf{x}}} \left[ \lambda^2 \mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} \right].\end{aligned}$$

Przekształcając dalej, dostaniemy następującą formułę na wskaźnik stabilności

$$\gamma(\mathbf{S}) = \gamma_\infty(\mathbf{S}) - \sup_{\xi^2 \leq 1} \left[ \xi^2 \left( \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^4} + \gamma_\infty(\mathbf{S}) \right) \right] = \min \left[ \gamma_\infty(\mathbf{S}), -\frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^4} \right].$$

Jak widać,  $n$ -wymiarowy problem wyznaczenia wskaźnika stabilności został zredukowany do  $(n-1)$ -wymiarowego problemu wyznaczenia wskaźnika  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ . Nie miałyby to dużego znaczenia w przypadku układów dynamicznych bez sterowania i zaburzeń, gdy wektor  $\mathbf{B}$  może być dowolny. Jednak w konkretnych zastosowaniach macierzy kanonicznych wektor ten zwykle dobiera się odpowiednio do struktury oddziaływania zaburzeń lub sterowań. Wtedy zastosowanie macierzy kanonicznej funkcji Lapunowa umożliwi „wyłuskanie” analitycznej zależności wskaźnika stabilności od pewnych istotnych parametrów wielowymiarowego układu liniowego. Niekiedy możliwe to jest nawet dla pewnych układów nieliniowych i/lub niestacjonarnych. Podważa to przekonanie, że w analizie jakościowej takich układów możliwe są tylko oszacowania.  $\square$

W następnych rozdziałach pokażemy jak można wykorzystać podane warunki kanoniczności (4.4.2), (4.4.3) do analitycznego oszacowania wskaźnika zbieżności wykładniczej dla niektórych układów wielowymiarowych lub nieliniowych.

Uproszczenia jakie nam oferują kanoniczne macierze  $\mathbf{S}$  sprawiają, że mamy co najmniej dwie możliwości optymalizacji funkcji Lapunowa. Albo optymalizujemy funkcję Lapunowa w klasie wszystkich dodatnio określonych form kwadratowych i korzystamy z oszacowań wskaźnika zbieżności wykładniczej, albo też ograniczamy zakres optymalizacji do klasy kanonicznych form kwadratowych, ale za to wykorzystujemy do analizy ścisły wzór na ten wskaźnik. Nie jest z góry przesądzone, która metoda da lepszy wynik dla danego układu. Dlatego obie te możliwości powinny być rozpatrzone w każdym konkretnym przypadku.

Interesującą podklasę kanonicznych macierzy  $\mathbf{S}$  stabilnego układu liniowego  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ , stanowią *macierze regularne* funkcji Lapunowa, które określa następująca



**Definicja 4.3:** Dodatnio określoną macierz  $\mathbf{S}$  nazywamy *macierzą regularną* dla stabilnej macierzy  $\mathbf{A}$  o tych samych wymiarach, gdy istnieje stała dodatnia  $\gamma$  taka, że spełnione jest następujące równanie macierzowe (*regularne równanie Lapunowa*)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} = -2\gamma \mathbf{S}. \quad (4.4.4)$$

Kwadratową funkcję Lapunowa o regularnej macierzy  $\mathbf{S}$  dla układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  będziemy nazywali *regularną funkcją Lapunowa*. #

Równanie postaci (4.4.4) było rozpatrywane już przez Małkina (Małkin [41]). Wydaje się jednak, że zalety określonych w ten sposób macierzy  $\mathbf{S}$  nie zostały należycie wykorzystane w dalszych pracach w zakresie teorii stabilności.

Bezpośrednio z równania (4.4.4) wynika ważny fakt, że każda macierz regularna jest macierzą kanoniczną dla układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  i dowolnego wektora  $\mathbf{B}$ . Ponadto widać, że równanie (4.4.4) jest w istocie algebraicznym równaniem Lapunowa, jednorodnym ze względu na macierz  $\mathbf{S}$ . Macierze regularne są więc określone z dokładnością do stałego czynnika. Istnienie nietrywialnych rozwiązań tego równania wymaga, aby wyznacznik macierzy równoważnego układu równań, liniowego i jednorodnego ze względu na parametry macierzy  $\mathbf{S}$ , był równy zero. Taka algebraiczna równość będzie określała zbiór dopuszczalnych wartości współczynnika  $\gamma$  za pomocą parametrów macierzy  $\mathbf{A}$ .

Jeżeli równanie (4.4.4) ma rozwiązania  $\gamma > 0$ ,  $\mathbf{S} > 0$ , można je skutecznie wykorzystać w analizie stabilności rozważanego układu. Nietrudno dowiedzieć, że  $\gamma$  jest wtedy wskaźnikiem stabilności (a jednocześnie średnim wskaźnikiem zbieżności) trajektorii układu. Istotnie, na mocy równania (4.4.4) mamy równość:

$$-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} = \gamma \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} = \gamma, \quad (4.4.5)$$

która oznacza, że szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii jest taka sama w każdym punkcie  $\mathbf{x}$  przestrzeni stanu i równa  $\gamma$ .

Z geometrycznego punktu widzenia taka niezależność szybkości zbieżności od punktu  $\mathbf{x}$  oznacza pewną regularność (jednorodność) zachowania się trajektorii układu w przestrzeni stanu. Mianowicie w każdym punkcie  $\mathbf{x}$  wykładniczo stabilna trajektoria układu musi wchodzić do odpowiedniej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  pod jednakowym kątem mierzonym w sensie iloczynu skalarnego, określonego przez macierz  $\mathbf{S}$ . Co więcej, wszystkie rozwiązania startujące w chwili  $t_0$  z powierzchni pewnej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  osiągną jednocześnie każdą inną elipsoidę  $B(\mathbf{S}, c^*)$  o promieniu  $c^* < c$ . Oznacza to, że dowolna elipsoidalna początkowa  $B(\mathbf{S}, c)$  ewoluuje jak  $B(\mathbf{S}, c \cdot \exp(-\gamma t))$  pod wpływem pola wektorowego odpowiadającego rozważanemu układowi dynamicznemu. Na tym właśnie polega owo dość specyficzne, regularne zachowanie się trajektorii układu obdarzonego regularną funkcją Lapunowa.

Zatem mając regularną funkcje Lapunowa dla danego układu liniowego, nie mamy już problemu wyznaczenia wskaźnika zbieżności wykładniczej ani wskaźnika średniej zbieżności. Stanowi to podstawową zaletę macierzy regularnych. Powstaje jednak pytanie: dla jakich macierzy  $\mathbf{A}$  (i czy w ogóle) istnieją macierze regularne? Jest to więc kwestia istnienia układów liniowych dopuszczających regularne funkcje Lapunowa. Oddzielną kwestią jest też pytanie o praktyczne, a nie tylko analityczne, znaczenie istnienia tego typu regularności w układach mechatronicznych.

Poniżej pokażemy, że klasa układów liniowych o tak specyficznej własności jak istnienie regularnej funkcji Lapunowa wcale nie jest wyjątkowa. W szczególności pokażemy, że liniowe układy drgające w pewnych (podkrytycznych) zakresach parametrów dopuszczają regularne funkcje Lapunowa o ściśle wyznaczalnej postaci dla dowolnej liczby stopni swobody! Aby wyrobić sobie na ten temat pewien pogląd, rozważmy najpierw prosty

**Przykład 4.3:** (Regularna funkcja Lapunowa dla oscylatora liniowego)

Wyznamy regularną funkcję Lapunowa dla liniowego oscylatora opisanego równaniem  $\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0$ . W tym celu rozwiążmy regularne równanie Lapunowa

$$(4.4.4) \text{ z macierzą } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -2p \end{bmatrix}. \text{ W rezultacie dostajemy macierz } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} q & p \\ p & 1 \end{bmatrix},$$

która jest regularną funkcją Lapunowa w obszarze podkrytycznym, czyli dla  $q > p^2$ . Co ciekawe, z warunków rozwiązywalności równania (4.4.4) wynika wniosek, że wskaźnik  $\gamma = p$  i nie istnieje regularna funkcja Lapunowa, gdy  $q \leq p^2$ , czyli w obszarze nadkrytycznym. Wykazana w ten sposób regularność rozważanego oscylatora jest mało spodziewaną i raczej niezbyt znaną jego własnością.  $\square$

Podany przykład od razu pokazuje, że nie dla każdego układu mechanicznego będzie istniała regularna funkcje Lapunowa. Łatwo możemy też podać dostateczne (choć niekonieczne) warunki istnienia regularnych funkcji Lapunowa dla liniowych układów drgających o wielu stopniach swobody. Jeżeli przedstawimy równania takiego układu we współrzędnych normalnych, to dla każdego z oscylatorów modalnych możemy wyznaczyć regularną funkcję Lapunowa o macierzy  $\mathbf{S}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , o ile parametry modalne (tłumienia i sztywności) będą spełniały warunki podane w Przykładzie 4.3. Jeżeli oznaczymy przez  $\gamma_i$  wskaźnik zbieżności osiągnięty dla odpowiedniej macierzy  $\mathbf{S}_i$ , to macierz  $\text{diag}[\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n]$  będzie oczywiście macierzą funkcji Lapunowa dla całego układu we współrzędnych normalnych, zapewniającą zbieżność wykładniczą trajektorii ze wskaźnikiem zbieżności  $\gamma = \min[\gamma_1, \dots, \gamma_n]$ . Jednak macierz  $\text{diag}[\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n]$  będzie regularna tylko w przypadku, gdy wskaźniki stabilności  $\gamma_i$  wszystkich oscylatorów modalnych będą identyczne. Wystarczy do tego, aby modalne tłumienia wszystkich oscylatorów były jednakowe ( $= p$ ), a sztywności modalne spełniały warunki  $q_i > p^2$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Powyższe spostrzeżenie wyraża ogólniejszy fakt, który precyzuje następujące

**Twierdzenie 4.4:** Jeżeli funkcja Lapunowa  $V_S(\mathbf{x})$  ma strukturę klatkową, odpowiadającą niezależnym podukładom systemu i każda z klatek  $S_i$  macierzy  $S$ , jest macierzą regularną z tym samym wskaźnikiem stabilności  $\gamma$ , to funkcja  $V_S(\mathbf{x})$  jest regularna dla całego systemu. #

Powyższy wynik nie jest zbyt użyteczny dla układów drgających, bo wymaga dokonania transformacji zmiennych stanu do współrzędnych normalnych. Można jednak wskazać nietrywialne klasy układów dynamicznych, dla których można ściśle wyznaczyć regularne macierze  $S$  bez dokonywania takich transformacji. Poniżej omówimy trzy takie klasy macierzy regularnych przydatnych do analizy własności stabilności układów mechatronicznych o wielu stopniach swobody.

**Twierdzenie 4.5:** (macierze regularne pierwszej kategorii)

Dodatkowo określona macierz  $S$  o strukturze klatkowej podanej poniżej jest macierzą regularną macierzy  $A$  o analogicznej strukturze klatkowej (podanej poniżej)

$$S = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1 & S_0 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_1 & S_0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & S_0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1 & A_0 & A_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & A_0 \end{bmatrix}, \quad (4.4.6)$$

jeżeli macierz  $S_0$  jest symetryczna i dodatnia, a  $S_1$  – symetryczna i spełnione są następujące warunki:

$$\begin{cases} A_0^T S_0 + S_0 A_0 = -2\gamma \cdot S_0, \\ A_1^T S_1 + S_1 A_1 = 0, \\ S_1 A_0 + A_0^T S_1 + A_1^T S_0 + S_0 A_1 = -2\gamma \cdot S_1. \end{cases} \quad \# (4.4.7)$$

*Dowód:* Aby wykazać regularność macierzy  $S$ , należy sprawdzić czy istnieje stała  $\gamma$ , taka że zachodzi równość  $A^T S + S A = -2\gamma S$ . Obliczając wprost iloczyn macierzy  $S \cdot A$ , dostajemy następującą macierz klatkową:

$$\begin{bmatrix} S_0 A_0 + S_1 A_1 & S_0 A_1 + S_1 A_0 & S_1 A_1 & 0 & \dots & 0 \\ S_1 A_0 + S_0 A_1 & S_0 A_0 + 2S_1 A_1 & S_0 A_1 + S_1 A_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_1 A_1 & S_1 A_0 + S_0 A_1 & S_0 A_0 + 2S_1 A_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & S_1 A_1 & \ddots & \ddots & \ddots & S_1 A_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & S_0 A_1 + S_1 A_0 \\ 0 & 0 & 0 & S_1 A_1 & S_1 A_0 + S_0 A_1 & S_0 A_0 + S_1 A_1 \end{bmatrix}.$$

Porównując odpowiednie klatki w macierzach  $\mathbf{A}^T\mathbf{S}+\mathbf{S}\mathbf{A}$  oraz  $-2\gamma\mathbf{S}$  i dokonując pewnych przekształceń, dostajemy warunki (4.4.6). ♦

Kolejne dwa twierdzenia dowodzi się analogicznie. Dlatego ich dowody pominiemy.

**Twierdzenie 4.6:** (*macierze regularne drugiej kategorii*)

Dodatkowo określona macierz  $\mathbf{S}$  o poniższej strukturze klatkowej jest macierzą regularną dla macierzy  $\mathbf{A}$  o analogicznej strukturze klatkowej (podanej poniżej):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_1 & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}, \quad (4.4.8)$$

jeżeli spełnione są warunki postaci (4.4.7). #

**Twierdzenie 4.7:** (*macierze regularne trzeciej kategorii*)

Dodatkowo określona macierz  $\mathbf{S}$  o strukturze klatkowej podanej poniżej jest macierzą regularną dla macierzy  $\mathbf{A}$  o analogicznej strukturze klatkowej (podanej poniżej)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1 & \cdots & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 & \ddots & \ddots & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_1^T & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1^T & \ddots & \ddots & \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_0 & \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_1^T & \cdots & \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_1^T & \mathbf{S}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \ddots & \ddots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}, \quad (4.4.9)$$

jeżeli spełnione są warunki (4.4.7). #

Z pierwszego równania (4.4.7) wynika, że podukład o macierzy  $\mathbf{A}_0$  jest stabilny, a macierz  $\mathbf{S}_0$  jest macierzą regularną jego funkcji Lapunowa. Zatem w rozważanych klasach macierzy  $\mathbf{A}$  podane twierdzenia sprowadzają wielowymiarowy problem macierzy regularnych do regularnych równań Lapunowa o niższej wymiarowości odpowiadającej klatce  $\mathbf{A}_0$ .

Do podanych warunków (4.4.7) należy oczywiście dołączyć warunki nierównościowe na dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{S}$ , które będą wyznaczały ograniczenia na parametry macierzy  $\mathbf{A}$  dopuszczających regularne macierze funkcji Lapunowa.

W podanym twierdzeniu, jeżeli będziemy interpretować  $\mathbf{A}_0$  jako macierz podukładu, to macierz  $\mathbf{A}_1$  będzie określała wzajemne oddziaływania podukładów. Przy braku oddziaływań wystarczy przyjąć, że  $\mathbf{S}_0 > 0$  i  $\mathbf{S}_1 = 0$ , a wtedy macierz  $\mathbf{S}$  w (4.4.6) dla dowolnego wymiaru będzie dodatnia, jako klatkowa macierz funkcji Lapunowa układu niezależnych podukładów stabilnych. Na mocy ciągłości warunków dodatniości mamy gwarancję, że dla dostatecznie małych oddziaływań (gdy  $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{S}_1 \neq \mathbf{0}$ ) macierze  $\mathbf{S}$  postaci (4.4.6) będą dodatnio określone.

Podane wyżej klasy macierzy regularnych, nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości w tym zakresie. Dla ilustracji omówimy teraz następujący

**Przykład 4.4:** (Regularne funkcje Lapunowa układów o wielu stopniach swobody)  
Nietrudno stwierdzić, że podane warunki (4.4.7) spełniają następujące macierze:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -2p \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} q & p \\ p & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma = p.$$

gdzie parametry  $p, q, r, q > p^2$  są dodatnie. Takie macierze odpowiadają układowi drgającemu, złożonemu z identycznych oscylatorów o jednym stopniu swobody i oddziałujących tylko sprzężenie (tzn. bez tłumienia) (Ossowski [62]). Taka macierz regularna, na mocy ciągłości, powinna pozostać funkcją Lapunowa dla względnie małego tłumienia włączonego do oddziaływania. Z uwagi na regularną strukturę rozważanych tu macierzy  $\mathbf{S}$ , dość łatwo można wyznaczyć (ściśle lub numerycznie) dodatkowe ograniczenia na zakresy parametrów  $p, q, r$  zapewniające dodatnią określoność tych macierzy.  $\square$

Łatwo zauważyć, że klasę macierzy podanych w powyższym przykładzie można rozszerzyć do układu oscylatorów o różnych współczynnikach sztywności, a więc o różnych klatkach na przekątnej głównej macierzy  $\mathbf{S}$  (Ossowski [84]). Opisane wyżej klasy macierzy regularnych nadają się do badania własności następujących liniowych modeli układów mechanicznych o wielu stopniach swobody:

- Liniowy (otwarty) układ jednakowych oscylatorów z oddziaływaniem sąsiednim,
- Zamknięty układ jednakowych oscylatorów z oddziaływaniem sąsiednim,
- Zupełny układ jednakowych oscylatorów oddziałujących „każdy z każdym”.

Takie systemy oscylatorów mogą służyć do modelowania złożonych układów mechatronicznych opisanych modelami dyskretnymi (na przykład model toczącego się koła sprężystego, model sprężystego podłoża (gruntu), model konstrukcji wielopoziomowej (Ossowski [84])).

Podane klasy macierzy regularnych nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości w tym zakresie, co pokażemy rozpatrując przykłady w następnych rozdziałach. Warto przy tym podkreślić, że podane wyżej macierze regularne są w istocie nietrywialnymi, użytecznymi i, co najważniejsze, ścisłymi rozwiązaniami

algebraicznego równania Lapunowa w przypadku wielowymiarowym. Na tle wysiłków pokonania tego problemu na drodze numerycznej (Bartels [7], Zecevic [120]) należy uzyskane tu wyniki uznać za unikalne. W szczególności podważa to opinię, że optymalne funkcje Lapunowa dla nietrywialnych układów wielowymiarowych można wyznaczyć tylko numerycznie.

Wynik uzyskany w Przykładzie 4.3 pokazuje, że regularna macierz funkcji Lapunowa dla liniowego oscylatora jest jednocześnie macierzą optymalną. Okazuje się, że to spostrzeżenie jest przejawem ogólnego faktu, o którym mówi następujące

**Twierdzenie 4.8:** (*Optymalność regularnej funkcji Lapunowa*)

Regularna macierz funkcji Lapunowa jest jednocześnie funkcją optymalną w sensie wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$ . #

*Dowód:* Załóżmy, że macierz  $\mathbf{S}$  jest regularna dla macierzy stabilnej  $\mathbf{A}$ . Wtedy, zgodnie z definicją, zachodzi równość  $\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} = -2\gamma \mathbf{S}$ , z której wynika że rozwiązania układu zbiegają ściśle wykładniczo według normy  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}$  czyli

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}} = \|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{S}} \cdot \exp[-\gamma \cdot t]. \quad (4.4.10)$$

Przypuśćmy, że istnieje inna macierz dodatnio określona  $\mathbf{S}_0$ , dla której zachodzi oszacowanie  $\mathbf{A}^T \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{A} \leq -2\gamma_0 \mathbf{S}_0$ , przy czym wskaźnik  $\gamma_0$  jest większy niż wskaźnik  $\gamma$  dla macierzy regularnej  $\mathbf{S}$ . Wtedy, rzecz jasna prawdziwe będzie oszacowanie wykładnicze  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}_0} \leq \|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{S}_0} e^{-\gamma_0 t}$ . Jeżeli zachodzi nierówność  $\gamma < \gamma_0$ , to (na mocy równoważności norm) istnieje czas  $t \geq t_0 = 0$  i stałe dodatnie  $\eta, \xi$ , takie że zachodzi oszacowanie:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}} \leq \eta \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}_0} \leq \eta \|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{S}_0} e^{-\gamma_0 t} \leq \eta \xi \|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{S}} e^{-\gamma_0 t} < \|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{S}} e^{-\gamma t}, \quad (4.4.11)$$

które stoi w sprzeczności z przyjętym założeniem (4.4.10). ♦

Z oszacowania (4.4.11) wynika w szczególności, że układ liniowy stacjonarny nie może mieć dwóch istotnie różnych (różniących się nie tylko o stały mnożnik) regularnych funkcji Lapunowa.

Warto też zauważyć, że własność regularności i kanoniczności macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa jest inwariantna ze względu na zmianę bazy w przestrzeni stanu. Ten fakt umożliwia wyznaczenie ogólnej struktury macierzy  $\mathbf{S}$  optymalnych funkcji Lapunowa dla wielu złożonych układów dynamicznych, a w szczególności dla modeli wielowymiarowych liniowych układów drgających.

## 4.5 Algorytmy numeryczne metody optymalnych funkcji Lapunowa

W niniejszym paragrafie omówimy ogólne koncepcje numerycznych algorytmów wyznaczania wskaźników stabilności oraz optymalizacji funkcji Lapunowa.

Optymalizacja funkcji Lapunowa oraz analiza stabilności układu liniowego wymaga przede wszystkim obliczenia wskaźnika stabilności danego wzorem (4.4.1). Tak określony wskaźnik jest supremum z tzw. *ilorazu Rayleigha* macierzy  $\mathbf{SA}$  względem macierzy dodatnio określonej  $\mathbf{S}$ . Własności tego ilorazu są w miarę „przyzwoite” z punktu widzenia metod optymalizacji. Jego wartość nie zależy od normy  $\mathbf{x}$ , lecz tylko od kierunku w przestrzeni stanu, a co najważniejsze, znana jest prosta formuła na jego gradient (Wojewodin [117]). Mianowicie:

$$\text{grad} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{SAx}}{\mathbf{x}^T \mathbf{Sx}} = \frac{2}{\mathbf{x}^T \mathbf{Sx}} \cdot \left[ \mathbf{SAx} - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{SAx}}{\mathbf{x}^T \mathbf{Sx}} \cdot \mathbf{x} \right]. \quad (4.5.1)$$

Zatem do numerycznego obliczania wskaźnika stabilności możemy stosować bardziej efektywne *metody gradientowe* optymalizacji. Jeśli jednak badany układ jest nieliniowy, to iloraz Reighly jest tylko częścią główną optymalizowanych funkcji. Wtedy bardziej uniwersalne i prostsze będą mniej efektywne, lecz bezgradientowe metody optymalizacji, na przykład metody *Monte Carlo*.

Istotą metody *Monte Carlo* będzie w tym przypadku obliczanie optymalizowanej funkcji w pewnej liczbie punktów  $\mathbf{x}$  (wybranych losowo z ograniczonego otoczenia punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) i wyprowadzeniu maksymalnej z obliczonych wartości. Liczba punktów niezbędna do otrzymania dobrego oszacowania wartości wskaźnika stabilności zależy oczywiście od wymiaru przestrzeni stanu. Dla układów mechatronicznych opisanych modelami o kilku lub kilkunastu stopniach swobody wystarczy od kilku do kilkuset tysięcy punktów. Dla współczesnych komputerów nie stanowi to problemu, zwłaszcza, że nie są to obliczenia w czasie rzeczywistym.

Przy większej liczbie stopni swobody efektywność zwykłej metody Monte Carlo spada. W takim przypadku znacznie lepsze efekty daje dwuetapowa procedura losowania punktów z przestrzeni stanu. W pierwszym etapie, w którym losowane są punkty bez żadnych ograniczeń co do kierunku, wyznaczony jest kierunek najbardziej obiecujący, suboptymalny. Następnie, w drugim etapie, dokonuje się losowania punktów tylko w niewielkim otoczeniu kierunku suboptymalnego (wyznaczonego w pierwszym etapie) w celu znalezienia dokładniejszego oszacowania wartości wskaźnika stabilności.

Obliczanie bardziej złożonych wskaźników oceny własności stabilności układów można wykonywać w analogiczny sposób. Takie wskaźniki będą bowiem na ogół dość prostymi funkcjami parametrów układu, wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$  oraz innych wielkości wyliczalnych numerycznie. Zatem obliczając złożony wskaźnik oceny, najpierw wyznaczamy te wielkości, które same są supremami pewnych funkcji, a następnie podstawiamy je do jawnej formuły na dany wskaźnik.

Jak wiemy, niekoniecznie musimy znajdować funkcje Lapunowa optymalne w całym zbiorze form kwadratowych. Wtedy trzeba by znać wartości i wektory własne macierzy  $\mathbf{A}$ , a zatem nieomal ogólne rozwiązania. Dobrze, jeżeli macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa nie będzie jednak zupełnie przypadkowa, lecz chociaż suboptymalna.

W przypadku wielowymiarowym zależność wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$  od parametrów macierzy  $\mathbf{S}$  jest niebywale złożona i w ogólnym przypadku raczej niemożliwa do wyrażenia analitycznego. Jeśli weźmiemy jakąś macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa dla układu (4.2.1), to z reguły jakakolwiek przypadkowa zmiana jej parametrów zmniejsza wartość wskaźnika stabilności i to nierzadko nadspodziewanie dużo. W klasie wszystkich form kwadratowych dodatnio określonych tylko niewielki ich zbiór zapewnia dodatnią wartość wskaźnika stabilności dla danej stabilnej macierzy  $\mathbf{A}$ . Dlatego przypadkowe znalezienie choćby suboptymalnej macierzy funkcji Lapunowa może być trudne, jeżeli chcemy uniknąć znajdowania wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}$ . Celem tego paragrafu jest opis koncepcji algorytmów, które potencjalnie są w stanie pokonać wyżej wymienioną trudność.

Głównym problemem w bezgradientowej optymalizacji funkcji Lapunowa jest liczba parametrów optymalizacji rosnąca z kwadratem wymiaru wektora stanu badanego układu oraz niejawnie zadana postać funkcji celu. Funkcja celu albo jest bezpośrednio wskaźnikiem stabilności wykładniczej trajektorii, albo wielkością zależną od tego wskaźnika. Ponieważ wskaźnik zbieżności w swojej analitycznej interpretacji sam jest supremum z pewnej funkcji wielu zmiennych na zbiorze zwartym, to samo wyznaczeniu funkcji celu z dużą dokładnością może być czasochłonne. Jeżeli uznamy, że znalezienie rozwiązań ściśle optymalnych przy znacznej liczbie parametrów jest praktycznie niemożliwe i zadowolimy się choćby dobrymi, suboptymalnymi funkcjami Lapunowa, to najbardziej uzasadnione będzie zastosowanie *algorytmów genetycznych* (AG). Omówimy zatem ogólną koncepcję algorytmów numerycznych znajdowania (sub)optymalnych funkcji Lapunowa, bazujących na procesach genetycznych (Ossowski [64],[66],[67],[71],[75]).

Aby opisać szczegółowo postać takiego algorytmu, rozważmy układ liniowy stacjonarny  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  o stabilnej macierzy  $\mathbf{A}$  oraz sytuację, gdy wskaźnik zbieżności

wykładniczej  $\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}$  jest funkcją celu, a parametrami optymalizacji są

parametry macierzy  $\mathbf{S}$ . Zadaniem optymalizacji będzie znalezienie dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{S}$ , dla której wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  przyjmuje wartość jak największą. Pojawia się tu zasadnicza trudność obliczeniowa, wynikająca z faktu, iż wskaźnik zbieżności  $\gamma(\mathbf{S})$  nie jest funkcją daną jawnie; obliczenie jej wartości dla ustalonej macierzy  $\mathbf{S}$  wymaga znalezienia odpowiedniego supremum, a więc rozwiązania kolejnego zadania optymalizacji. Optymalizacja funkcji Lapunowa musi być więc z zasady dwustopniowym procesem optymalizacyjnym. Analityczne rozwiązanie tego



typu zadań na ogół nie jest możliwe, a użycie standardowych metod numerycznych wymaga dużego nakładu obliczeń, zwłaszcza w przypadku układów wielowymiarowych. Już bowiem dla niezbyt złożonego układu mechanicznego (na przykład o dziesięciu stopniach swobody) wymiar  $n$  przestrzeni stanu jest równy 20, a macierz funkcji Lapunowa zawiera ponad dwieście parametrów optymalizacji. Uzasadnia to próby usprawnienia procesu optymalizacji funkcji Lapunowa poprzez zastosowanie odpowiednich algorytmów genetycznych/ewolucyjnych tak, aby można było stosunkowo szybko znaleźć przynajmniej suboptymalne rozwiązania problemu.

Klasyyczny algorytm genetyczny polega w ogólności na iteracyjnym wykonaniu określonych operacji genetycznych (*mutacji i krzyżowania*) oraz *selekcji*. Obliczenia genetyczne zawsze rozpoczynają się od pewnej *populacji początkowej* rozwiązań. W rozważanym przypadku początkową populację  $S_1, S_2, \dots, S_M$  macierzy funkcji Lapunowa możemy łatwo wygenerować rozwiązując równanie Lapunowa

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_i \mathbf{A} = -\mathbf{Q}_i, \quad (4.5.2)$$

dla losowo wybranych macierzy dodatnio określonych  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_M$ .

Gdy populacja początkowa jest już wygenerowana, algorytm przystępuje do wykonania *operacji genetycznych*, czyli *mutacji i krzyżowania*. *Mutacja* dokonuje niewielkiej, losowej zmiany niektórych parametrów wybranych macierzy  $\mathbf{S}$  z określonym (również niewielkim) prawdopodobieństwem i z zachowaniem symetrii macierzy. Jeżeli do tego zmiana parametrów jest gaussowska o niezbyt dużym rozrzucie (dyspersji), nie spowoduje utraty dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{S}$  po mutacji. Wynika to z ciągłej zależności wyznacznika i minorów głównych macierzy od jej elementów. Aby upewnić się czy mutacja nie przekroczyła dopuszczalnej granicy, macierze  $\mathbf{S}$  po mutacji muszą każdorazowo przejść test na dodatnią określoność. Jeśli wynik testu będzie negatywny, mutacja musi być powtórzona, ale niekoniecznie dla tej samej macierzy. Zwykle zaleca się małe prawdopodobieństwo mutacji tak, aby najbardziej prawdopodobna była zmiana co najwyżej jednego elementu danej macierzy  $\mathbf{S}$ . Operacji mutacji poddawane są nie wszystkie, lecz tylko niektóre losowo wybrane macierze każdej populacji.

Po przeprowadzeniu mutacji wykonywane jest *krzyżowanie*, która jest zwykle operacją dwuargumentową. Dla losowo wybranych par macierzy  $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j$  z populacji tworzy się ich *potomków*, czyli pewne macierze  $\mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_j$  dodatnio określone, zależne od parametrów obu krzyżowanych macierzy. Krzyżowanie macierzy dodatnio określonych można przeprowadzić w różny sposób. Przykładem takiej operacji może być tzw. *krzyżowanie arytmetyczne* określone następująco:

$$\mathbf{S}_i \oplus \mathbf{S}_j = \lambda_i \mathbf{S}_i + \lambda_j \mathbf{S}_j, \lambda_i \geq 0, \lambda_j \geq 0, \lambda_i + \lambda_j = 1. \quad (4.5.3)$$

Krzyżowanie takie można rozszerzyć na wiele macierzy  $\mathbf{S}$ .

W trakcie obliczeń należy przede wszystkim zapewnić dodatnią określoność wyniku operacji krzyżowania. Jeżeli nie jest to zapewnione z samej definicji operacji krzyżowania, tak jak (4.5.3), każdy wynik krzyżowania powinien przejść test na dodatnią określoność. Jeśli wynik testu będzie negatywny, krzyżowanie należy powtórzyć niekoniecznie na tych samych „osobnikach” (czyli macierzach populacji).

W wyniku krzyżowania osobników danej populacji powstaje tzw. *populacja rozszerzona*, zawierająca prócz zmutowanej populacji wyjściowej, również wyniki krzyżowania wybranych par jej elementów. Jeżeli powyższe zasady zostaną spełnione, populacja rozszerzona składać się będzie z macierzy dodatnio określonych. Teraz powinna być przeprowadzona *selekcja* macierzy  $\mathbf{S}$  tak, aby powstała nowa populacja macierzy  $\mathbf{S}$  o liczebności takiej jak populacja początkowa. Kryterium selekcji będzie wielkość wskaźnika stabilności układu względem normy  $\|\cdot\|_S$ . W ogólności do następnej populacji powinny przejść przede wszystkim te macierze  $\mathbf{S}$ , dla których wskaźnik zbieżności jest największy. W tym celu najpierw należy obliczyć wartości  $\gamma(\mathbf{S}_i)$  według formuły (4.4.1) dla wszystkich osobników populacji, a następnie wybrać  $M$  osobników o największej wartości wskaźnika  $\gamma$ .

Wygenerowanie nowej populacji macierzy  $\mathbf{S}$  o liczebności  $M$  stanowi punkt wyjścia dla kolejnej iteracji według identycznych operacji, jak opisane wyżej. Zakończenie całego procesu genetycznego następuje na podstawie określonego kryterium, na przykład gdy względna poprawa największej wartości wskaźnika  $\gamma$  osiągnięta w kilku kolejnych populacjach jest mniejsza niż z góry ustalony próg. Wynikiem końcowym procesu genetycznego jest populacja  $M$  macierzy  $\mathbf{S}$  o największych wartościach wskaźnika  $\gamma$ . Wygenerowane w ten sposób funkcje Lapunowa mogą być wykorzystane do analizy, syntezy i/lub optymalizacji układów mechatronicznych o części liniowej stacjonarnej, opisanej daną macierzą  $\mathbf{A}$ .

Przez analogię do procesów naturalnych, elementy kolejnych populacji nazywa się niekiedy *osobnikami*, a odpowiadające im wartości optymalizowanej funkcji (zwanej *funkcją przystosowania*) – ich *przystosowaniem*. W rozważanym tu przypadku osobnikami są macierze  $\mathbf{S}_i$  w kolejnych populacjach, a ich przystosowaniem – wartości wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S}_i)$ .

Aby zaimplementować opisany algorytm na komputerze, można reprezentować dowolną macierz  $\mathbf{S}=[\mathbf{S}_{ij}]_{i,j \leq n}$  wektorowo za pomocą następującego *chromosomu*:

$$H(\mathbf{S})=(S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1n}, S_{22}, S_{23}, \dots, S_{2n}, \dots, S_{n-1,n-1}, S_{n-1,n}). \quad (4.5.4)$$

Dodatnio określona macierz  $\mathbf{S}$  o wymiarze  $n \times n$ , która podlega optymalizacji, może zawierać maksymalnie  $(n-1)(n+2)/2$  niezależnych elementów  $S_{ij}$ . Wynika to z symetrii macierzy  $\mathbf{S}$  oraz z faktu, że macierz ta jest określona z dokładnością do czynnika dodatniego. Z kolei każdy z elementów macierzy możemy reprezentować ciągiem binarnym pełniących funkcję *genu* w rozważanym chromosomie. Ponieważ

elementy diagonalne macierzy dodatnio określonej  $\mathbf{S}$  muszą być dodatnie, ich reprezentacja bitowa może być o jeden bit krótsza od reprezentacji elementów niediagonalnych. Jeżeli wartości elementów macierzy  $\mathbf{S}$  będziemy wyznaczać z dokładnością  $d$ -bitową, wówczas otrzymamy w rezultacie binarną reprezentację chromosomów o długości  $(n-1)[n(d+1)+2d]/2$ , do której można już zastosować standardowe operatory genetyczne binarne.

Mutacja chromosomu  $H(\mathbf{S})$ , czyli zmiana jednego bitu, będzie odpowiadała mutacji jednego elementu macierzy  $\mathbf{S}$ . Z kolei krzyżowanie chromosomów  $H(\mathbf{S})$  i  $H(\mathbf{S}')$ , w zależności od sposobu ich podziału, będzie odpowiadało składaniu macierzy potomnej  $\mathbf{S}''$  z odpowiednich elementów macierzy  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}'$  w połączeniu z ewentualnym krzyżowaniem binarnej reprezentacji niektórych elementów  $S_{ij}$  i  $S'_{ij}$ .

Korzystne dla efektywności działania algorytmu jest zastosowane operacji genetycznych dostosowanych do *struktury danych*, a więc wykorzystujących informacje o strukturze układu dynamicznego. Na przykład jeżeli układ mechatroniczny jest złożony z pewnej liczby podukładów (oscylatorów) słabo ze sobą związanych, to macierz optymalnej funkcji Lapunowa dla układu całkowicie rozprzężonego będzie miała postać klatkową diagonalną. Klatki te będą odpowiadały poszczególnym podukładom i będą z nimi zgodne co do wymiaru (dla mechanicznych układów drgających będą to klatki o wymiarze  $2 \times 2$ ). W przypadku małych sprzężeń można przypuszczać, że w klatkach macierzy  $\mathbf{S}$  leżących poza główną przekątną klatkową pojawią się niezerowe, lecz małe elementy. Zmianie ulegną też klatki główne, ale też będą one stosunkowo małe. Zatem, można zaproponować operacje genetyczne na wyższym poziomie (*operacje genowe*), które, zamiast poszczególnymi bitami, operują na całych blokach (klatkach) macierzy  $\mathbf{S}$ . Reprezentacja chromosomów dostosowana dla takich operacji będzie zatem zespołem bloków  $b_{ii}$  na przekątnej głównej i poza przekątną  $b_{ij}$ , które będą spełniać rolę *genów*. Wtedy struktura bloków chromosomów będzie dokładnie odpowiadała strukturze topologicznej rozpatrywanego układu, gdyż istotny jest tu podział na podukłady i ich wzajemne oddziaływania. Z tego względu w rozpatrywanych chromosomach wystąpią geny  $b_{ii}$  odpowiadające wszystkim podukładom, natomiast gen  $b_{ij}$  pojawi się tylko wówczas, gdy istnieje fizyczne oddziaływanie między  $i$ -tym a  $j$ -tym podukładem. Strukturę topologiczną układu możemy również wykorzystać do optymalizacji wyboru populacji początkowej macierzy funkcji Lapunowa.

Uwzględnienie struktury danych (struktury układu) w operacjach genetycznych jest charakterystyczne dla tzw. *algorytmów ewolucyjnych*. Podstawowymi operacjami genetycznymi dla chromosomów w postaci zespołu bloków są: *krzyżowanie jednorodne* i *krzyżowanie arytmetyczne*, które polegają w tym przypadku na tworzeniu nowych macierzy  $\mathbf{S}$  z odpowiednich bloków macierzy z poprzedniego pokolenia. Siła oddziaływań poszczególnych podukładów między sobą decyduje o tzw. *epistazie* zagadnienia optymalizacji, czyli o tym, na ile zamiany poszczególnych bloków macierzy  $\mathbf{S}$  wpływają wzajemnie na siebie w

sensie wartości *funkcji przystosowania* dla wypadkowej macierzy. Gdy epistaza jest mała, odpowiednie bloki macierzy  $\mathbf{S}$  również są słabo zależne i mogą pełnić funkcję tzw. *bloków budujących* dla rozpatrywanego algorytmu ewolucyjnego. Wówczas możemy osiągnąć większą efektywność procesu optymalizacji. W przeciwnym razie, gdy epistaza jest duża, zastosowanie operacji genetycznych na blokowych chromosomach może nie przynieść spodziewanych efektów.

Operacja krzyżowania blokowych chromosomów powinna być przeprowadzana dwuetapowo. W pierwszym etapie wykonywane jest krzyżowanie zespołu najbardziej znaczących bloków tj. bloków  $b_{ii}$ ,  $b'_{ii}$ , leżących na głównych przekątnych krzyżowanych macierzy, odpowiednio  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}'$ . W przybliżeniu odpowiada to poszukiwaniu najlepszych funkcji Lapunowa dla poszczególnych podukładów. W następnej kolejności powinno być przeprowadzone krzyżowanie bloków poza głównymi przekątnymi macierzy  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}'$ . Krzyżowaniu w drugim etapie powinny podlegać tylko te bloki, które mogą być uzależnione od bloków na głównej przekątnej, zmienionych w wyniku wcześniejszego krzyżowania. Na przykład jeżeli blok  $b''_{ii}$  w tworzonej macierzy *potomnej*  $\mathbf{S}''$  powstał w wyniku pierwszego etapu krzyżowania macierzy  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}'$ , wówczas również wszystkie bloki  $b''_{ij}$  dla  $j=1, \dots, n$  powinny być produktami krzyżowania odpowiednich bloków macierzy  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}'$ . W przypadku stosowania krzyżowania arytmetycznego dobór wag może być dodatkowo uzależniony od stopnia przystosowania krzyżowanych macierzy.

To co odróżnia opisany algorytm od standardowego algorytmu genetycznego, to brak jawnie zadanej funkcji celu oraz konieczność sprawdzania dodatniej określoności genetycznie wygenerowanych macierzy  $\mathbf{S}$ . Przy dużej wymiarowości problemu ( $n \gg 1$ ) zarówno bezpośrednie sprawdzanie dodatniej określoności jak i obliczanie wskaźnika  $\gamma$  jako funkcji celu może być czasochłonne. Wymagałoby to bowiem obliczania wyznaczników dużych macierzy oraz optymalizacji funkcji wielu zmiennych w każdej iteracji. Celowe byłoby więc na przykład zmniejszenie liczby iteracji. Jednym ze sposobów realizacji tego zamierzenia jest zastosowanie tzw. *uczących się algorytmów genetycznych (GLA)*. Istotą takich algorytmów jest analiza danych uzyskiwanych w kolejnych iteracjach w celu znalezienia reguł wiążących parametry optymalizacji (czyli parametry macierzy  $\mathbf{S}$ ) z osiąganą wielkością funkcji celu. Dzięki temu można w kolejnych iteracjach dokonywać bardziej trafnych mutacji i krzyżowań, co znacznie zmniejsza liczbę iteracji niezbędnych dla osiągnięcia założonej dokładności.

Możliwe jest też inne podejście do problemu szybkości procesu optymalizacji. Ponieważ wskaźnik stabilności  $\gamma$  nie jest dobrym kandydatem na funkcję oceny w algorytmie genetycznym, gdyż jego wyliczenie wymaga w każdej iteracji przeprowadzenia wielokrotnej optymalizacji funkcji  $G(\mathbf{S}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} / \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  wielu zmiennych, wygodniej jest posłużyć się pewną przybliżoną funkcją oceny i zastosować tzw. *statystyczny algorytm genetyczny (SGA)* (Ossowski [64],[67],[75]). Istotą tego typu algorytmów jest statystyczna funkcja celu, której wartości są

wyznaczane w każdej iteracji tylko w przybliżeniu. W rozważanym przypadku możemy obliczyć wartość funkcji  $G(\mathbf{S}, \mathbf{x})$  dla stosunkowo małej liczby  $N$  losowo wybranych punktów kontrolnych  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ , a następnie określić przybliżoną wartość wskaźnika, czyli zastosować statystyczną funkcję oceny

$$\gamma_N(\mathbf{S}) = -\max_{i=1, \dots, N} [G(\mathbf{S}, \mathbf{x}_i)]. \quad (4.5.5)$$

Jest jasne, że  $\gamma_N(\mathbf{S})$  będzie w ogólności zmienną losową. W klasie funkcji wymiernych, jakie występują pod supremum (4.4.1), przybliżony wskaźnik (4.5.5) spełnia warunek asymptotyczny na prawdopodobieństwo warunkowe

$$p_N = (\gamma_N(\mathbf{S}_1) > \gamma_N(\mathbf{S}_2) \mid \gamma(\mathbf{S}_1) \leq \gamma(\mathbf{S}_2)) \longrightarrow 0, \text{ jeśli } N \longrightarrow +\infty, \quad (4.5.6)$$

co uzasadnia jego stosowanie (na przykład do *selekcji turniejowej*). Należy tylko odpowiednio dobrać wielkość  $N$ . W początkowym etapie obliczeń liczba punktów kontrolnych  $N$  losowanych w każdej iteracji nie powinna być zbyt duża. Powoduje to pewną losowość selekcji, ale znaczne przyspiesza działanie algorytmu. Dopiero w końcowym etapie obliczeń, gdy mamy już wystarczającą liczbą macierzy  $\mathbf{S}$  bliskich macierzy (sub)optymalnej, dobrze jest odpowiednio zwiększyć parametr  $N$  w celu dokładnego wyznaczenia wskaźnika  $\gamma(\mathbf{S})$  i wyłonienia rozwiązania najlepszego.

Istotnym ograniczeniem stosowania algorytmu ewolucyjnego o podanej postaci chromosomu jest dodatnia określoność macierzy  $\mathbf{S}$ . Stwarza to konieczność kontroli tej własności dla każdej nowej macierzy  $\mathbf{S}$  wygenerowanej za pomocą operacji genetycznych. To jest kolejny istotny szczegół odróżniający opisywany algorytm od typowych algorytmów genetycznych, w których jedynym miernikiem przystosowania osobników jest funkcja przystosowania. Macierze, które nie spełniają warunku dodatniej określoności muszą być od razu usunięte i nie podlegają dalszej ocenie. Z tego względu nie jest nawet możliwe uwzględnianie takich ograniczeń na przykład za pomocą odpowiedniej *funkcji kary*. Problem polega na tym, że wykazanie dodatniej określoności na podstawie definicji wymaga obliczenia  $n$  głównych podwyznaczników macierzy  $\mathbf{S}$ , co jest procesem bardzo czasochłonnym lub zupełnie niepraktycznym przy dużej wymiarowości układu. Trudności tych można częściowo uniknąć, zadowolając się przybliżoną oceną dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{S}$ , przynajmniej w początkowym okresie działania algorytmu. Można tu skorzystać z wyników obliczeń przybliżonego wskaźnika  $\gamma_N(\mathbf{S})$ . Przy obliczaniu  $\gamma_N(\mathbf{S})$  zostają między innymi wyznaczone wartości formy kwadratowej  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  we wszystkich losowo wybranych punktach kontrolnych  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ . Możemy zatem akceptować do procesu dalszej selekcji tylko te macierze  $\mathbf{S}$ , dla których wszystkie wartości  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , są dodatnie, tzn. wówczas, gdy wskaźnik

$$\delta_N(\mathbf{S}) = \min_{i=1, \dots, N} [\mathbf{x}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x}_i], \quad (4.5.7)$$

jako wskaźnik dodatniej określoności, jest dodatni. Podobnie jak  $\gamma_N(\mathbf{S})$ , wskaźnik  $\delta_N(\mathbf{S})$  spełnia warunek asymptotyczny na prawdopodobieństwo warunkowe

$$q_N(\mathbf{S}) = P(\delta_N(\mathbf{S}) > 0 \mid \mathbf{S} < 0) \rightarrow 0 \text{ dla } N \rightarrow +\infty, \quad (4.5.8)$$

co uzasadnia jego zastosowanie.

Zatem w statystycznym algorytmie genetycznym selekcja macierzy  $\mathbf{S}$  z populacji dokonywana jest na podstawie przybliżonych statystycznych wskaźników  $\gamma_N(\mathbf{S})$ ,  $\delta_N(\mathbf{S})$  pod warunkiem, że niedodatnia wartość wskaźnika  $\delta_N(\mathbf{S})$  dyskwalifikuje daną macierz, natomiast pozostałe macierze przechodzą do następnej populacji z prawdopodobieństwem uzależnionym od wielkości  $\gamma_N(\mathbf{S})$ , na przykład w wyniku selekcji turniejowej. Jeżeli wstępna selekcja dodatniej określoności zbyt ogranicza liczebność danej populacji, można dokonywane są dodatkowe mutacje i krzyżowania. W wypadku braku wyraźnej poprawy wyników obliczeń w kolejnych populacjach, można wprowadzić tzw. *elitaryzm* (czyli zachowanie osobników najlepszych w kolejnej populacji) w celu przyspieszenia zbieżności algorytmu. Wprowadzenie elitaryzmu od początku działania algorytmu nie jest wskazane, gdyż stwarza zagrożenie jego *przedwczesnej zbieżności* do lokalnego optimum.

Zastosowanie przybliżonych wskaźników selekcji  $\gamma_N(\mathbf{S})$ ,  $\delta_N(\mathbf{S})$  sprawia, że istnieje niezerowe prawdopodobieństwo przetrwania w kolejnych populacjach osobników gorzej przystosowanych lub naruszających ograniczenia. Zminimalizowanie takiego zagrożenia wymaga zastosowania odpowiednio dużej liczby  $N$  punktów kontrolnych tak, aby prawdopodobieństwa  $p_N$ ,  $q_N$  były względnie małe. Zwiększa to jednak nakład obliczeń, a tym samym zmniejsza efektywność algorytmu. Wydatną poprawę tego stanu rzeczy można osiągnąć poprzez zastosowanie skumulowanych wskaźników selekcji (stabilności i dodatniej określoności) określonych poniższymi wzorami

$$g_N^i(\mathbf{S}) = \min[\gamma_N^i(\mathbf{S}), \gamma_N^{i-1}(\mathbf{S})], \quad d_N^i(\mathbf{S}) = \min[\delta_N^i(\mathbf{S}), \delta_N^{i-1}(\mathbf{S})], \quad (4.5.9)$$

gdzie górne indeksy oznaczają numery populacji. Taki sposób obliczania wskaźników powoduje, że do oceny danej macierzy  $\mathbf{S}$ , powtarzającej się w kolejnych populacjach, wykorzystywana jest rosnąca liczba ( $=N \cdot i$ ) punktów kontrolnych wykorzystanych już w poprzednich iteracjach. W efekcie wartość wskaźnika  $\gamma_N^i(\mathbf{S})$  obliczana w kolejnych populacjach samoczynnie dąży do rzeczywistej wartości wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$ , a prawdopodobieństwo przetrwania macierzy słabo przystosowanych maleje do zera. Dzięki temu w procesie optymalizacji genetycznej możemy stopniowo zmniejszać, a nie zwiększać, liczbę  $N$  punktów kontrolnych. Zastosowanie skumulowanych wskaźników selekcji wymaga jednak bardziej skomplikowanej procedury selekcji. Między innymi trzeba rejestrować w trakcie obliczeń *czas życia* chromosomów i wykluczyć możliwość

redukcji osobników „*długowiecznych*” (obecnych w wielu populacjach) przez osobników „*młodych*”. Wynika to z faktu, że wskaźniki selekcji dla młodszych i słabiej przystosowanych osobników, wyliczane na podstawie stosunkowo małej liczby punktów kontrolnych, mogą być początkowo przypadkowo lepsze niż dla faktycznie lepiej przystosowanych osobników starszych.

Konieczność uwzględnienia ograniczeń na macierze  $\mathbf{S}$  wynikające z dodatniej określoności w poważnym stopniu zwiększają nakład obliczeń. Z tego powodu rozpatrywana postać chromosomu jest najbardziej użyteczna dla układów o niewielkiej wymiarowości. Przy większych wymiarach układu można stosować inną reprezentację chromosomową, która sama przez się zapewni dodatnią określoność macierzy funkcji Lapunowa uzyskiwanych w kolejnych populacjach. Można w tym celu skorzystać z rozkładu macierzy dodatnio określonej  $\mathbf{S} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}$  na iloczyn macierzy trójkątnych  $\mathbf{P}$ . Genami chromosomu mogą być wtedy elementy lub bloki macierzy  $\mathbf{P}$ .

Omówimy teraz szczegółowo pewne procedury, które mogą być wykorzystane niezależnie lub jako etapy genetycznej optymalizacji funkcji Lapunowa.

**Przykład 4.5:** (*Mutacja interpolacyjna kwadratowa*)

Jeżeli mamy jakąś macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa dla układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ , możemy próbować ją „trochę” poprawić według następującej procedury mutacji. Wybieramy jakiś element  $s_{ij}$ ,  $s_{ij} = s_{ji}$  macierzy  $\mathbf{S}$  i tworzymy macierze  $\mathbf{S}_+$ ,  $\mathbf{S}_-$ , w których elementy  $s_{ij}$ ,  $s_{ji}$  są albo jednocześnie zwiększone, albo zmniejszone o pewną wartość  $\Delta > 0$  (na przykład  $\Delta = 1$ ) tak, aby macierze  $\mathbf{S}_+$ ,  $\mathbf{S}_-$  były dodatnio określone. Następnie obliczamy dla tych macierzy wskaźniki stabilności  $\gamma_{\pm} = \gamma(\mathbf{S}_{\pm})$  układu. Jeżeli któraś z macierzy  $\mathbf{S}_+$ ,  $\mathbf{S}_-$  zapewnia większą wartość wskaźnika stabilności, traktujemy ją jako nową macierz  $\mathbf{S}$  i rozpoczynamy całą procedurę od początku. Zwykle jednak dość szybko dojdziemy w ten sposób do takiej macierzy  $\mathbf{S}$ , w której jakakolwiek zmiana parametrów o założoną wartość ( $\pm\Delta$ ) nie powoduje poprawy wskaźnika stabilności. Wtedy, mając do dyspozycji trzy ostatnio wyliczone wartości  $\gamma_+ = \gamma(\mathbf{S}_+)$ ,  $\gamma(\mathbf{S})$ ,  $\gamma(\mathbf{S}_-) = \gamma_-$  (takie, że  $\gamma(\mathbf{S}) > \max[\gamma(\mathbf{S}_+), \gamma(\mathbf{S}_-)]$ ), osiągnane dla poprawek odpowiednio:  $\Delta$ , 0,  $-\Delta$ , możemy zastosować aproksymację paraboliczną kwadratową, celem znalezienia znaku i wielkości potencjalnie optymalnej poprawki rozważanych elementów  $s_{ij}$ ,  $s_{ji}$ . Nietrudno wykazać, że ta poprawka wyraża się następującym wzorem:

$$\delta_{ij}(\mathbf{S}) = \frac{\gamma_+ - \gamma_-}{\gamma_+ + \gamma_- - 2\gamma_0(\mathbf{S})} \cdot \Delta. \quad (4.5.10)$$

Powyższa poprawka (mutacja) parametru macierzy  $\mathbf{S}$  daje sporą szansę powiększenia wartości wskaźnika stabilności pod warunkiem, że wartości  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  nie różnią się drastycznie (na przykład o rząd wielkości) od wartości wskaźnika

$\gamma_0(\mathbf{S})$ . Wielkość spodziewanego wzrostu wartości wskaźnika stabilności, którą można łatwo oszacować na podstawie znajomości  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$ ,  $\gamma_0(\mathbf{S})$  oraz  $\Delta$ , może służyć za podstawę do wyboru kolejnego elementu macierzy  $\mathbf{S}$  przewidzianego do mutacji o wartość  $\delta_{ij}(\mathbf{S})$ .

Opisaną wyżej procedurę można wielokrotnie powtarzać. Nie zawsze jednak poprawka optymalna (4.5.10) zwiększa wskaźnik stabilności. Zarówno wielkość poprawki inicjującej  $\Delta$  jak i elementy podlegające poprawce muszą być odpowiednio dobierane w trakcie obliczeń. W tym celu możemy poddać mutacji kolejno wszystkie elementy macierzy  $\mathbf{S}$  i zmniejszać wielkość poprawki inicjującej  $\Delta$  przy każdym powtórzeniu procedury. Efekty opisywanej procedury na ogół nie są zbyt duże i szybko maleją w kolejnych jej powtórzeniach. Dlatego można zalecić co najwyżej kilkunastokrotne wykonanie tej procedury, zwłaszcza w końcowym etapie optymalizacji, gdy dysponujemy już jakąś populacją suboptymalnych macierzy  $\mathbf{S}$ , uzyskaną w wyniku zastosowania wielu iteracji algorytmu genetycznego.

Opisaną procedurę można też realizować w przestrzeni parametrów macierzy  $\mathbf{P}$ , będącej pierwiastkiem macierzy  $\mathbf{S}$ . Takie podejście likwiduje problem z dodatnią określonością mutowanych macierzy. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że wrażliwość wskaźnika stabilności na zmiany parametrów macierzy  $\mathbf{P}$  jest znacznie większa, co może utrudnić znalezienie właściwego kierunku poprawki.  $\square$

**Przykład 4.6:** (*Procedura optymalizacji całkowitoliczbowej*)

Procedura optymalizacji całkowitoliczbowej jest ściśle związana z procedurą opisaną w poprzednim przykładzie. Umożliwia ona znajdowanie suboptymalnych macierzy funkcji Lapunowa o elementach całkowitych. Punktem startowym procedury może być dowolna macierz  $\mathbf{S}$ , najlepiej pewna macierz suboptymalna, dla której wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}) > 0$ . Ponieważ dla układów liniowych stacjonarnych macierze  $\mathbf{S}$  różniące się dodatnim mnożnikiem dają tę samą wartość wskaźnika stabilności, możemy z dobrym przybliżeniem przyjąć, że początkowa macierz  $\mathbf{S}$  jest całkowitoliczbowa. Procedura polega na modyfikacji (o wartości  $\pm 1$ ) kolejnych elementów macierzy  $\mathbf{S}$  i obliczaniu zmian wskaźnika stabilności. Jeżeli modyfikacja danego parametru jest korzystna, aktualna macierz  $\mathbf{S}$  zostaje zastąpiona macierzą zmodyfikowaną i cała procedura zaczyna się od początku. Jeżeli żadna modyfikacja o wartości  $\pm 1$  dla dowolnego elementu macierzy  $\mathbf{S}$  nie jest korzystna, aktualna macierz  $\mathbf{S}$  jest zastąpiona przez macierz  $2\mathbf{S}$  i procedura jest dalej kontynuowana według opisanego schematu.  $\square$

Z powodu ograniczeń techniczno-prawnych tylko niektóre opisane wyżej algorytmy i procedury zostały wypróbowane przez autora Rozprawy. Reszta z nich pozostaje oficjalnie w sferze koncepcji. Nie widać jednak istotnych przeszkód merytorycznych, aby w razie potrzeby, system genetycznej optymalizacji funkcji Lapunowa zaistniał realnie. Z tych samych powodów niewiele jest podanych w dalszej części Rozprawy wyników symulacji dynamiki rozważanych układów.



## 5. STABILNOŚĆ UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH

*Analiza stabilności stanowi istotny etap badania i projektowania układów mechatronicznych, ponieważ stabilność jest jedną z podstawowych własności jakościowych niezbędnych do prawidłowego funkcjonowania takich układów.*

*W niniejszym rozdziale omówimy szereg zagadnień stabilności układów dynamicznych szczególnie ważnych z punktu widzenia mechatroniki. Zastosujemy metodę optymalnych funkcji Lapunowa (omówioną w Rozdziale 3) do wyznaczenia oszacowań wskaźników zbieżności i obszarów stabilności (w przestrzeni stanu i w przestrzeni parametrów) oraz oceny innych własności rozpatrywanych układów. Pokażemy, że metoda optymalnych funkcji Lapunowa wnosi istotny wkład nie tylko do teorii układów nieliniowych i niestacjonarnych, ale nawet do klasycznych zagadnień stabilności układów liniowych stacjonarnych.*

### 5.1 Stabilność liniowych układów stacjonarnych

Układy liniowe stacjonarne mają parametry z założenia stałe. Problem stabilności tego typu układów dynamicznych, podstawowy z praktycznego punktu widzenia, jest najlepiej teoretycznie opracowany. Wynika to z faktu, że do analizy takich układów można stosować metody algebraiczne, a ogólna postać ich rozwiązań jest – formalnie rzecz biorąc – znana. Jeśli jednak będziemy chcieli bardziej precyzyjnie określić własności stabilności takich układów, powiedzieć więcej niż tylko rozstrzygać o ich stabilności lub niestabilności, to wówczas nie zawsze wystarcza klasyczna analiza stabilności bazująca na metodach algebraicznych. W niniejszym paragrafie skupimy uwagę głównie na tej właśnie kwestii, podkreślając to, co nowego wnosi do tematu metoda optymalnych funkcji Lapunowa.

Zastosujemy więc metodę optymalnych funkcji Lapunowa do badania własności stabilności układów opisanych następującymi równaniami różniczkowymi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (5.1.1)$$

gdzie  $\mathbf{x} \in R^n$  jest wektorem stanu układu, natomiast  $\mathbf{A}$  – stałą macierzą rzeczywistą o wymiarach  $n \times n$ . Wprawdzie modelowanie autonomicznych układów mechanicznych najczęściej rozpoczyna się od liniowych i stacjonarnych równań różniczkowych rzędu drugiego następującej postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{Q}\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (5.1.2)$$

gdzie  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_k]^T$  jest wektorem przemieszczeń układu, natomiast  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  są odpowiednio macierzami: mas, tłumienia i sztywności, to jednak w rozpatrywanym tu nieosobliwym przypadku ( $\det \mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ ), układ (5.1.2) można przekształcić do standardowej postaci (5.1.1), wprowadzając wektor stanu  $\mathbf{x} = [\mathbf{X}, d\mathbf{X}/dt]^T$  o parzystym wymiarze  $n = 2k$ . Model (5.1.2) ma postać szczególnie dogodną tylko wtedy, gdy macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}$  lub  $\mathbf{Q}$  są symetryczne. Będziemy z tego korzystali przy

analizie liniowych układów drgających. Jeśli jednak chcielibyśmy w modelu (5.1.2) uwzględnić na przykład *siły żyroskopowe* lub *cyrkulacyjne*, macierze  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  przestaną być symetryczne. Wtedy równania postaci (5.1.1) są dogodniejsze, bo nadają się do bezpośredniej analizy metodą funkcji Lapunowa, i ogólniejsze, bo można nimi modelować układy o dowolnym (niekoniecznie parzystym) wymiarze wektora stanu. Ponieważ parzystość wymiaru macierzy  $\mathbf{A}$  nie jest istotna w metodzie funkcji Lapunowa, dalsze ogólne rozważania będą odnosiły się do modelu (5.1.1) o dowolnym wymiarze  $n$  wektora stanu  $\mathbf{x}$ .

Przyjęcie modelu (5.1.1) lub (5.1.2) oznacza pominięcie zaburzeń parametrów i wymuszeń zewnętrznych realnego układu mechanicznego oraz nieliniowości materiałowych lub geometrycznych. Mimo założonej stałości parametrów modelu, należy tu rozróżnić dwa przypadki w zależności od tego, czy stałe parametry modelu są określone jednoznacznie, czy też nie są. W pierwszym przypadku o stabilności wykładniczej układu (5.1.1) decydują, jak wiadomo, wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  (Gutowski [17],[18], Osiński [54], Sastry [96]). Nie jest jednak konieczne wyznaczanie wartości własnych, aby orzekać o stabilności. Stosując na przykład *kryterium Hurwiza* [D16] do wielomianu charakterystycznego macierzy  $\mathbf{A}$ , możemy bezpośrednio stwierdzić, czy dana macierz  $\mathbf{A}$  jest stabilna, tzn. czy wszystkie części rzeczywiste jej wartości własnych leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Jeśli macierz układu jest uzależniona od jednoznacznie określonych parametrów, tzn.  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{p})$ , to kryterium Hurwita daje nam warunki konieczne i dostateczne stabilności wykładniczej układu (5.1.1) w przestrzeni tych parametrów.

Przy modelowaniu realnych układów bliższy rzeczywistości jest jednak przypadek drugi, gdy parametry modelu są wprawdzie stałe, ale znane tylko w przybliżeniu, tzn. są obciążone pewnym błędem, jako wielkości określone bezpośrednio z pomiarów lub w wyniku procedury identyfikacji obiektu. Wówczas macierz  $\mathbf{A}$  jest tzw. *macierzą przedziałową* (oznaczaną przez  $[\mathbf{A}]$ ) o parametrach nie określonych jednoznacznie, lecz zawartych w pewnych ograniczonych przedziałach. Wtedy o stabilności rozstrzyga *kryterium Kharitonowa* równoważne kryterium Hurwita w odniesieniu do tzw. *wielomianów Kharitonowa* macierzy  $\mathbf{A}$ . [D16]

Ściśle biorąc, w przypadku stałych, lecz niejednoznacznie określonych parametrów macierzy układu, mamy do czynienia z inkluzją różniczkową ([D1], Ossowski [82])

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{m})\mathbf{x} : \mathbf{p} \in \Gamma(P), \mathbf{q} \in \Gamma(Q), \mathbf{m} \in \Gamma(M)\}, \quad (5.1.3)$$

gdzie  $\Gamma(P), \Gamma(Q), \Gamma(M)$  są przestrzeniami funkcji stałych o wartościach w odpowiednich kostkach  $P, Q, M$  w przestrzeniach euklidesowych. W języku teorii inkluzji kryterium Kharitonowa mówi, że wystarczą cztery cięcia krytyczne wiązki inkluzji (5.1.3) do orzeknięcia o jej stabilności [D1]. Mamy tu więc przykład skończenie rozwiązywalnego problemu stabilności inkluzji różniczkowej. Wymienione cięcia odpowiadają wyborowi pewnych skrajnych (maksymalnych

i/lub minimalnych) wartości parametrów modelu. Zatem badanie stabilności inkluzji (5.1.3) sprowadza się do badania stabilności czterech krytycznych układów należących do klasy układów równoważnej tej inkluzji [D1].

Jeśli badany układ liniowy stacjonarny okazuje się niestabilny, to zwykle nie są już istotne inne jego własności, bo i trudno jest wtedy mówić o własnościach stabilności. Jeśli jednak układ ten jest stabilny, to wówczas możemy formułować bardziej szczegółowe pytania odnośnie jego własności. Kryteria stabilności typu Hurwiza czy Kharitonowa na takie pytania nie dają bezpośredniej odpowiedzi. Konieczne jest wtedy zastosowanie innych metod. Poniżej pokażemy, że odpowiednią do tego jest metoda optymalnych funkcji Lapunowa.

Ponieważ o stabilności układów liniowych stacjonarnych decyduje macierz  $\mathbf{A}$ , lokalna stabilność takich układów jest równoważna ich stabilności globalnej. Zatem nie istnieje kwestia szacowania obszaru ich stabilności w przestrzeni stanu. Jakie zatem własności układów liniowych stacjonarnych mogą być istotne i warte badania prócz samej stabilności? Mając na względzie zastosowania praktyczne, możemy na przykład szacować minimalną i średnią szybkość zbieżności trajektorii do punktu stacjonarnego, amplitudę procesów przejściowych trajektorii startujących z pewnego ograniczonego obszaru lub całkowite wskaźniki jakości odzwierciedlające własności całych trajektorii. Można też badać zapas stabilności w przestrzeni parametrów.

Chociaż praktyczny sens wymienionych wyżej wskaźników oceny jest jasny, nie zawsze jest łatwym zadaniem wyznaczenie ich oszacowań, nawet jeśli dysponujemy rozwiązaniami analitycznymi równań modelu. Może być dogodniej zrobić to przy użyciu metody funkcji Lapunowa, gdyż metoda ta nie wymaga znajomości rozwiązań, a ponadto może być w sposób naturalny uogólniona na układy nieliniowe i niestacjonarne.

Jeżeli chodzi o szybkość zbieżności trajektorii do punktu stacjonarnego, to prawdziwe jest następujące klasyczne

**Twierdzenie 5.1:** Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  układu liniowego stacjonarnego (5.1.3) jest stabilna, to istnieją stałe dodatnie  $\eta, \gamma$  takie, że dla pewnej normy  $\|\cdot\|$  w przestrzeni stanu  $R^n$  zachodzi oszacowanie  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \eta \|\mathbf{x}(t_0)\| \exp[-\gamma(t - t_0)]$  dla dowolnej trajektorii układu  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in R^n$ , przy czym najlepszym oszacowaniem wskaźnika zbieżności  $\gamma$  jest najmniejszy moduł części rzeczywistej wartości własnej macierzy układu, tzn.  $\min [\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A})]$ .

Powyższe twierdzenie mówi więc tylko tyle, że stabilny układ liniowy stacjonarny jest wykładniczo stabilny w myśl ogólnej definicji (2.2.2). (Gutowski [17]).

Samą stabilność wykładniczą układu liniowego stacjonarnego można rozstrzygnąć na podstawie dowolnej kwadratowej funkcji Lapunowa o macierzy  $\mathbf{S}$  będącej rozwiązaniem macierzowego równania Lapunowa (4.2.4). Problem doboru funkcji Lapunowa nie jest więc istotny z punktu widzenia samej stabilności. Jeśli

jednak chodzi nie tylko o to, aby stwierdzić stabilność wykładniczą układu o zadanych parametrach, ale też powiedzieć jak najwięcej o trajektoriach układu lub o zależności stabilności od parametrów układu, wówczas dobór formy kwadratowej jako funkcji Lapunowa może mieć zasadnicze znaczenie. Omówimy tę kwestię szczegółowo poniżej, przytaczając następujące

**Twierdzenie 5.2:** Dla każdego stabilnego układu liniowego stacjonarnego  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  istnieje taka norma euklidesowa  $\|\cdot\|$ , że prawdziwe jest oszacowanie

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| \exp[-\gamma(t-t_0)] \quad (5.1.4)$$

dla wszystkich trajektorii układu  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  i dla pewnego wskaźnika  $\gamma > 0$ . Co więcej, normę można dobrać tak, aby ten wskaźnik osiągał swoją maksymalną możliwą wartość równą  $\min|\operatorname{Re} \lambda_i|$ .

*Dowód:* Wiemy, że jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest stabilna, to dla dowolnej dodatnio określonej macierzy  $\mathbf{Q}$  istnieje rozwiązanie algebraicznego równania Lapunowa

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (5.1.5)$$

ze względu na  $\mathbf{S}$ , w klasie macierzy dodatnio określonych (Sastry [96]). Niech macierz  $\mathbf{S}$  będzie takim rozwiązaniem. Wówczas forma kwadratowa  $V_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2$  będzie funkcją Lapunowa dla układu (5.1.1), a z równoważności norm wynika istnienie dodatniej stałej  $\gamma$  takiej, że

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 2 \gamma \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}. \quad (5.1.6)$$

Zatem dla pochodnej czasowej formy  $V_S(\mathbf{x})$  na trajektoriach układu (5.1.1) będzie zachodziło następujące oszacowanie:

$$d V_S(\mathbf{x})/dt = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq -2 \gamma \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}. \quad (5.1.7)$$

Z rozwiązania powyższej nierówności wynika warunek wykładniczej zbieżności (2.2.2), przy czym, jak łatwo zauważyć, wskaźnik  $\gamma$  będzie wyrażał się wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (5.1.8)$$

Skoro wskaźnik ten jest dodatni, forma kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  będzie kwadratową funkcją Lapunowa dla układu (5.1.1). To dowodzi pierwszej części tezy twierdzenia.

Trzeba jeszcze wykazać, że optymalna funkcja Lapunowa zapewnia największą wartość wskaźnika zbieżności równą  $\min|\operatorname{Re} \lambda_i|$ . Aby to wykazać, przyjmijmy, że macierz  $\mathbf{A}$  układu jest diagonalizowalna. Wówczas, we współrzędnych kanonicznych  $\mathbf{y}$ , równania układu będą miały następującą diagonalną postać:

$$\dot{y}_i = \lambda_i(\mathbf{A})y_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.9)$$

a zatem  $d(y_i^* y_i / 2) / dt = y_i^* \lambda_i y_i + y_i^* \lambda_i^* y_i = \operatorname{Re}[\lambda_i] \cdot y_i^* y_i$ . Wobec tego dla funkcji  $V = \mathbf{y}^* \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2$  będzie zachodzić następująca nierówność:

$$\dot{V} = d(\mathbf{y}^* \mathbf{y}) / dt = \operatorname{Re} \lambda_1(\mathbf{A}) \cdot y_1^2 + \dots + \operatorname{Re} \lambda_n(\mathbf{A}) \cdot y_n^2 \leq \max_i [\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A})] \cdot V,$$

Zatem forma kwadratowa  $V = \mathbf{y}^* \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2$  jest optymalną funkcją Lapunowa dla rozważanego układu, a sam układ jest wykładniczo stabilny według normy  $\|\cdot\|^2$ . Przechodząc teraz do starych współrzędnych  $\mathbf{x}$  dostaniemy optymalną funkcję Lapunowa w postaci  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ , dla której wskaźnik zbieżności oczywiście nie ulegnie zmianie, tzn.  $\gamma(\mathbf{S}) = \max_i [\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A})]$  (Twierdzenie 4.2, Radziszewski [92]). ♦

Należy zaznaczyć, że wskaźnik (5.1.8) będzie na ogół zależny od wyboru normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ , a ściśle biorąc od wyboru macierzy  $\mathbf{Q} > 0$ . Ponadto, jak widać ze wzoru (5.1.8), wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  jest równy wskaźnikowi zbieżności  $\gamma[\mathbf{S}, c]$ , który w tym przypadku nie zależy od odległości od punktu stacjonarnego. Zatem w klasie układów liniowych stacjonarnych pojęcia wskaźnika zbieżności wykładniczej i wskaźnika stabilności są tożsame. Z twierdzenia 5.2 wynika, że zbieżność wykładnicza trajektorii stabilnego układu liniowego według normy jest tylko kwestią doboru normy. Co więcej, można tak dobrać normę, żeby jej wartość na trajektoriach zanikała monotonicznie, zgodnie z prawem wykładniczym (5.1.4).

Podane twierdzenie ostatecznie wykazuje, że wskaźnik (3.1.2), spełnia ogólne wymagania sformułowane w Rozdziale 2 odnośnie wskaźnika stabilności układów dynamicznych.

**Przykład 5.1:** (*Stabilność liniowego oscylatora o jednym stopniu swobody*)

Rozważmy problem stabilności najprostszego, ale i ważnego modelu układu mechanicznego, jakim jest liniowy oscylator o jednym stopniu swobody. Taki model zdaje się być już przebadanym pod każdym względem. Okazuje się jednak, że stosując metodę funkcji Lapunowa, można jeszcze coś niebanalnego w tym temacie dopowiedzieć, coś przydatnego do badania bardziej złożonych układów (Pokazał to już częściowo Przykład 4.3). Rozpatrzenie takiego układu jest więc sensowne nie tylko z metodologicznego, czy akademickiego punktu widzenia.

Rozważmy wprawdzie liniowy i stacjonarny model oscylatora postaci

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0, \quad (5.1.10)$$

gdzie  $x$  jest współrzędną przemieszczenia, a stałe  $p > 0$ ,  $q > 0$  są odpowiednio: parametrami tłumienia i sztywności oscylatora. Mimo, iż jest to układ globalnie asymptotycznie stabilny, a ogólne rozwiązania równania (5.1.10) są znane w postaci

analitycznej, bardziej subtelne własności jakościowe układu nie są wcale oczywiste i proste do przewidzenia lub oszacowania na podstawie rozwiązań. Aby to pokazać, zapiszmy równanie (5.1.10) w postaci  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , gdzie  $\mathbf{x} = [x_1 = x, x_2 = \dot{x}]^T$  jest wektorem stanu układu jest, natomiast macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -2p \end{bmatrix}. \quad (5.1.11)$$

Przyjmując funkcję Lapunowa w znormalizowanej postaci  $V(\mathbf{x}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + x_2^2$ , gdzie  $a-b^2 > 0$ , można wykazać, że wskaźnik zbieżności wykładniczej będzie wyrażał się następującym wzorem (Ossowski [55], Radziszewski [92]):

$$\gamma(\mathbf{S}) = \gamma(a, b) = p - \sqrt{(b-p)^2 + \frac{|a - 2b^2 + 2pb - q|^2}{4(a-b^2)}}. \quad (5.1.12)$$

Wartość tego wskaźnika mówi o tym, pod jakim kątem trajektorie układu wchodzą do wnętrza elips będących poziomiami formy kwadratowej  $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + x_2^2$ . Nietrudno wykazać, że w obszarze podkrytycznym ( $q > p^2$ ) optymalne parametry funkcji Lapunowa są następujące:  $a = q$ ,  $b = p$ , a wskaźnik zbieżności  $\gamma = p$  nie zależy od sztywności. Z kolei w obszarze nadkrytycznym ( $q < p^2$ ) optymalne parametry są następujące:  $a = 2p^2 - q$ ,  $b = p$ , a wskaźnik zbieżności jest równy  $\gamma = p - \sqrt{p^2 - q}$ . Zatem dla dużych tłumień wskaźnik zbieżności zaczyna maleć ze wzrostem tłumienia, a układ wchodzi w obszar ruchu pełzającego.  $\square$

Przeprowadzona wyżej analiza jednowymiarowego oscylatora stanowi punkt wyjścia do analizy bardziej złożonych układów o jednym lub wielu stopniach swobody z zaburzeniami parametrycznymi i wymuszeniami siłowymi, które omówimy w następnym paragrafie.

Rozważymy teraz inne wskaźniki oceny własności stabilności układów liniowych stacjonarnych. Przede wszystkim zauważmy, że w przypadku takich układów lokalna stabilność asymptotyczna jest równoważna stabilności globalnej i nie ma problemu oszacowania obszaru stabilności w przestrzeni stanu, naturalnym celem optymalizacji funkcji Lapunowa może być na przykład szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii układu. Jeśli norma, według której chcemy oceniać zbieżność nie jest ustalona, to oczywiście wystarczy znaleźć optymalną macierz  $\mathbf{S}$  maksymalizującą wskaźnik stabilności. Może się jednak zdarzyć, że pewna norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}}$ , według której chcemy oceniać zbieżność trajektorii układu, jest narzucona innymi względami (na przykład praktycznymi), wykraczającymi poza teorię. Wtedy ma sens rozwiązywanie algebraicznego równania Lapunowa (5.1.5) ze względu na

macierz  $\mathbf{S}$ , dla ustalonej macierzy  $\mathbf{Q}$ . Znajdując odpowiednią macierz  $\mathbf{S}$  i korzystając z ogólnej relacji (3.1.11), dostajemy jednocześnie następujące oszacowanie całkowego wskaźnika ruchu dla układów liniowych:

$$\int_{t_0}^{+\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} dt \leq \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t_0) \leq \frac{1}{2\gamma(\mathbf{S})} \cdot \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_0). \quad (5.1.13)$$

Wtedy wskaźnik całkowity oceny zbieżności wynika z samej metody, bo jest określony przez macierz  $\mathbf{S}$ , którą wylicza się na podstawie macierzy  $\mathbf{Q}$ . Na odwrót, jeżeli mamy narzucony kwadratowy wskaźnik całkowity o ustalonej macierzy  $\mathbf{S}$ , to trzeba sprawdzić, czy macierz  $\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A})$  jest ujemnie określona. Jeżeli warunek ten jest spełniony, możemy skorzystać z oszacowania (5.1.13).

Dla stabilnych układów liniowych stacjonarnych naturalnym zagadnieniem jest też szacowanie obszaru stabilności w przestrzeni parametrów. Dlatego omówimy teraz kwestię zapasu stabilności układów liniowych w przestrzeni pierwotnych parametrów fizycznych. Jak wiemy, warunki stabilności w przestrzeni parametrów można wywieść z kryterium Hurwiza albo Kharitonowa (jeśli parametry modelu są przedziałowe). Trudności bezpośredniego zastosowania tych kryteriów wynikają z faktu, że operują one na parametrach wielomianu charakterystycznego macierzy  $\mathbf{A}$ , a nie na pierwotnych parametrach fizycznych układu. Parametry tego wielomianu mogą być bowiem złożonymi funkcjami parametrów fizycznych. Na przykład w przypadku układów mechanicznych macierz  $\mathbf{A}$  jest na ogół liniowo zależna od parametrów tłumienia i sztywności, natomiast może być nieliniową funkcją parametrów masowych (bezwładnościowych) ze względu na złożoną, w ogólności, postać elementów macierzy odwrotnej  $\mathbf{M}^{-1}$ . Po wyznaczeniu wielomianu charakterystycznego widać, że jego parametry  $a_i$  będą w ogólności funkcjami algebraicznymi lub wymiernymi parametrów fizycznych  $\mathbf{p}$ . Zwykle to właśnie parametry fizyczne  $\mathbf{p}$  są przedziałowe (tzn. określone z pewną dokładnością), tak że  $\mathbf{p} \in P$ , gdzie  $P$  jest zwartą kostką w przestrzeni  $R^k$ . Ponieważ funkcje algebraiczne  $a_i = a_i(\mathbf{p})$  są ciągłe, można wyznaczyć ich kresy sup (inf)  $a_i(\mathbf{p})$  względem  $\mathbf{p} \in P$ . W ten sposób dostaniemy przedziałowe parametry wielomianu charakterystycznego macierzy  $\mathbf{A}$ , tyle że ich zakresy nie będą na ogół niezależne. Odpowiednie kresy górne lub dolne nie muszą być bowiem osiągalne dla skrajnych wartości parametrów fizycznych. Dlatego kryterium Kharitonowa, które zakłada niezależność zakresów parametrów wielomianu, będzie dawało dość konserwatywne oszacowania obszaru stabilności takich układów w przestrzeni parametrów fizycznych.

Metoda optymalnych funkcji Lapunowa ma to do siebie, że pozwala na bezpośrednie badanie i szacowanie obszaru stabilności układu liniowego w przestrzeni jego parametrów fizycznych. Nie stwarza przy tym zasadniczej trudności fakt, że te parametry mogą być nieokreślone jednoznacznie (przedziałowe lub z niestacjoanrnymi zaburzeniami). Aby to pokazać, rozpatrzmy następujący

**Problem 5.1:** (Stabilność układu liniowego o parametrach przedziałowych)

Rozważmy problem stabilności układu liniowego stacjonarnego o parametrach stałych, lecz nieokreślonych. Modelem układu tego typu będzie następująca inkluzja różniczkowa:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Gamma(P)\}, \quad (5.1.14)$$

gdzie stan układu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , macierz układu  $\mathbf{A}$  zależy od stałych parametrów  $\mathbf{p}$  modelu strukturalnego układu realnego, należących do określonego zbioru zwartego  $P \subset \mathbb{R}^k$ , a  $\Gamma(P)$  jest klasą funkcji stałych o wartościach w  $P$ . W szczególnym przypadku, gdy  $P$  jest  $k$ -wymiarową kostką w  $\mathbb{R}^k$ , będziemy mówić o układzie o parametrach przedziałowych. Przyjmiemy, że macierz  $\mathbf{A}(\mathbf{p})$  jest liniowo zależna od składowych wektora  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$ , a macierz  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{0})$  jest stabilna, i rozważymy problem oszacowania obszaru stabilności układu w przestrzeni parametrów  $\mathbf{p}$ .

Zgodny z ogólną koncepcją przedstawioną w Rozdziale 3, wskaźnik stabilności dla układu (5.1.14) będzie wyrażał się następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{S}) &= - \sup_{\mathbf{p} \in \Gamma(P)} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \inf_{\mathbf{p} \in \Gamma(P)} \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) = \\ &= - \sup_{\mathbf{p} \in \Gamma(P)} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + p_1 \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \dots + p_k \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_k \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

gdzie  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  są stałymi macierzami określającymi strukturę zależności macierzy  $\mathbf{A}$  układu od poszczególnych parametrów. Przyjmiemy, że parametry  $p_1, \dots, p_k$  są przedziałowe, tzn. ich wartości są stałe, ale znane są tylko przedziały  $[p_{i \min}, p_{i \max}]$ ,  $i=1, \dots, k$ , w których te wartości się zawierają. Nie zmniejszając ogólności założymy, że  $p_{i \min} < 0$ ,  $p_{i \max} > 0$ .

Jeżeli którakolwiek z form kwadratowych  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_i \mathbf{x}$ ,  $i = 1, \dots, k$  jest nieujemnie (niedodatnio) określona, to odpowiedni parametr  $p_i$  (z powodu operacji supremum) będzie musiał przyjąć stałą wartość skrajną  $p_{i \max}$  ( $p_{i \min}$ ). Jeżeli jednak dla danych parametrów  $\mathbf{p} \in P$  supremum po  $\mathbf{x}$  jest osiągane dla pewnego  $\mathbf{x}^*$ , a formy kwadratowe  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_i \mathbf{x}$ ,  $i = 1, \dots, k$  mają określony znak, to supremum po  $\mathbf{p}$  powinno dążyć do zwiększania lub zmniejszania wartości poszczególnych parametrów stosownie do znaku odpowiedniej formy. Ponieważ dla parametrów przedziałowych te zmiany mogą być całkowicie niezależne, wynika z tego wniosek, że o stabilności układu z parametrami przedziałowymi decydują tylko wartości skrajne tych parametrów, przy czym rzecz tu o parametrach fizycznych, a nie o współczynnikach wielomianu charakterystycznego. Zatem wskaźnik stabilności układu będzie równy  $\gamma(\mathbf{S}) = \min[\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}^1), \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}^2), \dots, \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}^l)]$ , gdzie  $\mathbf{p}^j$ ,  $j = 0, \dots, l = (2^k - 1)$  są wszystkimi możliwymi wektorami parametrów o współrzędnych przyjmujących



wartości skrajne. Mamy zatem  $2^k$  cięć rozwiązujących problem stabilności rozważanej inkluzji (5.1.14) następującej postaci:

$$\mathbf{p}^j = (p_i = p_{i \min} + \varepsilon_{ij} (p_{i \max} - p_{i \min}))_{i=1, \dots, k}, \quad j = 1, \dots, l = 2^k, \quad (5.1.16)$$

gdzie  $\{\varepsilon_{ij}\}_{i=1, \dots, k}$  jest binarnym ciągiem indeksowanym przez  $j = 1, \dots, l = 2^k$ . Co ważne, wskaźniki  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}^j)$  mogą być wyznaczone jako wartości własne pewnych macierzy, natomiast wskaźnik stabilności (5.1.15) układu będzie na ogół zależny od skrajnych wartości parametrów  $p_{i \min}, p_{i \max}, i=1, \dots, k$ .

Obszar stabilności w przestrzeni parametrów rozważanego układu (a ściśle biorąc w przestrzeni ich skrajnych wartości  $p_{i \min}, p_{i \max}, i = 1, \dots, k$ ) będzie określony warunkiem stabilności  $\gamma(\mathbf{S}) > 0$ . Miarę tego obszaru można maksymalizować dobierając macierz  $\mathbf{S}$ .

Ponieważ wskaźniki  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}^j)$ , jako wartości własne pewnych macierzy, będą na ogół funkcjami algebraicznymi od wielkości  $p_{i \min}, p_{i \max}, i = 1, \dots, k$ , to kształt obszaru stabilności układu w przestrzeni parametrów może być dość złożony. Chcąc uzyskać wyniki trochę mniej dokładne, ale za to prostsze do analizy, możemy skorzystać z następującego oszacowania:

$$\gamma(\mathbf{S}) \geq \tilde{\gamma}(\mathbf{S}) = \gamma_0(\mathbf{S}) - \sum_{i=1}^k \max[p_{i \max} \delta_i(\mathbf{S}), p_{i \min} \eta_i(\mathbf{S})], \quad (5.1.17)$$

gdzie

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad \delta_i(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_i \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad \eta_i(\mathbf{S}) = \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_i \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right].$$

Wtedy warunek dostateczny stabilności  $\tilde{\gamma}(\mathbf{S}) > 0$  układu liniowego o parametrach przedziałowych będzie miał prostą strukturę zbioru o ograniczeniach liniowych względem skrajnych wartości parametrów.

Jak widać z (5.1.17), uproszczony warunek stabilności  $\tilde{\gamma}(\mathbf{S}) > 0$  sprowadza się do wyznaczenia dla danej macierzy  $\mathbf{S}$ , maksymalnych i minimalnych wartości własnych pewnych macierzy niezależnych od parametrów  $p_{i \min}, p_{i \max}, i = 1, \dots, k$ . Dlatego optymalizację oszacowania obszaru stabilności układu w przestrzeni tych parametrów możemy względnie łatwo przeprowadzić, stosując jedną funkcję Lapunowa lub wiele takich funkcji (czyli *wielowymiarową funkcję Lapunowa*). Na koniec warto zauważyć, że dla określonych macierzy  $\mathbf{A}_i, i = 1, \dots, k$  i ustalonej macierzy  $\mathbf{S}$ , tylko jedna skrajna wartość każdego parametru  $p_i$  będzie w takim przybliżeniu istotna dla stabilności układu, tzn. wystąpi w warunku stabilności układu  $\tilde{\gamma}(\mathbf{S}) > 0$ .  $\square$

Metoda funkcji Lapunowa umożliwiła również szacowanie wpływu zmian parametrów na własności stabilności układu. Ilustruje to poniższy

**Problem 5.2:** (*Zależność wskaźnika i zakresu stabilności od parametru układu*)

Zbadamy zależność wskaźnika stabilności układu liniowego o stabilnej macierzy  $\mathbf{A}$  od wybranego parametru  $\alpha$ . Dokładniej, oszacujemy zmianę wskaźnika stabilności przy zaburzeniu macierzy  $\mathbf{A}$  układu o macierz  $\alpha \cdot \mathbf{C}$ , gdzie  $\alpha \geq 0$  jest parametrem, natomiast  $\mathbf{C}$  – dowolną macierzą o wymiarze macierzy  $\mathbf{A}$ .

Równania układu po takiej modyfikacji będą miały następującą postać:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})\mathbf{x}, \quad \alpha \geq 0. \quad (5.1.18)$$

Wskaźnik stabilności takiego układu można oszacować jak następuje:

$$\gamma(\mathbf{S}, \alpha) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \alpha \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \geq \gamma(\mathbf{S}) - \alpha \cdot \eta(\mathbf{S}), \quad (5.1.19)$$

gdzie  $\mathbf{S}$  jest macierzą funkcji Lapunowa dla układu niezaburzonego,  $\gamma(\mathbf{S})$  jest dodatnim wskaźnikiem stabilności dla układu bez zaburzenia, natomiast wielkość

$$\eta(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (5.1.20)$$

Stąd dostajemy następujące oszacowanie na górne ograniczenie zmiany macierzy  $\mathbf{A}$  „w kierunku” macierzy  $\mathbf{C}$ , które zachowuje stabilność układu zaburzonego.

$$\alpha_{\max} \geq \tilde{\alpha}_{\max} = \gamma(\mathbf{S}) / \eta(\mathbf{S}). \quad (5.1.21)$$

Istotnie korzystną cechą powyższego oszacowania jest fakt, iż odnosi się ono do układów o dowolnym wymiarze wektora stanu, a wielkości  $\gamma(\mathbf{S})$ ,  $\eta(\mathbf{S})$  wyrażają się przez wartości własne pewnych macierzy niezależnych od rozważanego parametru  $\alpha$ . Z kolei niekorzystną cechą uzyskanego oszacowania (5.1.21) jest jego konserwatywność, co sprawia, że jest ono użyteczne tylko wówczas, gdy zaburzenie macierzy  $\mathbf{A}$  w „kierunku”  $\mathbf{C}$  rzeczywiście nie poprawia własności stabilności, tzn. nie zwiększa wskaźnika stabilności (5.1.19) układu. Gdyby rozpatrywane zaburzenie było korzystne w tym sensie, nie można by tego faktu wywieść z oszacowania (5.1.12).

Stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa można jednak uzyskać bardziej szczegółowe rezultaty dla rozważanego problemu, przyjmując dodatkowe założenia odnośnie macierzy  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{C}$ , czyli odnośnie funkcji Lapunowa oraz kierunku zaburzenia macierzy  $\mathbf{A}$ . Na przykład jeśli zaburzona macierz układu mechatronicznego będzie miała postać  $\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}^T$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest stabilna, a  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  są stałymi wektorami, to

wówczas dla macierzy kanonicznej  $\mathbf{S}$ , takiej że wektor  $\mathbf{D} = \mathbf{S}\mathbf{B}$  oraz dla każdego wektora  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_S^\perp$  zachodzi równość  $\mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}} = 0$ , będziemy mieli

$$\eta(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{(\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x})(\mathbf{D}^T\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_S=1} (\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x})^2 = \|\mathbf{B}\|_S^2, \quad \tilde{\alpha}_{\max}(\mathbf{S}) = \frac{\gamma_0(\mathbf{S})}{\|\mathbf{B}\|_S^2}. \quad (5.1.22)$$

Przy takich założeniach możemy nawet rozwiązać powyższy problem ściśle tj. bez żadnego szacowania. Istotnie, wskaźnik stabilności rozważanego układu będzie wtedy równy

$$\gamma(\mathbf{S}, \alpha) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}} + \alpha \frac{(\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{x}} \right]. \quad (5.1.23)$$

Zależność tego wskaźnika od parametru  $\alpha$  można wyznaczyć analitycznie jak następuje:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{S}, \alpha) &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_S=1} [\mathbf{x}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} + \alpha(\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x})^2] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_S=1} [\lambda^2\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \alpha\lambda^2\|\mathbf{B}\|_S^4] = \\ &= \gamma_\infty(\mathbf{S}) - \sup_{\xi^2 \leq 1} \left[ \xi^2 \left( \frac{\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_S^2} + \alpha\|\mathbf{B}\|_S^2 + \gamma_0(\mathbf{S}) \right) \right] = \min \left[ \gamma_\infty(\mathbf{S}), - \frac{\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_S^2} - \alpha\|\mathbf{B}\|_S^2 \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma_\infty(\mathbf{S}) = - \sup_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_S^\perp} \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_S^2}. \quad (5.1.24)$$

Widać, że w rozważanym przypadku następuje pogorszenie stabilności układu wraz ze wzrostem parametru  $\alpha > 0$ . Utrata stabilności następuje dla  $\alpha > \alpha_{\max} > 0$ , natomiast dla  $\alpha$  mniejszego od pewnej wartości (nasycenia)  $\alpha_{\text{sat}} \leq \alpha_{\max}$  wskaźnik stabilności utrzymuje stałą wartość  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ . Łatwo sprawdzić, że ściśle krytyczne wartości  $\alpha_{\max}$ ,  $\alpha_{\text{sat}}$  wyrażają się wtedy następującymi wzorami (Ossowski [59]):

$$\alpha_{\max}(\mathbf{S}) = - \frac{\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_S^4}, \quad \alpha_{\text{sat}}(\mathbf{S}) = \alpha_{\max}(\mathbf{S}) - \frac{\gamma_\infty(\mathbf{S})}{\|\mathbf{B}\|_S^2}, \quad (5.1.25).$$

gdzie wielkość  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$  określona jest wzorem (5.1.24).  $\square$

Opisaną wyżej procedurę można bez trudu uogólnić na przypadek wielu parametrów zaburzających macierz  $\mathbf{A}$  układu. Wystarczy w tym celu skorzystać z

oszacowania analogicznego do (5.1.19), zależnego od wielu parametrów  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  i odpowiednich macierzy  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots$  określających strukturę zaburzeń macierzy  $\mathbf{A}$ .

**Przykład 5.2:** (Wpływ zaburzenia macierzy układu na wskaźnik stabilności)

Rozważmy układ drgający opisany następującym modelem liniowym:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 + \alpha & -1 + 2\alpha \end{bmatrix} \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \mathbf{D}^T) \mathbf{x}, \quad (5.1.26)$$

gdzie  $\alpha \geq 0$  jest parametrem zaburzenia, natomiast macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.1.27)$$

Jak łatwo sprawdzić, macierz  $\mathbf{S}$  jest macierzą kanonicznej funkcji Lapunowa. Dzięki temu, korzystając z (5.1.24 – 25), dostajemy następujące wzory:

$$\gamma(\mathbf{S}, \alpha) = \frac{1}{2} - 2\alpha, \quad \alpha_{\max} = \frac{1}{4}, \quad (5.1.28)$$

które są wynikami dokładnymi, a nie oszacowaniami. □

Dużym zainteresowaniem cieszy się ostatnio zagadnienie zakresu ruchu stabilnego układu liniowego stacjonarnego, startującego z pewnych warunków początkowych (Ossowski [84], Shahruz [98]). Jest to zagadnienie jak najbardziej jakościowe, gdyż dotyczy całych trajektorii układu, a nie tylko ich wartości chwilowych. Wiadomo, że wszystkie trajektorie stabilnego układu liniowego  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  startujące z dowolnego otoczenia  $X_0$  punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  zbiegają do tego punktu. Jednak w zastosowaniach praktycznych często ważne jest jeszcze podanie oszacowania zakresu ruchu, czyli zbioru  $X$  (zależnego na ogół od otoczenia  $X_0$ ), w którym na pewno zawarte będą wszystkie trajektorie (procesy przejściowe). Podanie wprost takiego zbioru w klarownej postaci nie jest łatwe, jeśli nawet, formalnie rzecz biorąc, znana jest postać ogólnego rozwiązania równań układu. Problem nie tkwi bynajmniej tylko w tym, że znalezienie takiego rozwiązania w przypadku wielowymiarowym byłoby kłopotliwe, bo wymagałoby numerycznego wyznaczania wszystkich wartości własnych macierzy układu.

Okazuje się, że pewną informację o zakresie procesów przejściowych w układach liniowych można uzyskać prostszymi metodami, niewymagającymi znajomości wszystkich wartości własnych. Znanych jest szereg prac na ten temat,

podających konkretne oszacowania (Shahruz [98]). Poniżej przedstawimy analizę tego problemu przy użyciu metody funkcji Lapunowa.

**Problem 5.3:** (Zakres ruchu układu startującego z danego obszaru)

Wyznamy za pomocą metody funkcji Lapunowa oszacowanie zakresu ruchu stabilnego układu liniowego  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  startującego z obszaru  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Załóżmy, że mamy pewną macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa rozważanego układu, optymalną w sensie wskaźnika stabilności lub tylko taką, że wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  określony wzorem (5.1.8) jest dodatni. Jest jasne że zakres procesów przejściowych  $X_{\infty}$  można oszacować za pomocą minimalnej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  opisanej na zbiorze  $X_0$ . Będzie to więc elipsoida  $X_0(\mathbf{S}, \bar{c}) = \bar{X}_0(\mathbf{S})$ .

Jeżeli obszar startowy  $X_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq r\}$  jest kulą względem pewnej normy, na przykład podyktowanej względami praktycznymi, to promień  $\bar{c} = \bar{c}(\mathbf{S}, r)$ . Wtedy norma  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}$  każdego punktu  $\mathbf{x} \in X_0(\mathbf{S}, \bar{c})$  może być oszacowana przez normę  $\|\mathbf{x}\|$  jak następuje:  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} \leq \eta(\mathbf{S}) \|\mathbf{x}\| \leq \bar{c}(\mathbf{S}, r)$ , gdzie stała

$$\eta(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} [\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} / \|\mathbf{x}\|].$$

Zatem dla każdego  $\mathbf{x} \in X_0(\mathbf{S}, \bar{c})$ , norma  $\|\mathbf{x}\| \leq \bar{c}(\mathbf{S}, r) / \eta(\mathbf{S})$ . Możemy na tej podstawie określić wskaźnik:

$$\bar{c}(\mathbf{S}, r) / r \cdot \eta(\mathbf{S}), \quad (5.1.29)$$

mówiący o tym, w jakim stopniu może wzrosnąć norma  $\|\mathbf{x}(t)\|$  procesu przejściowego startującego z punktu  $\mathbf{x}_0$  o normie  $\|\mathbf{x}_0\| = r$ . Jeżeli macierz  $\mathbf{S}$  nie jest ustalona, to wskaźnik ten może posłużyć do jej optymalizacji. Jest jasne, że w praktyce zwykle będziemy się starali minimalizować wartość tego wskaźnika. Oznacza to nic innego jak tylko minimalizację miary rozmycia zbioru rozmytego  $(X_0, X_{\infty})$ .  $\square$

Obszar procesów przejściowych  $X_{\infty}$  startujących z pewnego obszaru  $X_0$  możemy również szacować za pomocą wielu macierzy  $\mathbf{S}$ , czyli za pomocą wektorowej funkcji Lapunowa, godnie z procedurą opisana w Rozdziale 3.

Jeżeli mamy do czynienia z układem liniowym o parametrach przedziałowych  $\mathbf{p}$ , możemy poszukiwać rozmytego oszacowania zbioru  $X_{\infty}$ , które będzie określone przez wartości parametrów układu najbardziej (nie)korzystne z punktu widzenia amplitudy procesów przejściowych.

## 5.2 Stabilność liniowych układów niestacjonarnych

Liniowe niestacjonarne modele układów mechatronicznych stosuje się zwykle wtedy, gdy odkształcenia układu są stosunkowo niewielkie a sprzężenia zwrotne jest liniowe, lecz istotny jest wpływ niestacjonarnych zaburzeń parametrów oraz niekontrolowanych sił zewnętrznych. „Czy” i „na ile” ten wpływ jest istotny w sensie jakościowym oraz ilościowym można stwierdzić dopiero po przeprowadzeniu analizy teoretycznej lub numerycznej modelu. Ponieważ głównym celem omawianej tu teorii jakościowej jest opis własności jakościowych, wszelkie oszacowania ilościowe podane będą zwykle w postaci ogólnych formuł.

W liniowych modelach układów mechatronicznych postaci (5.1.1) macierz  $\mathbf{A}$  układu często zależy liniowo od parametrów układu, natomiast działanie sił o niestacjonarnych składowych można uwzględnić za pomocą zaburzeń addytywnych, niezwiązanych z tą macierzą. Ponieważ zaburzenia zwykle nie są dokładnie znane, w najogólniejszym przypadku należy przyjąć, że możliwe realizacje czasowe zaburzeń obejmują zbiór wszystkich funkcji o wartościach w danym zbiorze zwartym. Dlatego jeżeli założymy tylko ograniczoność niestacjonarnych zaburzeń parametrycznych i wymuszeń siłowych, właściwym modelem takich układów będzie zupełna inkluzja różniczkowa następującej postaci [D1]:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_0 \mathbf{x} \in \{z_1(t) \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \dots + z_k(t) \cdot \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{z}_0(t) : |z_i(t)| \leq \alpha_i, i=1, \dots, k, \|\mathbf{z}_0(t)\| \leq \alpha_0\}, \quad (5.2.1)$$

gdzie stałe macierze  $\mathbf{C}_i$ ,  $i=1, \dots, k$ , określają strukturę zaburzeń parametrycznych, zaburzenia  $z_1, \dots, z_k$  odpowiadają zaburzeniom parametrów macierzy układu, natomiast zaburzenia  $\mathbf{z}_0$  – niestacjonarnym zaburzeniom siłowym działającym na układ, a parametry  $\alpha_i$ ,  $i=0, 1, \dots, k$  są nieujemne. Aby można było mówić o stabilności układu (5.2.1), przyjmiemy dalej, że stała macierz nominalna  $\mathbf{A}_0$  jest stabilna.

Dynamika układów postaci (5.2.1) jest złożonym problemem teoretycznym, nie rozwiązany w przypadku ogólnym, a to ze względu na brak możliwości wyznaczenia ogólnych rozwiązań analitycznych. Istnieje tylko szereg cząstkowych metod badania tego typu układów i szereg szczególnych wyników uzyskanych przy różnych założeniach upraszczających lub zawężających klasę układów. Zastosowanie metod jakościowych, niewymagających znajomości rozwiązań, do badania tego typu układów jest więc w pełni uzasadnione. Właściwie metody te, obok metod numerycznych, stanowią podstawę badania układów niestacjonarnych (Osiński [54], Gutowski [17], Sanchez [94]).

Analiza jakościowa, a w szczególności analiza stabilności liniowych układów niestacjonarnych, też nie jest wolna od trudności. Przede wszystkim trzeba zrezygnować z metod algebraicznych, wykorzystujących pojęcie wartości własnej. Liniowe układy niestacjonarne są bowiem opisane macierzami zależnymi od czasu, a zatem mogą zależeć od czasu również ich wartości własne. I tu niestety okazuje się, że istnieją przykłady liniowych układów niestabilnych, których macierz  $\mathbf{A}(t)$  ma

w każdej chwili wszystkie wartości własne w lewej półpłaszczyźnie (Radziszewski [92]). Zatem chwilowe wartości własne macierzy układu nie rozstrzygają o jego stabilności. Co więcej, w układach linowych niestacjonarnych mogą wystąpić złożone zjawiska dynamiczne (na przykład *rezonans parametryczny*), których analiza oparta o analityczne obliczenia w przypadku układów o wielu stopniach swobody jest praktycznie niewykonalna (Osiński [54]). Poniżej pokażemy, co do tego tematu wnosi metoda optymalnych funkcji Lapunowa, jako metoda z zasady niealgebraiczna. W szczególności zbadamy przydatność wskaźników stabilności i zbieżności, jako narzędzi do badania stabilności takich układów.

Można się spodziewać, że układ postaci (5.2.1) o stabilnej części stacjonarnej powinien być asymptotycznie stabilny lub przynajmniej stabilny dla dostatecznie „małych” zaburzeń niestacjonarnych. Inaczej w ogóle nie mogłyby istnieć żadne układy, jako że zaburzenia parametrów, choćby najmniejsze, zawsze występują w realnych układach. Istotnie, znane są klasyczne wyniki teoretyczne potwierdzające to przypuszczenie (Sanchez [94]). Zadaniem omawianej tu analizy stabilności będzie więc wykazanie stabilności układów typu (5.2.1) oraz oszacowanie dopuszczalnego zakresu zaburzeń. Pokażemy, jak można takie oszacowania uzyskać metodą optymalnych funkcji Lapunowa, stosując jedną lub wiele funkcji Lapunowa.

Zacznijmy rozważania od prostszego przypadku, gdy badamy układ poddany jest tylko zaburzeniom parametrów. Zagadnienie stabilności układów z zaburzonymi parametrami jest ważne z praktycznego punktu widzenia. Stabilność układu zachowująca się jako własność jakościowa, mimo zaburzeń parametrów, będziemy określali mianem *niezawodnej stabilności*, znanym w literaturze anglojęzycznej jako *robust stability* (Olas [48], Ossowski [58], Tang [104]). Tego typu stabilność, ściśle związana z tzw. *strukturalną stabilnością* (Arrowschmit [2], Sastry [96]), w ogóle umożliwia zaistnienie pewnych obserwowalnych cech jakościowych układów niestacjonarnych i stanowi niezbędny warunek uprawniający do numerycznych symulacji trajektorii takich układów.

Analizując układy liniowe niekiedy mówi się o *niepewnych parametrach* lub o *układach z niepewnymi parametrami* wówczas, gdy faktycznie mamy do czynienia z parametrami przedziałowymi. Trzeba zwrócić uwagę na to, że takie zamienne nazewnictwo nie jest tu uprawnione. Jeśli bowiem parametry modelu są z założenia stałe, a takimi są właśnie parametry przedziałowe, to są one jak najbardziej pewne. Rzecz tkwi tylko w tym, że wartości parametrów przedziałowych nie są znane dokładnie, gdyż mogą zawierać się w pewnych ograniczonych przedziałach. Do badania układów liniowych o parametrach przedziałowych stosuje się tzw. *analizę przedziałową*, która w ostatnich latach bardzo się rozwija (Mao [42]). Tę kwestię omówiliśmy już w pierwszym paragrafie tego rozdziału. Jednak praktyczna użyteczność analizy przedziałowej jest ograniczona. W modelach układów realnych bardziej bowiem uzasadnione jest przyjęcie założenia, że parametry modelu mogą przyjmować dowolne wartości z pewnych przedziałów, tzn. mogą być w ogólności

dowolnymi funkcjami czasu o wartościach w rozważanych przedziałach. Wtedy dopiero można mówić o niepewności parametrów. To rozróżnienie między stałymi i niestałymi parametrami o wartościach ograniczonych ma zasadnicze znaczenie w analizie stabilności. Wiadomo bowiem, że układ liniowy stacjonarny o parametrach przedziałowych, może być stabilny, gdy tymczasem ten sam układ o parametrach niepewnych mieszczących się w tych samych przedziałach będzie niestabilny. Zatem kryteria Hurwiza i Kharithonova dają w istocie wyniki dość „słabe” i nie nadają się do badania układów o zmiennych parametrach. Stabilność wykazana za pomocą takich kryteriów nie może być określona jako niezawodna (*robust*), ponieważ rzeczywiste parametry zawsze mogą się wahać. Tylko takie układy można określać mianem *układów o niepewnych parametrach*.

Rozważymy zatem problem kryteriów stabilności dla układów o parametrach niepewnych i, stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa, pokażemy, że tak jak w przypadku układów o parametrach przedziałowych, o stabilności takich układów również decydują wartości brzegowe parametrów, ale analogiczne kryteria stabilności są nieco bardziej złożone.

Podstawowe pytania jakie nasuwają się w odniesieniu do niestacjonarnych układów liniowych (o zmiennych parametrach) są następujące: czy w ogóle w tej klasie układów liniowość jest cechą istotną, tj. czy jest pomocna w analizie jakościowej, skoro wartości własne są bezużyteczne? Czy wskaźnik stabilności dla takich układów można uznać za dobre uogólnienie maksymalnej części rzeczywistej wartości własnej? Poniżej postaramy się odpowiedzieć na te pytania stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa.

Zgodnie z ogólnymi zasadami metody optymalnych funkcji Lapunowa podanymi w Rozdziale 3, rozpoczynamy analizę stabilności od wypisania ogólnej formuły na wskaźnik stabilności układu. Nietrudno pokazać, że w rozważanym przypadku wskaźnik ten będzie wyrażał się następującą formułą optymalizacyjną:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z} \in Z} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_1 \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \dots + z_k \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_k \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{z}_0^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (5.2.2)$$

gdzie  $Z$  jest zbiorem wszystkich wartości zaburzeń określonych w inkluzji (5.2.1), natomiast  $\mathbf{S}$  jest macierzą funkcji Lapunowa. Jak już wspomnieliśmy, aby w ogóle można było mówić o stabilności układu (5.2.1), macierz  $\mathbf{A}_0$  musi być z założenia stabilna. Co więcej, macierz  $\mathbf{S}$  należy wybrać tak, aby wskaźnik stabilności

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \quad (5.2.3)$$

dla układu bez zaburzeń był dodatni. Istnienie takiej macierzy, na mocy twierdzenia 4.1, mamy zagwarantowane dla każdej stabilnej macierzy  $\mathbf{A}_0$ .



Ponieważ wyrażenie pod supremum (5.2.2) zależy liniowo od aktualnych wartości zaburzeń, nietrudno stwierdzić, iż antyoptimalna strategia zaburzeń jest realizowana przez następujące sprzężenia zwrotne:

$$\mathbf{z}_0(\mathbf{x}) = \alpha_0 \cdot \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|_S, \quad \hat{z}_1 = \alpha_1 \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}], \dots, \quad \hat{z}_k = \alpha_k \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_k \mathbf{x}]. \quad (5.2.4)$$

Antyoptimalne zaburzenia parametryczne są więc sygnałami typu bang-bang przełączanymi na odpowiednich powierzchniach drugiego stopnia przechodzących przez punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  w przestrzeni stanu. Z kolei antyoptimalne siły  $\mathbf{z}_0$  zaburzające, co zrozumiale, działają zgodnie z kierunkiem  $0\mathbf{x}$  (wyznaczonym przez aktualny wektor stanu  $\mathbf{x}(t)$ ), a ich norma  $\|\mathbf{z}_0\|_S = \alpha_0$ . Badanie stateczności układu niestacjonarnego (5.2.1) metodą funkcji Lapunowa sprowadza się więc do badania stateczności odpowiedniego układu równań różniczkowych ze sprzężeniami zwrotnymi (5.2.4) typu bang-bang, będącymi cięciami wiązki inkluzji układu (modelu obiektu) (5.2.1).

Zastanówmy się wpieryw nad tym, kiedy antyoptimalne zaburzenie  $z_i$ ,  $i=1, \dots, k$  nie będzie przełączane? W takim wypadku bowiem antyoptimalna strategia zaburzenia  $z_i$  sprowadzałaby się do przyjęcia jednej z wartości skrajnych  $\pm\alpha_i$ . Gdyby tylko takie zaburzenia występowały w układzie, problem sprowadzałby się do analizy układu stacjonarnego. Jest jasne, że może tak być wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $\mathbf{S} \mathbf{C}_i + \mathbf{C}_i^T \mathbf{S}$  będzie nieujemnie (albo niedodatnio) określona. W Rozdziale 6 pokażemy, że warunek taki raczej nie zachodzi, jeżeli zaburzenia dotyczą na przykład parametrów tłumienia i sztywności w układach mechanicznych. Zatem rozważymy dalej przypadek przełączanych zaburzeń (5.2.4).

Zwróćmy uwagę jakie wnioski jakościowe wynikają z postaci antyoptimalnych sprzężeń zwrotnych (5.2.4). Jeżeli inkluzja (5.2.1) jest modelem liniowego układu drgającego, to w warunkach stacjonarnych (przy braku zaburzeń) ruch układu można rozłożyć na niezależne mody drgań o częstościach własnych  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Jeżeli układ będzie wykonywał drganie własne i „włączymy” stopniowo zaburzenia antyoptimalne, to jak widać z (5.2.4), funkcje przełączeń zaburzeń  $z_i$  będą funkcjami kwadratowymi względem harmonicznym drgań  $\mathbf{x}(t)$ , a funkcja przełączeń dla  $\mathbf{z}_0$  – funkcją liniową względem  $\mathbf{x}(t)$ . Można więc powiedzieć, że zaburzenia najbardziej niekorzystne z punktu widzenia stabilności układu to takie, które są przełączane z częstością  $2\omega_i$  (w przypadku  $z_i$ ) lub  $\omega_i$  (w przypadku  $\mathbf{z}_0$ ). Odpowiada to klasycznym rezonansom znanym z mechaniki, związanym z wymuszeniem siłowym i parametrycznym (Osiński [54], Gutowski [17],[18]).

W Rozdziale 6 wykażemy, że funkcje przełączeń modyfikacji parametrycznej w liniowych układach drgających dekomponują się na iloczyny funkcji liniowych. Zatem powierzchnie przełączeń parametrów składają się z dwóch hiperpłaszczyzn, które ograniczają obszary odpowiadające maksymalnej i minimalnej wartości parametru. Korzystając z tego faktu możemy określić, jakie przełączenia o niższej częstości niż  $2\omega_i$  będą najbardziej niekorzystne dla stabilności układu. W jednym

okresie pełniej modyfikacji dany parametr jest dwukrotnie przełączany na jedną ze skrajnych wartości. Aby obniżyć częstość sterowania parametrycznego należałoby zrezygnować z niektórych przełączeń. Jeżeli zrezygnujemy z jednego przełączenia na dwa kolejne, dostaniemy sygnał o częstości podstawowej  $\omega$ . Jeżeli zrezygnujemy z dwóch przełączeń na trzy kolejne przełączenia, dostaniemy sygnał o częstości podstawowej  $2\omega/3$  itd. Postępując dalej możemy wyznaczyć kolejne częstości rezonansu parametrycznego znane z klasycznej teorii równania Mathieu.

Należy zaznaczyć, że analogiczne wyniki klasyczne odnoszą się do układu o jednym stopniu swobody z okresowymi (harmonicznymi lub prostokątnymi) zaburzeniami parametrów. Poza tym wyznaczenie częstości rezonansowych metodą analityczną jest dość żmudne albo wymaga zastosowania funkcji specjalnych. Fakt, że dla harmonicznych i prostokątnych zaburzeń parametrów otrzymano identyczne częstości rezonansowe, świadczy o tym, że zjawisko rezonansu parametrycznego jest bardziej fundamentalne i mało niezależne od sygnału. Podane tu wyniki, które uzyskaliśmy praktycznie bez żadnych obliczeń, na podstawie czystej analizy jakościowej, stanowią pewne wyjaśnienie na czym ta fundamentalność polega. Poza tym są to wyniki ogólniejsze i wskazują, że w przypadku zaburzeń parametrycznych niekoniecznie sygnał harmoniczny o częstości rezonansowej musi być najbardziej niekorzystny z punktu widzenia stabilności układu. Wyniki klasyczne w tej materii oraz samo pojęcie rezonansu parametrycznego, są obciążone pewną filozofią liniowości i wiarą w to, że ze złożonego sygnału układ filtruje sygnał o częstości rezonansowej i według niego dostosowuje swoją reakcję. Tymczasem układy o zmiennych parametrach są w zasadzie układami nieliniowymi tak, że nie można do nich stosować bez uzasadnienia wnioskowania opartego na zasady superpozycji.

Podane tu rozumowanie, przeprowadzone przy założeniu, że układ wykonuje tylko jedno drganie własne, jest słuszne tylko w ograniczonym przedziale czasu, uzależnionym od amplitudy zaburzeń. Niestacjonarne zaburzenia powodują bowiem, że ruch układu będzie na ogół różnił się od przewidywań teorii dla układów liniowych stacjonarnych. Ponieważ zaburzenia antyoptymalne są przedziałami stałe, rozważany abstrakcyjny układ sprzężenia będzie jednak układem przedziałami liniowym. Można zatem powiedzieć, że chwilowy ruch układu w okresach między przełączeniami będzie w przybliżeniu (pominięcie procesów przejściowych powstałych w wyniku ostatniego przełączenia zaburzeń) superpozycją drgań własnych układu z aktualnymi wartościami parametrów. Można będzie więc wtedy mówić o rezonansach względem zaburzeń  $z_0$ , jeżeli będą one zawierać składowe o częstościach zbliżonych do częstości własnych układu swobodnego. W przypadku zaburzeń  $z_i$  kwestia rezonansu jest bardziej złożona i problematyczna. Dla funkcji kwadratowej względem superpozycji funkcji harmonicznych o różnych częstościach nie obowiązuje bowiem na ogół zasada superpozycji. Trudno w takim wypadku zdefiniować ściśle pojęcie rezonansu parametrycznego. Jeżeli  $x(t)$  jest superpozycją drgań harmonicznych o częstościach  $\omega_i$ , to funkcja przełączeń będzie na ogół

superpozycją drgań harmonicznych o częstościach  $2\omega_i$ , ale także drgań o częstościach sumarycznych i różnicowych  $\omega_i \pm \omega_j$ . Zatem również częstości różnicowe i sumacyjne mogą, choć nie muszą, być źródłem efektów, które można by określić jako rezonansowe. Ważne są chwile przełączeń zaburzeń i wynikające z nich widmo sygnału zaburzeń przedziałami stałych. Zauważmy, że powyższe wnioski jakościowe również uzyskaliśmy za pomocą metody optymalnych funkcji Lapunowa, bez konieczności rozwiązywania równań.

Zbadajmy teraz bardziej wnikliwie zależność wskaźnika stabilności układu (5.2.1) z zaburzeniami antyoptymalnymi (5.2.4). Wstawiając (5.2.4) do formuły (5.2.2) dostaniemy następujący wzór na wskaźnik stabilności rozważanego układu:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \alpha_1 \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \dots + \alpha_k \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_k \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\alpha_0}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}} \right]. \quad (5.2.5)$$

Aby istniało skończone supremum (5.2.5), wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  musi być liczony na zbiorze z wykluczonym otoczeniem punktu stacjonarnego, a to z powodu osobliwości w zerze składnika pochodzącego od zaburzeń  $\mathbf{z}_0$ . Widać to wyraźniej, jeśli wypisze się analogiczny wzór na wskaźnik zbieżności wykładniczej układu:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, c] &= - \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \alpha_1 \cdot |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}| + \dots + \alpha_k \cdot |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_k \mathbf{x}| \right] - \frac{\alpha_0}{c} = \\ &= \gamma_L(\mathbf{S}) - \alpha_0/c \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

gdzie  $\gamma_L(\mathbf{S})$  jest wskaźnikiem stabilności układu liniowego z zaburzeniami parametrycznymi, ale bez zaburzeń siłowych  $\mathbf{z}_0$ . Istotnie, obecność składnika od zaburzeń siłowych  $\mathbf{z}_0$  sprawia, że wraz ze zbliżaniem się punktu  $\mathbf{x}$  do punktu stacjonarnego szybkość zbieżności wykładniczej nieuchronnie staje się ujemna. Oznacza to, że niemożliwa jest wykładnicza stabilność układu do punktu stacjonarnego, lecz tylko do pewnego otoczenia tego punktu.

Z kolei dla  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} \longrightarrow +\infty$  składnik z zaburzeniami  $\mathbf{z}_0$  dąży do zera, co oznacza, że daleko od punktu stacjonarnego rola zaburzeń siłowych układu stopniowo zanika, a o dynamice układu decyduje jego część liniowa z zaburzeniami parametrycznymi. Dzieje się tak dlatego, że wkład do szybkości zbieżności wykładniczej wnoszony przez część liniową układu z zaburzeniami parametrycznymi nie zależy od odległości od punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , co jest spowodowane właśnie liniowością układu.

Jeżeli wskaźnik  $\gamma_L(\mathbf{S})$  jest dodatni, możemy oszacować zbiór asymptotyczny w postaci elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  o minimalnym promieniu  $c_\infty > 0$ , do której zbiegają wszystkie trajektorie układu. W tym celu wystarczy skorzystać z warunku dostatecznego stabilności układu:

$$\gamma(\mathbf{S}) = \gamma_L(\mathbf{S}) - \frac{\alpha_0}{c} \geq 0. \quad (5.2.7)$$

Stąd otrzymujemy następujące oszacowanie promienia elipsoidy asymptotycznej:

$$c \geq c_\infty(\mathbf{S}) = \frac{\alpha_0}{\gamma_L(\mathbf{S})}, \quad (5.2.8)$$

który, zgodnie z oczekiwaniami, jest proporcjonalny do amplitudy zaburzeń  $\mathbf{z}_0$  i odwrotnie proporcjonalny do wskaźnika stabilności układu liniowego bez zaburzeń siłowych.

Powyższy wynik zasługuje na słowo komentarza. Antyoptymalna strategia sił  $\mathbf{z}_0$  oraz formuła (5.2.8) zostały uzyskane bez żadnych założeń odnośnie kierunku ich działania. W rzeczywistości zaburzenia  $\mathbf{z}_0$  często są wypadkową kilku sił działających w pewnych ustalonych kierunkach w przestrzeni. Jeżeli jest dostępna tak szczegółowa informacja, wówczas dokładniejszym opisem niestacjonarnych wymuszeń siłowych będzie następujący model:

$$\mathbf{z}_0(t) = z_{01}(t) \cdot \mathbf{B}_1 + \dots + z_{0l}(t) \cdot \mathbf{B}_l, \quad (5.2.9)$$

gdzie  $z_{0i}$  są skalarnymi zaburzeniami z ograniczonymi  $|z_{0i}(t)| \leq \alpha_{0i}$ ,  $i=1, \dots, l$ , dla każdego  $t \geq t_0$ . Wtedy antyoptymalne siły będą miały charakter następujących sił:

$$z_{0j} = \alpha_{0j} \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_{0j}^T \mathbf{S} \mathbf{x}], j=1, 2, \dots, l \quad (5.2.10)$$

przełączanych na odpowiednich hiperpłaszczyznach o równaniach  $\mathbf{B}_{0j}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0$ ,  $j=1, 2, \dots, l$ .

W tym momencie można by przeprowadzić jakościową analizę kwestii rezonansów w rozważanym układzie, ale wywołanych wymuszeniem siłowym  $z_{0i}$ . Z postaci przełączeń (5.2.10) wynika bowiem, że „rezonanse” mogą wystąpić nie tylko przy częstości podstawowej  $\omega_i$ , ale też przy częstościach  $\omega_i/2$ ,  $\omega_i/3, \dots!$  Nie jest to wniosek sprzeczny z podstawową wiedzą o układach liniowych, ponieważ mamy tu do czynienia z wymuszeniem niesinusoidalnym. Taki sygnał może dawać słabe efekty rezonansowe, gdy któraś z jego harmonicznych ma częstość  $\omega_i$ .

Wstawiając (5.2.10) do (5.2.2) znajdujemy następujące dokładniejsze oszacowanie wskaźnika zbieżności układu:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, c] &\geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \gamma_L(\mathbf{S}) - \frac{1}{c} \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} [\alpha_{01} |\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}| + \dots + \alpha_{0l} |\mathbf{B}_l^T \mathbf{S} \mathbf{x}|] \geq \\ &\geq \gamma_L(\mathbf{S}) - [\alpha_{01} \|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} + \dots + \alpha_{0l} \|\mathbf{B}_l\|_{\mathbf{S}}] / c. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Z warunku stabilności  $\tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] > 0$  można wyznaczyć dokładniejsze oszacowanie promienia elipsoidy granicznej, które można wykorzystać do optymalizacji funkcji Lapunowa. Dalszą poprawę można zapewnić, przyjmując zasadę Turkstry wobec zaburzeń układu (Ossowski [84]).

Warta omówienia jest jeszcze kwestia samego wskaźnika stabilności  $\gamma_L(\mathbf{S})$  dla układu liniowego z niestacjonarnymi zaburzeniami macierzy  $\mathbf{A}$ . Warunki, przy których wskaźnik ten jest dodatni (czyli gdy układ z zaburzeniami parametrów jest stabilny) są ściśle związane z kryteriami stabilności Hurwiza i Kharitonowa, omówionymi w [D16].

Nietrudno wykazać, że wskaźnik zbieżności części liniowej układu (5.2.1) będzie równy najmniejszemu z  $2^k$  z poniższych wskaźników (Ossowski [58]):

$$- \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x} \pm \alpha_1 \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x} \pm \dots \pm \alpha_k \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_k \mathbf{x}], \quad (5.2.12)$$

które różnią się co najwyżej znakami przy współczynnikach  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Oznacza to, że stabilność rozważanej inkluzji jest rozstrzygalna nie tylko  $k$  cięciami bang-bang, ale także  $2^k$  cięciami stałymi określonymi macierzami postaci  $(\mathbf{A}_0 \pm \alpha_1 \mathbf{C}_1 \pm \dots \pm \alpha_k \mathbf{C}_k)$ .

Aby na tej podstawie wykazać stabilność, należy wpieryw dowieść, że wszystkie te wskaźniki są dodatnie. Ponieważ każdy z nich jest maksymalną częścią rzeczywistą wartości własnych odpowiedniej dla siebie macierzy, oznacza to, że orzekanie o stabilności wymaga zastosowania kryterium Hurwiza do  $2^k$  wielomianów charakterystycznych pewnych macierzy. W szczególności, gdy mamy tylko jeden parametr niestacjonarny w układzie, starczy zbadać dwa wielomiany, aby wykazać niezawodną stabilność przy niestacjonarnych zmianach tego parametru.

Tymczasem kryterium Kharitonowa wymagałoby zbadania aż czterech wielomianów i to tylko do wykazania stabilności układu z parametrem przedziałowym. Również niekorzystnie jest stosowanie tego kryterium w przypadku dwóch parametrów niestacjonarnych. Kryterium Kharitonowa jest użyteczne do badania stabilności układów o większej liczbie parametrów przedziałowych.

Istotna jest tu kwestia, kiedy układ (5.2.1) może być stabilny. Ze wzoru (5.2.6) i ciągłej zależności od parametrów można wnioskować, że wskaźnik  $\gamma_L(\mathbf{S})$  powinien być dodatni dla dostatecznie małych zaburzeń (czyli małych wartości parametrów  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ). Oznacza to, że układ z zaburzeniami będzie wykładniczo stabilny dla dostatecznie małych zaburzeń, niezależnie od macierzy  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Ściśle wykazuje to następujące

**Twierdzenie 5.3:** Układ (5.2.1) o ustalonych macierzach  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  (przy założeniu, że zaburzenia  $\mathbf{z}_0 \equiv \mathbf{0}$  oraz  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$ ) jest globalnie wykładniczo stabilny dla dostatecznie małych wartości parametrów  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

*Dowód:* Wprawdzie teza jest konsekwencją ciągłości wskaźnika  $\gamma_L(\mathbf{S})$ , jako funkcji parametrów  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , prościej jest wykazać ją bezpośrednio, korzystając z następującego oszacowania:

$$\begin{aligned} \gamma_L(\mathbf{S}) &\geq \tilde{\gamma}_L(\mathbf{S}) = \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1 \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 1} |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}| - \dots - \alpha_k \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 1} |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_k \mathbf{x}| = \\ &= \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1 \delta_1(\mathbf{S}) - \dots - \alpha_k \delta_k(\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Jest teraz jasne, że skoro  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$ , to wskaźnik  $\gamma_L(\mathbf{S})$  będzie dodatni dla dostatecznie małych zaburzeń parametrów układu.  $\blacklozenge$

Oszacowanie (5.2.13) można wykorzystać do optymalizacji wielowymiarowych funkcji Lapunowa, w celu maksymalizacji oszacowania obszaru stabilności w przestrzeni parametrów  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Mówi o tym następujący

**Problem 5.4:** (*Wielowymiarowe funkcje Lapunowa układu niestacjonarnego*)

Rozważmy kwestię wykorzystania wielowymiarowych funkcji Lapunowa do badania niezawodnej stabilności niestacjonarnego układu liniowego (5.2.1) o niepewnych parametrach przy założeniu, że  $z_0(t) \equiv 0$ . Skoro taki układ jest globalnie wykładniczo stabilny dla dostatecznie małych zaburzeń parametrów, to korzystając z oszacowania (5.2.13) stwierdzimy, że warunek dostateczny stabilności układu  $\tilde{\gamma}_L(\mathbf{S}) > 0$  określa następujący zbiór z ograniczeniami liniowymi:

$$P(\mathbf{S}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k): \alpha_1 \cdot \delta_1(\mathbf{S}) + \dots + \alpha_k \cdot \delta_k(\mathbf{S}) > \gamma_0(\mathbf{S}), \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0\}, \quad (5.2.14)$$

który jest obszarem stabilności układu w przestrzeni parametrów  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Chcąc, aby ten obszar był możliwie duży, możemy maksymalizować jego wielkość stosując następujące miary (Ossowski [58],[78]):

$$\mu_i(\mathbf{S}) = \gamma_i(\mathbf{S}) / \gamma_0(\mathbf{S}), i = 1, \dots, k, \quad \mu_0(\mathbf{S}) = \gamma_1(\mathbf{S}) \cdot \dots \cdot \gamma_k(\mathbf{S}) / \gamma_0^k(\mathbf{S}). \quad (5.2.15)$$

Miary  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  określają rozmiar obszaru  $P(\mathbf{S})$  w kierunku osi  $0\alpha_i$  w przestrzeni parametrów (a więc maksymalną dopuszczalną wartość  $i$ -tego parametru), natomiast miara  $\mu_0(\mathbf{S})$  odpowiada objętości tego obszaru. Maksymalizując powyższe miary względem parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ , dostaniemy optymalne funkcje Lapunowa  $V_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , które są składowymi wielowymiarowej funkcji Lapunowa rozważanego układu. Stąd ostatecznie dostaniemy następujące oszacowanie obszaru stabilności układu w przestrzeni parametrów:

$$P = P(\mathbf{S}_1) \cup \dots \cup P_k(\mathbf{S}). \quad (5.2.16)$$

Będzie to oczywiście obszar odpowiadający kwadratowej, a nie wykładniczej stabilności układu (Ossowski [58],[78]).  $\blacksquare$

Należy zaznaczyć, że zaproponowany w powyższym problemacie zestaw miar, choć naturalny, nie wyczerpuje wszystkich możliwości. Z powodzeniem zestaw ten można zmienić lub uzupełnić innymi miarami, które bardziej odpowiadają konkretnej sytuacji praktycznej.

Proste zagadnienie dynamiki i stabilności oscylatora liniowego o jednym stopniu swobody staje się zasadniczo bardziej złożone, jeśli tylko dopuścimy kontrolowane i/lub niekontrolowane zmiany jego parametrów oraz wymuszenia siłowe. Już w przypadku okresowo zmiennych parametrów i wymuszeń mogą w takim układzie wystąpić złożone zjawiska (na przykład *rezonans parametryczny* (Osiński [54])). Dla dowolnych, zaburzeń i/lub wymuszeń własności układu są jeszcze trudniejsze do ilościowej analizy, co uzasadnia zastosowanie metod jakościowych.

Aby zademonstrować jak w zagadnieniach niestacjonarnych funkcjonuje opisana wyżej metoda wielowymiarowych funkcji Lapunowa, rozpatrzmy następujący:

**Problem 5.5:** (*Stabilność oscylatora o zmiennych parametrach i wymuszeniach*)

Zbadamy dynamikę oscylatora o jednym stopniu swobody, będącego pod wpływem niekontrolowanych sił i zaburzeń parametrów. Układ taki standardowo modeluje się równaniem następującej postaci:

$$\ddot{x} + 2p(1 + z_1)\dot{x} + q(1 + z_2)x = z_3, \quad p > 0, q > 0, \quad (5.2.17)$$

gdzie  $z_1, z_2$  są odpowiednio zaburzeniami parametrów tłumienia i sztywności, natomiast  $z_3$  reprezentuje zaburzenia siłowe oscylatora. O zaburzeniach będziemy standardowo zakładać, że są ograniczone tzn. dla każdego  $t \geq t_0$  zachodzą nierówności

$$|z_1(t)| \leq \alpha_1 < 1, |z_2(t)| \leq \alpha_2 < 1, |z_3(t)| \leq \alpha_3, \quad (5.2.18)$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  są pewnymi takimi stałymi nieujemnymi, że  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$ .

Wiele realnych i praktycznie ważnych układów nie tylko mechanicznych może być dość dobrze modelowane równaniem (5.2.17). Dla tak postawionego zagadnienia ściśle rozwiązania nie są jednak znane, a badanie własności jakościowych układu – trudne. Dlatego w praktycznych zastosowaniach wykorzystywane są głównie wyniki uzyskane w szczególnych przypadkach, na przykład dla sinusoidalnie zmiennych zaburzeń parametrów (równanie Hill'a lub Mathieu) lub okresowej siły wymuszającej. W niniejszym rozdziale postaramy się przedstawić nieco „głębszą” i ogólniejszą analizę jakościową tego zagadnienia.

Zauważmy najpierw, że postawione zagadnienie odpowiada faktycznie badaniu własności jakościowych zupełnej inkluzji różniczkowej następującej postaci:

$$\ddot{x} + 2p \cdot \dot{x} + q \cdot x \in \Gamma(\{2p\dot{x}z_1 + qxz_2 + z_3 : |z_1| \leq \alpha_1, |z_2| \leq \alpha_2, |z_3| \leq \alpha_3\}), \quad (5.2.19)$$

którą można przedstawić w postaci macierzowej:

$$dx/dt \in \{ \mathbf{Ax} + z_1 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x} + z_2 \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x} + z_3 \cdot \mathbf{B} : |z_1| \leq \alpha_1, |z_2| \leq \alpha_2, |z_3| \leq \alpha_3 \}, \quad (5.2.20)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -2p \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2p \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -q & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2.21)$$

Cięcie krytyczne wiązki powyższej inkluzji, określające najbardziej niekorzystną dla stabilności strategię zaburzeń jest określone przez następujące sprzężenia zwrotne:

$$\hat{z}_1 = \alpha_1 \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}], \hat{z}_2 = \alpha_2 \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_2 \mathbf{x}], \hat{z}_3 = \alpha_3 \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]. \quad (5.2.22)$$

Korzystając z ogólnej formuły (3.3.10) dla układów w zaburzeniach, dostajemy dla takich zaburzeń i wymuszeń następujące oszacowanie wskaźników (zbieżności i stabilności):

$$\begin{aligned} \gamma_{123}[\mathbf{S}, c] = \\ = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \alpha_1 \cdot |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}| + \alpha_2 \cdot |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_2 \mathbf{x}| + \frac{\alpha_3}{c} \cdot |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right] \geq \\ \geq \gamma_{12}(\mathbf{S}) - \frac{\alpha_3}{c} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\mathbf{S}) = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \alpha_1 \cdot |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}| + \alpha_2 \cdot |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_2 \mathbf{x}|] \geq \\ \geq \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1 \delta_1(\mathbf{S}) - \alpha_2 \delta_2(\mathbf{S}), \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

natomiast 
$$\delta_i(\mathbf{S}) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_i \mathbf{x}|, i = 1, 2 .$$

W szczególności dla oscylatora tłumionego Mathieu z dowolnym, ograniczonym zaburzeniem sztywności, można uzyskać następujące warunki dostateczne stabilności:

$$\boxed{(p \geq (q/2)^{1/2} \wedge \alpha_2 < q) \vee (p < (q/2)^{1/2} \wedge \alpha_2 < 2p\sqrt{q-p^2})} \quad (5.2.25)$$

(Radziszewski [90], [92], Ossowski [55]). □

Liczbową ilustracją podanych wyżej wyników ogólnych są dwa kolejne przykłady (Ossowski [55], [58]).

**Przykład 5.3:** (Wielowymiarowa funkcja Lapunowa oscylatora niestacjonarnego)  
Zbadamy stabilność oscylatora z zaburzonymi parametrami za pomocą wielowymiarowej funkcji Lapunowa. Przyjmując parametry  $p = 1, q = 1$  w inkluzji



(5.2.19) oraz macierz funkcji Lapunowa w postaci  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$ ,  $a - b^2 > 0$ , dostajemy następujący wzór na wskaźnik zbieżności  $\gamma_{12} = \min[\gamma_+, \gamma_-]$ , gdzie

$$\gamma_{\pm} = 1 \pm \alpha_1 - \sqrt{[b - (1 \pm \alpha_1)]^2 + \frac{(a - 2b^2 + 2b(1 \pm \alpha_1) - 1 + \alpha_2)^2}{4(a - b^2)^2}}. \quad (5.2.26)$$

Rozpatrując dalej zagadnienie w klasie kanonicznych funkcji Lapunowa, dla których  $a = 2b^2 - 2b + 1$ , dostajemy następujące miary obszaru stabilności w przestrzeni parametrów:

$$\mu_1 = (b - 1)(2 - b)/b, \quad \mu_2 = 2(b - 1)\sqrt{b(2 - b)}, \quad \mu_0 = \mu_1 \cdot \mu_2. \quad (5.2.27)$$

Przeprowadzając optymalizację macierzy funkcji Lapunowa według tych miar, otrzymamy następujące optymalne wartości parametrów  $a$ ,  $b$  trzech składowych wektorowej funkcji Lapunowa:

$$\begin{aligned} a_0 &\cong 2.6991, & a_1 &\cong 5 - 2\sqrt{2} \cong 2.1715, & a_2 &\cong 2 + \sqrt{2} \cong 3.4142 \\ b_0 &\cong 1.5486, & b_1 &\cong \sqrt{2} \cong 1.4142, & b_2 &\cong 1 + \sqrt{2}/2 \cong 0.1715 \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

i odpowiednie wartości optymalne miar  $\mu_0 \cong 0.1467$ ,  $\mu_1 = 0.1715$ ,  $\mu_2 = 1$ . Obszar kwadratowej stabilności w przestrzeni parametrów  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  dla rozważanego oscylatora z zaburzeniami parametrów będzie miał postać sumy zbiorów określonych następującymi nierównościami w przestrzeni parametrów  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ :

$$4b_i(2 - b_i - 2\alpha_i)(b_i^2 - 1)^2 > (2b_i\alpha_1 + \alpha_2)^2, \quad i = 0, 1, 2. \quad (5.2.29)$$

Powyższy wynik jest dokładny, ale otrzymany dla kanonicznej funkcji Lapunowa.  $\square$

**Przykład 5.4:** (*Zakres ruchu oscylatora z wymuszeniem*) ( Ossowski [55] )

Rozważmy oscylator liniowy o jednym stopniu swobody, opisany inkluzją (5.2.19), gdzie  $q=1$ ,  $p<1$ ,  $\alpha_1=0$ ,  $\alpha_2=0$ ,  $\alpha_3=\alpha>0$ . Wtedy antyoptymalne wymuszenie siłowe  $z_3$  będzie miało postać  $z_3 = \alpha \text{sign}[bx_1 + x_2]$ . Rozpatrując zagadnienie w klasie macierzy  $\mathbf{S}$ , dla których parametr  $a = 2b^2 - 2pb + 1$ , dostajemy następujący wzór na wskaźnik zbieżności wykładniczej układu:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] = \begin{cases} b - \frac{\alpha^2}{8c^2(p-b)}, & \text{dla } 0 < b \leq 2p/3, \\ 2p - b - \alpha/c, & \text{dla } b > 2p/3. \end{cases} \quad (5.2.30)$$

Przyjmując za kryterium optymalizacji funkcji Lapunowa minimum pola powierzchni elipsy granicznej  $B(\mathbf{S}, c_\infty)$ , można wyznaczyć optymalną funkcję Lapunowa oraz najlepsze oszacowanie promienia  $c_\infty$ . Na przykład dla parametru tłumienia  $p = 0.5$  dostaniemy następujące optymalne parametry macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa:  $a \approx 0.875$ ,  $b \approx 0.24$  oraz optymalne oszacowanie zakresu ruchu:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + x_2^2 \leq c_\infty^2 \leq 2\alpha^2. \quad \square$$

Podane wyżej wyniki mogą być bezpośrednio zastosowane na przykład do badania i syntezy układów zawieszenia pojazdów. Przy konstrukcji tego typu układów zwykle chodzi o oszacowanie i minimalizację drgań nadwozia wywołanych nierównościami nawierzchni drogi. Rzecz w tym, że stan nawierzchni może być różny i rzadko jest znany. Zatem optymalizacja układu nie powinno odbywać się pod kątem konkretnego profilu nawierzchni, lecz raczej pewnej ich klasy. Dlatego właściwym modelem dynamiki takiego układu jest odpowiednia inkluzja różniczkowa. Przyjmując określoną prędkość pojazdu  $v$  oraz dowolny profil nawierzchni drogi (o ograniczonym wahanii i pochodnej) i zakładając wymuszenie kinematyczne oraz stały kontakt koła z nawierzchnią, możemy dla równoważnych sił wymuszających wyznaczyć ograniczenie  $\alpha$  jako funkcję prędkości pojazdu i klasy nawierzchni. Dzięki temu można oszacować zakres drgań nadwozia nie zakładając żadnych zdeterminowanych charakterystyk nierówności drogi (bo te zwykle nie są znane) i przeprowadzić optymalizację układu pod kątem minimalizacji zakresu tych drgań.

Analogicznie można przeprowadzić analizę dla układów wibroizolacji, gdzie wymuszenie działa na układ drgający, a siły dynamiczne przenoszą się na podłoże. Inkluzje różniczkowe opisujące takie układy mają bowiem identyczną postać, jak w rozważonym wyżej przypadku.

Należy dodać, że nie ma zasadniczego problemu, aby rozważyć modele układów zawieszenia, czy wibroizolacji o większej liczbie stopni swobody. Koncepcja nie ulega przy tym zmianie, a jedyne trudności wynikają ze zwiększonej liczby optymalizowanych parametrów macierzy funkcji Lapunowa.

W literaturze istnieje pokaźna liczba prac na temat oszacowania zakresu ruchu dowolnego układu liniowego o wielu stopniach swobody, będącego pod wpływem niestacjonarnych wymuszeń (Shahrucz [98]). Jest to problem ważny z praktycznego punktu widzenia i jak najbardziej jakościowy, ponieważ dotyczy znajdowania takich oszacowań bez znajomości rozwiązań modelu. W tym celu stosuje się różne podejścia bazujące na analizie funkcjonalnej oraz metodach algebraicznych, wykorzystujących pojęcie wartości własnych macierzy układu.

Kolejny problemat pokazuje, jak ten problem można rozwiązywać przy pomocy metody optymalnych funkcji Lapunowa.

**Problem 5.6:** (Oszacowanie obszaru granicznego dla układu z wymuszeniem)

Rozważmy model układu (konstrukcji) liniowego, będącego pod działaniem niestacjonarnej siły  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}z(t)$  działającej w kierunku wektora  $\mathbf{B}$  i ograniczonej  $\|z\|_\infty \leq \alpha < \infty$ . Taki rodzaj obciążenia jest typowy w układach o stałe działających wymuszeniach, na przykład mostu obciążonego ruchem pojazdów. Mimo iż dokładny przebieg funkcji siły  $f(t)$  na ogół nie jest znany (zwłaszcza zawczasu), ważną rzeczą, z punktu widzenia bezpieczeństwa i niezawodności, byłaby możliwość oszacowania odpowiedzi konstrukcji na takie wymuszenie. Można tego dokonać stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa, traktując to zagadnienie jako problem własności stabilności układu w otoczeniu punktu stacjonarnego przy wymuszeniach stałe działających (Bogusz [10]).

Aby to pokazać, rozważmy następujący model układu z wymuszeniem:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot z(t) : |z| \leq \alpha\}, \mathbf{x} = [\mathbf{X}^T, \dot{\mathbf{X}}^T]^T, \quad (5.2.31)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą stabilną, natomiast  $\mathbf{B}$  jest stałym wektorem przestrzeni  $R^n$ . Stosując kwadratową funkcję Lapunowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  i korzystając z ogólnego oszacowania (5.2.11), dostajemy następujące oszacowanie na wskaźnik zbieżności:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] = - \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}] - \frac{\alpha}{c} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} = \gamma_0(\mathbf{S}) - \frac{\alpha}{c} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}, \quad (5.2.32)$$

gdzie  $\gamma_0(\mathbf{S})$  jest wskaźnikiem stabilności stacjonarnego układu liniowego o macierzy  $\mathbf{A}$ , natomiast  $c$  jest promieniem elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < c^2\}$ , będącej oszacowaniem obszaru asymptotycznego (granicznego) rozważanego układu. Ponieważ układ swobodny jest stabilny, istnieje dodatnio określona macierz  $\mathbf{S}$  taka, że  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$ , a trajektorie układu zbiegają wykładniczo do punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Efektem jakościowym stałe działających zaburzeń jest utrata własności wykładniczej zbieżności trajektorii do punktu na rzecz zbieżności do obszaru granicznego. W metodzie funkcji Lapunowa obszar ten jest szacowany za pomocą elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  o promieniu wynikającym z warunku stabilności  $\gamma[\mathbf{S}, c] > 0$ . Korzystając z oszacowania (5.2.32) dostajemy następujące oszacowanie odpowiedzi układu:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} < \tilde{c}_\infty(\mathbf{S}) = \alpha \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} / \gamma_0(\mathbf{S}). \quad (5.2.33)$$

Chcąc uzyskać najlepsze oszacowanie, możemy przeprowadzić optymalizację macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa, na przykład maksymalizując objętość elipsoidy granicznej  $B(\mathbf{S}, \tilde{c}_\infty(\mathbf{S}))$ .

Warto przy tym zwrócić uwagę na fakt, że antyoptimalne wymuszenia, mające w tym przypadku następującą postać:  $z(\mathbf{x}(t)) = \alpha \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t)]$ , wcale nie są harmoniczne, lecz przedziałami stałe typu bang-bang. Częstość przełączeń będzie

odpowiadała częstości z jaką trajektoria układu przecina hiperpłaszczyznę o równaniu  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0$ . W szczególności, w przypadku drgań wolno gasnących o pewnej częstości (własnej)  $\omega$ , częstość przełączeń antyoptymalnej siły wymuszającej będzie również  $\omega$ , co będzie odpowiadało warunkom rezonansu.  $\square$

Liczbowa demonstracją powyższych rozważań są dwa kolejne przykłady:

**Przykład 5.5:** (*Obszar stabilności SLG liniowego układu nieautonomicznego*)

Rozważmy układ postaci (5.2.31) o dwóch stopniach swobody, przyjmując następujące macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  układu i optymalną macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.2.34)$$

Jak widać, jest to układ dwóch sprzężonych oscylatorów z jednakowym wymuszeniem siłowym każdego z nich. Przyjmując parametr  $\alpha$  jako ograniczenie sił dostaniemy z rachunków wartości wskaźników  $\gamma_0(\mathbf{S}) = 0.5$ ,  $\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \approx 1$  oraz z (5.2.33) – promienie granicznych elipsoid  $c_{\infty}(\mathbf{S}) \leq 4/0.5 = 8\alpha$ ,  $c_{\infty}(\mathbf{S}) \approx 4\alpha$ .  $\square$

**Przykład 5.6:** (*Stabilność budynku pod wpływem wymuszeń zewnętrznych*)

Rozważmy następujący znormalizowany model trzypiętrowego budynku pod działaniem wymuszenia  $z(t)$  pochodzącego od poziomych drgań gruntu:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2p\dot{x}_1 + 5qx_1 - 2qx_2 = -z(t), \\ \ddot{x}_2 + 2p\dot{x}_2 + 3qx_2 - 2qx_1 - qx_3 = -z(t), \\ \ddot{x}_3 + 2p\dot{x}_3 + qx_3 - qx_2 = -z(t). \end{cases} \quad (5.2.35)$$

W modelu zakłada się, że każde piętro budynku ma jednakową masę i jednakowy współczynnik tłumienia wiskotycznego  $2p$  przemieszczeń poziomych, natomiast sztywność między poszczególnymi piętrami, rozumiana jako współczynnik oporu przeciwdziałającego poziomym przemieszczeniom, rośnie liniowo od wartości  $q > p^2$  na trzecim piętrze, do wartości  $3q$  na parterze. Przemieszczenie poziome  $i$ -tej kondygnacji jest oznaczone przez  $x_i$ , natomiast niestacjonarne poziome przyspieszenie gruntu – przez  $z(t)$ .

Model (5.2.35) w wersji macierzowej będzie miał postać inkluzji (5.2.31), gdzie wektor stanu  $\mathbf{x} = [x_1, y_1 = \dot{x}_1, x_2, y_2 = \dot{x}_2, x_3, y_3 = \dot{x}_3]^T$ , natomiast macierze układu będą następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5q & -2p & 2q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2q & 0 & -3q & -2p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & q & 0 & -q & -2p \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2.36)$$

Oszacowanie zakresu ruchu takiego układu pod wpływem stałe działających zaburzeń  $z$  można otrzymać, stosując regularną funkcję Lapunowa o następującej macierzy:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5q & p & -2q & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2q & 0 & 3q & p & -q & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2.37)$$

Wówczas wskaźnik stabilności dla układu bez wymuszenia będzie równy  $\gamma_0(\mathbf{S}) = p$ , a norma  $\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} = \sqrt{3}$ . Korzystając ze wzoru (5.2.33) dostajemy następujące oszacowanie zakresu ruchu (stanu) budynku (Ossowski [84]):

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} \leq c_{\infty}(\mathbf{S}) = \alpha \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} / \gamma_0(\mathbf{S}) = \frac{\alpha \sqrt{3}}{p}. \quad (5.2.38)$$

Jak widać, zwiększanie współczynnika tłumienia  $p$  (w rozważanym przedziale podkrytycznym  $q > p^2$ ) zmniejsza normę wzbudzonego ruchu układu i zwiększa wskaźnik zbieżności wykładniczej.  $\square$

Opisaną metodę można łatwo uogólnić na modele o większej liczbie stopni swobody, opisujące dynamikę budynków wielopiętrowych, jako że można do ich analizy stosować regularne funkcje Lapunowa (Ossowski [84]).

Omówimy teraz zagadnienie o dużym znaczeniu praktycznym.

**Problem 5.7:** (*Stabilność układu o parametrze przedziałowym i niestacjonarnym*) Rozważmy problem stabilności układu liniowego o macierzy zależnej od jednego parametru mającego składową przedziałową  $p$  i składową niestacjonarną  $z$ . Jeżeli struktura zależności macierzy układu od tego parametru określona jest przez macierz  $\mathbf{C}$ , to możemy taki układ modelować za pomocą następującej inkluzji zupełnej:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + p \cdot \mathbf{C} + z \cdot \mathbf{C} : p \in \Gamma([p_{\min}, p_{\max}]) \wedge |z| \leq \alpha\}, \quad (5.2.39)$$

gdzie macierz  $\mathbf{A}$  opisuje część układu niezależną od parametru, natomiast  $\Gamma([p_{\min}, p_{\max}]) = \Gamma(P)$  jest zbiorem wszystkich stałych funkcji czasu  $t \geq t_0$ , o wartościach w przedziale  $[p_{\min}, p_{\max}]$ . Powyższe zadanie można by w zasadzie uprościć przyjmując, że parametr  $p$  jest zaburzeniem w granicach  $(p_{\min} - \alpha, p_{\max} + \alpha)$ . Wtedy zadanie sprowadza się do problemu stabilności układu z zaburzeniami niestacjonarnymi. W tym problemacie chodzi jednak o zastanowienie się, czy i jak można wykorzystać tę bardziej precyzyjną informację o danym parametrze układu do oszacowania własności niezawodnej stabilności układu.

Postępując zgodnie z zasadami przedstawionymi w Rozdziale 3, możemy wskaźnik stabilności takiego układu wyrazić następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{S}) &= - \sup_{p \in \Gamma(P)} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{|z| \leq \alpha} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2} + (p + z) \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2} \right] = \\ &= - \sup_{p \in \Gamma(P)} \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + p \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} + \alpha \cdot \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} \right| \right] = \min[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}], \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

gdzie wskaźniki  $\gamma_{\min}$ ,  $\gamma_{\max}$  są określone, jak następuje:

$$\gamma_{\min(\max)} = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + p_{\min(\max)} \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} + \alpha \cdot \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} \right| \right]. \quad (5.2.41)$$

Podane wyżej przekształcenia było możliwe, ponieważ suprema względem  $p$  oraz  $z$  są od siebie niezależne (co jest słuszne przy założeniu milcząco tu poczynionym, że składowa przedziałowa i niestacjonarna nie są skorelowane).

Strategia zaburzeń niestacjonarnych jest w tym przypadku standardowa, czyli określona przez sprzężenie zwrotne  $\hat{z}(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}]$ , natomiast strategia parametru przedziałowego, jako zaburzenia stacjonarnego, polega na niezależnym od  $\mathbf{x}$  wyborze skrajnej (min lub max) wartości parametru  $p$ . Zatem rozpatrywany problem stabilności inkluzji jest skończenie rozwiązywalny, ponieważ wystarczą dwa cięcia wiązki inkluzji (5.2.39), mianowicie  $(p_{\min}, \hat{z}(\mathbf{x}))$ ,  $(p_{\max}, \hat{z}(\mathbf{x}))$ , aby orzekać o jej o stabilności.

Jeżeli forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$  jest nieujemna (lub niedodatnia), zaburzenia niestacjonarne przyjmują stałą wartość  $\alpha$  (lub  $-\alpha$ ), natomiast antyoptimalna wartość przedziałowa parametru będzie odpowiednio równa  $p_{\max}$  (lub  $p_{\min}$ ).

Bardziej złożony jest przypadek, gdy struktura zaburzeń parametru, określona macierzą  $\mathbf{C}$  jest taka, że forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$  nie jest określonego znaku. Wtedy, jak to wynika z (5.2.41), dla dużych wartości amplitudy  $\alpha$  (czyli dla niestacjonarnych zaburzeń parametru  $p$  dużych w porównaniu z jego składową przedziałową) składowa przedziałowa przyjmuje wartość  $p_{\min}$ , jeżeli forma kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$  jest ujemna w punkcie  $\mathbf{x}_{\mathbf{C}}$  maksymalizującym jej moduł, natomiast przyjmuje wartość

$p_{\max}$ , jeżeli ta forma dla  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_C$  jest dodatnia. Z kolei dla  $\alpha \rightarrow 0$  wartość przedziałowa parametru będzie analogicznie uzależniona od znaku formy  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$  w punkcie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$ , maksymalizującą formę  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}$ . Te spostrzeżenia można ująć krótko, jak następuje:

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= (p_{\max} + p_{\min})/2 + [(p_{\max} - p_{\min})/2] \cdot \text{sign}[\mathbf{x}_A^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}_A], \alpha \rightarrow 0, \\ \hat{p}_\infty &= (p_{\max} + p_{\min})/2 + [(p_{\max} - p_{\min})/2] \cdot \text{sign}[\mathbf{x}_C^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}_C], \alpha \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (5.2.42)$$

Jeśli spełniona jest nierówność  $(\mathbf{x}_A^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}_A) \cdot (\mathbf{x}_C^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}_C) < 0$ , podane wyżej wartości asymptotyczne parametru przedziałowego  $p_0, p_\infty$  nie muszą być jednakowe, ale wtedy musiałyby istnieć krytyczna wartość parametru  $\alpha = \alpha_{kr}$ , przy której taka zmiana wartości parametru przedziałowego by następowała. Jest jasne, że dla  $\alpha = \alpha_{kr}$  wartość parametru przedziałowego nie powinna mieć znaczenia. To jednak jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy forma kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} = 0$  w punkcie  $\mathbf{x}$  maksymalizującym wyrażenie pod supremum (5.2.42). Musiałby to być punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A$ , a więc musiałyby być  $(\mathbf{x}_A^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}_A) = 0$ . Ponieważ punkt  $\mathbf{x}_A$  zależy tylko od macierzy  $\mathbf{A}, \mathbf{S}$ , a nie zależy od  $\mathbf{C}$ , taką możliwość krytycznej zmiany parametru przedziałowego należy uznać za sytuację szczególną. Zatem wykazaliśmy, że na ogół antyoptimalna strategia składowej przedziałowej parametru będzie sprowadzała się do wyboru jednej skrajnej wartości, niezależnej od amplitudy zaburzeń niestacjonarnych  $\alpha$ .

Akceptując przybliżoną analizę własności stabilności rozważanego układu, można też skorzystać z następującego prostszego oszacowania:

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{S}) &\geq \tilde{\gamma}(\mathbf{S}) = -\sup_p \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + p \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}] - \alpha \cdot \delta(\mathbf{S}) = \\ &= \min_{p \in [p_{\min}, p_{\max}]} \{-\sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + p \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}]\} - \alpha \cdot \delta(\mathbf{S}),\end{aligned}\quad (5.2.43)$$

gdzie  $\delta(\mathbf{S}) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}|$ . Oszacowanie to całkowicie potwierdza wcześniejszy,

dokładny wynik o strategii składowej przedziałowej parametru  $p$ .

Podane wyżej rozważania przebiegają analogicznie w przypadku układów z wieloma parametrami przedziałowymi z zaburzeniami niestacjonarnymi.  $\square$

Dotychczas rozważaliśmy układy z zaburzeniami addytywnymi, które nie były od siebie zależne. Założenie niezależności znakomicie upraszcza problem określenia antyoptimalnej strategii zaburzeń. Zaburzenia w realnych układach mogą być jednak zależne i to na dwa sposoby: poprzez własne ograniczenia i zależności statystyczne albo poprzez nieaddytywne oddziaływanie na dynamikę układu.

Poniższe dwa przykłady ilustrują, jak można postępować w obu wymienionych wyżej przypadkach.

**Przykład 5.7:** (*Stabilność układu z dwoma niestacjonarnymi zaburzeniami*)

Rozważmy zagadnienie stabilności układu liniowego (z dwoma zaburzeniami zależnymi od siebie poprzez ograniczenia), opisanego następującą inkluzją zupełną:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \left\{ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1 z_1 + \mathbf{B}_2 z_2, \left( |z_1| \leq \alpha \wedge |z_2| \leq \beta \right) \vee \left( |z_1| \leq \beta \wedge |z_2| \leq \alpha \right) \right\}, \quad (5.2.44)$$

gdzie  $\alpha \leq \beta$ . Przyjęte ograniczenia zaburzeń dobrane są zgodnie z *zasadą Turkstry*, która mówi, że tylko jedno z zaburzeń układu może w danym okresie osiągać szczytową wartość (w tym przypadku  $\beta$ ), natomiast pozostałe zaburzenia nie przekraczają pewnej wartości przeciętnej  $\alpha$ .

Wskaźnik stabilności tego układu będzie wyrażał się następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{z_1, z_2} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_1 \cdot \frac{\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_2 \cdot \frac{\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (5.2.45)$$

gdzie supremum względem zaburzeń jest liczone po zbiorze spełniającym założone ograniczenia (5.2.44). Nietrudno wydedukować, że antyoptymalne zaburzenia będą równe

$$z_i(\mathbf{x}) = \eta_i \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \quad i=1, 2, \quad (5.2.46)$$

gdzie  $(\eta_1, \eta_2) = (\alpha, \beta)$ , gdy  $|\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \leq |\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}|$  oraz  $(\eta_1, \eta_2) = (\beta, \alpha)$  w przeciwnym wypadku. Oznacza to, że do badania własności stabilności rozważanego układu wystarczy zastosować dwa przybliżone wskaźniki zbieżności wykładniczej:

$$\tilde{\gamma}_1[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \frac{\alpha}{c} \|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} - \frac{\beta}{c} \|\mathbf{B}_2\|_{\mathbf{S}}, \quad \tilde{\gamma}_2[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \frac{\alpha}{c} \|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} - \frac{\beta}{c} \|\mathbf{B}_2\|_{\mathbf{S}}. \quad (5.2.47)$$

Z warunku  $\min[\tilde{\gamma}_1(\mathbf{S}), \tilde{\gamma}_2(\mathbf{S})] > 0$  dostatecznego dla wnikania trajektorii układu do wnętrza elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  wynika następujące oszacowanie promienia elipsoidy granicznej:

$$c_{\infty} \leq \tilde{c}_{\infty}(\mathbf{S}) = \max[\alpha \|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} + \beta \|\mathbf{B}_2\|_{\mathbf{S}}, \beta \|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} + \alpha \|\mathbf{B}_2\|_{\mathbf{S}}] / \gamma_0(\mathbf{S}). \quad (5.2.48)$$

Widać, że oszacowanie to jest lepsze od tego, które dostalibyśmy przy założeniu, że oba zaburzenia układu są niezależne i mogą jednocześnie przyjmować wartości skrajne  $\pm\beta$ . □



**Przykład 5.8:** (Stabilność układu z nieaddytywnym wpływem zaburzeń)

Rozważmy układ liniowy z zaburzeniami opisany następującą inkluzją:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \left\{ \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1 z_1 + \mathbf{B}_2 z_1 z_2 : |z_1| \leq \alpha_1 \wedge |z_2| \leq \alpha_2 \right\}. \quad (5.2.49)$$

Multiplicatywny składnik zawierający  $z_1 z_2$  sprawia, że oddziaływanie zaburzeń na układ nie jest addytywne. Z taką sytuacją możemy mieć do czynienia w układach, w których działanie jednej siły na układ zależy od innej siły (na przykład zależność siły tarcia od siły nacisku do niej prostopadłej).

Wskaźnik stabilności dla układu (5.2.49) wyraża się następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{z_1, z_2} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_1 \cdot \frac{\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_1 z_2 \cdot \frac{\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (5.2.50)$$

Jak widać, zaburzenie  $z_2$  zawsze można dobrać tak, aby odpowiedni składnik pod supremum był nieujemny. Zatem antyoptymalną strategię zaburzeń możemy określić w dwóch etapach. Najpierw zaburzenia  $z_1$  przybierają wartość stosowną do znaku funkcji  $\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ , a następnie zaburzenia  $z_2$  przybierają wartość stosowną do znaku funkcji  $z_1 \mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ . Wynikają z tego następujące strategie zaburzeń:

$$z_1(\mathbf{x}) = \alpha_1 \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \quad z_2(\mathbf{x}) = \alpha_2 \cdot \text{sign}[(\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}) \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}]]. \quad (5.2.51)$$

Dostajemy na tej podstawie następujące oszacowanie wskaźnika zbieżności:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, c] &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\alpha_1}{c} \cdot |\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}| + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{c} \cdot |\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right] \geq \\ &\geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \frac{\alpha_1}{c} \|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{c} \|\mathbf{B}_2\|_{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (5.2.52)$$

gdzie  $\gamma_0(\mathbf{S})$  jest wskaźnikiem stabilności dla stabilnej i stacjonarnej części układu.

Uwzględniając drobne modyfikacje, można przeprowadzić analizę stabilności rozważanego układu analogicznie jak w przypadku układów z niezależnymi zaburzeniami. W szczególności, z warunku  $\tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] > 0$  zbieżności wykładniczej dostajemy następujące oszacowanie promienia granicznej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ :

$$c > \tilde{c}_{\min}(\mathbf{S}) = \alpha_1 \cdot \frac{\|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} + \alpha_2 \|\mathbf{B}_2\|_{\mathbf{S}}}{\gamma_0(\mathbf{S})}. \quad \square \quad (5.2.53)$$

Liczne przykłady przytoczone w tym paragrafie, mające na celu ilustrację możliwości metody optymalnych funkcji Lapunowa, nie wyczerpują oczywiście wszystkich ważnych zagadnień stabilności układów liniowych niestacjonarnych.

### 5.3 Stabilność układów quasiliniowych

Układy mechaniczne czy mechatroniczne na ogół nie są ani liniowe, ani stacjonarne. Niestacjonarność układów rzeczywistych, rozpatrywanych w poprzednim paragrafie wynika z zaburzeń parametrów układu oraz niekontrolowanych wymuszeń zewnętrznych. Z kolei nieliniowości modelu są przeważnie efektem nieliniowości geometrycznych lub materiałowych w realnym układzie, które ujawniają się wówczas, gdy odkształcenia w układzie są względnie duże. Nieliniowe zaburzenia addytywne w układzie mechatronicznym mogą być też efektem działania nieliniowych sprzężeń zwrotnych, modelujących na przykład pewne uszkodzenia (Ossowski [83]). Wraz z pojawieniem się nieliniowości mogą pojawić się dodatkowe punkty równowagi układu. Wtedy punkt nominalny  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  może nie być globalnie asymptotycznie (wykładniczo) stabilny.

W niniejszym paragrafie omówimy zagadnienie stabilności układów stacjonarnych quasiliniowych tzn. układów o dominującej części liniowej w otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , w przypadku, gdy zanedbywalne są niestacjonarne zaburzenia układu.

Quasiliniowość układu dynamicznego odnosi się zawsze do pewnej własności jakościowej. Układem quasiliniowym  $\{\mathbf{A}, \mathbf{G}\}$  względem danej własności jakościowej będziemy nazywali układ dynamiczny następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (5.3.1)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą stałą, natomiast  $\mathbf{G}$  jest taką funkcją nieliniową, że układy  $\{\mathbf{A}, \mathbf{G}\}$  i  $\{\mathbf{A}, \mathbf{0}\}$  wykazują daną własność jakościową (na przykład stabilność) lokalnie w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Zatem dany układ nie będzie quasiliniowy tylko ze względu na szczególną postać równań ruchu, z których można wydzielić liniową część główną  $\{\mathbf{A}, \mathbf{0}\}$  oraz nieliniowe zaburzenie  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ . Zaburzenia muszą mieć odpowiednią postać i być na tyle małe, aby zachowana była dana własność jakościowa. Tylko wtedy badanie układu nieliniowego pod względem tej własności można zastąpić badaniem jego części liniowej, na przykład uzyskanej w wyniku linearyzacji układu.

Dalej będziemy rozważali przypadek, gdy własnością jakościową jest lokalna stabilność wykładnicza punktu stacjonarnego. Dla takiego przypadku podstawową rolę odgrywa następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 5.4:** Jeżeli część liniowa  $\{\mathbf{A}, \mathbf{0}\}$  układu quasiliniowego  $\{\mathbf{A}, \alpha\mathbf{G}\}$  (gdzie  $\alpha > 0$  jest parametrem skalującym), jest wykładniczo stabilna według pewnej normy, to układ  $\{\mathbf{A}, \alpha\mathbf{G}\}$  też jest wykładniczo stabilny według tej normy lokalnie w otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

*Dowód:* wynika z oszacowania (3.4.2), tzn.  $\gamma(\mathbf{S}) \geq \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha \cdot \delta(\mathbf{S}, \mathbf{G})$ , gdzie wskaźnik  $\gamma_0(\mathbf{S})$  jest z założenia dodatni, a poprawka  $\delta(\mathbf{S}, \mathbf{G}) \geq 0$  jest obliczona na pewnej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ . Ponieważ  $\delta(\mathbf{S}, \mathbf{G}) \rightarrow 0$ , gdy  $c \rightarrow 0$ , to wskaźnik

stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$  układu zaburzonego będzie dodatni w dostatecznie małym otoczeniu (elipsoidzie) punktu stacjonarnego. Zatem układ zaburzony nieliniowością będzie lokalnie wykładniczo stabilny według normy określonej przez macierz  $\mathbf{S}$ . ♦

Skoro lokalna wykładnicza stabilność jest własnością odporną na nieliniowe zaburzenia, celem analizy układów quasiliniowych może być na przykład oszacowanie na ile dana nieliniowość  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  wpływa na oszacowanie obszaru stabilności układu w przestrzeni stanu.

Oszacowanie podane w twierdzeniu 5.4 można łatwo uogólnić na klasę układów ze skończoną liczbą addytywnych nieliniowości, co pokażemy w kolejnym problemacie. Wadą tego oszacowania jest jednak to, że traktuje nieliniowości jako czynniki niekorzystnie wpływające na stabilność układu, bo zmniejszające oszacowanie wskaźnika stabilności. Trudno jest bowiem wskazać dobre oszacowanie, które dowodziłoby, że dany składnik nieliniowy powiększa wskaźnik stabilności. Powstaje zatem pytanie, czy w ogóle jest możliwe wykrycie takiej sytuacji metodą funkcji Lapunowa. Analizując wzór (3.4.2) łatwo zauważyć, że nieliniowość może mieć korzystny wpływ na wartość wskaźnika stabilności tylko wtedy, gdy współczynnik  $\alpha$  jest dostatecznie mały oraz  $\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}}) < 0$ , gdzie  $\hat{\mathbf{x}}$  jest optymalnym punktem, w którym zbieżność części liniowej jest krytyczna (najmniejsza). Wykrycie takiej sytuacji jest możliwe za pomocą obliczeń numerycznych lub wtedy, gdy można ściśle wyznaczyć wskaźnik stabilności

**Problem 5.8:** (Stabilność układów z nieliniowymi zaburzeniami)

Ogólny problem stabilności liniowych układów dynamicznych z zaburzeniami można traktować metodą optymalnych wielowymiarowych funkcji Lapunowa (Ossowski [69]). Poniżej, dla ilustracji, zastosujemy tę metodę do pewnej szczególnej klasy układów następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + z_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + z_2 \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \dots + z_k \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) : |z_i| \leq \alpha_i, i = 1, \dots, k\}, \quad (5.3.2)$$

gdzie  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_1$  są stałymi macierzami  $n \times n$ ,  $\mathbf{A}$  jest macierzą stabilną, natomiast funkcje  $\mathbf{F}_i(\mathbf{x})$ ,  $i=1, \dots, k$  są jednorodnymi funkcjami wielomianowymi (odpowiedniego stopnia  $i$ ) względem współrzędnych stanu  $\mathbf{x}$ . Wskaźnik stabilności dla takiego układu, obliczony na pewnej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ , będzie równy

$$\gamma(\mathbf{S}, c) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_1 \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_2 \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}_2(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \dots + z_k \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}_k(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right],$$

a antyoptymalne strategie zaburzeń będą następującej postaci:

$$z_1(\mathbf{x}) = \alpha_1 \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}], \quad z_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}_i(\mathbf{x})], \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.3.3)$$

Zatem wskaźnik zbieżności układu będzie określony przez następujące supremum

$$\gamma[\mathbf{S}, c] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \alpha_1 |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}| + c \alpha_2 |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}_2(\mathbf{x})| + \dots + c^{k-1} \alpha_k |\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}_k(\mathbf{x})|]$$

W dalszych rozważaniach zastosujemy dla uproszczenia następujące oszacowanie:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] \geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1 \cdot \gamma_1(\mathbf{S}) - \alpha_2 c \cdot \gamma_2(\mathbf{S}) + \dots - \alpha_k c^{k-1} \cdot \gamma_k(\mathbf{S}), \quad (5.3.4)$$

gdzie wielkości pomocnicze są określone, jak następuje:

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad \gamma_1(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}, \quad \gamma_i(\mathbf{S}) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}_i(\mathbf{x})|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \quad (5.3.5)$$

dla  $i = 1, \dots, k$ . Jak widać, jest to oszacowanie wskaźnika stabilności w postaci funkcji wielomianowej względem promienia  $c$  elipsoidy stabilności  $B(\mathbf{S}, c)$ . Analizę stabilności przeprowadzimy przy założeniu, że  $\alpha_k \gamma_k \neq 0$  oraz  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$ , co oznacza, że  $\mathbf{S}$  jest macierzą funkcji Lapunowa dla układu liniowego bez zaburzeń  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ .

Z oszacowania (5.3.4) wynika następujący warunek konieczny stabilności:

$$\gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1 \cdot \gamma_1(\mathbf{S}) > 0. \quad (5.3.6)$$

Warunek ten, niezależny od wielkości promienia  $c$  elipsoidy stabilności, określa dopuszczalną wielkość liniowego zaburzenia niestacjonarnego rozważanego układu. Mianowicie, parametr  $\alpha_1$  powinien spełniać nierówność:

$$\alpha_1 \leq \alpha_{1\max}(\mathbf{S}) = \gamma_0(\mathbf{S}) / \gamma_1(\mathbf{S}) =: \mu_1(\mathbf{S}). \quad (5.3.7)$$

W dalszym ciągu będziemy więc zakładać, że warunek ten jest spełniony.

Jeżeli wszystkie parametry ograniczeń  $\alpha_2, \dots, \alpha_k > 0$  są określone, możemy poszukiwać najlepszego oszacowania obszaru stabilności układu (5.3.1) w przestrzeni stanu. W wyniku optymalizacji macierzy  $\mathbf{S}$  względem różnych miar odnoszących się do obszaru stabilności w przestrzeni stanu dostajemy wektorową funkcję Lapunowa, określoną przez zespół macierzy  $\{\mathbf{S}_j : j=1, \dots, l\}$ . Obszar stabilności kwadratowej  $X$  układu, pokrywający się z obszarem przyciągania, będzie miał wtedy postać sumy mnogościowej odpowiednich elipsoid  $B(\mathbf{S}_j, c_{\max}(\mathbf{S}_j))$ ,  $i = 1, \dots, k$ , których sens objaśniony jest w Rozdziale 3.  $\square$

Kolejny przykład ilustruje opisaną metodę szacowania obszaru stabilności.

**Przykład 5.9:** (Obszar stabilności oscylatora nieliniowego w przestrzeni stanu)  
Rozważmy problem stabilności oscylatora opisanego następująca inkluzją:

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + x_1 \in \{z_1 x_1 + z_2 x_1^2 : |z_1| \leq \alpha_1 = 3/4 \wedge |z_2| \leq \alpha_2\}. \quad (5.3.8)$$

Rozpatrując klasę macierzy funkcji Lapunowa  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $a > 1/4$  dostaniemy

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} - \frac{|a-1|}{2\sqrt{a-1/4}}, \quad \gamma_1(\mathbf{S}) = \frac{1}{2\sqrt{a-1/4}}, \quad \gamma_2(\mathbf{S}) = \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt{a-1/4}}. \quad (5.3.9)$$

Z warunku zbieżności  $\tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1\gamma_1(\mathbf{S}) - \alpha_2\gamma_2(\mathbf{S}) \cdot c > 0$  otrzymujemy następujące oszacowanie maksymalnego promienia elipsy stabilności układu:

$$c \leq c_{\max}(\mathbf{S}) = [\gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1\gamma_1(\mathbf{S})] / \alpha_2\gamma_2(\mathbf{S}). \quad \square \quad (5.3.10)$$

Jeżeli mamy zadany obszar stabilności  $X$  w przestrzeni stanu, możemy też rozpatrywać dualne zagadnienie najlepszego oszacowania obszaru stabilności układu w przestrzeni parametrów  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Wtedy  $\alpha_{1\max}(\mathbf{S})$  powinno być możliwie duże. Z tego względu możemy tę funkcję parametrów macierzy  $\mathbf{S}$  przyjąć jako pierwszą miarę optymalności  $\mu_1(\mathbf{S})$ . Aby określić pozostałe miary optymalności, należy wpiery ustalić zależność parametru  $c$  od macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa. Ponieważ  $c(\mathbf{S})$  jest minimalnym promieniem elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  zawierającej obszar  $X$ , to zależność  $c(\mathbf{S})$  wynika z samej geometrii zbiorów  $X$  oraz  $B(\mathbf{S}, c)$ . W istocie więc, dla każdej macierzy  $\mathbf{S}$  będziemy badać stabilność w odpowiedniej elipsoidzie  $\bar{X}(\mathbf{S})$ , co jest konieczne dla zapewnienia założonej stabilności układu w obszarze  $X$ .

Do optymalizacji wektorowej funkcji Lapunowa rozważanego układu dogodnie jest wprowadzić miary obszaru stabilności w każdym kierunku  $\alpha_i$ , czyli miary:

$$\mu_i(\mathbf{S}) = \gamma_0(\mathbf{S}) / c^{i-1} \gamma_i(\mathbf{S}), \quad i = 2, \dots, k \quad (5.3.11)$$

oraz miarę łączną

$$\mu_0(\mathbf{S}) = \mu_1(\mathbf{S}) \cdot \dots \cdot \mu_k(\mathbf{S}) = \gamma_0^k(\mathbf{S}) / c^{k(k-1)/2} \gamma_1(\mathbf{S}) \cdot \dots \cdot \gamma_k(\mathbf{S}), \quad (5.3.12)$$

odpowiadającą objętości obszaru stabilności układu w przestrzeni parametrów.  $\square$

Powyższe koncepcje można zastosować do badania stabilności układu liniowego dowolnego rzędu z nieliniowymi i niestacjonarnymi zaburzeniami (Ossowski [69]), co ilustruje następujący przykład.

**Przykład 5.10:** (Obszar stabilności oscylatora w przestrzeni parametrów)

Rozważymy problem stabilności nieliniowego oscylatora opisanego następującą inkluzją:

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + x_1 \in \{z_2 x_1^2 + z_3 x_1^3 : |z_2| \leq \alpha_2 \wedge |z_3| \leq \alpha_3\}. \quad (5.3.13)$$

Celem analizy będzie znalezienie optymalnego oszacowania obszaru stabilności

układu w przestrzeni parametrów  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , przy założeniu stabilności układu w kole o promieniu  $r$  w przestrzeni stanu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2 = dx_1/dt)$ .

Stosując klasę funkcji Lapunowa o macierzy  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $a > 1/4$ ,

dostaniemy następujące miary optymalizacji:

$$\mu_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\gamma_0(\mathbf{S})(a-1/4)}{c(\mathbf{S})}, \quad \mu_3 = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\gamma_0(\mathbf{S})(a-1/4)^{3/2}}{c^2(\mathbf{S})}, \quad \mu_0 = \mu_2\mu_3, \quad (5.3.14)$$

gdzie miara  $\mu_0(\mathbf{S}) = 1/2$ , natomiast

$$c(\mathbf{S}) = r \sqrt{\frac{a+1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a-1)^2 + 1}}. \quad (5.3.15)$$

Maksymalizacja powyższych miar jakości względem parametru  $a$  prowadzi do wektorowej funkcji Lapunowa o trzech składowych i następujących optymalnych wartościach parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ :

$$a_2 = 1.007, \quad a_3 = 1.227, \quad a_0 = 1.132. \quad (5.3.16)$$

Wypisując trzykrotnie warunek stabilności z macierzą  $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(a_i)$ ,  $i = 0, 2, 3$ .

$$\tilde{\gamma}[\mathbf{S}_i, c] = \gamma_0(\mathbf{S}_i) - \alpha_2 c \gamma_2(\mathbf{S}_i) - \alpha_3 c^2 \gamma_3(\mathbf{S}_i) > 0, \quad (5.3.17)$$

otrzymujemy następujące ograniczenia określające obszar stabilności rozważanego oscylatora w przestrzeni nieujemnych parametrów  $(\alpha_2, \alpha_3)$  (Ossowski [69]):

$$\begin{aligned} 0.669 \cdot r \alpha_2 + 0.795 \cdot r^2 \alpha_3 &< 0.532, \\ 0.697 \cdot r \alpha_2 + 0.785 \cdot r^2 \alpha_3 &< 0.548, \\ 0.704 \cdot r \alpha_2 + 0.766 \cdot r^2 \alpha_3 &< 0.539. \end{aligned} \quad \square \quad (5.3.18)$$

Optymalne składowe wektorowej funkcji Lapunowa są przykładem funkcji Lapunowa, które nie są optymalne dla części liniowej, stacjonarnej układu, lecz bardziej dostosowane do rozważanego problemu. Dzięki temu uzyskuje się nieco lepsze oszacowania. Jeżeli jednak wymiar układu jest duży, a nie zależy nam bardzo na wysokiej dokładności oszacowań, możemy uprościć analizę stabilności, stosując optymalną funkcję Lapunowa dla części liniowej stacjonarnej.

Na koniec rozważymy jeszcze jeden przykład, pokazujący, że dla układów nieliniowych i niestacjonarnych można niekiedy uzyskać wyniki ścisłe, niewymagające żadnych oszacowań.

**Przykład 5.11:** (Dokładny wskaźnik zbieżności dla układu nieliniowego)

Niniejszy przykład wykazuje, wbrew stereotypowym opiniom, że można dla pewnych układów nieliniowych i niestacjonarnych wyznaczyć ściśle wskaźnik

zbieżności wykładniczej. Aby to wykazać rozważmy oscylator opisany następującą inkluzją zupełną:

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + x_1 \in \{z \cdot x_1^2 : |z| \leq \alpha\}, \quad (5.3.19)$$

gdzie parametr  $\alpha$  określa amplitudę niestacjonarnych zaburzeń zależnych od kwadratowej funkcji stanu. Odpowiada temu następujący model macierzowy:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + z \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C}^T \mathbf{x})^2 : |z| \leq \alpha\}, \quad (5.3.20)$$

gdzie  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Przyjmując za  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  macierz

regularnej funkcji Lapunowa, możemy dokonać następującego wyliczenia:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, c] &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_s=c} \sup_{|z| \leq \alpha} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_s^2} + z \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2}{\|\mathbf{x}\|_s^2} \right] = \\ &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_s=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \alpha \cdot c \cdot \left| (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2 \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} - \alpha \cdot c \cdot \sup_{6\lambda^2 + 2\eta^2 = 3} \left| \lambda \cdot \eta^2 \right| \cdot \|\mathbf{B}\|_s^2 \|\mathbf{C}\|_s^4 = \\ &= \frac{1}{2} - \alpha \cdot c \cdot \|\mathbf{B}\|_s^2 \|\mathbf{C}\|_s^4 \sup_{\lambda^2 \leq 1/2} \left| \lambda \cdot \left( \frac{3}{2} - 3\lambda^2 \right)^2 \right| = \frac{1}{2} - \frac{48}{25\sqrt{10}} \cdot \alpha \cdot c. \end{aligned}$$

Otrzymany wzór na wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, c]$  jest ścisły, ponieważ do jego uzyskania nie korzystaliśmy z oszacowań. Z warunku zbieżności wykładniczej dostaniemy zatem następującą ścisłą wielkość promienia elipsoidy stabilności rozważanego oscylatora:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] = \frac{1}{2} - \frac{48}{25\sqrt{10}} \cdot \alpha \cdot c > 0 \Leftrightarrow c < c_{\max} = \frac{25\sqrt{10}}{96 \cdot \alpha} \approx \frac{0.8235}{\alpha}. \quad (5.3.21)$$

Powyższy wynik jest lepszy od wcześniejszego oszacowania  $\tilde{c}_{\max} = 0.75/\alpha$  uzyskanego za pomocą tej samej funkcji Lapunowa (Radziszewski [90], [92]). Ponieważ zastosowana tu regularna funkcja Lapunowa jest optymalna dla części liniowej układu, a niekoniecznie dla całego układu, uzyskany wynik można jeszcze nieznacznie poprawić (Radziszewski [informacja ustna]).  $\square$

Warto zaznaczyć, że przedstawione wyżej postępowanie zachowuje pełną aktualność dla układów z wieloma innymi typami nieliniowości, a w szczególności dla wielowymiarowych układów postaci (5.3.20).

## 5.4 Stabilność układów z tarciem

Układy z tarciem są szczególnym przypadkiem układów nieliniowych. Jednak ze względu na ich specyfikę oraz rolę jaką odgrywają w mechanice, celowe jest ich rozpatrzenie w oddzielnym paragrafie, co niniejszym czynimy.

Głównym problemem związanym z teoretyczną analizą układów z tarciem jest niejednoznaczność a także możliwa niestacjonarność charakterystyki sił tarcia (w szczególności tarcia suchego), które nie zawsze dają się dobrze modelować za pomocą prostych zależności analitycznych. Złożone zjawiska termiczne i materiałowe na styku dwu ciał, drgania w układach z tarciem itp. są głównym, ale być może nie jedynym źródłem wymienionych trudności. Dlatego właśnie metody jakościowe są tu bardzo przydatne. Okazuje się, że możliwe jest uzyskanie dobrych oszacowań obszarów stabilności już przy bardzo skąpych założeniach odnośnie sił tarcia, a właśnie takie założenia są często jedynie możliwe.

Można spotkać się z opinią, że nie znając (nie przyjmując) konkretnej postaci funkcji opisującej siły tarcia (suchego) nie można praktycznie nic powiedzieć na temat zachowania się układu (modelu układu). Tymczasem sytuacja jest akurat odwrotna. Wszelkie bowiem metody ilościowe, polegające na symulacji trajektorii modelu układu przyjmują konkretną postać sił tarcia, ale na ogół ta postać jest pewnym uproszczeniem rzeczywistości lub niedokładnym jej opisem. Zatem uzyskane na tej podstawie wyniki w żadnym razie nie można uznać za ilościowe. Co najwyżej można wyciągnąć pewne wnioski jakościowe. Ale czyż nie lepiej w takiej sytuacji od razu zastosować do analizy układu metody jakościowe, które wymagają znacznie mniej założeń odnośnie funkcji tarcia. Właśnie przy niepełnej, ale za to pewnej informacji o układzie metody jakościowe są szczególnie przydatne.

Zasadniczo mamy w praktyce do czynienia z dwoma rodzajami układów z tarciem suchym, mianowicie układy drgające, w których występują elementy (tłumiki) cierne pochłaniające energię układu oraz układy będące w kontakcie ciernym z innym układem dostarczającym do niego energię. W pierwszym (drugim) przypadku będziemy mieli do czynienia z drganiami tłumionymi (wzbudzanymi) siłami tarcia. Poniżej rozpatrzemy oba te przypadki przy założeniu, że siły tarcia nie zależą od położenia elementów trących, lecz tylko od ich prędkości względnej.

**Problem 5.9:** (*Stabilność układów drgających tłumionych siłami tarcia suchego*)  
Rozważmy zagadnienie stabilności liniowego układu drgającego, w którym występują siły tarcia suchego. Tego rodzaju układ można w najprostszym przypadku opisać następującym modelem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + r\mathbf{B} \cdot f(\mathbf{B}^T \mathbf{x}) \cdot \text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{x}), \quad (5.4.1)$$

gdzie wektor stanu układu  $\mathbf{x} = [x_1, \dot{x}_1, \dots, x_n, \dot{x}_n]^T$ , nieujemna funkcja  $f \geq 0$  opisuje zależność (na ogół nieliniową) sił tarcia od modułu prędkości, natomiast funkcja



*sign* – zależność od zwrotu prędkości. Wektor  $\mathbf{B}$  jest taki, że  $\mathbf{B}^T \mathbf{x}$  zależy tylko od jednej prędkości  $\dot{x}_i$ . Współczynnik  $r > 0$ , określający wielkość sił tarcia, jest wprowadzony dla wygody. Takie założenia oznaczają, że w rozważanym układzie dyskretnym występuje tylko jedna siła tarcia działająca na  $i$ -ty element (masę) układu i zależna jest od tylko prędkości tego elementu. Może to być na przykład dyskretny model budynku antysejsmicznego z ciernym tłumikiem w fundamencie.

Dalsza analiza zależy od tego, jak traktujemy siły tarcia. Jeżeli układ jest tłumiony wiskotycznie tak, że macierz  $\mathbf{A}$  jest stabilna i interesuje nas zachowanie asymptotyczne trajektorii układu dla  $t \rightarrow +\infty$ , możemy traktować tarcie jako zaburzenie układu, uniemożliwiające asymptotyczną zbieżność trajektorii do punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Wówczas, aby określić rozmiary obszaru granicznego możemy posłużyć się następującym wskaźnikiem zbieżności i jego oszacowaniem:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{r}{c} \cdot \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| f \left( \mathbf{B}^T \mathbf{x} \right) \right] \geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \frac{r}{c} \cdot \delta(\mathbf{S}), \quad (5.4.2)$$

gdzie  $\mathbf{S}$  jest macierzą funkcji Lapunowa dla układu swobodnego (bez tarcia),  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$  jest wskaźnikiem stabilności układu swobodnego (bez tarcia), natomiast wielkość pomocnicza  $\delta(\mathbf{S}) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| f \left( \mathbf{B}^T \mathbf{x} \right)$ .

Z warunku zbieżności  $\tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] > 0$ , który gwarantuje wnikanie trajektorii układu do elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ , wynika następujące oszacowanie promienia granicznej elipsoidy (stabilności):

$$c_{\infty}(\mathbf{S}) \leq \tilde{c}_{\infty}(\mathbf{S}) = r \cdot \delta(\mathbf{S}) / \gamma_0(\mathbf{S}). \quad (5.4.3)$$

Układ (5.4.1) będzie więc wykładniczo stabilny do granicznej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_{\infty})$ .

Widać, że rozmiar (promień) obszaru granicznego jest proporcjonalny do wielkości sił tarcia (czyli wielkości parametru  $r$ ). Wielkość  $\delta(\mathbf{S})$  daje się łatwo wyznaczyć lub oszacować analitycznie, na przykład dla charakterystyk tarcia  $f$  zadanych w postaci wielomianowej. W szczególnym przypadku modelu Maxwella sił tarcia suchego mamy  $f = 1$ , a wtedy  $\delta(\mathbf{S}) = \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}$ .

Należy podkreślić, że funkcja  $f$  nie określa tu w istocie konkretnego modelu sił tarcia, lecz jedynie pewne ograniczenia na wielkość tych sił. Zatem uzyskane wyniki są uniwersalne, bo są słuszne dla całej klasy modeli sił tarcia.  $\square$

**Przykład 5.12:** (Stabilność oscylatora liniowego hamowanego siłami tarcia )

Dla oscylatora liniowego o współczynnikach tłumienia i sztywności  $p, q$ , w zakresie podkrytycznym ( $q > p^2$ ), będącego pod działaniem hamujących sił Maxwella tarcia

suchego, mamy  $\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} = 1$  oraz  $\gamma_0(\mathbf{S}) = p$ , gdzie  $\mathbf{S}$  jest macierzą optymalnej funkcji Lapunowa  $V_{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = qx_1^2 + 2px_1\dot{x}_1 + \dot{x}_1^2$ . Stąd, graniczny promień elipsoidy  $\tilde{c}_{\infty}(\mathbf{S}) = r/p$ . Na tej podstawie można dalej określić niezależne ograniczenia na położenie i prędkość. Tylko na zewnątrz elipsoidy granicznej (lub opisanego na niej prostokąta) mamy zagwarantowaną wykładniczą zbieżność trajektorii układu według normy optymalnej, wyznaczonej przez macierz  $\mathbf{S}$ . Wewnątrz elipsoidy granicznej wykładnicza zbieżność na ogół nie zachodzi.  $\square$

Powyższy wniosek jest wyrazem ogólnej własności układów z tarciami. Mianowicie układy liniowe, tłumione wiskotycznie i hamowane siłami tarcia suchego, nie są asymptotycznie stabilne. Dla dostatecznie małych prędkości i/lub wychyleń z położenia  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , następuje bowiem po prostu zatrzymanie ruchu, gdy siły sprężyste i siły bezwładności nie są w stanie pokonać sił tarcia (Osiański [54]).

Uogólnienie podanych wyżej rozważań na przypadek niestacjonarnych sił tarcia ( $f$  zależna od czasu) nie przedstawia zasadniczych trudności. Dobre oszacowania można uzyskać, stosując na przykład operację  $\sup(f)$  po czasie wobec wszystkich funkcji czasu, jakie występują w modelu. Jeżeli jednak siły tarcia w układzie są praktycznie jedyną lub dominującą przyczyną pochłaniania energii, nie możemy traktować sił tarcia jako zaburzenia, a tym samym, nie można zastosować opisanej metody badania stabilności, bazującej na oszacowaniu (5.4.2). W takim przypadku do badania własności stabilności można stosować analizę numeryczną albo ściśle wartość wskaźnika zbieżności, o ile jest ona wyznaczalna analitycznie.

Omówimy teraz problem stabilności układów, w których siły tarcia nie zawsze są hamujące i mogą pompować energię do układu.

**Problem 5.10:** (*Stabilność oscylatora wzbudzanego siłami tarcia*)

Charakterystyczną cechą układów drgających, pobudzanych siłami tarcia, jest możliwość wystąpienia w nich zjawiska niestabilności w postaci drgań samowzbudnych. Akademickim przykładem tego typu układu mechanicznego jest masa zamocowana lepkosprężysto, oddziałująca siłami tarcia suchego z taśmociągiem poruszającym się ze stałą prędkością  $v=v_0$ . W najprostszej wersji układy takie można opisać następującym modelem o jednym stopniu swobody:

$$\ddot{x}_1 + 2px_1 + qx_1 = z(t, v - \dot{x}_1), \quad (5.4.4)$$

gdzie  $p$ ,  $q$  reprezentują odpowiednio znormalizowany parametr tłumienia i sztywności układu,  $v = v(t)$  jest prędkością podłoża, natomiast funkcja  $z$  reprezentuje siły tarcia suchego. Siła ta jest w ogólności zależna od różnicy prędkości masy  $\dot{x}_1$  i podłoża  $v$  oraz może być zależna jawnie od czasu, na przykład z powodu zmiany temperatury styku w czasie ruchu układu lub różnych czasów przylegania powierzchni trących. Dlatego przyjęliśmy, że  $z = z(t, v - \dot{x}_1)$ .

Wiele realnych układów, w których występuje tarcie suche można dość dobrze modelować za pomocą równania tego typu. Może to być na przykład budynek antysejsmiczny, stojący na fundamencie z ciernym pochłaniaczem energii drgań.

W niniejszym problemacie zbadamy własności stabilności modelu (5.4.4) w zależności od parametrów modelu  $p$ ,  $q$  oraz prędkości  $v$ . Nie będziemy przy tym zakładali konkretnego modelu sił tarcia w postaci funkcji  $z$ , lecz jedynie istnienie pewnej funkcji ograniczającej  $g$ , niezależnej od czasu (Ossowski [63]).

Rozważany model (5.4.4) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot z(\mathbf{x}, t) : |z(\mathbf{x}, t)| \leq g(\mathbf{x}) \}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -2p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4.5)$$

Powyższa inkluzja wyraża przyjęte założenie, że niestacjonarna funkcja nieliniowa  $z$  jest ograniczona co do modułu przez pewną funkcję niezależną od czasu, ale w ogólności zależną od stanu  $\mathbf{x}$  układu. Stosując różne ograniczenia  $g$  funkcji tarcia w istocie nie tworzymy modelu tarcia, lecz rozpatrujemy całe klasy modeli spełniające te właśnie ograniczenia. Szczegóły tych modeli nie są istotne. Dlatego uzyskane tu wyniki będą zależały tylko od tych ograniczeń. Wyniki te mogą więc być słabsze niż te, które można by uzyskać dla konkretnego modelu tarcia, ale za to są uniwersalne i ściśle dowiedzione, a nie tylko numerycznie uzasadnione.

Oczywiste jest, iż nie jest możliwa zbieżność asymptotyczna stanu układu (5.4.5) do punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , który jest stacjonarny dla układu bez tarcia. Dlatego prawidłowym podejściem do problemu jest badanie obszaru przyciągania (zbieżności wykładniczej) do pewnego obszaru granicznego. Wynikiem analizy powinno być optymalne oszacowanie obu tych obszarów, przy czym obszar przyciągania musi być szacowany z dołu, a obszar asymptotyczny – z góry.

Przyjmijmy, że  $\mathbf{S}$  jest macierzą funkcji Lapunowa dla układu swobodnego, tzn.

taką, że wskaźnik  $\gamma_0(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] > 0$ . Oznaczmy przez  $\mathbf{C} \in R^2$  niezerowy

wektor  $\mathbf{S}$  ortogonalny do wektora  $\mathbf{B}$ , tzn. taki, że  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{C} = 0$ . Wtedy wskaźnik układu z tarcie dla różnych modeli tarcia możemy oszacować, jak następuje:

*Ograniczenie stałe:* ( $g(w) = g_0 = a = \text{const}$ ): Takie ograniczenia odpowiadają w szczególności modelowi Coulomba sił tarcia suchego (Osiński [54]), ale stosują się do wszystkich przypadków, gdy siły tarcia niewiele zależą od prędkości względnej w rozpatrywanym zakresie. Nietrudno wykazać, że w takim przypadku prawdziwe jest następujące oszacowanie wskaźnika zbieżności układu:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] \geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = -\sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + a \cdot \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \right] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \frac{a}{c} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}, \quad (5.4.6)$$

gdzie antyoptymalną strategię sił tarcia będzie realizowało sprzężenie zwrotne  $z(\mathbf{x}) = a \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]$ . Co więcej, w dwuwymiarowej przestrzeni stanu wskaźnik  $\gamma_0(\mathbf{S})$  można wyrazić następującym wzorem analitycznym:

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} + \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}^2} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} - \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}^2} \right)^2 + \frac{|\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \mathbf{C}|}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}}}. \quad (5.4.7)$$

Stąd, promień elipsy granicznej będzie można oszacować, jak następuje:

$$c_{\infty}(\mathbf{S}) \leq \tilde{c}_{\infty}(\mathbf{S}) = \frac{a}{\gamma_0(\mathbf{S})} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}. \quad \square \quad (5.4.8)$$

*Ograniczenie liniowe:* ( $g(w) = a|w| + b$ ,  $a > 0, b > 0$ ): Takie ograniczenia odpowiadają sytuacji, gdy siły tarcia rosną w funkcji prędkości względnej nie szybciej niż liniowo. Wtedy prawdziwe jest następujące oszacowanie wskaźnika zbieżności układu:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, c] &\geq - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| (a |\mathbf{B}^T \mathbf{x}| + (av_0 + b)/c)] = \\ &= \gamma_1(\mathbf{S}) - \frac{av_0 + b}{c} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}, \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

gdzie wskaźnik zbieżności układu bez wymuszeń wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathbf{S}, a) &= -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} + \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}^2} + a \mathbf{B}^T \mathbf{B} \right) + \dots \\ &- \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} - \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}^2} + a \mathbf{B}^T \mathbf{B} \right)^2 + \left( \frac{|\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \mathbf{C}|}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}} + a \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Na tej podstawie dostajemy następujące oszacowanie promienia elipsy granicznej:

$$c_{\infty}(\mathbf{S}) \leq \tilde{c}_{\infty}(\mathbf{S}) = \frac{av_0 + b}{\gamma_1(\mathbf{S}, a)} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}. \quad (5.4.11)$$

*Ograniczenie kwadratowe:* ( $g(w) = aw^2 + bw + d$ ,  $a > 0, b \geq 0, d > 0$ ): Takie ograniczenia odpowiadają sytuacji, gdy siły tarcia rosną w funkcji prędkości względnej nie szybciej niż kwadratowo. Można znaleźć użyteczne oszacowania wskaźnika zbieżności również w takim przypadku. Ponieważ obliczenia i wyniki końcowe są bardziej złożone, nie będziemy ich tu przytaczać, poprzestając na skomentowaniu wyników. Otóż kwadratowa zależność sił tarcia sprawia, że układ

pod działaniem antyoptimalnych sił może być tylko lokalnie wykładniczo stabilny do pewnego obszaru granicznego. Będziemy więc tu mieli typ (0,1,0) stabilności SWN według klasyfikacji podanej w następnym paragrafie (Ossowski [63]).  $\square$

**Przykład 5.13:** (*Drgania oscylatora wymuszonego tarcie*) (Ossowski [63])

Zbadamy obszar stabilności oscylatora (5.4.4) wzbudzanego siłą tarcie suchego o stałej funkcji ograniczeń  $g(w) = a > 0$ . W klasie kanonicznych funkcji Lapunowa o macierzach

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2s^2 - 2ps + 1 & s \\ s & 1 \end{bmatrix}, s \in R \quad (5.4.12)$$

wskaźnik zbieżności dla rozważanego oscylatora będzie wyrażał się wzorem:

$$\tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \begin{cases} 2p - s - \frac{a}{c}, & \text{if } s \geq p \vee s < p \wedge c \leq \frac{a}{4(p-s)} \\ s - \frac{a^2}{8c^2(p-s)}, & \text{if } c < p \wedge c > \frac{a}{4(p-s)} \end{cases}. \quad (5.4.13)$$

z którego bezpośrednio wynika, że minimalny promień elipsy granicznej  $3a/4p$  jest osiąganym dla optymalnego parametru  $s = 2p/3$ . Zatem trajektorie oscylatora zbiegają wykładniczo do granicznej elipsy:

$$\{(x_1, x_2): (1 - 8p^2/9)x_1^2 + 4px_1x_2/3 + x_2^2 \leq 9a^2/16p^2\}.$$

Oszacowanie może wydawać się konserwatywne, lecz w istocie jest bezpieczne. Antyoptimalna siła tarcia  $z(\mathbf{x}) = a \cdot \text{sign} [\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}] = a \cdot \text{sign} [sx_1 + \dot{x}_1]$  na ogół nie jest bowiem hamująca, czyli skierowana przeciwnie do zwrotu prędkości masy drgającej. To sprawia, że w układzie antyoptimalnym następuje „pompowanie” energii do układu, dla którego dostajemy maksymalne oszacowane zbioru granicznego. Równowaga między energią dostarczaną przez siły tarcia, a energia pochłanianą przez siły dysypatywne w układzie prowadzi do drgań niegasnących. Symulacje numeryczne potwierdzają, że trajektorie układu pod działaniem antyoptimalnych wymuszeń wchodzą do podanej wyżej elipsoidy i zbiegają do cyklu granicznego, znajdującego się w jej wnętrzu, chociaż ta zbieżność nie jest już wykładnicza (Ossowski [63]).  $\square$

Przykłady analogicznych oszacowań obszarów granicznych dla oscylatora wymuszanego siłami tarcia o innych funkcji ograniczeń podane są w pracy autora niniejszej rozprawy (Ossowski [63]). W pracy tej podano też oszacowanie maksymalnej wartości prędkości  $v_0$ , poniżej której obszar graniczny oscylatora mieści się w z góry zadany otoczeniu punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Przykład 5.14:** (*Parametr tłumienia minimalizujący pole obszaru granicznego*)

Rozważmy problem optymalnego parametru tłumienia oscylatora, który zapewnia zbieżność wykładniczą trajektorii do obszaru granicznego o minimalnej powierzchni, przy założeniu sił tarcia o stałej funkcji ograniczeń  $g(w) = a > 0$ . Z przykładu 5.13 już wiemy, że dla wartości parametru  $s = 2p/3$  jest osiągany minimalny promień elipsoidy granicznej równy  $c_\infty = 3a/4p$ . Łatwo wykazać, że pole elipsoidy granicznej będzie wyrażało się następującym wzorem:

$$|B(S, c_\infty)| = \frac{27\pi \cdot a^2}{16p^2 \sqrt{9 - 8p^2}} . \quad (5.4.14)$$

Minimalizacja powyższej funkcji względem parametru tłumienia  $p$  prowadzi do wniosku, że minimalne pole elipsy granicznej oscylatora równe  $3\sqrt{3}\pi \cdot a^2/4$  jest osiąganym dla optymalnego tłumienia  $p = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$  (Ossowski [63]).  $\square$

Podane wyżej przykłady ilustrują nie tylko możliwości zastosowania metody optymalnych funkcji Lapunowa do analizy układów z tarciem, ale jednocześnie pokazują różnorodność zagadnień optymalizacji, jakie możemy formułować w odniesieniu do układów mechatronicznych, a układów z tarciem w szczególności.

Na uwagę zasługuje fakt, że przedstawiona wyżej analiza stabilności oscylatora liniowego z tarciem suchym da się uogólnić na przypadek wielowymiarowych układów z tarciem. Cała trudność wynikająca z większej liczby stopni swobody układu z tarciem będzie sprowadzała się do znalezienia klas funkcji Lapunowa dla części liniowej i stacjonarnej układu (czyli dla układu bez wymuszenia siłami tarcia), natomiast sam tok rozumowania i metoda oszacowań nie ulegnie przy tym istotnym zmianom (Ossowski [63]).

## 5.5 Bifurkacje stabilności

Modele układów rzeczywistych nie są na ogół globalnie asymptotycznie stabilne, a stateczne punkty stacjonarne, jeśli istnieją, mają najczęściej ograniczone obszary przyciągania. Metody badania stabilności umożliwiają na ogół rozstrzygnięcie kwestii, czy dany punkt stacjonarny jest lokalnie (asymptotycznie) stabilny i ewentualnie pozwalają oszacować obszar stabilności. Niekiedy uważa się, że niestabilny punkt stacjonarny układu mechanicznego czy mechatronicznego nie jest interesujący, a istotne punkty stacjonarne powinny być przynajmniej lokalnie stabilne. Jest jednak oczywiste, że ani jedno, ani drugie stwierdzenie nie jest na ogół prawdziwe, jeśli podchodzimy do sprawy praktycznie. Istotne są bowiem wielkości obszarów stabilności lub niestabilności punktów stacjonarnych (Bogusz [10]). Może się zdarzyć, że obszar stabilności punktu stacjonarnego będzie tak mały, że praktycznie układ w otoczeniu takiego punktu będzie bardzo wrażliwy na

zaburzenia, tj. podatny na destabilizację. Taki punkt stacjonarny, jeśli jego stabilność była istotna dla funkcjonowania układu, będzie oczywiście bezużyteczny z praktycznego punktu widzenia. Podobnie, punkt niestabilny może być otoczony oceanem stabilności (zbieżności trajektorii), co sprawi, że będzie to punkt praktycznie stabilny w tym sensie, że stan układu w pobliżu tego punktu nie będzie się od niego oddalał, lecz będzie zbiegał do pewnego niewielkiego zbioru granicznego (stabilność Lagrange’a i stabilność do zbioru).

Z powyższych rozważań wynika jasno, że praktyczne względy nakazują nieco bardziej szczegółowe traktowanie własności stabilności punktów stacjonarnych układów mechanicznych czy mechatronicznych. Jest to szczególnie istotne zważywszy na fakt, że rozstrzyganie o stabilności lub niestabilności punktu stacjonarnego na podstawie liniowego przybliżenia równań nie daje nam informacji o obszarze przyciągania w przypadku stwierdzenia stabilności punktu równowagi.

Opisany wyżej problem możemy podjąć metodą optymalnych funkcji Lapunowa. W tym celu rozważmy model układu dynamicznego w postaci inkluzji

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \Gamma(Z)\}. \quad (5.5.1)$$

Przyjmijmy, że stałe parametry  $\mathbf{p}$  modelu nie zależą od czasu i należą do pewnego zbioru spójnego  $P \subset \mathbb{R}^k$ , natomiast niestacjonarne zaburzenia należą do przestrzeni  $\Gamma(Z)$  funkcji ograniczonych o wartościach w zbiorze spójnym i zwartym  $Z$ . Założymy, że zbiór  $Z$  jest, zależny od pewnych parametrów  $\alpha$ , należących do pewnego zbioru  $A \subset \mathbb{R}^l$ , czyli  $Z = Z(\alpha)$ . Parametry  $\mathbf{p}$ ,  $\alpha$  opisują odpowiednio wewnętrzne własności układu (na przykład tłumienia i sztywności) oraz ograniczenia nakładane na zewnętrzne, niestacjonarne zaburzenia modelu. Dla każdego ustalonego wartości parametrów  $\mathbf{p}$ ,  $\alpha$  rozpatrywany model będzie wykazywał określone własności jakościowe (na przykład wykładniczą stabilność). Pełna analiza jakościowa modelu (a właściwie klasy modeli sparametryzowanych przez  $\mathbf{p}$ ,  $\alpha$ ) ma na celu określenie jego własności jakościowych w przestrzeni parametrów  $P \times A$ . Jeżeli własności te są różne dla różnych wartości parametrów  $\mathbf{p}$ ,  $\alpha$  pojawia się kwestia wydzielenia w przestrzeni  $P \times A$  obszarów odpowiadających różnym własnościom jakościowym modelu (Paragraf 2.1). Możliwość wydzielenia takich obszarów wcale nie jest oczywista, a raczej świadczy o pewnej regularności rozpatrywanej klasy modeli. W przypadku regularnym należy przede wszystkim określić te wartości parametrów  $\mathbf{p}$ ,  $\alpha$ , przy których następuje zmiana własności jakościowych modelu (czyli *bifurkacja*). Takie wartości parametrów (zwane *punktami bifurkacji*) określają brzegi opisanych wyżej obszarów. Badanie sparametryzowanej klasy modeli pod kątem wyznaczenia punktów bifurkacji i rodzajów zachowań jakościowych modeli, nazywa się *analizą bifurkacyjną*. Metody takiej analizy zależą od badanych własności jakościowych. Ponieważ w niniejszej rozprawie zajmujemy się własnościami stabilności, będziemy mówili o tzw. *bifurkacjach stabilności* opisanych ogólnie w Rozdziale 2.

Aby opisać własności stabilności modelu (5.6.1), wybierzmy pewną macierz  $\mathbf{S}$  dodatnio określoną i zbadajmy wskaźnik zbieżności wykładniczej na powierzchni (brzegu) dowolnej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ ,  $c > 0$ . Wskaźnik ten będzie wyrażał się następującym wzorem:

$$\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|=c} \sup_{\mathbf{z} \in Z(\mathbf{a})} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (5.5.2)$$

Założymy, że funkcja  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c]$  jest ciągłą funkcją parametru  $c$ . Łatwo zauważyć, że jeżeli  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c] > 0$  dla danego  $c$ , wówczas wszystkie trajektorie układu docierające z zewnątrz do powierzchni elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ , wnikają do jej wnętrza. Ponieważ wskaźnik zbieżności zależy od wyboru macierzy  $\mathbf{S}$ , każda macierz  $\mathbf{S}$ , a więc i odpowiadająca jej norma, daje pewien specyficzny obraz własności układu. Nie ma więc tu samo przez się kwestii wyboru optymalnej normy. Najważniejsze są jednak normy, dla których istnieją takie wartości  $c > 0$ , że wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c]$  jest dodatni, ponieważ wnoszą najwięcej istotnej informacji w sensie własności stabilności układu. Będziemy dalej zakładać, że macierz  $\mathbf{S}$  spełnia ten warunek, a układ dopuszcza istnienie takiej macierzy.

Analiza funkcji  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c]$  daje nam złożony obraz jakościowych własności (trajektorii) układu w całej przestrzeni stanu, względem danego punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  oraz przy użyciu danej normy euklidesowej  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ . Chcąc opisać typ stabilności (zbieżności wykładniczej trajektorii) układu za pomocą wskaźnika zbieżności (5.5.2) dokonujemy w istocie utożsamienia wszystkich punktów na powierzchni każdej z elipsoid  $B(\mathbf{S}, c)$ . Sprowadza się to do rzutowania całej przestrzeni stanu na dodatnią półoś, na której punkt o współrzędnej  $c$  reprezentuje brzeg elipsoidy  $B[\mathbf{S}, c]$ . Nawiązując do myśli zawartych w Paragrafie 2.1, możemy przy takich utożsamieniach określić typ stabilności rozważanego układu za pomocą grafu liniowego, którego węzłami są elipsoidalne powłoki zbieżnych lub niezbieżnych wykładniczo odcinków trajektorii układu. Aby to dokładniej objaśnić, założymy, że funkcja  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c]$  jest na tyle regularna, że zbiór jej miejsc zerowych nie ma punktów skupienia i jest co najwyżej przeliczalny. Oznaczmy zatem przez  $c_0, c_1, \dots, c_j, \dots$  rosnący ciąg wszystkich promieni elipsoid  $B(\mathbf{S}, c)$ , dla których  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c] = 0$ . Ponieważ we wnętrzu powłoki elipsoidalnej  $B(\mathbf{S}, c_i, c_{i+1})$  dla każdego  $i=1, 2, \dots$  wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c]$  przyjmuje wartości różne od zera i jest funkcją ciągłą parametru  $c$ , musi mieć stały znak. Jeżeli  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c] > 0$  dla każdego  $c \in (c_i, c_j)$ , trajektorie układu są wykładniczo zbieżne według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  w powłoce elipsoidalnej  $B(\mathbf{S}, c_i, c_j)$ . Jeśli jednak  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c] < 0$  dla każdego  $c \in (c_i, c_j)$ , trajektorie układu nie będą wykładniczo zbieżne według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ . Mamy więc tu



dwa możliwe zachowania jakościowe trajektorii układu w każdej powłoce elipsoidalnej  $B(\mathbf{S}, c_i, c_{i+1})$ , które będziemy oznaczali odpowiednio przez 1, 0. Zatem własności jakościowe układu w całej przestrzeni stanu można opisać ciągiem binarnym  $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ , gdzie  $b_0$  odpowiada znakowi wskaźnika  $\gamma[\mathbf{S}, \mathbf{p}, \mathbf{a}, c]$  we wnętrzu elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_0)$ , natomiast  $b_i$  – znakowi wskaźnika zbieżności w powłoce  $B(\mathbf{S}, c_i, c_{i+1})$ . Przecinki w ciągach binarnych reprezentują gałęzie opisanego wyżej grafu liniowego, czyli powierzchnie elipsoid o nieokreślonej zbieżności przecinających je trajektorii. Ścisłe biorąc, ciąg ten opisuje własność zbieżności wykładniczej trajektorii według danej normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ .

Liczbowymi charakterystykami własności stabilności układu, opisanymi danym ciągiem dwójkowym  $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$  są krytyczne promienie elipsoid  $\{c_0, c_1, \dots, c_j, \dots\}$ . Przy ciągłej zmianie parametrów  $\mathbf{p}$  układu (5.5.1), mogą ulegać ciągłym zmianom promienie  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Jeżeli jednak własności stabilności badanego układu i układu po zmianie parametrów będą opisywały się tym samym ciągiem binarnym  $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$ , powiemy, że oba układy reprezentują jakościowo ten sam typ stabilności. Istnieją zasadniczo dwa rodzaje typów stabilności: *typy regularne* i *typy krytyczne*. Typy regularne są reprezentowane przez ciągi, w których nie sąsiadują elementy identyczne (tzn. nie ma w nich fragmentów postaci  $(\dots, 1, 1, \dots)$  lub  $(\dots, 0, 0, \dots)$ ). Z kolei typy krytyczne są reprezentowane przez ciągi binarne, w których występują identyczne elementy sąsiednie. Gdy ciągła zmiana parametrów układu doprowadzi do zmiany ciągu reprezentującego regularny typ jego stabilności na inny typ regularny, powiemy, że nastąpiła bifurkacja stabilności. W tych przejściach nie są istotne wartości krytycznych promieni elipsoid  $B(\mathbf{S}, c_i)$ , lecz tylko własności jakościowe, a więc typy stabilności.

Istotą analizy bifurkacji stabilności dla danego układu jest określenie możliwych dla niego typów stabilności oraz wartości parametrów krytycznych, przy których zachodzą odpowiednie bifurkacje.

Zgodne z opisaną wyżej koncepcją możemy wyszczególnić następujące podstawowe typy stabilności (zbieżności) wykładniczej:

Podstawowe regularne typy stabilności:

- (0) – globalny brak zbieżności wykładniczej,
- (1) – globalna zbieżność wykładnicza,
- (1,0) – lokalna wykładnicza zbieżność,
- (0,1) – globalna zbieżność wykładnicza do zbioru granicznego,
- (0,1,0) – lokalna zbieżność wykładnicza do zbioru granicznego,
- (1,0,1,0) – lokalna stabilność wykładnicza i zbieżność wykładnicza do zbioru.

Pierwsze cztery typy nie wymagają komentarza. Typ (0,1,0) oznacza sytuację, gdy wykładnicza zbieżność zachodzi tylko w pewnej powłoce elipsoidalnej,

natomiast typ  $(1,0,1,0)$  – gdy prócz tego zachodzi jeszcze lokalna wykładnicza zbieżność do punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Do powyższych regularnych typów stabilności należy jeszcze dołożyć następujące typy krytyczne:

Podstawowe krytyczne typy stabilności:

- $(0,0)$  – globalna niestabilność krytyczna
- $(1,1)$  – globalna stabilność krytyczna
- $(0,1,1)$  – globalna stabilność krytyczna do zbioru
- $(1,1,0)$  – lokalna krytyczna stabilność

Typ  $(0,0)$  oznacza faktycznie stabilność w sensie Lagrange’a w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c_0)$ , ponieważ na jej brzegu wskaźnik zbieżności jest równy zeru to w zasadzie uniemożliwia opuszczenie elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_0)$  przez jakąkolwiek trajektorię startującą z jej wnętrza.

Jeżeli dopuścimy układy o zmiennej strukturze, a takie często rozpatruje się w teorii sterowania, a w mechatronice w szczególności, możemy w dowolnej powłoce elipsoidalnej  $B(\mathbf{S}, c_i, c_{i+1})$  zapewnić zbieżność wykładniczą trajektorii lub jej brak. Zatem, teoretycznie rzecz biorąc możliwe są układy o dowolnym, typie stabilności.

W układach praktycznych typy stabilności będą na ogół dość proste. Poniżej podana jest lista podstawowych schematów bifurkacji stabilności.

$(1) \longrightarrow (0)$  – utrata stabilności na skutek zmiany parametrów układu liniowego stacjonarnego,

$(1) \longrightarrow (0,1)$  – utrata stabilności asymptotycznej na rzecz stabilności asymptotycznej do zbioru na skutek pojawienia się niekontrolowanych zaburzeń siłowych,

$(1) \longrightarrow (1,0)$  – utrata globalnej stabilności na rzecz lokalnej spowodowane pojawieniem się zaburzeń nieliniowych,

$(1) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (1,0,1)$  – wyłonienie się powłoki niestabilności układu globalnie stabilnego,

$(0) \longrightarrow (0,0) \longrightarrow (0,1,0)$  – wyłonienie się pierścienia stabilności układu globalnie niestabilnego.

Bardziej złożone bifurkacje stabilności mogą wystąpić w układach mechatronicznych ze sterowaniami i zaburzeniami. W Rozdziale 10 omówimy przykład takiego układu ze sterowaniem dyskretnym. Poniżej rozważymy tylko jeden nietrywialny przykład układu z dwoma zaburzeniami.

**Przykład 5.15:** (*Nietrywialny przypadek bifurkacji stabilności*)

Rozważmy liniowy układ dynamiczny  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , który jest wykładniczo stabilny według pewnej normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$ . Załóżmy dalej, że układ podlega ograniczonym zaburzeniom siłowym oraz nieliniowym zaburzeniom parametrycznym. W najprostszym przypadku, gdy oba zaburzenia będą miały po jednej składowej, model układu będzie miał następującą postać:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + z_1 f(\mathbf{x})\mathbf{B} + z_2 \mathbf{C} : |z_1| \leq \alpha_1 \wedge |z_2| \leq \alpha_2\}, \quad (5.5.3)$$

gdzie  $f$  jest funkcją jednorodną stopnia drugiego względem współrzędnych wektora stanu  $\mathbf{x}$ , taką że  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Wtedy wskaźnik stabilności układu będzie wyrażał się następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{z_1, z_2} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_1 \cdot f(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z_2 \cdot \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (5.5.4)$$

z którego natychmiastowo wynika postać antyoptimalnych zaburzeń:

$$z_1(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \alpha_1 \cdot \text{sign}[f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \quad z_2(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \alpha_2 \cdot \text{sign}[\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]. \quad (5.5.5)$$

Podstawiając (5.5.5) do wzoru (5.5.4) i korzystając z jednorodności funkcji  $f$ , mamy ostatecznie

$$\gamma[\mathbf{S}, c] = -\sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \alpha_1 c \cdot |f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| + \frac{\alpha_2}{c} |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right]. \quad (5.5.6)$$

Z powyższego wzoru można łatwo wydedukować jakościowe własności trajektorii układu dla różnych wartości parametru  $c$ . Dla małych wartości  $c$  układ może utracić wykładniczą stabilność z powodu składnika zależnego od  $1/c$ . Z kolei dla dużych wartości  $c$  układ traci stabilność wykładniczą z powodu składnika odpowiadającego założonej nieliniowości układu. Z uwagi na ciągłą zależność wskaźnika  $\gamma(\mathbf{S}, c)$  od parametru  $c$ , możemy wnosić o tym, że układ jest wykładniczo stabilny dla parametru  $c$  należącego do pewnego przedziału  $(c_0, c_1)$ , czyli w pierścieniu elipsoidalnym  $B(\mathbf{S}, c_1, c_2)$ . Wielkości  $c_0, c_1$  można by określić mianem wartości krytycznych. Opisany wyżej przypadek odpowiadać będzie układowi o stabilności typu  $(0, 1, 0)$ , według przyjętej symboliki.

Aby zbadać dokładniej opisane wyżej własności jakościowe (jak już wiemy, że one są) układu możemy skorzystać z następującego oszacowania:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] \geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha_1 \gamma_1(\mathbf{S}) \cdot c - \frac{\alpha_2}{c} \gamma_2(\mathbf{S}), \quad (5.5.7)$$

gdzie wielkości  $\gamma_i(\mathbf{S})$ ,  $i = 0, 1, 2$  określone są jak następuje:

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}], \quad \gamma_1(\mathbf{S}) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |f(\mathbf{x}) \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|, \quad \gamma_2(\mathbf{S}) = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|.$$

Analiza funkcji (5.5.7) w zależności od parametru  $c$ , przy różnych wartościach wskaźników daje pełny obraz typów oraz bifurkacji stabilności, jakie mogą wystąpić w opisanym układzie. Jest oczywiste, że musi wystąpić:

- (1) – globalna stabilność, gdy  $\alpha_1 = 0$  i  $\alpha_2 = 0$  (dla układu bez zaburzeń),
- (1,0) – lokalna stabilność, gdy  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 > 0$  (dla układu bez sił wymuszających),
- (0,1) – globalna stabilność do zbioru, gdy  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  (dla układu bez zaburzeń parametrów).

W przypadku, gdy  $\alpha_1 > 0$  i  $\alpha_2 > 0$  sytuacja jest nieco bardziej złożona. Jak wynika z (5.5.7), wskaźnik zbieżności wykładniczej jest dodatni dla pewnego  $c > 0$  (czyli  $[\alpha_1 \gamma_1(\mathbf{S}) \cdot c^2 - \gamma_0(\mathbf{S}) \cdot c + \alpha_2 \gamma_2(\mathbf{S})] < 0$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 < \delta(\mathbf{S}) = \gamma_0^2(\mathbf{S}) / 4\gamma_1(\mathbf{S})\gamma_2(\mathbf{S}). \quad (5.5.8)$$

Zatem będziemy mieli jeszcze trzy typy stabilności rozważanego układu:

- (0,1,0) – lokalna stabilność do zbioru, gdy  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  i  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < \delta(\mathbf{S})$ ,
- (0,0) – niestabilność krytyczna, gdy  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \delta(\mathbf{S})$ ,
- (0) – globalna niestabilność, gdy  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  i  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 > \delta(\mathbf{S})$ .

W przypadku stabilności typu (0,1,0) promienie  $c_0$ ,  $c_1$  będą wyrażały się wzorami:

$$c_{0,1} = [\gamma_0(\mathbf{S}) \pm \sqrt{\gamma_0^2(\mathbf{S}) - 4\alpha_1\alpha_2\gamma_1(\mathbf{S})\gamma_2(\mathbf{S})}] / 2\alpha_1\gamma_1(\mathbf{S}). \quad (5.5.9)$$

W punkcie krytycznym zachodzi oczywiście równość:

$$c_0 = c_1 = \gamma_0(\mathbf{S}) / 2\alpha_1\gamma_1(\mathbf{S}). \quad (5.5.10)$$

Mamy więc tu następujący schemat bifurkacji stabilności

$$\boxed{(0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (0,1,0) \rightarrow (1,0)}.$$

□

Podsumowując ten paragraf, warto zaznaczyć, że opisane bifurkacje stabilności nie są ani uogólnieniem, ani szczególnym przypadkiem klasycznie rozumianych bifurkacji rozważanych w teorii układów dynamicznych. Dlatego ogólna teoria bifurkacji stabilności oraz pełniejsza analiza możliwych schematów takich bifurkacji niewątpliwie warta jest dopracowania. Wykracza to jednak poza założony zakres niniejszej rozprawy.

## 6. PÓŁAKTYWNE STEROWANIE UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH

*Układy mechaniczne takie jak: konstrukcje budowlane, wieże, maszyny, zawieszania pojazdów, układy wibroizolacji itp. są przeważnie układami stabilnymi w otoczeniu pewnego nominalnego punktu równowagi, a utrzymanie stanu układu rzeczywistego w pobliżu tego punktu jest pożądane i korzystne dla jakości pracy układu. Ponieważ jednak w warunkach rzeczywistych układy mechaniczne mogą być narażone na różnego rodzaju zaburzenia, których szkodliwy wpływ nie zawsze może być odpowiednio zredukowany poprzez właściwą konstrukcję i dobór parametrów układu, dalszą poprawę własności stabilności punktu nominalnego można osiągnąć za pomocą modyfikacji układu.*

*Ograniczone zastosowanie ma modyfikacja pasywna (zaliczana do rozwiązań klasycznych) polegająca na dołączeniu do układu odpowiednio dobranych elementów sprężystych, mas i tłumików w celu korekty jego własności dynamicznych. Bardziej skuteczne są: modyfikacja półaktywna (sterowanie parametrami układu) oraz modyfikacja aktywna (sterowanie za pomocą sił), które zaliczają się do metod mechatroniki. Modyfikacja półaktywna (czyli parametryczna) jest zwykle mniej efektywna niż modyfikacja aktywna, ale jej zaletą jest wyższa niezawodność i stosunkowo niska moc niezbędna do sterowania.*

*Aktualne możliwości techniczne sprawiają, że modyfikacja parametryczna i modyfikacja aktywna stały się atrakcyjnymi metodami poprawy własności realnych układów mechatronicznych. Celem niniejszego rozdziału jest omówienie zagadnienia modyfikacji parametrycznej modeli układów mechatronicznych.*

### 6.1 Koncepcja modyfikacji parametrycznej układów mechatronicznych

Rozważmy układ mechatroniczny złożony z układu mechanicznego (obiektu), którego parametry  $\mathbf{p}$  podlegają modyfikacji, czyli kontrolowanym zmianom. Modyfikacja parametryczna polega na zapewnieniu takich zmian parametrów  $\mathbf{p}$ , które powodują poprawę własności stabilności układu. Zwykle zmiany takie są uzależnione od aktualnego stanu  $\mathbf{x}$  (czyli od położenia i prędkości) układu, a więc realizowane za pomocą sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ , którego postać zależy na ogół nie tylko od układu, ale również od przyjętego kryterium oceny własności stabilności. Sterowanie takie nazywa się *sterowaniem półaktywnym*, ponieważ zwykle nie wymaga ono przyłożenia do układu sterowanych sił.

Koncepcja zastosowania zmian parametrów uzależnionych od aktualnego stanu układu mechanicznego w celu poprawy jego własności dynamicznych była rozpatrywana już w latach siedemdziesiątych. Zwykle rozważano układy z jednym tłumikiem sterowanym, przyjmowano jakieś intuicyjnie uzasadnione, dwuwartościowe uzależnienie tłumienia od prędkości ruchu (na przykład tzw. sterowanie *sky-hook* lub *ground-hook* lub ich wersje mieszane (Sapiński [95])), a

następnie wykazywano (przeważnie za pomocą eksperymentów numerycznych lub fizycznych), że taka modyfikacja układu jest z jakichś względów korzystna.

Istotnym niedostatkim takiego podejścia jest to, że postać sprzężenia zwrotnego nie wynikała z teorii czy dobrze uzasadnionej metody, ani nie zapewniała optymalności jakiegoś użytkowego kryterium. Poza tym takie odgadywanie dobrego (suboptymalnego) sterowania mogło być w miarę skuteczne tylko dla stosunkowo prostych układów. W przypadku układów wielowymiarowych o wielu sterowanych parametrach, znalezienie dobrego sterowania bez racjonalnej metody jest praktycznie niewykonalne. Z faktu, że tego rodzaju heurystyczne koncepcje wciąż są aktualne i wykorzystywane (Buchacz [11], Onoda [53], Sapiński [95]), można wnosić o niedostatecznym jeszcze rozwoju teorii w tym zakresie. Poniżej pokażemy, jak metodą optymalnych funkcji Lapunowa można racjonalnie znajdować sterowania realizujące optymalną modyfikację parametryczną układów mechatronicznych.

Rozważmy najpierw układ opisany następującym równaniem różniczkowym:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (6.1.1)$$

gdzie  $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in X \subset R^n$ , natomiast  $\mathbf{p} \in P \subset R^p$  jest wektorem parametrów układu. Jeżeli parametry  $\mathbf{p}$  są stałe, wówczas o stabilności układu decyduje wskaźnik stabilności wykładniczej dany następującą formułą:

$$\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (6.1.2)$$

gdzie supremum jest liczone w pewnym otoczeniu  $X$  punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Jeżeli dla danych parametrów  $\mathbf{p}$  istnieje macierz dodatnio określona  $\mathbf{S}$  taka, że  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) > 0$ , to układ jest lokalnie wykładniczo stabilny według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  w pewnej elipsoidzie  $X_0 = B(\mathbf{S}, c) \subset X$ . Wówczas zbieżność trajektorii układu dogodnie jest ocenić również za pomocą *średniego wskaźnika zbieżności*:

$$\gamma(\mathbf{S}, c) = \left\langle -\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right\rangle_{\mathbf{x} \in X_0 - \{\mathbf{0}\}} = -\frac{1}{|X_0|} \int_{X_0} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} d^n \mathbf{x}, \quad (6.1.3)$$

gdzie  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$  oznaczają średnia wartość funkcji  $f$  obliczoną po  $\mathbf{x} \in X_0 - \{\mathbf{0}\}$ .

Optymalne projektowanie układu mechanicznego pod względem własności stabilności może w takim przypadku polegać na takim doborze stałych parametrów  $\mathbf{p} \in P$  układu, dla których przy określonej macierzy  $\mathbf{S} > 0$  osiągana jest maksymalna i dodatnia wartość wskaźnika  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p})$  (dla zapewnienia dużego

zapasu stabilności układu) oraz ewentualnie – możliwie duża wartość średniego wskaźnika zbieżności  $\langle \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) \rangle$  (dla zapewnienia jak najszybszej średniej zbieżności trajektorii układu). Ze wzoru (6.1.2) wynika, że zadanie to jest wykonalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $\mathbf{p} \in P$  takie, że  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < 0$  dla każdego  $\mathbf{x}$  (Kanianthra [25]).

Dopiero gdy istnieje możliwość zmiany wartości parametrów  $\mathbf{p}$  w czasie rzeczywistym, możemy rozważać zagadnienie aktywnej (czyli parametrycznej) modyfikacji układu. W takim przypadku adekwatnym modelem układu będzie następująca inkluzja różniczkowa

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \Gamma(P)\}, \mathbf{x} \in X \subset R^n, \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad (6.1.4)$$

gdzie  $\Gamma(P)$  jest określoną przestrzenią funkcji czasu  $t \geq t_0$  o wartościach w zbiorze zwartym  $P$ .

Aby wyznaczyć postać optymalnego sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ , realizującego półaktywną modyfikację optymalną w sensie opisanym w Rozdziale 3, należy zapewnić w każdym punkcie  $\mathbf{x} \in X$  maksimum lokalnej szybkości zbieżności wykładniczej trajektorii według normy  $\|\bullet\|_{\mathbf{S}}$ . Jeżeli założymy zupełność inkluzji (6.1.4), otrzymamy z powyższego warunku optymalności pewną funkcję sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ , określającą optymalne uzależnienie parametrów układu od jego aktualnego stanu. Sprzężenie  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  stanowi cięcie krytyczne wiązki inkluzji (6.1.4) i sprowadza model dynamiki rozważanego układu do postaci następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})), \mathbf{x} \in X \subset R^n, \quad (6.1.5)$$

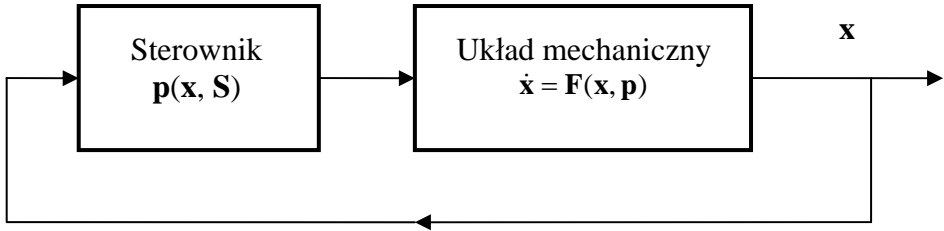
który można zilustrować schematem blokowym pokazanym na Rysunku 6.1.

Własności stabilności układu zamkniętego (6.1.5) można opisać wskaźnikiem stabilności oraz średnim wskaźnikiem zbieżności wykładniczej, które zdefiniowane są poniżej:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{p} \in \Gamma(P)} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = - \sup_{\mathbf{x} \in X_0 - \{\mathbf{0}\}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (6.1.6)$$

$$\gamma \langle \mathbf{S} \rangle = \left\langle - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S}))}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right\rangle_{\mathbf{x} \in X_0 - \{\mathbf{0}\}}. \quad (6.1.7)$$

Ze wzoru (6.1.6) wynika, że wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S})$  jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  istnieje takie  $\mathbf{p} \in P$ , że  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) < 0$ . Spełnienie tego warunku modyfikacji parametrycznej jest konieczne, aby można było



Rys.6.1. Schemat blokowy układu optymalnej modyfikacji parametrycznej

rozważać sensowne zagadnienie aktywnej modyfikacji parametrycznej układu (6.1.4). Jest to *warunek stabilności* słabszy niż dla układu o stałych parametrach, kiedy to musi istnieć  $\mathbf{p} \in P$  takie, że  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mathbf{x} < 0$  dla każdego  $\mathbf{x}$ . Teoretycznie rzecz biorąc może więc zajść sytuacja, że układ (6.1.1) o stałych parametrach będzie niestabilny wykładniczo według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  dla każdego  $\mathbf{p} \in P$ , ale będzie stabilny po zastosowaniu aktywnej modyfikacji parametrycznej. Będziemy wtedy mówili o *aktywnej stabilizacji parametrycznej* układu mechatronicznego.

Możliwość stosowania modyfikacji parametrycznej określa poniższe

**Twierdzenie 6.1:** (*O lokalnej modyfikacji parametrycznej*)

Jeżeli układ (6.1.4) spełnia warunek modyfikacji parametrycznej, to zawsze możliwa jest korzystna dla stabilności modyfikacja parametryczna (lokalnie w pewnym otoczeniu  $X$  stanu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) za pomocą skończonej liczby wartości parametrów  $\mathbf{p} \in P$  przełączanych w zależności od aktualnego stanu  $\mathbf{x}$  układu.

*Dowód:* Załóżmy, że układ (6.1.4) spełnia *warunek modyfikacji parametrycznej* w pewnej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ ,  $c > 0$ . Zatem spełnia ten warunek w pewnej elipsoidzie domkniętej  $B[\mathbf{S}, c_0] \subset B(\mathbf{S}, c)$ ,  $c_0 > 0$ . Jeżeli  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  jest ciągłą funkcją  $\mathbf{x}$  i spełniony jest *lokalny warunek zbieżności wykładniczej trajektorii*:  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i) < 0$  dla pewnego punktu  $\mathbf{x}_i$  i ustalonych parametrów  $\mathbf{p}_i \in P$ , to warunek ten będzie spełniony również w pewnym otwartym i spójnym otoczeniu  $X_i$  punktu  $\mathbf{x}_i$ . Elipsoidę domkniętą  $B[\mathbf{S}, c_0]$ , w której rozpatrujemy stabilność układu modyfikacji, możemy zatem pokryć odpowiednimi otoczeniami  $X_i$ ,  $i \in I$ . Ponieważ elipsoida  $B[\mathbf{S}, c_0]$  jest zbiorem zwartym, zawsze możemy z tego pokrycia wybrać podpokrycie skończone. Zatem możemy pokryć elipsoidę  $B[\mathbf{S}, c_0]$  skończoną liczbę spójnych podzbiorów  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , w których będą zbieżne wykładniczo trajektorie układu dla pewnych stałych parametrów  $\mathbf{p}_i$ .

Zatem możemy zrealizować parametryczną modyfikację układu za pomocą sterowania przedziałami stałego o skończonej liczby wartości parametrów. ♦



Funkcja sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  wyznaczona z kryterium (6.1.6), zależna od dowolnej macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa, określa strukturę układu sterowania. Aby to sterowanie określić jednoznacznie, należy wybrać pewną macierz  $\hat{\mathbf{S}}$ , co uzyskuje się w wyniku optymalizacji funkcji Lapunowa. W tym celu należy zastosować jakieś kryterium optymalizacji, odnoszące się do własności stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym. Może to być na przykład maksymalizacja miary obszaru stabilności w przestrzeni stanu albo jedno z następujących kryteriów:

$$\max_{\mathbf{S} > \mathbf{0}} \gamma(\mathbf{S}), \quad \max_{\mathbf{S} > \mathbf{0}} \gamma < \mathbf{S} > . \quad (6.1.8)$$

W rezultacie dostaniemy optymalną macierz funkcji Lapunowa  $\hat{\mathbf{S}}$ , a tym samym sprzężenie zwrotne  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{S}})$  opisujące optymalne zmiany parametrów układu.

Porównując własności stabilności układu przed i po modyfikacji parametrycznej, można określić efekty jej działania. Ocena jakości modyfikacji tylko na podstawie porównania wartości wskaźnika stabilności (6.1.6) może okazać się niewystarczająca. Niekiedy może się zdarzyć, że wskaźnik zbieżności (6.1.2) układu przed modyfikacją będzie równy wskaźnikowi zbieżności po modyfikacji układu, czyli  $\gamma(\mathbf{S}) = \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p})$ . Nie oznacza to jednak, że modyfikacja nie poprawiła zbieżności trajektorii układu, lecz zwykle znaczy, że w pewnych krytycznych punktach (leżących na powierzchni przełączeń) w przestrzeni stanu zastosowane sprzężenie zwrotne  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  nie może poprawić szybkości zbieżności trajektorii, która akurat decyduje o wielkości wskaźnika stabilności. Dlatego w takich sytuacjach należy stosować inne, uzupełniające wskaźniki oceny własności stabilności układu, na przykład wskaźnik średni (6.1.7).

Ponieważ między wskaźnikiem stabilności i średnim wskaźnikiem zbieżności układu przed i po modyfikacji zachodzą oczywiste relacje:  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) \leq \gamma(\mathbf{S})$ ,  $\gamma < \mathbf{S}, \mathbf{p} > \leq \gamma < \mathbf{S} >$ , wskaźnik  $\gamma < \mathbf{S} >$  może być wykorzystany jako miara jakości modyfikacji, natomiast  $\gamma(\mathbf{S})$  – jako wskaźnik rozstrzygający o stabilności wykładniczej układu, na przykład wtedy, gdy modyfikacji podlega układ niestabilny. Uzasadnione jest też zastosowanie następujących względnych miar efektywności modyfikacji parametrycznej

$$\gamma(\mathbf{S}) / \gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}), \quad \gamma < \mathbf{S}, \mathbf{p} > / \gamma < \mathbf{S} >, \quad (6.1.9)$$

które również mogą posłużyć do optymalizacji funkcji Lapunowa.

Jak widać, modyfikacja półaktywna jest w pewnym sensie prostsza od modyfikacji pasywnej, bo sprowadza się do optymalizacji macierzy  $\mathbf{S}$ . Parametry  $\mathbf{p}$  są bowiem zastąpione przez optymalne sprzężenia zwrotne o określonej strukturze zależnej tylko od  $\mathbf{S}$ . W modyfikacji pasywnej optymalizowane muszą być jednocześnie parametry  $\mathbf{p}$  układu i macierz  $\mathbf{S}$ .

## 6.2 Modyfikacja parametryczna układów liniowych stacjonarnych

W niniejszym paragrafie rozważymy zagadnienie szczególnie ważne w teorii układów mechatronicznych, mianowicie zagadnienie modyfikacji parametrycznej układów liniowych postaci  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in X \subset R^n$ , gdzie stała macierz układu  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{p})$  jest zależna od parametrów  $\mathbf{p} \in P$ . Zauważmy, że zastosowanie do układu dowolnego sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ , innego niż stałe, sprawia, że równania układu zmodyfikowanego (zamkniętego) postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}(\mathbf{x}))\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in X \subset R^n \quad (6.2.1)$$

będą na ogół nieliniowe, mimo liniowości układu wyjściowego przed modyfikacją. W najlepszym razie, jeśli optymalne zmiany parametrów są przedziałami stałe (na przykład *bang-bang*), równania układu zmodyfikowanego są przedziałami liniowe. Zagadnienie modyfikacji parametrycznej jest więc z natury nieliniowe, mimo liniowości modyfikowanego układu.

Mając określoną strukturę optymalnego sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ , możemy obliczyć wskaźnik stabilności układu zmodyfikowanego według następującego wzoru:

$$\gamma(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (6.2.2)$$

Analogicznie można obliczyć wskaźnik średniej zbieżności wykładniczej.

Ze wzoru (6.2.2) wynika pewna specyfika modyfikacji parametrycznej układów liniowych. Mianowicie, jeśli parametry  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  są optymalne w danym punkcie  $\mathbf{x}$  przestrzeni stanu, to są też optymalne w dowolnym punkcie  $\eta\mathbf{x}$ ,  $\eta > 0$  czyli na prostej  $\mathbf{0}\mathbf{x}$ . Oznacza to, że niezależnie od postaci zależności macierzy  $\mathbf{A}$  od parametrów, optymalne sprzężenie zwrotne  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  układu liniowego zależy co najwyżej od kierunku w przestrzeni stanu, ale nie zależy od normy  $\mathbf{x}$ . Zatem układ liniowy ze sterowanymi parametrami albo jest stabilny w całej przestrzeni stanu, albo jest niestabilny lokalnie w każdym otoczeniu punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

W szczególnych przypadkach możemy łatwo przewidzieć postać optymalnego sprzężenia zwrotnego. Jeśli na przykład tylko jeden element  $a_{ij} = a_{ij}(p)$  macierzy  $\mathbf{A}$  zależy od modyfikowanego parametru  $p$ , to funkcja  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}(p) \mathbf{x}$ , istotna dla wartości wskaźnika stabilności układu, będzie zależna od parametru  $p$  tylko poprzez składnik postaci  $a_{ij}(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$ , gdzie  $\mathbf{C}$  jest pewną macierzą stałą i niezależną od  $p$ . Wówczas, jak widać, istotne będą w optymalnej modyfikacji tylko dwie wartości parametru  $p_{\min}, p_{\max}$ , które odpowiednio maksymalizują bądź minimalizują funkcję  $a_{ij}(p)$ . Mianowicie,  $p(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = p_{\min}$  (lub  $p(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = p_{\max}$ ), jeżeli  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} > 0$  (odpowiednio  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} < 0$ ). Zatem optymalna modyfikacja parametru  $p$

w takim układzie, będzie polegała na przełączaniu parametru  $p$  z wartości  $p_{\min}$  na  $p_{\max}$  lub odwrotnie przy przejściu trajektorii układu przez hiperpowierzchnię o równaniu  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} = 0$ . Ponieważ, jak łatwo zauważyć, macierz  $\mathbf{C}$  zawiera tylko jeden element niezerowy  $c_{ij} = 1$ , ta hiperpowierzchnia będzie złożona z dwóch hiperpłaszczyzn, jako że forma kwadratowa  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$  rozkłada się na iloczyn czynników liniowych. Zatem optymalne sterowanie parametru  $p$  będzie kawałkami stałe typu bang-bang.

W przypadku ogólnym, gdy wiele elementów macierzy  $\mathbf{A}$  układu zależy funkcyjnie od pewnego parametru  $p$ , zależność optymalnego sterowania  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  od stanu  $\mathbf{x}$  może być bardziej złożona. Łatwo jednak wykazać, że jeżeli elementy macierzy  $\mathbf{A}(p)$  są funkcjami klasy  $C^1$  parametru  $p$ , a dopuszczalne (możliwe) zmiany tego parametru są niewielkie w stosunku do jego wartości nominalnej  $p_0$ , opisana własność (bang-bang) optymalnej modyfikacji parametrycznej będzie w przybliżeniu spełniona. Istotnie, korzystając z różniczkowalności macierzy  $\mathbf{A}(p)$  względem parametru  $p$  i przyjmując, że  $p = p_0 + w$  oraz  $|w| \leq \alpha$  dla każdego  $t \geq t_0$ , możemy w przybliżeniu napisać  $\mathbf{A}(p) \approx \mathbf{A}_0 + w \cdot \mathbf{C}$ , gdzie  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(p_0)$  jest nominalną macierzą układu, natomiast  $\mathbf{C} = (\partial \mathbf{A} / \partial p)(p_0)$ . Ponieważ wtedy funkcja

$$\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}(p) \mathbf{x} \approx \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + w \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad (6.2.3)$$

z warunku (6.1.6) dostaniemy następującą postać optymalnego sprzężenia zwrotnego:

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{S}) \approx -\alpha \operatorname{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}]. \quad (6.2.4)$$

Podane wyżej rozumowanie można uogólnić na przypadek wielu parametrów, pod warunkiem, że wpływy ich zmian na dynamikę układu będą od siebie niezależne. Warunek ten jest w przybliżeniu spełniony, na przykład wtedy, gdy możliwe zmiany parametrów są małe. Wtedy możemy poprzestać na liniowym rozwinięciu macierzy układu w szereg Taylora względem składowych wektora  $\mathbf{p}$ .

Gdybyśmy chcieli nieco dokładniej wyznaczyć optymalne sprzężenie zwrotne, powinniśmy uwzględnić dalsze wyrazy rozwinięcia macierzy  $\mathbf{A}(p)$  w szereg Taylora. Wtedy mielibyśmy zagadnienia modyfikacji parametrycznej układu analitycznego (w sensie (1.4.2)) względem składowych wektora  $\mathbf{p}$ . Można też optymalizować funkcję  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}(p) \mathbf{x}$  bez dokonywania takich przybliżeń.

Jeżeli dany parametr fizyczny  $p \in P$  układu, podlegający bezpośrednio modyfikacji, występuje w macierzy  $\mathbf{A}(p)$  tylko pod postacią pewnej funkcji  $\varphi(p)$ , to możemy posługiwać się w analizie teoretycznej nowym parametrem  $p^* = \varphi(p)$  o zakresie zmienności określonym przez zbiór  $P^* = \{\varphi(p): p \in P\}$ .

Na koniec tego paragrafu warto jeszcze skomentować fakt, że optymalna modyfikacja parametryczna sprowadza się do sterowania typu bang-bang z kwadratowymi funkcjami przełączeń postaci (6.2.4). Po pierwsze, jeżeli funkcja przełączeń  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$  jest dodatnio albo ujemnie (pół)określona, to sterowanie

modyfikujące dany parametr będzie stałe. Wtedy półaktywna modyfikacja sprowadza się do modyfikacji pasywnej, polegającej na optymalnym doborze stałej wartości parametru. Ponieważ interesujemy się tu modyfikacją półaktywną, możemy taki przypadek wykluczyć z dalszych rozważań, tym bardziej, że w układach mechatronicznych macierz  $\mathbf{C}$  zwykle zawiera tylko nieliczne elementy niezerowe, co raczej wyklucza stałość znaku formy  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$ . Założymy zatem, że formy kwadratowe postaci  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$ , odpowiadające modyfikowanym parametrom układu, mogą przyjmować wartości różnych znaków, co znaczy, że dany parametr będzie się skokowo zmieniał w czasie ruchu układu zmodyfikowanego.

### 6.3 Modyfikacja parametryczna liniowych układów drgających

W niniejszym paragrafie zastosujemy opisaną ogólną koncepcję modyfikacji parametrycznej układów mechatronicznych do liniowych układów drgających o wielu stopniach swobody. Skupimy się na półaktywnym sterowaniu parametrami tłumienia i sztywności, pozostawiając kwestię sterowania parametrami masowymi (bezwładnościowymi) do omówienia w oddzielnym paragrafie.

W dość ogólnym przypadku dynamika liniowego układu drgającego o wielu stopniach swobody, ze zmiennymi parametrami tłumienia i sztywności można opisać równaniami następującej postaci (Babakow [4], Osiński [54], Ossowski [73], [83], Gutowski [18]):

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{Q}\mathbf{X} + w_1 \mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{X}} + \dots + w_k \mathbf{P}_k \dot{\mathbf{X}} + z_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{X} + \dots + z_l \mathbf{Q}_l \mathbf{X} = 0, \quad (6.3.1)$$

gdzie macierze  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{Q}_j$  określają strukturę zaburzeń parametrów układu, natomiast funkcje

$$w_i = w_i(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}), i = 1, \dots, k; \quad z_j = z_j(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}), j = 1, \dots, l \quad (6.3.2)$$

– algorytm sterowania za pomocą sprzężeń zwrotnych od stanu  $\mathbf{x} = [\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}]^T$  układu. Sprzężenia zwrotne mogą być generowane przez układ sterowania dołączony do układu mechatronicznego w celu osiągnięcia optymalnej stabilizacji lub tłumienia drgań układu. Wtedy będziemy mieli do czynienia ze sterowaniem półaktywnym (parametrycznym). Sprzężenia zwrotne mogą być jednak formalnie generowane również przez sam układ, jeśli parametry tłumienia lub sztywności zależą od stanu z racji zamierzonej konstrukcji samego układu lub zaistniałych w nim uszkodzeń (Ossowski [83],[84]). W takim przypadku sprzężenia zwrotne nie podlegają optymalizacji i nie są generowane przez dołączony sterownik, lecz przez sam układ. Wtedy również postać odpowiednich funkcji (6.3.2) wynika z konstrukcji układu lub przyjętego modelu uszkodzeń. Ten drugi przypadek modyfikacji parametrycznej, chociaż nie wiąże się z zagadnieniem syntezy sterowań optymalnych, dogodnie jest zaliczyć do sterowania półaktywnego z racji jego ważności i faktu, że analiza własności

stabilności takich układów nie różni się zasadniczo od przypadku pierwszego, czyli układów ze sterowaniami optymalizowanymi.

Trzeba podkreślić, że rozważane tu układy różnią się od liniowych układów drgających o zaburzonych parametrach, które zostały rozpatrzone w poprzednim rozdziale. Zasadnicza różnica, rzutuująca również na metodę ich analizy, tkwi w tym, że parametry modyfikowane są zależne od aktualnego stanu układu (czyli poprzez sprzężenie zwrotne), a więc nie zależą jawnie od czasu, jak to ma miejsce w układach z parametrami zaburzonymi.

Liniowa zależność równań modelu (6.3.1) od parametrów sterowanych przenosi się na macierz  $\mathbf{A}$  modelu przedstawionego w postaci układu równań rzędu pierwszego. Zagadnienie aktywnej modyfikacji parametrycznej dla takiego układu sprowadza się bowiem do badania własności następującej inkluzji zupełnej:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \left\{ \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \sum_{i=1}^k w_i \mathbf{B}_i \mathbf{x} + \sum_{i=1}^k z_i \mathbf{C}_i \mathbf{x} : |w_j| \leq \alpha_j \wedge |z_j| \leq \beta_j; j = 1, 2, \dots, k \right\}, \quad (6.3.3)$$

gdzie  $\mathbf{A}_0$  jest macierzą stabilną, natomiast  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_j$  – stałymi macierzami określającymi strukturę zależności dynamiki układu od parametrów sterowanych  $w_j$ ,  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, k$

Wskaźnik stabilności takiego układu będzie wyrażał się następującą formułą:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{w}, \mathbf{z}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \sum_{j=1}^k w_j \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_j \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \sum_{j=1}^k z_j \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_j \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (6.3.4)$$

z której wynika następująca postać optymalnych sprzężeń zwrotnych, realizujących aktywną modyfikację parametryczną układu:

$$w_j(\mathbf{x}) = -\alpha_j \cdot \text{sign} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_j \mathbf{x}], \quad z_j(\mathbf{x}) = -\beta_j \cdot \text{sign} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_j \mathbf{x}], \quad j = 1, \dots, k. \quad (6.3.5)$$

Jak widać, liniowa zależność macierzy  $\mathbf{A}$  od parametrów układu implikuje, że optymalne przełączenia parametrów następują przy przejściu trajektorii układu przez hiperpowierzchnie drugiego stopnia o równaniach  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_j \mathbf{x} = 0$ ,  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_j \mathbf{x} = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Istotny jest fakt, że sterowania te są typu bang-bang i nie zależą bezpośrednio od swobodnej dynamiki rozważanego układu (czyli nie zależą od macierzy  $\mathbf{A}_0$ ). Zależność od  $\mathbf{A}_0$  występuje tylko pośrednio poprzez macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa, którą należy dobrać do macierzy  $\mathbf{A}_0$  tak, aby wskaźnik

stabilności  $\gamma_0(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]$  był dodatni. Ponieważ macierz  $\mathbf{A}_0$  jest z

założenia stabilna, klasa dodatnio określonych macierzy  $\mathbf{S}$  spełniających ten warunek jest niepusta. Możliwa jest więc dalsza optymalizacja (funkcji Lapunowa), a co za tym idzie, optymalizacja sprzężeń zwrotnych modyfikujących rozważany układ.

Przedstawione wyżej rozważania ogólne dobrze ilustruje następujący

**Przykład 6.1:** (*Modyfikacja parametryczna oscylatora liniowego*)(Ossowski [61])  
Rozpatrzmy zagadnienie modyfikacji parametrycznej oscylatora liniowego o jednym stopniu swobody.

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0, \quad q > p^2, \quad (6.3.6)$$

gdzie  $p = p_0 + u_1$ ,  $q = q_0 + u_2$ ,  $|u_1| \leq \alpha_1$ ,  $|u_2| \leq \alpha_2$ . Problem dotyczy w istocie inkluzji różniczkowej  $\ddot{x} + 2p_0\dot{x} + q_0x \in \{2u_1\dot{x} + u_2x : |u_1| \leq \alpha_1 \wedge |u_2| \leq \alpha_2\}$ .

Korzystając z ogólnych formuł (6.3.5) i przyjmując regularną dla oscylatora macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa (Paragraf 4.4), dostajemy następujące sterowania modyfikujące:

$$u_1 = \alpha_1 \cdot \text{sign}[\dot{x}(px + \dot{x})], \quad u_2 = \alpha_2 \cdot \text{sign}[x(px + \dot{x})]. \quad (6.3.7)$$

Można pokazać, że takie sterowanie wydatnie poprawia średni wskaźnik zbieżności układu (Ossowski [61], [62]).

Warto dodać, że otrzymane tu prawa sterowania nie są całkiem oczywiste i odbiegają od tych, które najczęściej przyjmuje się na podstawie heurystycznych uzasadnień podanych w Paragrafie 6.1. Według prawa (6.3.7) tłumienie powinno być przełączane na minimum zaraz po przejściu położenia układu przez punkt zawracania, ale włączone na maksimum dopiero po osiągnięciu pewnej prędkości. Daje to w efekcie większe zużycie energii i większą średnią szybkość zbieżności (Onoda [53]). □

Z podanego przykładu wynika ciekawa własność, że kwadratowe funkcje przełączeń w układzie modyfikacji parametrycznej oscylatora liniowego dekomponują się na iloczyn funkcji liniowych. Oznacza to, że powierzchnie przełączeń składają się z dwóch hiperpłaszczyzn (w tym przypadku prostych) w przestrzeni stanu. Zatem w czasie oscylacyjnego ruchu z określoną częstością układu ze sterowaniem (6.3.7), sterowane parametry będą przełączane z częstością dwukrotnie wyższą. Okazuje się, że jest to szczególnym przypadkiem ogólniejszego faktu, który precyzuje następujące

**Twierdzenie 6.2:** Funkcje przełączeń optymalnej modyfikacji parametrów sztywności i tłumienia liniowych układów drgających o dowolnej liczbie stopni swobody dekomponują się na iloczyny dwóch czynników liniowych. Zatem optymalne przełączenia każdego z modyfikowanych parametrów układu dokonują się zawsze na dwóch hiperpłaszczyznach w przestrzeni stanu, charakterystycznych dla każdego z parametrów (Ossowski [62]).

*Dowód:* Rozkład funkcji przełączeń na czynniki liniowe wynika z symetrii macierzy tłumienia i sztywności. Istotnie, rozważmy dwie masy  $m_1$ ,  $m_2$ , będące elementami liniowego układu drgającego i oddziałujące między sobą lepkosprężystości. Jeżeli oznaczymy położenia tych mas (poruszających się wzdłuż

jednej prostej) odpowiednio przez  $x_1$ ,  $x_2$ , natomiast współczynnik sztywności oddziaływania i współczynnik tłumienia – odpowiednio przez  $k$ ,  $\alpha$ , to wówczas równania ruchu tych mas, jako elementów całego układu, będą wyglądały następująco:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + 2\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \dots \\ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + 2\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \dots \end{cases} \quad (6.3.8)$$

gdzie kropki oznaczają wyrażenia liniowe względem pozostałych współrzędnych stanu rozważanego układu. Przedstawiając równania w postaci macierzowej dla zmiennych stanu dostaniemy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 = \dot{x}_1 \\ x_2 \\ y_2 = \dot{x}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -k & -2\alpha & k & 2\alpha & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 2\alpha & -k & -2\alpha & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 = \dot{x}_1 \\ x_2 \\ y_2 = \dot{x}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (6.3.9)$$

Łatwo stąd wywnioskować, że odpowiednie funkcje przełączeń dla parametru sztywności i tłumienia będą następujące:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{SCx} = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 - x_1 \\ 0 \\ -(x_2 - x_1) \\ 0 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1) \cdot w(x_1, y_1, x_2, y_2),$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{SDx} = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - y_1 \\ 0 \\ -(y_2 - y_1) \\ 0 \end{bmatrix} = (y_2 - y_1) \cdot w(x_1, y_1, x_2, y_2),$$

gdzie funkcja liniowa

$$w(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sum_{i=1}^{2n} (S_{2i} + S_{4i}) x_i \quad (6.3.10)$$

W szczególności, gdy dana masa (na przykład  $m_1$ ) oddziałuje z nieruchomą bazą, odpowiednie funkcje przełączeń będą następujące:  $-x_1 \cdot w(x_1, y_1)$ .

Jak widać, jedna z hiperpłaszczyzn przełączeń ( $w(x_1, y_1, x_2, y_2)=0$ ), zależna na ogół od parametrów funkcji Lapunowa oraz zmiennych stanu systemu, jest identyczna dla parametru tłumienia i sztywności. Ponieważ wybór indeksów nie ma tu znaczenia, uzyskany wynik bez trudu uogólnia się na dowolne masy układu oddziałujące ze sobą lepkosprężystości. (Też twierdzenia można też wykazać korzystając z przedstawienia modelu układu we współrzędnych normalnych.)  $\square$

Ważną kwestią jest ocena efektywności modyfikacji parametrycznej. Oceny takiej można dokonać porównując wartości wskaźnika stabilności oraz średniego wskaźnika zbieżności przed i po modyfikacji danego układu. Łatwo wykazać, że wymienione wskaźniki układu po modyfikacji będą wyrażały się następującymi wzorami:

$$\gamma(\mathbf{S}, \alpha, \beta) = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_0 \mathbf{x} - \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_j \mathbf{x} \right| - \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_j \mathbf{x} \right| \right], \quad (6.3.11)$$

$$\gamma < \mathbf{S} > = \gamma_0 < \mathbf{S} > + \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot \left\langle \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_j \mathbf{x} \right| \right\rangle_{\|\mathbf{x}\|=1} + \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot \left\langle \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_j \mathbf{x} \right| \right\rangle_{\|\mathbf{x}\|=1}, \quad (6.3.12)$$

z których wynika, że  $\gamma(\mathbf{S}) \geq \gamma_0(\mathbf{S})$ ,  $\gamma < \mathbf{S} > > \gamma_0 < \mathbf{S} >$ . Zatem modyfikacja parametryczna zawsze poprawia średni wskaźnik zbieżności, ale niekoniecznie wskaźnik stabilności. Równość wskaźników stabilności przed i po modyfikacji może zajść jednak tylko w osobliwej sytuacji, na przykład wtedy, gdy modyfikacji podlega jeden parametr i w optymalnym punkcie  $\mathbf{x}$  zeruje się funkcja przełączeń. W przeciwnym razie wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  będzie większy od  $\gamma_0(\mathbf{S})$ . Lecz nawet w takim przypadku modyfikacja jednego parametru ma ograniczone możliwości, bowiem po przekroczeniu pewnej krytycznej wartości amplitudy jednego ze sterowań, wskaźnik stabilności nie wzrasta, ponieważ odpowiednie supremum jest osiągnięte na powierzchni przełączeń rozpatrywanego parametru.

Omówione wyżej zagadnienia ilustruje poniższy

**Problem 6.1:** (*Graniczny wskaźnik stabilności układu zmodyfikowanego*)

Rozważmy problem oszacowania wskaźnika stabilności dla układu drgającego z modyfikacją jednego parametru. Skoro funkcja przełączeń  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$  jest iloczynem dwóch funkcji liniowych, to możliwe są dwa przypadki: gdy funkcja przełączeń jest kwadratem pewnej funkcji liniowej albo jest iloczynem dwóch różnych funkcji liniowych. Pierwszy z przypadków jest rozpatrzony w Rozdziale 7, przy omawianiu zagadnienia stabilizacji. Dlatego rozpatrzmy teraz przypadek drugi, gdy powierzchnia przełączeń składa się z dwóch hiperpłaszczyzn.

Nie zmniejszając ogólności możemy zatem przyjąć, że istnieją dwa liniowo niezależne wektory  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  takie, że optymalna funkcja przełączeń  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}$



dekomponuje się na iloczyn czynników liniowych  $(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{D}^T \mathbf{S} \mathbf{x})$ . Wtedy wskaźnik stabilności będzie wyrażał się następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = \gamma(\mathbf{S}, \beta) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \beta \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{D}^T \mathbf{S} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (6.3.13)$$

Ponieważ parametr  $\beta$  nie może być dowolnie duży (bo nie może przekraczać wartości modyfikowanego parametru układu), więc nie możemy dowolnie zmniejszać wyrażenia pod supremum w (6.3.13). Możemy jednak formalnie przejść z  $\beta$  do nieskończoności. Dostaniemy wtedy następujący warunek konieczny stabilizowalności parametrycznej

$$\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] > 0, \quad (6.3.14)$$

gdzie supremum jest liczone na zbiorze  $\mathbf{B}_S^{\perp} \cup \mathbf{C}_S^{\perp}$ , czyli na sumie mnogościowej (ale nie sumie prostej) podprzestrzeni  $\mathbf{S}$ -ortogonalnej do wektora  $\mathbf{B}$  oraz podprzestrzeni  $\mathbf{S}$ -ortogonalnej do wektora  $\mathbf{D}$  (Jeśli układ jest stabilny, warunek ten jest bezwzględnie spełniony). Zatem jest to warunek mocniejszy od warunku stabilizowalności za pomocą sił, określonego w Rozdziale 7. W ogólności wynika z tego fakt, że trudniej jest ustabilizować układ niestabilny za pomocą sterowania parametrami niż za pomocą sterowanych sił.

Wskaźnik graniczny (6.3.14) określa właśnie oszacowanie maksymalnej wartości wskaźnika stabilności jaką można osiągnąć za pomocą modyfikacji jednego parametru. Stosując rozkład ortogonalny wektora  $\mathbf{x}$  według wektorów  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  i ich uzupełnienia  $\mathbf{S}$ -ortogonalnego można wyznaczyć ściśle wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, \beta)$  jako funkcję parametru  $\beta$  (gdy  $\dim \mathbf{x} = 2$ ) oraz oszacowanie tego wskaźnika dla większych wymiarów wektora stanu.  $\square$

W przypadku modyfikacji wielu parametrów układu, jeżeli niemożliwe jest jednoczesne wyzerowanie wszystkich funkcji przełączeń, będzie zachodziła nierówność ostra  $\gamma(\mathbf{S}) > \gamma_0(\mathbf{S})$ , a więc nie wystąpi zjawisko nasycenia się wartości wskaźnika stabilności. Znaczy to, że efekt modyfikacji wieloparametrowej będzie widoczny również we wskaźniku stabilności.

Powyższe stwierdzenie wynika z następującego oszacowania:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \sum_i \alpha_i \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_i \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \geq \gamma_0(\mathbf{S}) + \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \sum_i \alpha_i \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_i \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] > \gamma_0(\mathbf{S}). \quad (6.3.15)$$

Zatem modyfikacja wielu parametrów ma przewagę nad modyfikacją jednoparametrową, o ile funkcje przełączeń tych parametrów nie będą miały wspólnego czynnika liniowego. Ten fakt może być istotny w praktycznych zastosowaniach oraz przy szacowaniu obszaru granicznego liniowego układu drgającego z modyfikacją parametrów i niestacjonarnymi zaburzeniami.

W szczególności wynika z powyższych rozważań, że modyfikacja nawet obu parametrów oscylatora o jednym stopniu swobody nie jest w stanie dowolnie poprawić wartości wskaźnika stabilności, ponieważ funkcje przełączeń tłumienia i sztywności oscylatora mają wspólny czynnik.

Ciekawy jest przypadek, gdy do syntezy optymalnego modyfikatora zastosuje się regularną funkcję Lapunowa. Kwestię efektywności modyfikacji parametrycznej w takim właśnie przypadku porusza poniższy

**Problem 6.2:** (Efektywność regularnej modyfikacji parametrycznej)

Rozważmy kwestię zmian wartości wskaźnika stabilności, gdy do syntezy sterowania zastosowano funkcję Lapunowa o regularnej macierzy  $\mathbf{S}$ .

Założmy wpieryw, że modyfikacji polega jeden parametr. Wówczas wskaźnik stabilności układu zmodyfikowanego nie ulegnie zmianie, ponieważ zachodzi następująca równość:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ -\gamma_0(\mathbf{S}) - \alpha \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \gamma_0(\mathbf{S}) + \alpha \cdot \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} = \gamma_0(\mathbf{S}), \quad (6.3.16)$$

(Infimum w powyższej równości znika, albowiem na mocy założeń istnieje niezerowy punkt  $\mathbf{x}$  zerujący funkcję przełączeń.). Zatem w rozważanym przypadku regularnym modyfikacja jednego parametru nie przynosi poprawy wskaźnika stabilności.

Lepiej wygląda ta sytuacja, gdy jednocześnie wiele parametrów układu jest modyfikowanych. Wtedy zachodzi następujące oszacowanie:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ -\gamma_0(\mathbf{S}) - \sum_i \alpha_i \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_i \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \gamma_0(\mathbf{S}) + \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \sum_i \alpha_i \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_i \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] > \gamma_0(\mathbf{S}). \quad (6.3.17)$$

Porównując (6.3.16) z (6.3.17) widać, że stosując regularne funkcje Lapunowa możemy dokładniej oszacować wskaźnik stabilności. □

**Przykład 6.2:** (Efektywność modyfikacji tłumienia i sztywności oscylatora)

Rozważmy liniowy oscylator o jednym stopniu swobody. Przyjmijmy, że parametry tłumienia i sztywności, mające wartości nominalne równe odpowiednio  $p = 1$ ,  $q = 0.5$  są modyfikowane według strategii określonej przez (6.3.7) z amplitudami  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ . Jeżeli do analizy zastosujemy funkcję Lapunowa

o macierzy  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , optymalnej dla nominalnej, stacjonarnej części układu, dostaniemy następujące wartości wskaźników:

$\gamma(\mathbf{S}) = 0.2929$ ,  $\gamma\langle\mathbf{S}\rangle = 0.7532$  dla  $\alpha_1=0$ ,  $\alpha_2=0$  (brak modyfikacji parametrów),  
 $\gamma(\mathbf{S}) = 0.3255$ ,  $\gamma\langle\mathbf{S}\rangle = 0.8589$  dla  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0$  (modyfikacja tłumienia),  
 $\gamma(\mathbf{S}) = 0.3636$ ,  $\gamma\langle\mathbf{S}\rangle = 0.7972$  dla  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0.1$  (modyfikacja sztywności),  
 $\gamma(\mathbf{S}) = 0.3950$ ,  $\gamma\langle\mathbf{S}\rangle = 0.9038$  dla  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.1$  (modyfikacja tłumienia i sztywności).

Interpretacja powyższych wyników jest oczywista. □

Klasykne koncepcje modyfikacji parametrycznej liniowych układów drgających często są nastawione na poprawę ogólnych własności częstotliwościowych układów za pomocą liniowych sprzężeń zwrotnych (Warburton [113], Warnitchal [114]). Tego rodzaju sterowania nie są jednak optymalne pod względem szybkości wykładniczej zbieżności trajektorii. Sterowania optymalne (6.3.5) też nie wyróżniają jawnie żadnej postaci drgań własnych układu, ponieważ zostały znalezione „na poziomie” parametrów fizycznych a nie modalnych. Ogólna postać funkcji przełączeń parametrów liniowego układu drgającego pokazuje jednak, że optymalne sterowania wynikające z metody optymalnych funkcji Lapunowa niejako samoczynnie będą dostosowywać się do dominującej częstości drgań układu, przełączając parametry z częstością dwukrotnie większą. Jeśli jednak ruch układu będzie superpozycją wielu drgań własnych, tak prosta interpretacja sterowania nie jest możliwa. Warto więc zastanowić się nad kwestią modyfikacji parametrycznej liniowych układów drgających mającej na celu większe tłumienie drgań tylko o pewnych częstościach. Możemy sformułować wiele różnych zagadnień optymalnej modyfikacji parametrycznej. Modyfikacja parametryczna może mieć na celu „ogólną” poprawę własności stabilności (zbieżności trajektorii) całego układu albo być ukierunkowana na szczególne tłumienie wybranych postaci drgań własnych. Wybór sposobu tłumienia nie jest więc jednoznaczny i będzie na ogół zależny od konkretnej sytuacji praktycznej, a w szczególności od pewnej wiedzy na temat rzeczywistych warunków pracy układu i jego funkcji użytkowych.

Aby rozwiązać problem takiej selektywnej modyfikacji, należy rzecz jasna postąpić nieco inaczej. Postępując zgodnie z *imperatywem kategoriowym* Kanta (Rozdział 7), możemy na przykład poprawić tłumienie pewnej postaci drgań starając się nie popsuć zbytnio pozostałych. Jeżeli sprowadzimy równania układu do postaci normalnej, to teoretycznie rzecz biorąc możemy modyfikować każdy z parametrów modalnych. Problem jednak tkwi w tym, że parametry modalne nie są od siebie niezależne, jako że same są na ogół funkcjami parametrów fizycznych. Chcąc modyfikować tłumienie i sztywność modalną danej postaci drgań musimy

określić jakimi parametrami fizycznymi możemy się posłużyć i jaki będzie to miało wpływ na pozostałe postaci drgań. Zadanie to nie jest proste mimo, iż oscylatory modalne są od siebie niezależne.

Poruszone wyżej kwestie dobrze ilustruje następujący

**Przykład 6.3:** (*Modyfikacja drgań układu o dwóch stopniach swobody*)

Rozważymy zagadnienie półaktywnej modyfikacji symetrycznego układu dwóch jednakowych mas zawieszonych lepkosprężysto i oddziałujących sprężysto. Równania układu mają postać:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2\alpha\dot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + kx_1 = 0, \\ m\ddot{x}_2 + 2\alpha\dot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + kx_2 = 0. \end{cases} \quad (6.3.18)$$

Dokonując ortogonalnej transformacji współrzędnych stanu do współrzędnych normalnych

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \quad (6.3.19)$$

i uwzględniając zależności odwrotne:  $x_1 + x_2 = \sqrt{2}y_1$ ,  $x_1 - x_2 = \sqrt{2}y_2$ , dostajemy równania we współrzędnych normalnych

$$\ddot{y}_1 + 2p\dot{y}_1 + q_1y_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 + 2p\dot{y}_2 + q_2y_2 = 0, \quad (6.3.20)$$

gdzie

$$p = \frac{\alpha}{m}, \quad q_1 = \frac{k}{m}, \quad q_2 = \frac{k + 2k_1}{m}. \quad (6.3.21)$$

Widać, że możliwa jest modyfikacja parametru sztywności modalnej  $q_2$  za pomocą parametru fizycznego, jakim jest sztywność  $k_1$  oddziaływania obu mas. Możliwa jest więc realizacja modyfikacji parametrycznej tłumiącej tylko drugą postać drgań. Przyjmując, że  $k_1 = k_0 + u$ ,  $|u| \leq \beta_0$  dostajemy następującą postać optymalnego sprzężenia zwrotnego:

$$u = \beta \cdot \text{sign}[y_2(py_2 + \dot{y}_2)], \quad (6.3.22)$$

gdzie  $\beta = 2\beta_0/m$ . Wracając do współrzędnych naturalnych dostajemy ostatecznie

$$u = \beta \cdot \text{sign}\{(x_1 - x_2) \cdot [p(x_1 - x_2) + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)]\}.$$

Identyczny wynik dostaniemy wyznaczając sterowanie bezpośrednio z równań (6.3.18). □

Jak widać, modyfikacja innych parametrów, mająca na celu tłumienie tylko jednej z postaci drgań, będzie bardziej skomplikowana albo w ogóle niemożliwa. Dzieje się tak dlatego, że parametry modalne są zazwyczaj od siebie zależne. Na przykład tłumienie  $p$ , chociaż jednakowe w obu równaniach modalnych (6.3.20),

faktycznie związane jest dwoma różnymi tłumikami. W przypadku modyfikacji ich parametrów tłumienia, każdy z nich będzie miał swój wkład do wypadkowych wartości parametru  $p$  w obu równaniach.

## 6.4 Modyfikacja parametryczna układów niestacjonarnych

Zagadnienie modyfikacji parametrycznej układów niestacjonarnych rozważymy w zakresie najbardziej istotnym z punktu widzenia mechatroniki, mającym bezpośrednio odniesienie do problematyki wibroizolacji lub amortyzacji drgań.

Zagadnienie wibroizolacji maszyn polega na doborze takiej konstrukcji zawieszenia maszyny na podłożu, aby wibracje pochodzące z działającej maszyny w najmniejszym stopniu przenosiły się na podłoże (Osiński [54]). Problem wibroizolacji dotyczy też na przykład kwestii przenoszenia się drgań toru (lub mostu), po którym jedzie pociąg, na podłoże itp. Wibroizolacja ma zasadnicze znaczenie zarówno dla trwałości urządzeń technicznych czy budynków jak i dla jakości środowiska akustycznego i wibracyjnego, w którym przebywa człowiek. Izolator tu jest urządzeniem, na którego wejściu działa wymuszenie, zwykle jako pewna dynamiczna siła niestacjonarna. Problem polega na wyznaczeniu sił przenoszonych na podłoże i optymalizacji konstrukcji izolatora.

Z kolei w zagadnieniu amortyzacji drgań wymuszenie działające na wejście amortyzatora jest kinematyczne i pochodzi od podłoża. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład w pojazdach. Zadaniem amortyzatora (układu zawieszenia) jest minimalizacja drgań obiektu związanego z wyjściem amortyzatora. Problem polega na wyznaczeniu amplitudy drgań na wyjściu przy założeniu określonego wymuszenia na wejściu i optymalizacji konstrukcji amortyzatora.

Klasycznym (zwykle mechanicznym) i zarazem najprostszym sposobem wibroizolacji (amortyzacji) jest instalacja danego obiektu na zawieszeniu lepkosprężystym. Doskonalszym (mechatronicznym) sposobem wibroizolacji jest zastosowanie półaktywnego sterowania parametrami klasycznego układu izolacji, czyli sterowania jego tłumieniem i sztywnością. Celem niniejszego paragrafu jest omówienie podstawowych kwestii odnoszących się do tego typu układów.

Wiadomo, że zagadnienie wibroizolacji i amortyzacji sprowadza się do analizy równań (modeli) tego samego typu, a zatem oba te zagadnienia można rozpatrywać łącznie. Będziemy więc rozważać model w postaci następującej inkluzji:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} \in \{u \cdot \mathbf{B}\mathbf{x} + v \cdot \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot z(t) : |u_1| \leq \beta_1 \wedge |u_2| \leq \beta_2 \wedge |z| \leq \alpha\}, \quad (6.4.1)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest stabilną i stałą macierzą  $n \times n$  nominalnego (klasycznego) układu izolacji,  $u$  jest sterowaną sztywnością,  $v$  – sterowanym tłumieniem,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  są macierzami określającymi strukturę działania sterowań, wreszcie  $z$  jest niestacjonarnym wymuszeniem a  $\mathbf{D}$  jest stałym wektorem określającym strukturę oddziaływania tego wymuszenia na układ.

Wskaźnik zbieżności rozważanego modelu możemy oszacować jak następuje:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, \alpha, \beta_1, \beta_2, c] &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \beta_1 \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{x} \right| - \beta_2 \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} \right| + \frac{\alpha}{c} \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \right] \geq \\ &\geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, \alpha, \beta_1, \beta_2, c] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \beta_1 \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{x} \right| - \beta_2 \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} \right| \right] + \\ &\quad - \frac{\alpha}{c} \cdot \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| = \gamma[\mathbf{S}, \beta_1, \beta_2] - \frac{\alpha}{c} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Wynika z tego następujące oszacowanie promienia elipsoidy granicznej:

$$\boxed{c_{\infty}(\mathbf{S}) \leq \tilde{c}_{\infty}(\mathbf{S}) = \frac{\alpha}{\gamma[\mathbf{S}, \beta_1, \beta_2]} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}}. \quad (6.4.3)$$

Widać, że norma przenoszonych drgań układu jest proporcjonalna do amplitudy wymuszenia i odwrotnie proporcjonalna do wskaźnika  $\gamma[\mathbf{S}, \beta_1, \beta_2]$ , opisującego wykładniczą zbieżność sterowanego układu izolacji bez zaburzeń. Jakościowe własności tego wskaźnika oraz możliwości jego analitycznego wyznaczenia zostały mówione w poprzednim paragrafie. Ponieważ  $\gamma[\mathbf{S}, \beta_1, \beta_2] \geq \gamma[\mathbf{S}, 0, 0] = \gamma_0(\mathbf{S})$ , efektywność izolatora (amortyzatora) ze sterowaniem będzie wyższa niż bez sterowania. Wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, \beta_1, \beta_2]$  można wyznaczyć numerycznie, a optymalizację macierzy  $\mathbf{S}$  można przeprowadzić na przykład według kryterium minimalizacji promienia lub pola elipsoidy  $B(\mathbf{S}, \tilde{c}_{\infty}(\mathbf{S}))$ . W rezultacie dostaniemy parametry optymalnej macierzy  $\mathbf{S}$ , a co za tym idzie, optymalne parametry sterowania tłumieniem i sztywnością izolatora, które będą miały standardową postać (6.3.5). W uproszczonej suboptymalnej wersji układu sterowania, możemy zastosować parametry pochodzące od macierzy  $\mathbf{S}$  optymalnej funkcji Lapunowa dla układu stacjonarnego o macierzy  $\mathbf{A}$ .

Chcąc dokładniej opisać własności rozważanego układu sterowania za pomocą zbiorów rozmytych, można wyznaczyć oszacowanie analogiczne do (6.4.3) wykorzystując średni wskaźnik zbieżności.

Odnośnie wymuszenia  $z(t)$  w rozważanych układach, zwykle zakłada się, że odpowiada ono sile okresowo zmiennej albo sinusoidalnej. Dzięki temu zagadnienie bywa rozwiązywalne analitycznie, ale tylko dla układu o jednym lub dwóch stopniach swobody. W ogólności jednak  $z(t)$  może być dowolną siłą ograniczoną co do modułu, a układ izolacji – bardziej złożony. Ponieważ w powyższej analizie jakościowej zakładaliśmy tylko ograniczoność wymuszenia, uzyskany wynik (6.4.3) jest bardziej uniwersalny, przydatny w zagadnieniu wibroizolacji (amortyzacji) złożonych obiektów.

Omówione wyżej zagadnienia ogólne ilustruje następujący

**Przykład 6.4:** (Modyfikacja półaktywna układu oscylatorów liniowych)

Rozważmy układ  $k$  jednakowych oscylatorów liniowych z tłumieniem, oddziałujących sprzężenie i będących pod działaniem niezależnych wymuszeń niestacjonarnych. Taki układ można opisać następującym znormalizowanym modelem:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2p\dot{x}_1 + qx_1 + r(x_1 - x_2) \in \{f_1 : |f_1| \leq \alpha\}, \\ \ddot{x}_i + 2p\dot{x}_i + qx_i + r(x_i - x_{i-1}) + r(x_i - x_{i+1}) \in \{f_i : |f_i| \leq \alpha\}, i = 2, \dots, k-1, \\ \ddot{x}_k + 2p\dot{x}_k + qx_k + r(x_k - x_{k-1}) \in \{f_k : |f_k| \leq \alpha\}, \end{cases} \quad (6.4.4)$$

gdzie  $p$  jest współczynnikiem tłumienia każdego z oscylatorów układu,  $q$  – współczynnikiem ich sztywności własnej, natomiast  $r$  – współczynnikiem sprzężystego oddziaływania między sąsiednimi oscylatorami. Odnośnie wymuszeń siłowych  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  będziemy zakładali tylko ich wspólną ograniczoność, określoną jednym parametrem  $\alpha \geq 0$ .

Układ inkluzji (6.4.4) może być dyskretnym modelem opisującym na przykład drgania podłoża lepkosprężystego, poddanego niestacjonarnemu obciążeniu. W szczególności można w ten sposób modelować drgania podłoża toru obciążonego przejeżdżającym pociągiem (metra).

Rozważany układ inkluzji (6.4.4) można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} \in \{\mathbf{B}_1 f_1 + \dots + \mathbf{B}_k f_k : |f_1| \leq \alpha \wedge \dots \wedge |f_k| \leq \alpha\}, \quad (6.4.5)$$

gdzie macierz  $\mathbf{A}$  tego układu, macierz  $\mathbf{S}$  regularnej funkcji Lapunowa oraz wektory oddziaływania wymuszeń  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$  będą następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -(q+r) & -2p & r & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r & 0 & -(q+2r) & -2p & r & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & r & \ddots & -(q+2r) & -2p & r & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r & 0 & -(q+r) & -2p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} (q+r) & p & -r & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ -r & 0 & (q+2r) & p & -r & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & p & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -r & 0 & \ddots & p & -r & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -r & 0 & (q+r) & p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & p & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że warunek podkrytyczny  $q > p^2$  gwarantuje dodatnią określoność powyższej macierzy  $\mathbf{S}$ .

Wskaźnik stabilności (zbieżności) oraz wskaźnik średniej zbieżności dla układu bez modyfikacji i bez wymuszeń jest równy  $\gamma_0(\mathbf{S}) = \gamma \langle \mathbf{S} \rangle = \gamma[\mathbf{S}] = p$ . Wynika z tego następujące oszacowanie wskaźnika zbieżności układu z zaburzeniami  $z_1, \dots, z_k$ :

$$\gamma[\mathbf{S}, c] \geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c] = \gamma_0(\mathbf{S}) - \frac{\alpha}{c} (\|\mathbf{B}_1\|_{\mathbf{S}} + \dots + \|\mathbf{B}_k\|_{\mathbf{S}}) = p - \frac{\alpha \cdot k}{c}. \quad (6.4.6)$$

Z warunku zbieżności  $\gamma[\mathbf{S}, c] > 0$  dostajemy promień elipsoidy granicznej  $c_\infty \leq \alpha \cdot k / p$ , który, jak widać, jest proporcjonalny do łącznej intensywności wymuszeń a odwrotnie proporcjonalny do wskaźnika zbieżności dla układu bez wymuszeń.

Lepsze oszacowania promienia elipsoidy granicznej dla układu (6.4.5) można otrzymać przyjmując zasadę Turkstry dla wymuszeń  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  (Ossowski [82]).

Korzystając z ogólnych formuł (6.3.5) dostajemy następujące optymalne strategie modyfikacji nominalnych parametrów tłumienia  $p$  i sztywności  $q$  układu:

$$w_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \cdot \text{sign}[\dot{x}_i(px_i + \dot{x}_i)], \quad z_i(\mathbf{x}) = \beta_i \cdot \text{sign}[x_i(px_i + \dot{x}_i)]. \quad (6.4.7)$$

Jak widać, dzięki regularności zastosowanej funkcji Lapunowa, optymalne sprzężenia zwrotne każdego z modyfikowanych oscylatorów układu nie zależą od stanu pozostałych oscylatorów układu, co znakomicie ułatwia optymalizację parametrów takiego sterowania. Z postaci sterowań (6.4.7) wynika też, że istnieją niezerowe stany układu, zerujące wszystkie funkcje przełączeń, co oznacza, że tego typu modyfikacja nie poprawi wskaźnika stabilności całego układu. Modyfikacja przyczyni się jednak do wzrostu średniego wskaźnika zbieżności, który można wyznaczyć numerycznie dla konkretnych wartości parametrów układu  $p, q, r$ .  $\square$



## 6.5 Modyfikacja parametryczna układów analitycznych

Ogólna postać równań lub inkluzji układów analitycznych względem składowych sterowania jest określona przez (1.4.1), (1.4.2). Jak już wiemy, do modyfikacji parametrów tłumienia i sztywności wystarczy uwzględnić liniowe składniki rozwinięcia (1.4.2) względem sterowania, co wynika z fizycznej natury tych parametrów i ich roli w rozważanych modelach. W układach mechatronicznych potrzeba uwzględnienia składników nieliniowych względem składowych sterowania parametrycznego występuje głównie wtedy, gdy modyfikacji podlegają uogólnione parametry masowe  $\mathbf{m}$ , od których zależna jest macierz  $\mathbf{M}$ . Mając na względzie ograniczoną objętość niniejszej rozprawy, skupimy się w niniejszym paragrafie na tym właśnie przypadku.

Półaktywne sterowanie parametrami masowymi może mieć zastosowanie na przykład w systemach zapobiegania kołysaniu się statków. Tłumienie bocznych wychyleń statku jest ważnym zagadnieniem związanym z komfortem i bezpieczeństwem transportu morskiego. Ponieważ na morzu z zasady nie ma możliwości skorzystania z zewnętrznego punktu oparcia, wszystkie tłumiki takich drgań muszą wykorzystywać siły wewnętrzne lub zmiany parametrów statku jako całości. Istnieją pewne praktyczne realizacje tłumików takich drgań, których działanie bazuje na zastosowaniu żyroskopów albo przepompowywaniu wody w systemie zbiorników znajdujących się wewnątrz kadłuba statku. Najbezpieczniejszym i skutecznym rozwiązaniem wydaje się jednak tłumik parametryczny, którego działanie polegałoby na odpowiednich zmianach momentu bezwładności kadłuba względem jego osi podłużnej.

**Problem 6.3:** (*Sterowanie za pomocą parametrów inercyjnych*)

Rozważmy wpierym zagadnienie modyfikacji parametrów masowych układu mechanicznego opisanego modelem następującej postaci

$$\mathbf{M}(\mathbf{m})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \in \{\mathbf{R} : |\mathbf{R}| \leq \alpha\}, \quad (6.5.1)$$

gdzie  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  są stałymi macierzami tłumienia i sztywności,  $\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_k]^T$  jest wektorem sterowanych parametrów masowych, natomiast  $\mathbf{R}$  jest wektorem niestacjonarnych sił ograniczonych. Przyjmijmy, że każdy z parametrów masowych  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  może się zmieniać w ograniczonym zakresie wokół pewnej wartości nominalnej  $m_{i0}$ , czyli  $m_i \in [m_{i0} - \mu_i, m_{i0} + \mu_i]$ , gdzie  $\mu_i > 0$  określa maksymalny zakres tych zmian. Przyjmijmy też, że układ (6.5.1), dla nominalnych stałych parametrów masowych i  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{0}$ , jest asymptotycznie stabilny.

Założymy dalej przypadek nieosobliwy, gdy istnieje macierz odwrotna  $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{m})$  dla każdego  $\mathbf{m}$  ze zbioru możliwych wartości. Wówczas model układu można przedstawić w postaci rozwikłanej ze względu na drugie pochodne czasowe tzn. w postaci następującej:

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{m})\mathbf{P}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{m})\mathbf{Q}\mathbf{X} \in \{\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{m})\mathbf{R} : |\mathbf{R}| \leq \alpha\}. \quad (6.5.2)$$

W rezultacie dostaliśmy równoważny układ o zmiennych (modyfikowanych) macierzach tłumienia i sztywności  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{m})\mathbf{P}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{m})\mathbf{Q}$ . Nie jest to jednak przypadek omówionej już modyfikacji fizycznych parametrów tłumienia i sztywności. W rozważanym tu modelu mamy bowiem zależność obu macierzy tłumienia i sztywności od tych samych parametrów  $\mathbf{m}$ , które podlegają modyfikacji. Poza tym w modelu (6.5.2) modyfikowane w ten sam sposób jest również działanie niestacjonarnych sił  $\mathbf{R}$ . Ponieważ zależność macierzy modelu (6.5.2) od parametrów  $\mathbf{m}$  na ogół nie jest liniowa, ze względu na obecność wyznacznika  $\det \mathbf{M}$  w macierzy odwrotnej  $\mathbf{M}^{-1}$ , trzeba w ogólnym przypadku skorzystać z odpowiedniego rozwinięcia w szereg względem składowych wektora  $\mathbf{m}$  i analizować uproszczony model analityczny, ograniczając rozważania do pierwszych składników nieliniowych względem składowych wektora  $\mathbf{m}$ . Będziemy mieli wówczas do czynienia z modelem analitycznym opisanym pewną funkcją postaci (1.4.2).

Nieco prostszy przypadek, jaki dalej rozważymy, jest wtedy, gdy macierz  $\mathbf{M}$  jest diagonalna. Wówczas macierz  $\mathbf{M}^{-1}$  też jest diagonalna, a parametry masowe występują w niej w wyrażeniach postaci  $\frac{1}{m_{i0} + \mu_i}$ . Zatem można je zastąpić równoważnymi parametrami  $v_i$  spełniającymi ograniczenia  $\frac{1}{m_{i0} + \mu_{i0}} \leq v_i \leq \frac{1}{m_{i0} - \mu_{i0}}$ . Rozkładając dalej te parametry na składową nominalną i sterowaną dostajemy

$$v_i = v_{i0} + u_i, \text{ gdzie } v_{i0} = \frac{m_{i0}}{m_{i0}^2 - \mu_{i0}^2}, |u_i| \leq \frac{\mu_{i0}}{m_{i0}^2 - \mu_{i0}^2} = \alpha_i. \quad \square \quad (6.5.3)$$

**Przykład 6.5:** (Modyfikacja jednego parametru masowego)

Rozważymy układ liniowy z jednym sterowanym parametrem masowych oraz jedną składową siły z działającą określonym kierunku  $\mathbf{B}$ . Uwzględniając (6.5.3) i przechodząc do współrzędnych stanu, dostaniemy w rezultacie model następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + u \cdot \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}z + \mathbf{B} \cdot zu : |z| \leq \alpha \wedge |u| \leq \beta\}, \quad (6.5.4)$$

gdzie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  są stałymi macierzami  $n \times n$ ,  $\mathbf{B} \in R^n$  jest stałym wektorem, natomiast  $\alpha, \beta (< 1)$  są parametrami ograniczeń, odpowiednio zaburzeń i sterowań.

Widać, że adekwatnym modelem opisującym układ z modyfikowanym parametrem masowym i będącym pod działaniem niestacjonarnych,

ograniczonych wymuszeń jest model trójliniowy (funkcja  $\mathbf{F}$  opisująca inkluzję jest bowiem liniowa względem każdego z argumentów  $\mathbf{x}$ ,  $z$ ,  $u$ ) z nieliniowościami typu multiplikatywnego  $u \cdot \mathbf{x}$  oraz  $u \cdot z$ .

Aby wyznaczyć sterowanie optymalne dla modelu (6.5.4), trzeba skorzystać z warunku optymalności dla układów ze sterowaniem i zaburzeniami opisanego w Rozdziale 3. Rozpatrując na przykład problem tłumienia kołysania się statku za pomocą kontrolowanych zmian momentu bezwładności kadłuba, sensownie jest założyć, że znana (mierzona) jest tylko ich szczytowa wielkość  $\alpha$  zaburzenia  $z$ . Wtedy wskaźnik stabilności dla modelu (6.5.4) będzie następujący:

$$\gamma(\mathbf{S}, \alpha, \beta) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{|u| \leq \beta} \sup_{|z| \leq \alpha} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + u \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z(1+u) \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (6.5.5)$$

Z powyższej zasady optymalności wynika, że antyoptimalna strategia zaburzeń realizuje następujące sprzężenia zwrotne:

$$z(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}). \quad (6.5.6)$$

Podstawiając (6.6.6) do (6.6.5), dostajemy następującą strategię optymalną dla sterowania:

$$u(\mathbf{x}) = -\beta \cdot \text{sign} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} + \alpha \cdot \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \right] \quad (6.5.7)$$

oraz wzór na wskaźnik zbieżności układu:

$$\gamma[\mathbf{S}, \alpha, \beta, c] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \beta \cdot \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} \right| + \frac{\alpha}{c} \cdot \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| + \frac{\alpha}{c} \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \right]. \quad (6.5.8)$$

Analiza numeryczna powyższego wzoru dla konkretnych wartości parametrów układu pozwala na wyznaczenie wartości wskaźnika zbieżności i oszacowanie promienia granicznego  $c_{\infty}$  (na przykład normy drgań kadłuba statku).

Nieco prostsze wyniki można uzyskać przyjmując koncepcję sterowania suboptymalnego postaci  $u(\mathbf{x}) = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}]$ , które jest optymalne dla układu bez nieliniowości typu  $u \cdot z$ . Dla takiego sterowania możemy oszacować wskaźnik zbieżności układu jak następuje:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, \alpha, \beta, c] &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \beta \cdot \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} \right| + \frac{\alpha}{c} (1 + \beta) \cdot \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \right] \geq \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, \alpha, \beta, c] = \\ &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \beta \cdot \left| \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x} \right| \right] - \frac{\alpha}{c} (1 + \beta) \cdot \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left| \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| = \gamma(\mathbf{S}, \beta) - \frac{\alpha}{c} (1 + \beta) \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \end{aligned}$$

Na tej podstawie oraz z warunku dostatecznego zbieżności wykładniczej  $\tilde{\gamma}[\mathbf{S}, \alpha, \beta, c] > 0$ , dostajemy następujące oszacowanie promienia elipsoidy granicznej:

$$c_{\infty}(\mathbf{S}) \leq \frac{\alpha(1+\beta)}{\gamma(\mathbf{S}, \beta)} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}. \quad (6.5.9)$$

Wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, \beta)$  w powyższym wzorze wyraża się przez wartości własne odpowiednich macierzy, a w przypadku układu o jednym stopniu swobody, można ten wskaźnik wyznaczyć ściśle. Analiza wzoru (6.5.9) pozwala na optymalizację parametrów układu w celu osiągnięcia jego minimalnej reakcji na wymuszenie.

Jak widać, promień graniczny jest proporcjonalny do amplitudy wymuszenia  $\alpha$ , a zatem optymalne parametry układu nie będą zależne od wielkości wymuszenia. Jednak parametry macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa (a więc i parametry układu sterowania) będą na ogół zależne od przyjętej amplitudy sterowania  $\beta$ . Z postaci zależności (6.5.9) wynika również, że amplituda sterowania nie powinna być zbyt duża ze względu na składnik  $\alpha \cdot \beta$  występujący w liczniku. Dla  $\beta$  zwiększających wartość wskaźnika  $\gamma(\mathbf{S}, \beta)$  w pobliże wartości asymptotycznej nie ma sensu dalsze zwiększanie wartości tego parametru, gdyż pogarsza to efekty modyfikacji.  $\square$

Podsumowując niniejszy rozdział, możemy powiedzieć, że modyfikacja parametryczna może być skutecznym, a niekiedy jedynym, sposobem poprawy własności stabilności układów mechanicznych (na przykład wtedy, gdy nie ma możliwości zastosowania sterowanych sił). Podstawowym sposobem realizacji modyfikacji parametrycznej jest zastosowanie półaktywnego sterowania w postaci odpowiedniego sprzężenia zwrotnego od stanu układu.

Zagadnienie modyfikacji parametrycznej jest z natury nieliniowe nawet w odniesieniu do układów liniowych stacjonarnych. Dlatego zastosowanie metod jakościowych, a zwłaszcza metody optymalnych funkcji Lapunowa, do analizy własności układów parametrycznie zmodyfikowanych jest w pełni uzasadnione. Ocena własności stabilności takich układów wymaga zastosowania odpowiednich wskaźników takich jak: wskaźnik stabilności lub średni wskaźnik zbieżności wykładniczej.

## 7. AKTYWNE STEROWANIE UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH

*Aktywne sterowanie polega na przyłożeniu do układu mechanicznego sterowanych sił w celu modyfikacji jego własności. Układ mechaniczny ze sterowaniem aktywnym określamy mianem układu (mechatronicznego) aktywnej modyfikacji.*

*Podstawową zaletą aktywnego sterowania jest większa efektywność w porównaniu ze sterowaniem półaktywnym, a wadą – stosunkowo duża energia niezbędna do uruchamiania siłowników i większa podatność na uszkodzenie systemu w razie awarii sterownika. Energia nieprawidłowo dostarczana do układu przez siłowniki może bowiem doprowadzić do jego destabilizacji. Zatem kwestia niezawodności, mało istotna w układach modyfikacji parametrycznej, staje się kluczowa dla układów aktywnej modyfikacji.*

*Istnieje szereg metod syntezy sterowań aktywnych, dostosowanych do różnych układów i celów modyfikacji. Najlepiej teoretycznie dopracowane są metody algebraiczne stosowane do modyfikacji własności stabilności stacjonarnych układów liniowych. Nie do końca jest natomiast rozwiązane zagadnienie modyfikacji dowolnych układów niestacjonarnych i/lub nieliniowych.*

*W niniejszym rozdziale będziemy zajmowali się aktywną modyfikacją własności stabilności układów. Omówimy metodę syntezy i badania własności układów sterowanych aktywnie, bazującą na koncepcji wskaźnika stabilności i optymalnych funkcji Lapunowa opisanych w Rozdziale 3. Wykażemy, że w klasie układów liniowych stacjonarnych metoda optymalnych funkcji Lapunowa prowadzi do wyników równoważnych z metodami algebraicznymi, ale pozwala na bardziej precyzyjne badanie własności takich układów. Zasadniczą zaletą tej metody okaże się jednak możliwość jej zastosowania również do szerokiej klasy układów quasiliniowych, afinicznych i niestacjonarnych o wielu stopniach swobody.*

### 7.1 Zagadnienie aktywnej modyfikacji układów mechatronicznych

*Aktywne sterowanie (modyfikacja) układu mechanicznego polega na przyłożeniu do układu kontrolowanych sił w celu poprawy jego własności (Pantelides [85]). Często rozważa się zagadnienie aktywnej modyfikacji własności stabilności (Ossowski [57]). Wtedy, zależnie od tego, czy obiekt (układ mechaniczny) jest stabilny, czy niestabilny, poprawa jego własności może być ilościowa albo jakościowa. Aktywna modyfikacja obiektu niestabilnego, czyli *stabilizacja*, ma na celu zapewnienie stabilności, a więc jakościową poprawę jego własności, natomiast modyfikacja aktywna obiektu stabilnego może zapewnić jedynie poprawę ilościową (na przykład zwiększenie obszaru przyciągania lub szybkości zbieżności trajektorii).*

*W niniejszym paragrafie sformułujemy zagadnienie aktywnej modyfikacji w przypadku układu mechanicznego ze sterowaniem, ale bez zaburzeń. Uogólnienie podanego sformułowania na przypadek dowolnych układów dynamicznych omówimy w dalszych paragrafach.*

Rozważymy zatem układ mechaniczny ze sterowaniem, opisujący się następującą inkluzją różniczkową

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \Gamma(U)\}, \mathbf{x} \in X \subset R^n, \quad (7.1.1)$$

gdzie funkcja  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  określa swobodną, stacjonarną i na ogół quasiliniową część układu, stała macierz  $\mathbf{B}$  opisuje strukturę oddziaływania sił sterowanych  $\mathbf{u}$  na układ,  $\Gamma(U)$  jest klasą sterowań dopuszczalnych, jako funkcji czasu  $t \geq t_0$  o wartościach w zbiorze zwartym  $U \subset R^l$ , a punkt stacjonarny  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  układu swobodnego (tzn. gdy  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) jest lokalnie (nie)stabilny. Założymy też, że macierz  $\mathbf{B}$  z zasady nie zależy od stanu  $\mathbf{x}$ , gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy do czynienia z modyfikacją parametryczną, opisaną w poprzednim rozdziale.

Przy aktywnej modyfikacji aktualne wielkości sił sterowanych z zasady uzależnia się od aktualnego stanu  $\mathbf{x}$  układu sterowanego, czyli poszukuje się kontrolowanych sił w postaci sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Jeżeli do układu (7.1.1) przyłożymy sterowanie w postaci  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , to wówczas powstanie *układ zamknięty*, którego dynamika opisana jest jednym równaniem (a nie inkluzją) różniczkowym następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (7.1.2)$$

Zadanie *aktywnej modyfikacji (stabilizacji)* polega na znalezieniu takiego sterowania  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , żeby dla każdej trajektorii  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq t_0$  układu zamkniętego (7.1.2) funkcja  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$  była elementem przestrzeni  $\Gamma(U)$ , a układ zamknięty wykazywał lepsze własności stabilności (albo był asymptotycznie stabilny, gdyby układ otwarty był niestabilny) w dostatecznie dużym otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Jeżeli inkluzja (7.1.1) jest zupełna, co będziemy zwykle zakładać, to odpowiednie sterowanie, możemy łatwo wyznaczyć z kryterium (3.5.2). Otrzymana w ten sposób funkcja  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , określająca pewne cięcie wiązki rozważanej inkluzji [D1, D4], będzie na ogół zależna od macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa, czyli  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$ .

Jeżeli układ zamknięty (7.1.2) jest niestabilny dla każdego sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , znaczy to, że układ (7.1.1) nie jest stabilizowalny siłami zewnętrznymi  $\mathbf{u} \in \Gamma(U)$  o strukturze oddziaływania  $\mathbf{B}$ . Wtedy dalsze badanie takiego układu w kontekście, który nas tu interesuje, jest niecelowe. Dlatego będziemy dalej zakładać zupełność przestrzeni funkcji sterowań  $\Gamma(U)$  oraz *stabilność* albo *stabilizowalność* układu swobodnego (7.1.1).

W metodzie optymalnych funkcji Lapunowa funkcja  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  wyznacza jedynie strukturę sterowania, albowiem zależy od niezdeterminowanej jeszcze macierzy  $\mathbf{S}$ . Dlatego kolejnym etapem syntezy aktywnego sterowania dla układu (7.1.1) jest znalezienie optymalnych parametrów tej struktury, czyli wyznaczenie optymalnej macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa w pewnej klasie macierzy dodatnio określonych. Na koniec należy ocenić istotne własności stabilności układu zamkniętego.

## 7.2 Aktywna modyfikacja liniowych układów stacjonarnych

Aktywne sterowanie układów liniowych stacjonarnych za pomocą liniowego sprzężenia zwrotnego od stanu zalicza się do klasycznych zagadnień teorii sterowania (Kaczorek [23]). Ponieważ układ zamknięty jest w takim przypadku również układem liniowym stacjonarnym, zagadnienie syntezy takiego sterowania jest z teoretycznego punktu widzenia nawet prostsze niż zagadnienie półaktywnego sterowania układami liniowymi, które jest z natury problemem nieliniowym.

Istnieje szereg sposobów znajdowania liniowego sprzężenia zwrotnego od stanu, które poprawia własności stabilności układów dynamicznych. W klasie układów liniowych stacjonarnych najbardziej znane są metody algebraiczne, przystosowane do syntezy aktywnego sterowania modyfikującego wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$  układu (Kaczorek [23]). Zastosowanie metody funkcji Lapunowa do takich zagadnień prowadzi do wniosków analogicznych lub równoważnych. Jednak w ogólnym przypadku aktywnej modyfikacji własności stabilności za pomocą sterowań ograniczonych metoda funkcji Lapunowa pokazuje, że istnieją sprzężenia zwrotne lepsze niż liniowe. Poza tym dzięki metodzie funkcji Lapunowa możliwe jest uzyskanie szeregu nowych formuł analitycznych (ściślych lub oszacowań) dla układów wielowymiarowych. Nie ma więc powodu, aby zawczasu ograniczać klasę sterowań do liniowych sprzężeń zwrotnych.

Aby uzasadnić powyższe stwierdzenia, rozważmy stacjonarny układ liniowy sterowania  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , opisujący się następującą inkluzją:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (= \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1 u_1 + \dots + \mathbf{B}_l u_l) : \mathbf{u} \in \Gamma(U)\}, \quad (7.2.1)$$

gdzie  $\mathbf{x} \in R^n$  jest stanem układu, a  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_l]^T \in R^l$  – sterowaniem,  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_l]$  jest macierzą o wymiarach  $n \times l$ , natomiast  $\mathbf{A}$  jest macierzą o wymiarach  $n \times n$ . Macierz  $\mathbf{A}$  opisuje dynamikę układu swobodnego (bez sterowania), a macierz  $\mathbf{B}$  określa strukturę (kierunki) działania składowych sterowania (sił) na układ.

W klasycznym, algebraicznym podejściu poszukuje się dla układu (7.2.1) aktywnego sterowania w postaci liniowego sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{Kx}$ . Wtedy dynamika układu zamkniętego będzie opisywała się równaniem liniowym  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}$ , a problem aktywnej modyfikacji układu (7.2.1) sprowadzi się do znalezienia odpowiednich parametrów macierzy  $\mathbf{K}$ . Znanych jest szereg metod pozwalających tak dobrać macierz  $\mathbf{K}$ , aby wartości własne układu zamkniętego miały (o ile to możliwe) ujemne części rzeczywiste albo znalazły się w pożądanym obszarze płaszczyzny zespolonej (Sastry [96]). Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest niestabilna a układ  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  jest *stabilizowalny*, zadanie to ma rozwiązanie. Jeśli macierz  $\mathbf{A}$  jest stabilna, to stosując liniowe sterowanie, też można dokonać pewnego przesunięcia wartości własnych, które poprawią na przykład zbieżność trajektorii układu.

W modelach realnych układów nie powinniśmy jednak pomijać faktu, iż rzeczywiste sterowania są ograniczone. Tylko prostota analizy teoretycznej, a nie

względny praktyczne, uzasadnia zawężenia klasy sterowań do sprzężeń liniowych postaci  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}\mathbf{x}$ . Dlatego w dalszych rozważaniach przyjmujemy dla każdej składowej sterowania  $u_i$  najprostsze ograniczenie  $|u_i| \leq \beta_i$ , gdzie  $\beta_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, l$ .

Jeśli uznamy za sterowania dopuszczalne wszystkie funkcje spełniające takie ograniczenia, to dynamikę układu będzie opisywała następująca inkluzja zupełna:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u_1 + \dots + \mathbf{B}_l u_l : |u_i| \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, l\}, \quad (7.2.2)$$

którą można analizować metodą optymalnych funkcji Lapunowa.

Uwzględniając podane ograniczenia sterowania nietrudno stwierdzić, że wskaźnik stabilności układu będzie wyrażał się wzorem (Ossowski [56]):

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{u}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u_1 + \dots + \frac{\mathbf{B}_l^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u_l \right], \quad (7.2.3)$$

z którego wynikają optymalne sterowania w postaci następujących sprzężeń zwrotnych:

$$\hat{u}_i = -\beta_i \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x}], i = 1, \dots, l. \quad (7.2.4).$$

Jak widać, sterowania optymalne bezpośrednio nie zależą od dynamiki układu swobodnego, lecz tylko od struktury oddziaływania sterowań na obiekt, czyli od wektorów  $\mathbf{B}_i$ ,  $i=1, \dots, l$ . Zależność od dynamiki układu (czyli od macierzy  $\mathbf{A}$ ) jest ukryta w macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa, która dobierana jest stosownie do parametrów macierzy  $\mathbf{A}$  i założonego celu sterowania.

Z powyższego wynika, że optymalna aktywna modyfikacja (lub stabilizacja) układów liniowych stacjonarnych realizowana jest przez sterowania typu bang-bang z liniowymi powierzchniami (funkcjami) przełączeń. Każde sterowanie  $\hat{u}_i$ ,  $i=1, \dots, l$ , jest bowiem przełączane na odpowiedniej hiperpłaszczyźnie o równaniu  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0$ , przechodzącej przez punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Łatwo wykazać, że wskaźnik stabilności układu (7.2.3) ze sterowaniami optymalnymi postaci (7.2.4) będzie dany następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \beta_1 \frac{|\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \dots - \beta_l \frac{|\mathbf{B}_l^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (7.2.5)$$

gdzie supremum jest liczone na pewnym sąsiedztwie punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Aby opisać własności stabilności układu zamkniętego, dogodniej jest zbadać wskaźnik zbieżności na powierzchni dowolnej elipsoidy  $\partial B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} = c\}$ . Jeżeli przyjmujemy parametry ograniczeń  $\beta_i$ ,  $i=1, \dots, l$  za ustalone (wyznaczając w ten



sposób pewien kierunek w przestrzeni parametrów układu) i wprowadzimy możliwość zmiany wielkości sterowań za pomocą wspólnego czynnika  $\beta \in [0, +\infty)$ , to wówczas, bezpośrednio z (7.2.5) wynika, że wskaźnik zbieżności będzie równy:

$$\gamma[\mathbf{S}, \varepsilon] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \varepsilon (\beta_1 \cdot |\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}| + \dots + \beta_l \cdot |\mathbf{B}_l^T \mathbf{S} \mathbf{x}|)], \quad (7.2.6)$$

gdzie parametr  $\varepsilon = \beta/c$ . Zatem wskaźnik zbieżności zależy od stosunku intensywności sterowań  $\beta$  do promienia  $c$  elipsoidy, na brzegu której jest liczony. Oznacza to, że chcąc uzyskać taką samą szybkość zbieżności trajektorii na brzegu elipsoidy o większym promieniu, należy proporcjonalnie zwiększyć intensywność sterowań. Ten intuicyjnie zrozumiały fakt wynika z liniowości struktury oddziaływania sił w rozważanym układzie.

Łatwo zauważyć, że wskaźnik zbieżności  $\gamma[\mathbf{S}, \varepsilon]$  jest ciągłą i niemalejącą funkcją parametru  $\varepsilon$  [D8]. Ponadto, jeżeli  $l < n$ , i będziemy zmniejszać (lub zwiększać) wartość parametru  $\varepsilon$  w przedziale  $[0, +\infty)$ , to wskaźnik (7.2.6) będzie dążył do wartości asymptotycznych równych odpowiednio:

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = - \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}], \quad \gamma_\infty(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{B}_S^\perp} [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}], \quad (7.2.7)$$

gdzie  $\mathbf{B}_S^\perp = \{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}: \mathbf{B}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0, i=1, \dots, l\}$  jest uzupełnieniem ortogonalnym przestrzeni  $\text{Span}\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_l\}$  względem iloczynu skalarnego, określonego przez macierz  $\mathbf{S}$ .

Wskaźnik  $\gamma_0(\mathbf{S})$  jest oczywiście wskaźnikiem stabilności dla układu swobodnego. Zatem jeśli  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$ , będziemy mieli do czynienia z zagadnieniem aktywnej modyfikacji układu (7.2.1). W przeciwnym wypadku, gdy  $\gamma_0(\mathbf{S}) \leq 0$ , układ swobodny jest niestabilny wykładniczo według normy  $\|\bullet\|_S$  i celem aktywnego sterowania będzie stabilizacja układu.

Dla ustalonej intensywności  $\beta$  sterowań wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, \varepsilon]$  układu dąży do wartości granicznej  $\gamma_0(\mathbf{S})$ , gdy rośnie odległość od punktu stacjonarnego, czyli gdy  $c \rightarrow \infty$ . Można więc powiedzieć, że z dala od tego punktu wpływ ograniczonego sterowania na dynamikę układu jest coraz mniejszy, a zachowanie układu zbliżone jest do zachowania się układu swobodnego. Jeżeli zatem układ swobodny był stabilny, to z dala od punktu stacjonarnego trajektorie układu będą zbiegać w przybliżeniu wykładniczo według rozważanej normy. Podobnie, jeżeli układ swobodny był niestabilny, to jego stabilizacja ograniczonym sterowaniem będzie możliwa tylko w pewnym ograniczonym otoczeniu punktu stacjonarnego.

Inny wpływ na dynamikę układu zamkniętego ma asymptotyczny wskaźnik  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ . Zawsze bowiem zachodzi nierówność  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) \geq \gamma_0(\mathbf{S})$ , która jest wyrazem poprawy zbieżności trajektorii układu, jaką można osiągnąć w pobliżu punktu stacjonarnego za pomocą ograniczonego sterowania. W przypadku układu

niestabilnego, gdy  $\gamma_0(\mathbf{S}) \leq 0$ , poprawa ta powinna (o ile to możliwe) zapewniać stabilność układu a więc wskaźnik asymptotyczny  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$  powinien być dodatni. Zatem nierówność  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$  jest warunkiem stabilizowalności układu według normy  $\|\bullet\|_{\mathbf{S}}$ . Warunek ten, mówiący w istocie o zbieżności wykładniczej rzutów trajektorii układu na pewną podprzestrzeń (niesterowalną), mianowicie na  $\mathbf{B}_{\mathbf{S}}^\perp$ , jest analogiem klasycznego warunku stabilizowalności układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , czyli wymogu stabilności niesterowalnej części układu (Kaczorek [23]). W rozważanym tu przypadku warunek  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$  jest jednak bardziej precyzyjny, bo mówi o stabilizowalności według konkretnej normy (Ossowski [57], [59]).

Warto podkreślić, że własność stabilizowalności według normy, podobnie jak własność stabilności, będzie na ogół zależna od normy, czyli od macierzy  $\mathbf{S}$ . Zawsze jednak układ sterowania stabilizowalny w klasycznym sensie jest stabilizowalny według pewnej normy. Podobnie, układ niestabilizowalny według żadnej normy nie jest stabilizowalny w zwykłym sensie.

Jeżeli wskaźnik  $\gamma_0(\mathbf{S}) < 0$  i spełniony jest warunek stabilizowalności  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$ , to na mocy ciągłości funkcji  $\gamma(\mathbf{S}, \varepsilon)$  względem  $\varepsilon$ , musi istnieć krytyczna wartość tego parametru, powyżej której wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, \varepsilon)$  układu jest dodatni. Wartość krytyczna  $\varepsilon_0 > 0$  wyznacza próg stabilności dla stabilizowanego układu. Przy ustalonej intensywności sterowań  $\beta$ , próg ten umożliwia wyznaczenie maksymalnego promienia  $c_{\max} = \beta / \varepsilon_0$  elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ , wewnątrz której układ zamknięty będzie wykładniczo stabilny według normy  $\|\bullet\|_{\mathbf{S}}$ .

Można też postawić zagadnienie w inny sposób; przy ustalonym (założonym) promieniu  $c$  elipsoidy stabilności możemy z wartości krytycznej  $\varepsilon_0$  określić minimalną intensywność sterowań  $\beta_{\min} = c \cdot \varepsilon_0$  niezbędną do ustabilizowania układu w zadanej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ .

Użyteczne jest też pojęcie progu nasycenia  $\varepsilon_{\text{sat}}$  jako takiej wartości parametru  $\varepsilon$ , powyżej której wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, \varepsilon)$  jest odpowiednio bliski lub równy wskaźnikowi granicznemu  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ . Praktycznie istnienie takiego progu oznacza, że zwiększanie amplitudy sterowania powyżej progu  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{sat}} = c \cdot \varepsilon_{\text{sat}}$  nie powoduje już istotnego wzrostu wskaźnika stabilności układu. Na ogół spowoduje to jednak wzrost średniego wskaźnika zbieżności trajektorii w rozważanej elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$ .

Oddzielnego omówienia wymaga przypadek, gdy macierz  $\mathbf{B}$  jest zbudowana z  $l = n$  liniowo niezależnych wektorów. Wówczas układ  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  jest w pełni sterowalny (Kaczorek [23]) i wzrost wartości parametru  $\varepsilon$  nie powoduje dążenia wskaźnika stabilności  $\gamma[\mathbf{S}, \varepsilon]$  do granicznej wartości  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ , ponieważ przestrzeń ortogonalna  $\mathbf{B}_{\mathbf{S}}^\perp = \{\mathbf{0}\}$ . Oznacza to po prostu tyle, że nie ma takich punktów  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  w przestrzeni stanu, w których zerowałyby się jednocześnie wszystkie funkcje liniowe

$\mathbf{B}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x}, i = 1, \dots, n$ . Zatem w takim przypadku ze wzrostem parametru  $\varepsilon$  wskaźnik zbieżności  $\gamma[\mathbf{S}, \varepsilon]$  może osiągać dowolnie duże wartości.

Przedstawione wyżej rozważania były przeprowadzone dla ustalonych proporcji amplitud sterowania, czyli ustalonego kierunku w przestrzeni parametrów  $\beta_1, \dots, \beta_l$ . Pełen obraz własności układu liniowego z aktywnym sterowaniem dostaniemy badając zależność istotnych parametrów układu takich jak:  $c_{\max}, \varepsilon_0, \varepsilon_{\text{sat}}$  od kierunku w przestrzeni parametrów  $\beta_1, \dots, \beta_l$ .

Rozważone wyżej zagadnienia ogólne dobrze ilustruje następujący

**Problem 7.1:** (Aktywne sterowanie za pomocą jednej składowej siły)

Rozważmy liniowy układ modelowany za pomocą inkluzji różniczkowej zupełnej

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u : |u| \leq \beta\}, \quad (7.2.8)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą (nie)stabilną, a  $u$  jest skalarnym sterowaniem o ograniczonej amplitudzie  $\beta$ . Stosując ogólnie kryterium optymalności (3.5.2), bez trudu stwierdzimy, że optymalne sterowanie będzie miało postać następującego sterowania typu bang-bang:

$$u(\mathbf{x}) = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \quad (7.2.9)$$

którego powierzchnią przełączeń będzie hiperpłaszczyzna o równaniu  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0$ . Dla powyższego sterowania wskaźnik zbieżności (wnikania) trajektorii układu na brzegu elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  będzie wyrażał się wzorem:

$$\gamma[\mathbf{S}, \varepsilon] = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \beta \cdot \frac{|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = -\sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} \cdot |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right]. \quad (7.2.10)$$

Jak widać, wskaźnik ten jest w ogólności ciągłą funkcją parametru  $\varepsilon = \beta/c$ , będącego ilorazem amplitudy sterowania i promienia elipsoidy. Ze wzoru (7.2.10) wynika, że stabilizacja układu za pomocą ograniczonego sterowania jest możliwa tylko w ograniczonym obszarze, ponieważ składnik pochodzący od sterowania we wzorze (7.2.10) dąży do zera gdy promień  $c \rightarrow +\infty$ . Wtedy wskaźnik zbieżności dąży do wskaźnika  $\gamma_0(\mathbf{S})$ , który jest ujemny dla niestabilnego układu swobodnego.

Z kolei ustalając promień  $c$  elipsoidy a zwiększając amplitudę  $\beta$  sterowania sprawimy, że wskaźnik zbieżności wykładniczej układu zamkniętego będzie dążył do wartości granicznej (maksymalnej) wyrażającej się wzorem (7.2.7). Wynika z tego wniosek, że warunkiem koniecznym stabilizowalności układu jest nierówność  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$ . W przeciwnym bowiem razie dla dowolnie dużej amplitudy sterowania wskaźnik zbieżności trajektorii układu na brzegu dowolnej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  będzie ujemny, czyli układ nie będzie wykładniczo stabilny.

Jeśli  $\gamma_0(\mathbf{S}) < 0$  i  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$  a wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, \varepsilon]$  jest funkcją ciągłą parametru  $\varepsilon$ , to musi istnieć krytyczna wartość  $\varepsilon_0$  (*próg stabilności*), powyżej której zapewniona jest wykładnicza stabilność układu zamkniętego. Ponieważ próg stabilności zależy na ogół od macierzy  $\mathbf{S}$ , warunek stabilności układu możemy zapisać następująco:

$$\beta/c > \varepsilon_0(\mathbf{S}). \quad (7.2.11)$$

Podobnie można uzasadnić istnienie progu nasycenia  $\varepsilon_{\text{sat}}$ , powyżej którego wskaźnik zbieżności wykładniczej nie zwiększa się mimo wzrostu amplitudy sterowania.

Teraz, w zależności od założonego celu stabilizacji dogodnie jest rozważyć jeden z poniższych wskaźników jakości sterowania:

$c_{\text{max}} = \beta/\varepsilon_0(\mathbf{S})$  – maksymalny promień elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  w której układ może być ustabilizowany za pomocą sterowania (siły) o amplitudzie  $\beta$ ,  
 $\beta_{\text{min}}(\mathbf{S}) = c \cdot \varepsilon_0(\mathbf{S})$  – minimalna amplituda sterowania niezbędna do ustabilizowania układu w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$  o ustalonym promieniu  $c$ ,  
 $c_{\text{sat}} = \beta/\varepsilon_{\text{sat}}(\mathbf{S})$  – maksymalny promień elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ , w której wskaźnik zbieżności wykładniczej osiąga maksymalną wartość asymptotyczną  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ ,  
 $\beta_{\text{sat}}(\mathbf{S}) = c \cdot \varepsilon_{\text{sat}}(\mathbf{S})$  – minimalna amplituda sterowania niezbędna do ustabilizowania układu w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$  z maksymalnym wskaźnikiem zbieżności  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ .

Okazuje się, że stosując kwadratową funkcję Lapunowa o macierzy  $\mathbf{S}$ , dla której  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$ , możemy wyznaczyć następujące analityczne oszacowanie wskaźnika zbieżności wykładniczej układu w przypadku wielowymiarowym (Ossowski [57]):

$$\gamma\left[\mathbf{S}, \frac{\beta}{c}\right] \geq \tilde{\gamma}\left[\mathbf{S}, \frac{\beta}{c}\right] = \begin{cases} \gamma_\infty(\mathbf{S}) + \frac{\left(\frac{\beta}{c} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} - \gamma_1(\mathbf{S})\right)^2}{4\left[\gamma_\infty(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2}\right]}, & \text{gd } \varepsilon_1(\mathbf{S}) \leq \frac{\beta}{c} < \frac{\gamma_1(\mathbf{S})}{\|\mathbf{S}\|_{\mathbf{S}}} \\ \min\left[\gamma_\infty(\mathbf{S}), \frac{\beta}{c} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} - \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} - \gamma_1(\mathbf{S})\right], & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad (7.2.12)$$

gdzie wielkości pomocnicze  $\gamma_1(\mathbf{S})$  i  $\varepsilon_1(\mathbf{S})$  określone są jak następuje:

$$\gamma_1(\mathbf{S}) = \sup_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_{\mathbf{S}}^\perp - \{0\}} \left[ \frac{\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}} \right], \quad (7.2.13)$$

oraz

$$\varepsilon_1(\mathbf{S}) = \frac{1}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \cdot \left[ 2\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + \gamma_1(\mathbf{S}) + 2 \cdot \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right].$$

Z oszacowania (7.2.12) wskaźnika zbieżności wykładniczej układu zamkniętego nietrudno już otrzymać następujące oszacowanie progu stabilności:

$$\tilde{\varepsilon}_0(\mathbf{S}) = \begin{cases} \frac{1}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \cdot \left[ \gamma_1(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right], & \text{gdym } \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \geq 0 \\ \frac{1}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \cdot \left[ \gamma_1(\mathbf{S}) - 2 \cdot \sqrt{-\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \cdot \left( \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right)} \right], & \text{gdym } \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} < 0 \end{cases} \quad (7.2.14)$$

oraz progu nasycenia

$$\varepsilon_{\text{sat}}(\mathbf{S}) = \begin{cases} \frac{\varepsilon_1(\mathbf{S})}{2} + \frac{\gamma_1(\mathbf{S})}{2 \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}}, & \text{gdym } \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \geq 0 \\ \frac{\gamma_1(\mathbf{S})}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}}, & \text{gdym } \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} < 0. \end{cases} \quad (7.2.15)$$

Warto podkreślić, że podane wyżej formuły i oszacowania są prawdziwe dla układów o dowolnym wymiarze stanu  $n$  i zależą tylko od pewnych wielkości ekstremalnych  $\gamma_0(\mathbf{S})$ ,  $\gamma_1(\mathbf{S})$ ,  $\gamma_{\infty}(\mathbf{S})$ . Zależności istotnych wskaźników od parametrów  $\beta$  oraz  $c$  zostały wyodrębnione w postaci analitycznej niezależnej od wymiaru  $n$ .  $\square$

**Przykład 7.1:** (Aktywna modyfikacja przy totalnym ograniczeniu mocy sterowań)

Rozważmy układ opisany modelem (7.2.2), w którym nałożono dodatkowe ograniczenie na totalny wydatek wszystkich sterowań w postaci

$$|u_1| + \dots + |u_k| \leq \beta_0. \quad (7.2.16)$$

Przyjmijmy (zgodnie z *zasadą Turckstry*), że sterowania mogą być włączone lub wyłączone zgodnie z formułą (7.2.4), przy czym nie może być jednocześnie włączonych więcej niż  $l$  ( $l \leq k < n$ ) sterowań. Ze wzoru (7.2.5) wynika, że aby dla aktualnego stanu  $\mathbf{x}$  dokonać optymalnego wyboru  $l$  aktywnych sterowań, należy wprawdzie tak uporządkować indeksy poszczególnych sterowań, aby zachodziły nierówności:

$$\left| \mathbf{B}_{i_1}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \geq \left| \mathbf{B}_{i_2}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \geq \dots \geq \left| \mathbf{B}_{i_k}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right|, \quad (7.2.17)$$

a następnie wybrać  $l \leq k$  sterowań, dla których moduły funkcji przełączeń osiągają wartości największe (W Rozdziale 10 omówimy możliwość realizacji takiego algorytmu sterowania za pomocą sieci neuronowych). Jest jasne, że taki algorytm wyboru sterowań maksymalizuje wskaźnik zbieżności trajektorii, który będzie wyrażał się następującym wzorem (Ossowski [56], [73]):

$$\gamma = \gamma[\mathbf{S}, \beta/c] = \gamma[\mathbf{S}, \varepsilon] = -\sup_{\mathbf{x} \neq 0} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} \cdot \max_{i_1, \dots, i_l} \left( \left| \mathbf{B}_{i_1}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| + \dots + \left| \mathbf{B}_{i_l}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| \right) \right]. \quad (7.2.18)$$

Do dalszej analizy własności rozważanego układu modyfikacji dogodnie jest wprowadzić następujące wskaźniki asymptotyczne:

$$\gamma_0(\mathbf{S}) = -\sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} \right], \quad \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\mathbf{S}}^{\perp}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (7.2.19)$$

gdzie  $\mathbf{B}_{\mathbf{S}}^{\perp}(i_1, \dots, i_l)$  jest podprzestrzenią  $\mathbf{S}$  – ortogonalną do podprzestrzeni  $\text{span}\{\mathbf{B}_{i_1}, \dots, \mathbf{B}_{i_l}\}$ . Jeśli macierz  $\mathbf{A}$  jest niestabilna a system (7.2.2) jest stabilizowalny, to  $\gamma_0(\mathbf{S}) < 0$  i  $\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) > 0$ . Ponieważ wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, \varepsilon) \rightarrow \gamma_{\infty}(\mathbf{S})$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  (oraz  $\gamma(\mathbf{S}, \varepsilon) \rightarrow \gamma_0(\mathbf{S})$ , gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), istnieje pewien próg stabilności  $\varepsilon_0 > 0$ , taki że wskaźnik stabilności  $\gamma(\mathbf{S}, \varepsilon)$  jest dodatni dla  $\varepsilon > \varepsilon_0$ . Oznacza to, że układ (7.2.2) może być ustabilizowany w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$  za pomocą sterowania bang-bang (7.2.4) o amplitudzie  $\beta > \beta_{\min} = c \cdot \varepsilon_0$ .  $\square$

### **Przykład 7.2:** (Aktywna modyfikacja według imperatywu Kanta)

Rozważmy liniowy system złożony z  $l$  niezależnych podukładów, na które możemy wywierać wpływ poprzez  $l$  aktywnych i ograniczonych sterowań  $u_1, \dots, u_l$ . Z założenia każde sterowanie  $u_i$  działa przede wszystkim na  $i$ -ty podukład (poprzez dominujący wektor struktury  $\mathbf{B}_i$ ), ale wywiera również pewien wpływ na pozostałe podukłady (poprzez wektory  $\mathbf{C}_{ij}$  struktury oddziaływań między podukładami).

Modelem dynamiki takiego systemu może być następujący układ inkluzji:

$$\dot{\mathbf{x}}_i \in \{\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i u_i + \alpha \cdot \sum_{j \neq i}^l \mathbf{C}_{ij} u_j : |u_j| \leq \beta_j, j = 1, \dots, l, i = 1, \dots, l\}, \quad (7.2.20),$$

gdzie  $\mathbf{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  są macierzami poszczególnych podukładów bez sterowań, parametr skalujący  $\alpha > 0$  określa intensywność wzajemnych sprzężeń między podukładami, a  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  są parametrami ograniczeń poszczególnych sterowań.

Powstaje pytanie jak należy optymalnie wykorzystać dostępną „moc” sterowań, aby uzyskać możliwie dużą szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii podukładów. Dla znalezienia jakiegoś racjonalnego algorytmu, możemy posłużyć

się tu pewną analogią z tzw. *imperatywem kategorycznym* Kanta (Matykiewicz [sugestia ustna]), który stanowi podstawową zasadę metafizyki moralności Kanta. (Zgodnie z tą zasadą należy traktować ludzi tak, jak sami chcielibyśmy być traktowani. Innymi słowy: jeżeli podejmuję jakieś działania na swoją korzyść, to tylko w taki sposób, aby nikomu przy tym nie szkodzić.) Wykorzystując oczywistą analogię do rozważanego systemu, możemy do danego podsystemu stosować optymalne sterowanie bang-bang postaci (7.2.4) tylko wtedy, gdy jego użycie nie będzie negatywnie wpływać na szybkość zbieżności trajektorii wszystkich pozostałych podukładów. Z taką sytuacją możemy zetknąć się na przykład w mechatronice układów ciągłych, gdy zależy nam szczególnie na tłumieniu jednej wybranej postaci drgań, ale bez pogorszenia stabilności innych postaci drgań.

Wskaźnik stabilności dla  $i$ -tego podukładu jest następujący:

$$\gamma_i(\mathbf{S}_i) = - \sup_{\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i} + u_i \frac{\mathbf{B}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i} + \alpha \cdot \sum_{j \neq i}^k \frac{\mathbf{C}_{ij}^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i} u_j \right]. \quad (7.2.21)$$

Zastosowanie zasady *imperatywu* do powyższej formuły prowadzi do wniosku, że optymalne sterowanie bang-bang postaci  $u_i = -\beta_i \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i]$  może być użyte do  $i$ -tego podukładu tylko wtedy, gdy  $u_i \cdot \alpha \mathbf{C}_{ki}^T \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k \leq 0, i \neq k = 1, \dots, l$ , tzn.

$$\alpha \cdot (\mathbf{B}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{C}_{ij}^T \mathbf{S}_j \mathbf{x}_j) \geq 0, i \neq j = 1, \dots, l. \quad (7.2.22)$$

W przeciwnym wypadku sterowanie to powinno być wyłączone tzn.  $u_i = 0$ . Na tej podstawie nietrudno już dowieść następującą postać  $i$ -tego sprzężenia zwrotnego w rozważanym układzie:

$$u_i(\mathbf{x}) = -\frac{\beta_i}{2^{l-1}} \left\{ \prod_{j \neq i} \left[ 1 + \text{sign}(\mathbf{B}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{C}_{ij}^T \mathbf{S}_j \mathbf{x}_j) \right] \right\} \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_i^T \mathbf{S}_i \mathbf{x}_i]. \quad (7.2.23)$$

W ten sposób każde sterowanie optymalne  $u_i$  staje się zależne nie tylko od aktualnego stanu  $i$ -tego podukładu, ale również od stanu wszystkich pozostałych podukładów. Ponieważ każde ze sterowań będzie w ogólności aktywowane rzadziej niż w układzie bez ograniczeń (7.2.22) wynikających z zasady imperatywu, może zajść sytuacja, że wskaźnik stabilności układu nie poprawi się w wyniku sterowania, ale na pewno zwiększy się wartość średniego wskaźnika zbieżności.  $\square$

Jak widać postać sterowań realizujących optymalną aktywną modyfikację układów liniowych stacjonarnych (7.2.1) istotnie zależy od przyjętych ograniczeń na składowe sterowania. Cechą wspólną tych sterowań jest liniowa zależność funkcji przełączeń od stanu  $\mathbf{x}$  oraz niezależność ich struktury od macierzy  $\mathbf{A}$  układu swobodnego.

### 7.3 Aktywna modyfikacja układów analitycznych

Rozważmy najpierw dokładniej układ analityczny ze względu na sterowania. Przyjmując postać (1.4.2) funkcji  $F$  układu i postępując zgodnie z ogólnymi zasadami określonymi w Rozdziale 3, możemy teraz wyrazić wskaźnik stabilności układu następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{u}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{G}_0(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \sum_{i=1}^l \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{G}_i(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u_i + \sum_{i,j=1}^l \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{G}_i(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u_i u_j + \dots \right]. \quad (7.3.1)$$

Znalezienie optymalnej struktury sterowania przy założeniu typowych ograniczeń na sterowania wymaga znalezienia w każdym punkcie  $\mathbf{x}$  minimum pewnego wielomianu (co najmniej drugiego stopnia względem zmiennych  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , o współczynnikach na ogół zależnych od  $\mathbf{x}$ ) określonego na wielowymiarowej kostce określonej ograniczeniami  $|u_i| \leq \beta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Ponieważ rozważana tu kostka jest zbiorem zwartym, to minimum zawsze będzie osiągalne dla pewnych wartości sterowań  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , leżących na brzegu kostki lub w jej wnętrzu i zależnych na ogół od  $\mathbf{x}$ . W ogólnym przypadku, gdy mamy do czynienia z wieloma składowymi sterowania oraz z wielomianem wyższego stopnia, to zadanie minimalizacji nie jest rozwiązywalne ściśle i trzeba się posłużyć pewnymi przybliżeniami; na przykład można zastosować sterowanie suboptymalne dla części liniowej albo sterowanie dyskretne o skończonej liczbie możliwych wartości, co ma uzasadnienie w przypadku stosowania realnych, komputerowych sterowników (Rozdział 10). Z tego względu omówimy poniżej tylko kilka podstawowych przykładów ilustrujących, jaki wpływ na efekty modyfikacji mają różnego rodzaju nieliniowości.

**Przykład 7.3:** (Aktywne sterowanie układu z kwadratową nieliniowością wejścia)  
Rozważmy układ mechatroniczny opisany następującą inkluzją:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}^2 : \mathbf{u} \in \Gamma(U), U \subset R^1 \}, \quad (7.3.2)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą rzeczywistą  $n \times n$ , natomiast  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  – liniowo niezależnymi wektorami należącymi do przestrzeni  $R^n$ , takimi że para  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  jest stabilizowalna albo macierz  $\mathbf{A}$  jest stabilna. Ponieważ składniki zawierające sterowanie  $u$  nie zależą od stanu układu, możemy mówić o aktywnym sterowaniu takiego układu. Zatem jeśli macierz układu  $\mathbf{A}$  ma ujemne części rzeczywiste wartości własnych, możemy rozważać problem aktywnej modyfikacji układu, a w przeciwnym razie, gdy  $\mathbf{A}$  jest niestabilna, powinniśmy rozważyć zagadnienie optymalnej stabilizacji.

Zgodnie z zasadami metody optymalnych funkcji Lapunowa, niezależnie od tego czy rozważamy zagadnienie modyfikacji, czy stabilizacji układu, powinniśmy w pierwszym oszacować wskaźnik stabilności wyrażający się następującym wzorem:



$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_u \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u + \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u^2 \right]. \quad (7.3.3)$$

Z powyższej zasady optymalności można ściśle wyznaczyć optymalne sprzężenie zwrotne. Ponieważ jego postać nie jest zbyt prosta i dogodna do analizy, postąpimy inaczej. Mianowicie, potraktujemy kwadratową nieliniowość w układzie jako zaburzenie i zastosujemy sterowanie suboptymalne  $u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]$ , czyli takie samo jak sterowanie optymalne dla układu bez rozważanej nieliniowości. Podstawiając sterowanie suboptymalne do (7.3.3), dostajemy następujący wzór na wskaźnik zbieżności trajektorii rozważanego układu:

$$\gamma[\mathbf{S}, c, \beta] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} \cdot |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| + \beta^2 c \cdot (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2 \cdot (\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) \right]. \quad (7.3.4)$$

Zależność funkcji pod powyższym supremum od parametru  $c$  pokazuje, że dla ustalonego parametru  $\beta$  wskaźnik zbieżności  $\gamma[\mathbf{S}, c, \beta]$  będzie dodatni ( $\approx \gamma_{\infty}(\mathbf{S})$ ), gdy  $c \rightarrow 0$  oraz ujemny, gdy  $c \rightarrow +\infty$ . Zatem rozważany układ będzie reprezentował typ stabilności (1,0) określony w Paragrafie 5.6, czyli będzie lokalnie wykładniczo stabilny.

Chcąc wyznaczyć oszacowanie promienia elipsoidy stabilności  $B(\mathbf{S}, c)$ , możemy skorzystać z wyników uzyskanych w Problemacie 7.1, ze wzoru (7.2.12) oraz z następującego oszacowania:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, c, \beta] &\geq - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} \cdot |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right] - \beta^2 c \cdot \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2 \cdot (\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) = \\ &= \tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c, \beta] = \gamma[\mathbf{S}, \beta/c] - \beta^2 c \cdot \delta(\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Wtedy z warunku dostatecznego stabilności  $\tilde{\gamma}[\mathbf{S}, c, \beta] > 0$  można już łatwo wyznaczyć oszacowanie promienia elipsoidy stabilności.

Można też zastosować liniowe przybliżenie sterowania bang-bang, czyli przyjmując  $u(\mathbf{x}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ , gdzie  $k$  jest wzmocnieniem. W takim przypadku, stosując kanoniczne funkcje Lapunowa, można nawet wyznaczyć analityczny wzór na wskaźnik zbieżności i inne charakterystyki układu. Wyniki te jednak pominiemy ze względu na ich złożoność.  $\square$

W układach liniowych postaci (7.2.1) typową przyczyną zależności poszczególnych składowych sterowania mogą być ograniczenia na totalną moc. Interesującą własnością układów analitycznych jest możliwość wystąpienia zależności poszczególnych składowych sterowań spowodowaną samymi nieliniowościami.

Zobaczymy dla przykładu jaki wpływ na efekty modyfikacji układów analitycznych ma nieliniowość postaci iloczynu dwóch składowych sterowania.

**Przykład 7.4:** (Aktywne sterowanie układu z kwadratową interakcją sterowań)

Rozważmy następujący model układu z dwiema składowymi sterowania  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$ :

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u_1 + \mathbf{B}_2 u_2 + \mathbf{C} u_1 u_2 : |u_1| \leq \beta_1, |u_2| \leq \beta_2 \}, \quad (7.3.6)$$

gdzie stałe i liniowo niezależne wektory  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  określają strukturę liniowego działania sterowań na układ, natomiast wektor  $\mathbf{C}$  – strukturę wzajemnego oddziaływania składowych sterowania  $\mathbf{u}$ .

Wskaźnik stabilności dla takiego układu wyraża się następującym wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \inf_{\mathbf{u}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u_1 + \frac{\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u_2 + \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} u_1 u_2 \right], \quad (7.3.7)$$

z którego wynika, że multiplikatywna nieliniowość  $u_1 u_2$  uniemożliwia stabilizację układu do punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  za pomocą sterowań bang-bang (7.2.4), optymalnych dla układu bez nieliniowości (gdy  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ). W tej sytuacji można zamiast sterowania bang-bang zaproponować sterowanie trójkowe, w którym jedna ze składowych sterowania jest wyłączana wtedy, gdy składnik zaburzeniowy pochodzący od nieliniowości jest dodatni. Aktywne sterowanie układu realizujące taki algorytm może mieć następującą postać

$$u_1 = \xi \cdot \alpha_1 \text{sign}[\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \quad u_2 = (1 - \xi) \alpha_2 \text{sign}[\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \quad (7.3.8)$$

gdzie  $\xi = \text{sign} \left| \mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right| - \left| \mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right|$ , czyli  $\xi = 0$  (lub 1), gdy jedno ze sterowań ma być wyłączone.

Aby w pełni określić strategię sterowania, należy jeszcze podać warunki kiedy obie składowe sterowania mogą być włączone. Prosta analiza funkcji pod supremum (7.3.7) pokazuje, że oba sterowania powinny być aktywne i równe:

$$\begin{cases} u_1 = 0.5 \cdot \alpha_1 \cdot [1 - \text{sign}(\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}) (\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}) (\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x})] \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \\ u_2 = 0.5 \cdot \alpha_2 \cdot [1 - \text{sign}(\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}) (\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}) (\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x})] \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}]. \end{cases} \quad (7.3.9)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $(\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x}) (\mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{x}) (\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) \leq 0$ . Zatem sterowania optymalne są tu określone przez znaki liniowych funkcji stanu, co ma istotne znaczenie przy jego realizacji.  $\square$

Rozważone dotychczas układy nie były zależne od niezdeterminowanych zaburzeń. Dlatego omówimy teraz kwestię aktywnej modyfikacji układu liniowego w obecności zakłóceń.

**Problem 7.2:** (Aktywne sterowanie w obecności zakłóceń)

Rozważmy problem wyznaczenia struktury optymalnego sterowania siłowego w układzie liniowym, modelowanym następującą inkluzją zupełną:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Cuz} : |z| \leq \alpha \wedge |u| \leq \beta\}, \quad (7.3.10)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą stabilną ( $n \times n$ ), natomiast  $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in R^n$ . Składnik zawierający iloczyn  $u \cdot z$  może wystąpić w układach mechatronicznych wówczas, gdy jedna siła (na przykład siła nacisku) wywiera wpływ na działanie innej siły (na przykład siły tarcia) wpływającej na układ. Efekty takie występują na przykład w układach hamulcowych.

Rozważmy przypadek obecności parametrycznych zakłóceń mierzonych i nie mierzonych. Jeśli zakłócenia  $z$  (nie) są mierzone, wskaźnik stabilności układu będzie wyrażał się następującym wzorem, o odpowiedniej kolejności operacji sup inf:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left\{ \sup_{|z| \leq \alpha} \inf_{|u| \leq \beta} \left( \inf_{|u| \leq \beta} \sup_{|z| \leq \alpha} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + u \cdot \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + uz \cdot \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \right) \right\}. \quad (7.3.11)$$

Jeżeli zakłócenia nie są mierzone, to musimy przyjąć, że jako pierwsze wybierają swoją antyoptymalną strategię określoną w tym przypadku przez sprzężenie zwrotne  $z(\mathbf{x}, u) = \alpha \cdot \text{sign}[u \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]$ . W odpowiedzi na to, optymalne sterowanie powinno minimalizować wyrażenie  $u \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \alpha \cdot |u| \cdot |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|$ , które zeruje się dla  $u=0$ .

Oznacza to, że sterowanie na pewno nie pogorszy stabilności układu, ale nie wiadomo jeszcze, czy będzie w stanie coś poprawić. Po pierwsze widać, że jeżeli  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \geq 0$ , sterowanie optymalne powinno być równe zero. Zatem w tej połowie przestrzeni stanu sterowanie na pewno nie jest w stanie poprawić własności układu poddanemu antyoptymalnym zakłóceniom.

Rozważmy więc przypadek przeciwny, gdy  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < 0$ . Wtedy sterowanie może być równe wartości maksymalnej  $\beta$  pod warunkiem, że  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \alpha \cdot |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| < 0$ . W przeciwnym razie sterowanie nadal powinno być wyłączone. Ostatecznie wynika z tego następująca postać sterowania optymalnego:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{4} \cdot [1 - \text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})] \cdot [1 - \text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \alpha \cdot |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|)]. \quad (7.3.12)$$

dla układu z zakłóceniami niemierzalnymi. Jak widać, powyższe sterowanie ma pozytywny wpływ na układ tylko w pewnym obszarze przestrzeni stanu określonym jak następuje:  $\{\mathbf{x} : \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < 0 \text{ i } \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \alpha \cdot |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| < 0\}$ , kiedy to przyjmuje swoją maksymalną wartość  $\beta$ . W pozostałych przypadkach optymalne sterowanie  $u = 0$  i

nie przyczynia się do poprawy lokalnych własności układu. Można się zatem spodziewać, że sterowanie optymalne (7.3.12) nie spowoduje wzrostu wskaźnika stabilności układu, ale może spowodować istotną zmianę wartości średniego wskaźnika zbieżności. Taka sytuacja jest wynikiem działania nieskompensowanych zakłóceń  $z$ . Pełen obraz antyoptimalnych zakłóceń dostajemy po podstawieniu sterowania (7.3.12) do wzoru  $z(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ .

Rozważmy teraz przypadek, gdy zakłócenia są mierzalne i mogą być wykorzystane do konstrukcji optymalnego algorytmu sterowania. Bezpośrednio ze wzoru (7.3.11) wynika wtedy, że wtedy sterowanie optymalne będzie miało postać następującego sprzężenia zwrotnego:

$$u(\mathbf{x}, z) = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + z \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}], \quad (7.3.13)$$

natomiast wskaźnik stabilności układu zamkniętego będzie wyrażał się wzorem:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{|z| \leq \alpha} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \beta \cdot \frac{|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + z \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (7.3.14)$$

Na tej podstawie łatwo jest określić antyoptimalną strategię zakłóceń  $z$  dla takiego przypadku. Widać, że zakłócenia pomiarowe powinny minimalizować wyrażenie  $|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + z \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| = |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \cdot |z + (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) / (\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x})|$ . Wobec tego antyoptimalne zakłócenia powinny być następujące:

$$z(\mathbf{x}) = \min \left[ -\left( \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right) / \left( \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right), -\alpha \cdot \text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) (\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) \right]. \quad (7.3.15)$$

Z powyższego wynika, że sterowanie nie poprawi szybkości zbieżności trajektorii tylko w obszarze  $\{\mathbf{x} : \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + z \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0 \wedge |z| \leq \alpha\}$  przestrzeni stanu. Wtedy bowiem antyoptimalne zakłócenia  $z(\mathbf{x}) = -\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} / \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  znoszą efekt działania sterowania. Poza tym sterowane zawsze wywiera efekt pozytywny, co uwydatni się zwłaszcza w wielkości średniego wskaźnika zbieżności.

Ponadto, ze wzoru (7.2.37) wynika, że podobnie jak w układzie liniowym sterowanym ograniczoną siłą, efekty aktywnej modyfikacji sterowaniem (7.3.12) będą malały wraz z odległością od punktu stacjonarnego. Wskaźnik stabilności rozważanego układu z zaburzeniami mierzalnymi będzie funkcją  $\gamma(\mathbf{S}, \beta/c)$  dążącą do wskaźnika stabilności dla układu bez zaburzeń, gdy  $c \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Szczególnym rodzajem układów analitycznych ze sterowaniem są tzw. *układy biliniowe*, które zasługują na oddzielne rozpatrzenie z uwagi na ich praktyczną użyteczność oraz dużą liczbę publikacji na ich temat (Mohler [44]). Problem aktywnego sterowania takich układów podejmuje następujący

**Problem 7.3:** (Aktywna modyfikacja układów biliniowych)

Biliniowe układy mechatroniczne, to takie, których funkcja  $\mathbf{F}$  w modelu (1.4.1), jest liniowa oddzielnie względem wektora stanu  $\mathbf{x}$  i wektora sterowania  $\mathbf{u}$  (albo  $\mathbf{z}$ ). Takie założenie odnośnie funkcji  $\mathbf{F}$  upraszcza niektóre rozważania ale nie wyklucza nieliniowości typu  $xu$  albo  $xz$ , jakie mogą występować modelu.

Układy biliniowe ze względu na  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ , które rozpatrzemy poniżej, mogą opisywać praktyczną sytuację jednoczesnego sterowania siłami i parametrami, na przykład gdy sterowanie odbywa się za pomocą nacisku określającego siłę tarcia układu hamulcowego lub ciernego tłumika drgań. Układy tego typu można modelować za pomocą następującej inkluzji różniczkowej:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u_1 + \dots + \mathbf{B}_l u_l + \sum_{i=1}^l u_i \mathbf{C}_i^T \mathbf{x} : u_1 \in \Gamma(U_1) \wedge \dots \wedge u_l \in \Gamma(U_l) \}, \quad (7.3.16)$$

gdzie  $\mathbf{B}_i$ ,  $i=1, \dots, l$  są wektorami należącymi do przestrzeni  $R^l$ , natomiast  $\mathbf{C}_i$  – macierzami o wymiarach  $n \times n$ . Jak widać, wektory  $\mathbf{B}_i$  określają strukturę siłowego oddziaływania sterowania na układ, natomiast macierze  $\mathbf{C}_i$  – strukturę modyfikacji parametrycznej układu wywołanej sterowaniem siłowym.

Fakt, że funkcja opisująca inkluzję (7.3.16) jest liniowa ze względu na każdy z wektorów  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  z osobna, niesie za sobą określone konsekwencje. Jeżeli sterowania są przedziałami stałe, wówczas w każdej chwili dynamika układu opisana jest pewnym układem liniowym stacjonarnym i niejednorodnym. Dlatego układy biliniowe można z powodzeniem badać za pomocą symulacji komputerowych oraz metod analitycznych. W tym ostatnim przypadku głównym problemem są jedynie warunki sklepania rozwiązań na styku obszarów o różnej dynamice, gdyż warunki te są na ogół przestępne. Należy jednak pamiętać, że przełączanie dynamiki ruchu po skończonym zbiorze stabilnych pól wektorowych nie gwarantuje stabilności ruchu. Zatem nawet w przypadku sterowań przedziałami stałych bezpośrednio wnioskowanie o jakościowych własnościach układów biliniowych nie jest oczywiste i wymaga przeprowadzenia odpowiedniej analizy teoretycznej.

Stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa można przeprowadzić obszerniejszą analizę własności układów biliniowych postaci (7.3.16). Tu skupimy się tylko na niektórych jej aspektach. Pokażemy, że optymalne sprzężenie modyfikujące układ (7.3.16) jest właśnie sterowaniem przedziałami stałym typu bang-bang. Postępując bowiem zgodnie z ogólnymi zasadami metody optymalnych funkcji Lapunowa, dostajemy następujący wzór formalny na wskaźnik stabilności rozważanego układu biliniowego:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + u_1 \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \dots + u_l \cdot \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} (\mathbf{B}_l + \mathbf{C}_l^T \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (7.3.17)$$

Z podanego wzoru wynika, że jeżeli sterowanie ma maksymalizować wskaźnik stabilności poprzez maksymalizację szybkości zbieżności trajektorii w każdym punkcie, to jego składowe muszą mieć następującą postać:

$$u_i = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S}(\mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i^T \mathbf{x})], \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (7.3.18)$$

Zatem układ modyfikacji dla układu biliniowego będzie typowym układem o zmiennej strukturze, ze sterowaniami bang-bang przełączanymi na powierzchniach drugiego stopnia o równaniach odpowiednio:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{S}(\mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i^T \mathbf{x}) = \mathbf{B}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_i \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (7.3.19)$$

Podstawiając sterowania (7.3.18) do wzoru (7.3.17) dostajemy następujący wzór na wskaźnik zbieżności wykładniczej dla układu zamkniętego:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq 0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \beta_1 \cdot \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{x})|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \dots - \beta_l \cdot \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S}(\mathbf{B}_l + \mathbf{C}_l^T \mathbf{x})|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (7.3.20)$$

Aby wyciągnąć ogólne, jakościowe wnioski na temat własności stabilności rozważanego układu na podstawie (7.3.20) warto określić wskaźnik zbieżności na powierzchni dowolnej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ . Otrzymamy wówczas następujący wzór:

$$\begin{aligned} \gamma[S, c, \beta] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_S=1} & \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \beta_1 \cdot \left| \frac{1}{c} \cdot \mathbf{B}_1^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x} \right| + \dots + \right. \\ & \left. - \beta_l \cdot \left| \frac{1}{c} \cdot \mathbf{B}_l^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_l \mathbf{x} \right| \right] \end{aligned}, \quad (7.3.21)$$

z którego wynika, że dla ruchu w pobliżu punktu stacjonarnego (czyli dla  $c \rightarrow 0$ ) sterowania będą w przybliżeniu „siłowe”, bo przełączane na odpowiednich hiperpowierzchniach  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, l$ . Zatem warunkiem koniecznym stabilizowalności układu biliniowego jest przynajmniej lokalna stabilizowalność układu za pomocą sterowań (7.2.4). Wskaźnik  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$  określony wzorem (7.2.7), powinien być więc dodatni.

Podobnie, z dala od punktu stacjonarnego (czyli dla  $c \rightarrow +\infty$ ) sterowania będą w przybliżeniu parametryczne, przełączane zgodnie z kwadratowymi funkcjami przełączeń  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_i \mathbf{x}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .  $\square$

Wynika z tego, że własności układów biliniowych z optymalnym sterowaniem postaci (7.3.18) można w przybliżeniu opisać, korzystając z uzyskanych już wyników ogólnych dla układów ze sterowaniem półaktywnym i aktywnym. Warto też zbadać pewne przypadki szczególne, analitycznie rozwiązywalne. Na przykład

można pokazać, że dla odpowiednich kanonicznych funkcji Lapunowa udaje się wywieźć ścisłą formułę na wskaźnik zbieżności i dokładnie (analitycznie) opisać własności pewnych typów układów biliniowych.

#### 7.4 Ruch poślizgowy w układach aktywnej modyfikacji

W optymalnych układach aktywnej modyfikacji opisanych w poprzednich paragrafach charakterystyczną cechą sterowań jest ich skokowa zmienność na *powierzchniach przełączeń*. Kwestię praktycznej realizowalności takich sterowań omówimy w Rozdziale 9. Teraz zastanowimy się tylko nad tym, co dzieje się w pobliżu powierzchni przełączeń, gdy po obu jej stronach dynamika układu jest określona przez różne pola wektorowe.

Jeżeli trajektoria układu z aktywnym sterowaniem zbliża się do powierzchni przełączeń jedno ze składowych sterowania, to możliwe są w ogólności następujące przypadki:

- trajektoria dociera do powierzchni przełączeń stycznie a następnie zawraca bez przełączenia sterowania,
- trajektoria dociera do powierzchni przełączeń pod kątem i po przełączeniu danej składowej sterowania, przechodzi na jej drugą stronę,
- trajektoria dociera do powierzchni przełączeń pod kątem i nie przechodzi na drugą stronę ani nie zawraca.

Trzeci, najciekawszy przypadek występuje wówczas, gdy z obu stron powierzchni przełączeń w otoczeniu danego punktu trajektorie układu są zbieżne do tej powierzchni. Wtedy właśnie każda trajektoria docierająca do powierzchni przełączeń nie może się od niej oddalić ani przejść na drugą stronę. Pojawia się więc pewna osobliwość, a ściślej biorąc – nieprzedłużalność rozwiązań poza chwilę dotarcia trajektorii do powierzchni przełączeń. Ten czysto teoretyczny problem jest wynikiem idealizacji polegającej na założeniu idealnego przełączania sterowania. Równania różniczkowe z nieciągłą prawą stroną po prostu nie spełniają założeń klasycznych twierdzeń o istnieniu i przedłużalności rozwiązań.

Aby można było rozstrzygnąć, co się wówczas dzieje w realnym układzie, należałoby zastąpić idealne przełączanie sterowania przełączaniem realnym. W istocie dalszy ruch (tzw. *ruch poślizgowy*) może odbywać się tylko po powierzchni przełączeń albo w jej pobliżu, jeśli przyjmiemy realny model przełączania sterowania. Kwestia ta będzie omówiona w Rozdziale 9. Należy podkreślić, że nieco mylące określenie *ruchu poślizgowego* nie oznacza tu jakiegokolwiek poślizgu w sensie mechanicznym, lecz jedynie pewną formę ruchu punktu (stanu układu) w pobliżu lub po pewnej rozmaitości w przestrzeni stanu.

Z powyższych rozważań wynika, że w teorii układów mechatronicznych ze sterowaniem przełączanym typu *bang-bang* istotny jest problem określenia warunków wystąpienia opisanych wyżej osobliwości. Dlatego określimy teraz te

warunki i parametry ruchu poślizgowego po powierzchni przełączeń w najprostszym przypadku liniowego układu stacjonarnego ze sterowaniem optymalnym (7.2.9).

**Przykład 7.5:** (*Ruch poślizgowy stabilizowanego układu liniowego stacjonarnego*)  
Zbadamy zachowanie się układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(\mathbf{x})$  o niestabilnej macierzy  $\mathbf{A}$  ze standardowym stabilizującym sprzężeniem zwrotnym  $u(\mathbf{x}) = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{x}]$  w pobliżu hiperpłaszczyzny przełączeń o równaniu  $\mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{x} = 0$  (Ossowski [57]).

Nachylenie trajektorii układu względem dowolnego wektora  $\mathbf{w}$  można mierzyć wielkością iloczynu skalarnego  $\mathbf{w}^T \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}}$ , ponieważ wektor prędkości  $\dot{\mathbf{x}}$  jest wektorem stycznym do trajektorii. Chcąc określić zachowanie się trajektorii w pobliżu hiperpłaszczyzny przełączeń, wystarczy obliczyć nachylenie trajektorii względem wektora  $\mathbf{B}^T \mathbf{S}$ -ortogonalnego do tej płaszczyzny. W przypadku rozpatrywanego układu nachylenie to wyraża się wzorem:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} + u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{B}, \quad (7.4.1)$$

gdzie sterowanie  $u(\mathbf{x}) = \pm\beta$ . Zatem nachylenie trajektorii zbliżającej się do hiperpłaszczyzny przełączeń będzie określone następującymi wielkościami:

$$\begin{cases} \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2, & \text{gd } \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \text{ i } \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{x} < 0, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2, & \text{gd } \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \text{ i } \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{x} > 0. \end{cases} \quad (7.4.2)$$

W przestrzeni stanu możemy więc wyróżnić następujące trzy obszary:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_S^1 = \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_S : |\mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}| > \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 \}, \\ \mathbf{B}_S^2 = \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_S : |\mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}| < \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 \}, \\ \mathbf{B}_S^0 = \{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_S : |\mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}| = \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 \}, \end{cases} \quad (7.4.3)$$

które można zinterpretować odpowiednio jako: obszar ruchu zbieżnego do powierzchni przełączeń, obszar ruchu rozbieżnego oraz zbiór stanów krytycznych (osobliwych), w którym może wystąpić zjawisko poślizgu. Hiperpłaszczyzna przełączeń o równaniu  $\mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{x} = 0$  spełnia więc dla rozważanego układu rolę lokalnej *rozmaitości centralnej*. Ruch układu może być bowiem lokalnie sprowadzony (zredukowany co do wymiaru podprzestrzeni) do ruchu na tej rozmaitości.

Z warunku styczności

$$\mathbf{B}^T \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} + u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{B} = 0, \quad (7.4.4)$$



koniecznego do utrzymania ruchu układu na hiperpłaszczyźnie przełączeń, wynika, że istnieje sterowanie zapewniające taki ruch. Mianowicie, sterowanie takie musi mieć postać następującego liniowego sprzężenia zwrotnego:

$$u(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}}{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}} \quad (7.4.5)$$

łatwo zauważyć, że ruch poślizgowy na hiperpłaszczyźnie przełączeń będzie oczywiście ruchem wykładniczo stabilnym, zbieżnym ze wskaźnikiem  $\gamma_c(\mathbf{S})$ , który jest dodatni na mocy założenia stabilizowalności układu. Zakres tego ruchu możemy oszacować za pomocą elipsoidy  $X(\mathbf{S}, c_d)$  o promieniu

$$c_d(\mathbf{S}) = \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} / \sup_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_{\mathbf{S}}} \left[ \frac{|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}|}{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}}} \right] \quad (7.4.6)$$

proporcjonalnym do amplitudy sterowania (Ossowski [57]). □

Podany wyżej przykład nie jest w żadnym razie wyjątkowy. Ruch poślizgowy jest charakterystycznym zjawiskiem występującym w układach o zmiennej strukturze, czyli z nieciągłą (przełączaną) prawą stroną równań różniczkowych modelu. Jeżeli dynamika układu jest opisana wieloma polami wektorowymi w różnych obszarach przestrzeni stanu, to zawsze na powierzchniach przełączeń mogą zająć warunki dostateczne do wystąpienia poślizgu. Różnica jest tylko taka, że dla dowolnych układów nieliniowych (na przykład afinicznych) powierzchnie poślizgu nie muszą być hiperpłaszczyznami, lecz są na ogół pewnymi rozmaitościami.

Poślizg, jako ruch stanu układu po pewnej rozmaitości w przestrzeni stanu, stanowi pewien problem teorii układów o zmiennej strukturze. Rozwiązania równań różniczkowych z nieciągłą prawą stroną mogą być bowiem nieprzedłużalne w klasycznym sensie, gdy pewna trajektoria osiągnie powierzchnię przełączeń w obszarze poślizgu. W praktyce jest to problem fikcyjny, ponieważ przełączenia nigdy nie są idealne i realny układ o zmiennej strukturze na pewno będzie „wiedział” co ma dalej robić. Jednak w teorii ta sprawa wymaga pewnego objaśnienia. Zwykle przyjmuje się, że w warunkach poślizgu stan układu porusza się dalej po powierzchni przełączeń (poślizgu) według pewnego wypadkowego stycznego pola wektorowego utworzonego z pól wektorowych określających lokalnie ruch po obu stronach tej powierzchni. Utworzone w ten sposób rozwiązania określane są jako *uogólnione rozwiązania w sensie Filippowa* (Sastry [96]). Takie uogólnienie jest jednak dość sztuczne. W ostatnim przykładzie zapewniliśmy ruch układu po hiperpowierzchni przełączeń za pomocą odpowiedniego sterowania (7.4.5) wynikającego z warunku styczności (7.4.4). Taka metoda przedłużania rozwiązań wydaje się bardziej naturalna. Co więcej, analizując układ

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}(\mathbf{x})$  z przełączanym sterowaniem i zakładając na przykład niewielką histerezę  $h$  przełączeń sterowania, można wykazać, że ruch powstały między równoległymi hiperpłaszczyznami przełączeń o równaniach  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \pm h$  jest w pewnym sensie zbieżny do ruchu wynikającego z warunku (7.4.4), gdy  $h \rightarrow 0$ . Uzasadnia to słuszność proponowanej tu koncepcji ruchu poślizgowego. Wrócimy jeszcze do tej sprawy w Rozdziale 9, przy okazji omawiania dynamiki układów z histerezą.

Ruch poślizgowy jest pewną własnością układów z przełączanym sterowaniem, które realizuje określony cel. Może być jednak też tak, że ruch poślizgowy jest celem samym w sobie (Luo [37]). Rozpatruje się w teorii i stosuje w praktyce układy ze sterowaniem, których celem jest utrzymywanie stanu obiektu w pobliżu lub na pewnej hiperpowierzchni w przestrzeni stanu. Zaletą układów wykorzystujących zasadę ruchu poślizgowego jest ich duża odporność na zakłócenia i zaburzenia. Przykład 7.5 pokazuje, że metoda optymalnych funkcji Lapunowa może być skutecznym narzędziem do syntezy i badania własności również tego typu układów (Ossowski [65]).

Na tym poprzestajemy w niniejszym rozdziale. Z podanych przykładów widać, że stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa, można otrzymać ściśle wyniki analizy stabilności dla wielowymiarowych układów aktywnej modyfikacji. Jednak im bardziej złożony (nieliniowy) jest model układu tym trudniej jest przeprowadzić taką analizę i otrzymać analityczne oszacowania. Ważne jest jednak, że podstawowe wielkości charakteryzujące własności układów aktywnej modyfikacji istnieją i są poprawnie określone. Dzięki temu można przeprowadzić bardziej wnikliwe badania takich układów za pomocą symulacji numerycznych, jeśli zajdzie taka konieczność wynikająca z potrzeb praktyki.

Przykłady liczbowe zastosowania niektórych formuł ogólnych uzyskanych w niniejszym rozdziale podane są w publikacjach autora Rozprawy (na przykład Ossowski [57], [59]).

## 8. STABILNOŚĆ I STEROWANIE UKŁADÓW CIĄGŁYCH

*Układy ciągłe (czyli tzw. układy o parametrach rozłożonych) modelowane są zwykle równaniami różniczkowymi cząstkowymi, co wyklucza bezpośrednie zastosowanie opisanej metody optymalnych funkcji Lapunowa do badania ich stabilności i syntezy sterowania. Adekwatną, analogiczną metodą byłoby tu zastosowanie tzw. funkcjonalów Lapunowa. To jednak wymagałoby już nieco innego aparatu matematycznego, wykraczającego poza założony zakres niniejszej rozprawy.*

*W rozdziale tym pokażemy, że metodę optymalnych funkcji Lapunowa można jednak wykorzystać do badania pewnej klasy układów ciągłych (na przykład sprężystych belek lub kolumn), które można modelować równoważnym układem równań lub inkluzji różniczkowych zwyczajnych. Zwykle będą to układy przeliczalne (opisane tylko jedną zmienną przestrzenną), których analizę stabilności można sprowadzić do układów skończonych.*

*Ponieważ dynamika układów ciągłych jest na tyle złożona, że w zasadzie każdy sensowny przykład wymagałby obszernego opracowania, niniejszy rozdział nie stanowi wyczerpującego omówienia mechatroniki układów ciągłych, lecz raczej tylko naświetlenie pewnych jej kwestii z punktu widzenia metody optymalnych funkcji Lapunowa.*

### 8.1 Dyskretyzacja modeli układów o parametrach rozłożonych

Układy mechaniczne są na ogół układami o parametrach rozłożonych, czyli układami ciągłymi. Zależnie od konkretnego zagadnienia, układy tego typu można modelować za pomocą skończonych układów równań (lub inkluzji) różniczkowych cząstkowych lub zwyczajnych. Mówimy wtedy odpowiednio o modelu ciągłym lub modelu dyskretnym danego układu. Ponieważ metody jakościowej analizy modeli dyskretnych omówiliśmy już w poprzednich rozdziałach, zajmiemy się teraz problemem analizy modeli ciągłych (w postaci równań lub inkluzji różniczkowych cząstkowych). Takie modele zwykle bardziej odpowiadają fizycznej naturze układów rzeczywistych, ale za to wykluczają bezpośrednie zastosowanie opisanej metody optymalnych funkcji Lapunowa, dostosowanej do układów dyskretnych. Dlatego zajmiemy się dalej tylko pewną klasą układów ciągłych, które można opisywać równoważnym, a nie przybliżonym, modelem dyskretnym, w postaci przeliczalnego układu równań lub inkluzji różniczkowych zwyczajnych. Wiele podstawowych układów mechanicznych i konstrukcji takich jak: sprężyste belki lub kolumny, warunek ten spełniają.

Rozpatrzmy najprostsze liniowe modele układów ciągłych, opisane tylko jedną zmienną przestrzenną  $x$  i czasem  $t$ . Założymy, że  $(x, t) \in [0, L] \times [t_0, +\infty)$ , gdzie parametr  $L < \infty$  określa liniowy rozmiar (długość) obiektu. W szczególności właśnie sprężyste belki, pręty lub kolumny są układami przynależnymi do tej klasy, jeżeli istotne są ich odkształcenia w jednej płaszczyźnie lub w jednym kierunku.

Adekwatnym modelem matematycznym dynamiki układu ciągłego tego typu jest równanie lub inkluzja różniczkowa cząstkowa, która – w najlepszym razie – jest równaniem liniowym o stałych współczynnikach.

Załóżmy, że postać równania dynamiki układu oraz warunki brzegowe pozwalają na rozdzielenie zmiennych  $(x, t)$  i na przedstawienie ogólnego rozwiązania równania układu w postaci następującego szeregu (Gutowski [18], Osiński [54]):

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) \cdot g_k(t), \quad (8.1.1)$$

gdzie  $\Phi_k(x)$ ,  $k=1,2,\dots$  są funkcjami własnymi zagadnienia odpowiadającymi kolejnym wartościom (częstościom) własnym  $\omega_k$ . Zarówno częstości własne jak i funkcje własne są w ogólności zależne od warunków brzegowych i konkretnego równania dynamiki układu. Zależne tylko od zmiennej przestrzennej  $x$  funkcje własne, z zasady spełniają warunki brzegowe i określają tzw. *mody*, czyli *postaci (formy) drgań własnych* układu. Zależność od czasu poszczególnych drgań opisana jest za pomocą odpowiednich funkcji  $g_k(t)$ , które są już rozwiązaniami równań różniczkowych zwyczajnych. Równania te oraz postaci drgań własnych uzyskuje się z podstawienia funkcji postaci  $\Phi(x)g(t)$  do wyjściowego równania cząstkowego. Jeżeli widmo częstości będzie dyskretne, dla każdej częstości własnej  $\omega_k$   $k=1,2,\dots$  dostajemy oddzielne równania różniczkowe zwyczajne, które muszą spełniać funkcje własne  $\Phi_k(x)$  oraz funkcje czasu  $g_k(t)$  dla  $k=1,2,\dots$

Podany wyżej sposób umożliwia sprowadzenie zagadnienia dynamiki układu ciągłego (a w szczególności zagadnienia stabilności) do badania równoważnego układu równań różniczkowych zwyczajnych, które można już analizować za pomocą metody funkcji Lapunowa. Będziemy dalej rozważali klasę modeli układów ciągłych, dla których równania te w dziedzinie czasu mają następującą postać oscylatorową:

$$\ddot{g}_k + 2p_k \dot{g}_k + q_k g_k = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.1.2)$$

gdzie  $p_k$ ,  $q_k$  są parametrami tłumienia i sztywności poszczególnych modów, natomiast  $r_k$  – siłami modalnymi. W najprostszym przypadku tłumienia, sztywności i siły  $k$ -tego oscylatora zależą od odpowiedniej częstości własnej  $\omega_k$  tzn.  $p_k = p(\omega_k)$ ,  $q_k = q(\omega_k)$ ,  $r_k = r(\omega_k)$ , a nie zależą od częstości pozostałych modów. Wówczas równania modalne są od siebie formalnie niezależne, a nieskończony ich układ (8.1.2) można zastąpić następującą przeliczalną inkluzją różniczkową:

$$\ddot{g} \in \{-2p(\omega)\dot{g} - q(\omega)g + r(\omega) : \omega \in \Gamma(\Omega)\}, \quad (8.1.3)$$

gdzie  $\Omega = \{\omega_k : k = 1, 2, \dots\}$  jest zbiorem częstości własnych układu, natomiast  $\Gamma(\Omega)$  jest przestrzenią funkcji stałych o wartościach w  $\Omega$ . W ten sposób badanie własności jakościowych układu ciągłego sprowadza się do badania przeliczalnej inkluzji różniczkowej zwyczajnej (8.1.3).

## 8.2 Zagadnienie stabilności liniowych układów ciągłych

Własności stabilności układów ciągłych definiuje się i bada przy użyciu innych, bardziej ogólnych pojęć i metod, niż w przypadku układów dyskretnych. Ponieważ jednak w niniejszej rozprawie rozważamy tylko dyskretne modele układów ciągłych o zmiennych rozdzielonych, będziemy ich stabilność utożsamiali ze stabilnością zespołu oscylatorów modalnych (8.1.2). Będziemy zatem mogli badać stabilność takich układów przy użyciu metody optymalnych funkcji Lapunowa.

Jeżeli oscylatory modalne (8.1.2) są niezależne, badanie stabilności jest względnie proste, ponieważ sprowadza się do oddzielnego badania stabilności każdego z tych oscylatorów. Możemy wtedy bezpośrednio zastosować metody opisane w Rozdziale 5. W wyniku dostaniemy jednak na ogół nieskończenie wiele warunków stabilności. Jeżeli wyniki analizy jakościowej układu ciągłego chcemy przedstawić w formie zamkniętej, musimy je wyrazić za pomocą skończonej liczby warunków. Ten problem jest jeszcze poważniejszy w przypadku, gdy oscylatory modalne są ze sobą sprzężone (na przykład poprzez siły modalne  $r_k$  zależne od różnych funkcji modalnych  $g_k$ ), gdyż wtedy musimy badać wszystkie oscylatory (8.1.2) łącznie. Aby to było wykonalne, zwykle stosuje się uproszczenie polegające na „obciążeniu” problemu do skończonej liczby modów podstawowych. Drgania o wyższych częstościach po prostu pomija się. Nie zwalnia to jednak z odpowiedzi na pytanie, czy i kiedy tak uproszczony model zachowuje istotne własności jakościowe modelu pełnego. Operacja obciążenia sprowadza się w istocie do założenia, że zagadnienie stabilności inkluzji (8.1.3) jest skończenie rozwiązywalne [D1]. Dla układów niezależnych od czasu, założenie to jest spełnione ze względu na typową zależność parametrów modalnych (tłumienia i sztywności) od częstości. Dla bardziej złożonych układów takie uproszczenie jest zwykle przyjmowane bez ścisłego dowodu jego zasadności.

Niepodobna jest w niniejsze rozprawie przedstawić pełnego opisu teorii stabilności układów ciągłych w języku inkluzji różniczkowych zwyczajnych, która udzielałaby wyczerpującej odpowiedzi na opisane wyżej problemy. Z tego względu ograniczymy rozważania do konkretnych przykładów, które dobrze ilustrują najbardziej istotne aspekty zastosowania metody funkcji Lapunowa do badania stabilności układów ciągłych należących do założonej klasy.

Ponieważ własności stabilności oscylatorów liniowych o stałych współczynnikach i bez wymuszenia nie stanowią problemu, skupimy się dalej na przykładach niestacjonarnych układów ciągłych. Modele matematyczne takich układów są jawnie zależne od czasu, co oznacza, że w równaniach modelu lub w warunkach brzegowych występują funkcje jawnie zależne od czasu. Funkcje te mogą być określone jednoznacznie albo niejednoznacznie, na przykład poprzez przynależność do pewnej klasy funkcji  $I(\mathcal{Z})$ . W pierwszym przypadku będziemy mieli do czynienia z równaniami różniczkowymi o zmiennych parametrach, a w przypadku drugim (realnym) – z inkluzjami różniczkowymi.

W najprostszym przypadku dynamikę liniowego ciągłego układu można opisać liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym postaci

$$L(\mathbf{p}) w = f, \quad (8.2.1)$$

gdzie  $w = w(x, t)$  jest funkcją opisującą położenie (odkształcenie od stanu nominalnego) układu w punkcie  $x$  i w chwili  $t$ ,  $f = f(x, t)$  jest pewną funkcją opisującą zewnętrzne oddziaływanie, natomiast  $L(\mathbf{p})$  jest liniowym operatorem różniczkowym od zmiennych  $(x, t)$ , zależnym też od pewnych parametrów wewnętrznych układu  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_l]$ . W ogólnym niestacjonarnym przypadku parametry układu możemy rozłożyć na część stałą (nominalną)  $p_{0i}$  oraz niestacjonarne zaburzenia  $z_i$ . Wtedy  $p_i = p_{0i} + z_i$  (lub  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{z}$ ), a operator  $L$  najczęściej dekomponuje się do sumy operatora stacjonarnego i niestacjonarnego tzn.  $L = L_0 + z_1(t)L_1 + \dots + z_k(t)L_k$ .

W wielu sytuacjach praktycznych nie dysponujemy pełną informacją o zaburzeniach parametrów i wymuszeniach. Może tak być na przykład wtedy, gdy realny układ (na przykład konstrukcja) z samej swej natury i przeznaczenia jest narażony na oddziaływania niejednoznacznie określone. Wtedy chcąc orzekać o jego własnościach, a zwłaszcza o stabilności, powinniśmy badać własności stabilności modelu układu w postaci inkluzji obejmującej określoną klasę zaburzeń i wymuszeń. W najprostszym przypadku, gdy zakładać można tylko ograniczoność zaburzeń i wymuszeń, należy więc analizować modele w postaci następujących inkluzji zupełnych:

$$L_0 w \in \{f - (z_1(t)L_1 + \dots + z_l(t)L_l)w : |f| \leq \alpha_0 \wedge |z_i(t)| \leq \alpha_i, i=1,2,\dots,l\}. \quad (8.2.2)$$

Rozważone dalej problemy mają na celu nie tyle gruntowne zbadanie konkretnych układów, co pokazanie możliwości zastosowania metody optymalnych funkcji Lapunowa do badania stabilności układów ciągłych rozważanego typu.

**Problem 8.1:** (*stabilność belki pod obciążeniem ruchomym*)

Wiele prac poświęcono tematyce stabilności belki o stałych parametrach, obustronnie swobodnie podpartej, będącej pod obciążeniem ruchomym (Bogacz, Bajer [9]). Praktyczne znaczenie tego problemu jest oczywiste. Zwykle jednak bada się drgania belki dla konkretnego modelu obciążenia, na przykład w postaci wielu ruchomych sił imitujących ruch pojazdów na prześle mostu. Wtedy do badania modelu można bezpośrednio zastosować metody analityczne lub numeryczne, ale uzyskane w ten sposób wyniki, bez odpowiedniej podbudowy teoretycznej, będą odnosiły się wyłącznie do przyjętego modelu obciążenia. Tymczasem rzeczywiste obciążenia takich układów jak mosty należą raczej do pewnej nieprzeliczalnej klasy ograniczonych wymuszeń niż są opisane konkretną funkcją zmiennych  $(x, t)$ . Zatem dla uzyskania wyników ogólnych, na przykład warunków gwarantujących stabilność, faktycznie powinniśmy analizować od razu inkluzje różniczkowe cząstkowe obejmujące wszystkie możliwe realizacje obciążeń układu.

W klasycznym podejściu, po rozdzielaniu zmiennych i dyskretyzacji tego typu zagadnienia, dostaniemy następujący nieskończony układ równań różniczkowych:

$$\ddot{g}_k + 2p_k \dot{g}_k + q_k g_k = z_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.2.3)$$

gdzie  $p_k, q_k$  są stałymi parametrami modalnymi, natomiast  $z_k = z_k(t)$  – określonymi, niestacjonarnymi siłami modalnymi, zależnymi od wszystkich sił skupionych przemieszczających się po belce. Jeśli jednak nie chcemy ograniczać rozważań do jednego modelu obciążenia, powinniśmy założyć jedynie ograniczoność wszystkich sił modalnych, a nie konkretna ich postać. Wtedy rozważane zagadnienie sprowadza się do badania stabilności następującego układu inkluzji różniczkowych zupełnych:

$$\ddot{g}_k + 2p_k \dot{g}_k + q_k g_k \in \{z_k : |z_k| \leq \alpha_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8.2.4)$$

gdzie  $\alpha_k, k = 1, 2, \dots$  są pewnymi stałymi dodatnimi, określającymi rzeczywiste ograniczenia obciążenia belki. Wielkość parametrów  $\alpha_k$  wynika z założonej klasy obciążeń oraz z przyjętego modelu belki.

Założmy tylko, że obciążenie belki, jako funkcja  $f(x, t)$  jest ograniczone według pewnej normy funkcyjnej. Najlepiej przyjąć, że dla każdego  $t \geq t_0$  norma  $\|f\|_{L_2(0,L)} = \sqrt{\int_0^L f^2(x, t) dx} \leq \alpha$ , gdzie stała  $\alpha$  nie zależy od czasu. To założenie oznacza, że obciążenie może być zmienne w czasie ale jest stacjonarne co do wartości średniokwadratowych. W przypadku belki mostowej, odpowiada to na przykład obciążeniu wywołanemu ruchem pojazdów o ustalonym natężeniu. Należy podkreślić, że przyjęte ograniczenie dopuszcza dystrybucyjny charakter obciążenia  $f(x, t)$ , jaki zwykle zakłada się, analizując drgania belki pod działaniem ruchomych sił skupionych.

Korzystając teraz z rozwinięcia funkcji obciążenia w szereg funkcji modalnych, dostajemy następujący wzór na obciążenia modalne oraz ich oszacowania:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) z_k(t), \quad z_k(t) = \frac{1}{\|\Phi_k\|_{L_2(0,L)}^2} \int_0^L f(x, t) \Phi_k(x, t) dx$$

$$|z_k(t)| \leq \frac{1}{\|\Phi_k\|_{L_2(0,L)}^2} \int_0^L |f(x, t) \Phi_k(x, t)| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|\Phi_k\|_{L_2(0,L)}^2} \|f\|_{L_2(0,L)} \cdot \|\Phi_k\|_{L_2(0,L)} \leq \frac{\alpha}{\|\Phi_k\|_{L_2(0,L)}} = \alpha_k$$

Mając ustalone w ten sposób parametry ograniczeń modalnych  $\alpha_k$ , możemy traktować inkluzje (8.2.4) jako niezależne. Wtedy analiza stabilności układu (8.2.3)

nie stanowi problemu. Oczywiście obecność nieokreślonych sił  $z_k$  sprawia, że możemy tylko orzekać o stabilności wykładniczej (poszczególnych modów drgań) do pewnych obszarów granicznych. Zgodnie z wynikami uzyskanymi w Rozdziale 5 każdy z modów drgań belki pod ograniczonym obciążeniem można scharakteryzować graniczną elipsoidą  $B(\mathbf{S}_k, c_k)$  o promieniu

$$c_k(\mathbf{S}_k) = \alpha_k / \gamma(\mathbf{S}_k), \quad (8.2.5)$$

gdzie  $\gamma(\mathbf{S}_k)$  jest wskaźnikiem stabilności odpowiedniego oscylatora modalnego bez wymuszenia, natomiast  $\mathbf{S}_k$  – macierzą optymalnej funkcji Lapunowa. Z powyższych oszacowań wynika, że ruch układu ciągłego pod założonym obciążeniem odbywa się w taki sposób, że stan każdego oscylatora modalnego  $\mathbf{g}_k = (g_k, \dot{g}_k) \in B(\mathbf{S}_k, c_k)$  dla każdego czasu  $t > t_0$ , o ile stan początkowy układu spełniał ten warunek. Taki wniosek odpowiada więc stabilności Lagrange'a układu w podanych zakresach ograniczonego ruchu każdej postaci drgań.

Podane wyżej wyniki są może dość konserwatywne, ale za to pewne w tym sensie, że gwarantują stabilność Lagrange'a układu przy dowolnych ograniczonych obciążeniach. Co więcej, formuły (8.2.5) na promienie  $c_k$  granicznych elipsoid dla poszczególnych modów są analityczne. Aby wykazać stabilność wszystkich postaci drgań, a więc stabilność całego układu, należy jeszcze wykazać, że ciąg promieni  $\{c_k\}$  granicznych elipsoid jest ograniczony. To jednak wynika wprost z postaci zależności parametrów modalnych  $p_k, q_k$  od częstości (Gutowski [18], Osiński [54]) oraz zależności (5.1.12) wskaźnika stabilności  $\gamma(\mathbf{S}_k)$  od  $p_k, q_k$ .  $\square$

Na tym etapie można by przeprowadzić dalszą analizę własności rozważanego modelu w zależności od parametrów, ale nie jest to istotne z punktu widzenia samej metody badania stabilności. Dlatego poniżej omówimy gruntownie kolejny przykład ściśle związany z poprzednim, mianowicie zagadnienie stabilności kolumny pod obciążeniem zmiennym (niestacjonarnym).

**Problem 8.2:** *(Stabilność kolumny ściskanej obciążeniem zmiennym)*

Kolumny sprężyste, poddane osiowym obciążeniom ściskającym są podstawowymi elementami wielu układów mechanicznych a zwłaszcza konstrukcji budowlanych, mostów, masztów itp. Głównym wymogiem stawianym takim elementom jest wytrzymałość na obciążenia statyczne i stateczność wybozeniowa, która określa ich podstawowe własności użytkowe. Wiadomo, że stan równowagi kolumny sprężystej, poddanej stałemu obciążeniu ściskającemu  $F_0$ , będzie stabilny, jeżeli  $F_0$  będzie mniejsza od pewnej siły krytycznej  $F_{kr}$  i będzie niestabilny, jeżeli  $F_0 > F_{kr}$ . W zakresie niestabilnym następuje wyboczenie kolumny, które zwykle prowadzi do jej zniszczenia. Z tego względu problem stateczności obciążonych kolumn musi być brany pod uwagę przy projektowaniu konstrukcji oraz w czasie ich eksploatacji. Rzecz w tym, że w warunkach rzeczywistych kolumny, jako elementy konstrukcyjne, są zwykle obciążone siłą mającą składową zmienną. W takim



przypadku niestateczność kolumny może wystąpić również dla podkrytycznych wartości składowej stałej obciążenia. Wiele publikacji ukazało się na temat stateczności kolumn sprężystych obciążonych siłą zmienną o różnych charakterystykach czasowych (Lepore [36]). Uzyskano w tym temacie szereg cząstkowych rezultatów (na przykład dla tzw. dynamicznego zagadnienia Eulera dotyczącego stabilności kolumny obciążonej siłą sinusoidalną (Osiński [54], Skalmierski [101]), ale mało znane są oszacowania obszarów stateczności kolumny poddanej dowolnemu niestacjonarnemu obciążeniu ograniczonemu (Ossowski [81]). Ponieważ rzeczywiste obciążenia kolumn (na przykład obciążenia filarów mostu pod obciążeniem wielu przejeżdżających samochodów lub wagonów pociągu) rzadko są idealnie harmoniczne albo losowe o dobrze określonych charakterystykach stochastycznych, warunki stabilności otrzymane w szczególnych przypadkach nie mogą być bezpośrednio i bez obaw zastosowane w praktyce inżynierskiej.

Z powyższych względów rozważmy poniżej, stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa, zagadnienie stabilności kolumny sprężystej, obciążonej dowolną niestacjonarną, ale ograniczoną siłą ściskającą. Ponieważ nie będziemy przyjmowali żadnych dodatkowych założeń, na przykład odnośnie okresowości lub charakterystyk stochastycznych obciążenia, otrzymane rezultaty będą mogły być zastosowane w każdej sytuacji praktycznej.

Rozważmy zatem kolumnę sprężystą o wysokości  $L$  i końcach zamocowanych przegubowo) obciążoną siłą osiową. Stosując klasyczną teorię Eulera dla belek sprężystych, dynamikę kolumny można opisać następującym równaniem różniczkowym cząstkowym:

$$EJ \left[ 1 + 2c \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + [F_0 + F_1(t)] \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + 2D \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + M \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.2.6)$$

gdzie  $EJ$  jest sztywnością kolumny na zginanie,  $c$ ,  $D$  są odpowiednio tłumieniem wewnętrznym i zewnętrznym belki,  $M = \rho S$  jest współczynnikiem masowym,  $F_0$  jest składową stałą osiowego obciążenia zewnętrznego kolumny, podczas gdy  $F_1(t)$  jest niestacjonarną składową obciążenia. Zatem zagadnienie kolumny obciążonej zmienną siłą opisuje się liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym o zmiennym parametrze, który reprezentuje właśnie tę siłę.

Trzeba zwrócić tu uwagę na to, że równanie (8.2.6) stanowi dobry model zagadnienia kolumny obciążonej osiowo tylko wtedy, gdy zależna od czasu składowa obciążenia  $F_1(t)$  jest funkcją określoną jednoznacznie. Co więcej, dla dowolnej ustalonej funkcji  $F_1(t)$  raczej mała jest szansa znalezienia rozwiązań analitycznych  $w(x, t)$  takiego zagadnienia dynamiki.

Zastosowanie metody jakościowej (metody optymalnych funkcji Lapunowa) do rozwiązania problemu stateczności tak obciążonej kolumny jest więc w pełni uzasadnione. W tym celu rozsądnie jest przyjąć, że składowa niestacjonarna  $F_1(t)$  jest ograniczona co do modułu tzn. istnieje stała  $\alpha > 0$ , taka że  $|F_1(t)| \leq \alpha$  dla każdego  $t \geq t_0$  oraz że spełniony jest warunek  $\alpha \leq F_0$ , który zapewnia, że całkowita siła obciążenia kolumny jest w każdej chwili ściskająca.

Jeśli funkcja  $F_1(t)$  nie jest jednoznacznie określona i tylko jej ograniczoność jest zakładana, wówczas aby ocenić stateczność kolumny dla czasów  $t \geq t_0$ , musimy zbadać stabilność następującej inkluzji różniczkowej cząstkowej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + f_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + 2d \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \\ + \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \in \left\{ f_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} : |f_1| \leq \beta \right\}, \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

gdzie  $f_0 = F_0/EJ$ ,  $f_1(t) = F_1(t)/EJ$ ,  $\mu = \rho S/EJ = M/EJ$ ,  $d = D/EJ$ . Znormalizowana siła  $f_1(t)$  spełnia następujące ograniczenie  $|f_1(t)| \leq \alpha/EJ = \beta$  dla każdego  $t \geq t_0$ . Prócz tego, swobodne podparcie kolumny wymusza następujące warunki brzegowe:

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \partial^2 w(0, t)/\partial x^2 = \partial^2 w(L, t)/\partial x^2 = 0, \quad (8.2.8)$$

które trzeba uwzględnić przy analizie stateczności kolumny.

Aby rozwiązać zagadnienie stabilności modelu kolumny metodą optymalnych funkcji Lapunowa, należy transformować model ciągły do modelu dyskretnego złożonego z nieskończonego układu inkluzji różniczkowych zwyczajnych. Można tego dokonać za pomocą rozdzielenia zmiennych. Istotnie, poszukując rozwiązań szczególnych w standardowej postaci  $\Phi(x) \cdot g(t)$ , otrzymujemy następującą inkluzję

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{IV}(x)}{\Phi(x)} + \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} \cdot \frac{f_0 \cdot g(t)}{g(t) + 2c \cdot \dot{g}(t)} + \frac{2d \cdot \dot{g}(t)}{g(t) + 2c \cdot \dot{g}(t)} + \\ + \frac{\mu \cdot \ddot{g}(t)}{g(t) + 2c \cdot \dot{g}(t)} \in \left\{ \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} \cdot \frac{f_1 \cdot g(t)}{g(t) + 2c \cdot \dot{g}(t)} : |f_1| \leq \beta \right\}. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Nietrudno zauważyć, że tylko sinusoidalne funkcje modalne

$$\Phi_n(x) = \sin[\omega_n x], \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.10)$$

gdzie  $\omega_n$  jest częstością przestrzenną  $n$ -tej mody, spełniają warunki brzegowe (8.2.8) i umożliwiają separację zmiennych  $x$ ,  $t$ . Rzeczywiście, wstawiając (8.2.10) do

inkluzy (8.2.9) otrzymamy następujący układ inkluzji różniczkowych zwyczajnych dla odpowiednich funkcji czasu  $g_n(t)$  (Ossowski [81]):

$$\ddot{g}_n(t) + \frac{2[d + c\omega_n^4]}{\mu} \dot{g}_n(t) + \frac{\omega_n^2}{\mu} [\omega_n^2 - f_0] \cdot g_n(t) \in \left\{ \frac{\omega_n^2}{\mu} \cdot f_1 \cdot g_n(t) : |f_1| \leq \beta \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.11)$$

Powyższy układ inkluzji łącznie z zespołem funkcji modalnych (8.2.10) jest równoważny problemowi opisanemu przez inkluzję różniczkową cząstkową (8.2.7).

W ten oto sposób zagadnienie stabilności kolumny pod obciążeniem niestacjonarnym zostało przetransformowane do zagadnienia stabilności nieskończonej (przeliczalnej) rodziny liniowych oscylatorów (8.2.11) z niestacjonarnymi zaburzeniami parametrów sztywności. Rodzinę inkluzji (8.2.11) można zapisać w formie jeszcze bardziej zwartej, jako następująca inkluzja:

$$\dot{g}(t) + \frac{2d}{\mu} \dot{g}(t) \in \left\{ \frac{-2cv^4}{\mu} \dot{g}(t) - \frac{v^2}{\mu} [v^2 - f_0] g(t) + \frac{v^2}{\mu} f_1 g(t) : |f_1| \leq \beta, v \in \Gamma(\Omega) \right\}, \quad (8.2.12)$$

gdzie  $\Omega = \{\omega_n : n = 1, 2, \dots\}$ ,  $\Gamma(\Omega)$  jest rodziną funkcji stałych  $\{v : N \rightarrow \Omega\}$  o wartościach w przeliczalnym zbiorze  $\Omega$  częstości własnych układu. Zatem metoda rozdzielania zmiennych umożliwiła sprowadzenie zagadnienia stabilności kolumny opisanego modelem w postaci inkluzji różniczkowej cząstkowej (8.2.7) do zagadnienia stabilności powyższej inkluzji różniczkowej (Ossowski [82]). Poniżej pokażemy, że zagadnienie stabilności tej inkluzji jest skończenie rozwiązywalne, co praktycznie oznacza, że dla orzeknięcia o stabilności rozważanej kolumny, wystarczy wykazać stabilność skończonej liczby jej modów drgań własnych [D1]. Istotnym elementem dowodu będzie też wskazanie liczby i numerów tych modów (krytycznych w sensie badanej własności jakościowej, czyli stabilności).

Jest oczywiste, że analizę stateczności kolumny ściskanej siłą niestacjonarną należy przeprowadzić w zakresie podkrytycznych wartości stałej składowej obciążenia kolumny  $F_0 < \pi^2 \cdot EJ / L^2$ , czyli dla  $f_0 < \omega_1^2 = \pi^2 / L^2$ . Ponieważ inkluzje różniczkowe opisujące każdy z oscylatorów modalnych (8.2.11) mają analogiczną postać, można do badania stateczności kolumny bezpośrednio zastosować ogólne warunki stabilności (5.2.25) kolejno dla inkluzji (5.2.19) o następujących parametrach:

$$p = p_n = \frac{d + c\omega_n^4}{\mu}, \quad q = q_n = \frac{\omega_n^2}{\mu} [\omega_n^2 - f_0], \quad \alpha = \alpha_n = \frac{\omega_n^2}{\mu} \cdot \beta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.13)$$

Wynika stąd, że obszar stateczności rozważanej kolumny w przestrzeni parametrów jest określony przez następujący zespół nierówności:

$$[p_n \geq (q_n/2)^{1/2} \wedge \alpha_n < q_n] \vee [p_n < (q_n/2)^{1/2} \wedge \alpha_n < 2p_n \sqrt{q_n - p_n^2}], \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.14)$$

Z określeń (8.2.13) wynika, że warunki  $r_n < q_n$ ,  $r_n < 2p_n\sqrt{q_n - p_n^2}$  stanowią ograniczenia niestacjonarnej składowej obciążenia kolumny, a pozostałe warunki – ograniczenia na parametry kolumny oraz na stałą składową  $f_0$  obciążenia.

Pozostałe warunki w (8.2.14) zapewniają stabilność odpowiednich postaci drgań własnych kolumny  $\Phi_n(\mathbf{x}) \cdot g_n(t)$ , dla  $n = 1, 2, \dots$ . Zatem w ogólnym przypadku warunki stateczności kolumny są określone przez nieskończony układ nierówności (8.2.14). Powstaje więc problem, jak sprawdzić wszystkie te warunki i czy można zapisać je w bardziej zwartej, skończonej formie możliwej do zastosowania w praktyce? W pracach na ten temat zwykle poprzestaje się na badaniu stabilności tylko kilku pierwszych postaci drgań własnych kolumny obciążonej siłą harmoniczną, uznając (bez dowodu) pozostałe mody za nieistotne dla stabilności kolumny (Skalmierski [101]). Czy i kiedy takie postępowanie jest słuszne w ogólnym przypadku dowolnej siły niestacjonarnej jest rozważone poniżej.

Aby zbadać tę kwestię, podzielmy zbiór częstości własnych  $\Omega$  na dwa rozłączne podzbiory  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  zawierające częstości własne  $\omega_n$  spełniające odpowiednio warunki  $p_n \geq (q_n/2)^{1/2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  albo warunki przeciwne. Nietrudno wykazać, że warunki  $p_n \geq (q_n/2)^{1/2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  są równoważne następującym nierównościom:

$$G(\omega_n^2) \geq 0, n = 1, 2, \dots, \quad (8.2.15)$$

gdzie

$$G(z) = c^2 z^4 - \left(\frac{\mu}{2} - 2cd\right) z^2 + \frac{\mu f_0}{2} z + d^2, \quad z > 0. \quad (8.2.16)$$

Ponieważ tłumienie wewnętrzne w belce rzeczywistej zawsze występuje, parametr  $c$  powyższego wielomianu musi być dodatni tzn.  $c > 0$ . Wtedy wielomian czwartego stopnia  $G(z)$  będzie przyjmował wartości dodatnie dla dostatecznie dużych wartości  $z > 0$ . Wynika z tego, że zbiór  $\Omega^-$  musi być albo pusty, albo skończony, w przeciwieństwie do zbioru  $\Omega^+$ , który jest przeliczalny.

Podobnie, ponieważ każdy z warunków  $r_n < q_n$  narzuca ograniczenie

$$\beta < \omega_n^2 - f_0 = n^2 \pi^2 / L^2 - f_0 \quad (8.2.17)$$

na niestacjonarną składową obciążenia, tylko minimalna częstość własna  $\omega_m \in \Omega^+$  będzie istotna dla stateczności kolumny. Zatem w ogólnym przypadku, aby wnioskować o stateczności kolumny, wystarczy zbadać tylko jeden warunek  $r_m < q_m$  dla  $\omega_m \in \Omega^+$  i co najwyżej skończoną liczbę warunków  $r_n < 2p_n\sqrt{q_n - p_n^2}$  dla częstości  $\omega_n \in \Omega^-$ . Można to łatwo przeprowadzić dla dowolnego ustalonego obciążenia oraz ustalonych parametrów kolumny. Jednak, jak widać, mody wykorzystywane przy analizie stateczności nie mogą być wybrane dowolnie, lecz

powinny być wydedukowane na podstawie wartości parametrów układu oraz rozkładu dodatnich pierwiastków wielomianu  $G(z)$ .

W teorii i praktyce zwykle nie satysfakcjonuje nas wykazanie tylko stabilności układu. Jeśli na przykład chcemy określić zapas stabilności rozważanej kolumny lub przeprowadzić optymalizację jej parametrów na etapie projektu, to musimy znać warunki stabilności dla dowolnych parametrów kolumny. Jednak w ogólnym przypadku trudno jest rozwiązać nierówność (8.2.16) dokładnie i otrzymać proste praktyczne wyniki. Dlatego, aby otrzymać ogólne i analityczne rezultaty, możemy zastosować pewne uproszczenia.

Możemy zastosować różne metod przybliżonego rozwiązywania nieskończonych układów nierówności typu (8.2.14). Na przykład, aby otrzymać dostateczne warunki stateczności rozważanej kolumny, wystarczy zastąpić ściśle warunki  $p_n < \sqrt{q_n/2}$ ,  $r_n < 2p_n\sqrt{q_n - p_n^2}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  następującymi warunkami uproszczonymi, a więc mocniejszymi:

$$p_n < \sqrt{q_n/2}, \quad r_n < p_n\sqrt{2q_n} \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.2.18)$$

Ponieważ z definicji (8.2.13) wynika, że zarówno  $\{p_n\}$  jak i  $\{q_n\}$  są ciągami rosnącymi, wystarczy wziąć pod uwagę tylko pierwszy warunek (dla  $n = 1$ ) postaci (8.2.18). Stąd, wstawiając (8.2.13) do (8.2.18) dla  $n = 1$  i łącząc ze wzorem (8.2.17) (dla  $n = 1$ ), otrzymamy ostateczne następujący warunek dostateczny stateczności kolumny obciążonej:

$$\beta < \min \left[ \omega_1^2 - f_0, \left( d + c \cdot \omega_1^4 \right) \cdot \sqrt{2[1 - (f_0 / \omega_1^2)] / \mu} \right]. \quad (8.2.19)$$

Zatem w takim przypadku dla dowolnych sił ściskających można orzekać o stateczności kolumny tylko na podstawie stabilności pierwszej postaci drgań kolumny. Oszacowanie (8.2.19) jest prawdziwe dla dowolnych wartości parametrów kolumny i obciążenia. Należy podkreślić, że warunek (8.2.19) jest przybliżony tak, że nie musi być warunkiem koniecznym dla stabilności kolumny (Ossowski [81]).

Inne oszacowanie obszaru stateczności wynika z faktu, że niezależnie od współczynników tłumienia  $c$ ,  $d$ , istnieje górne ograniczenie na niestacjonarną składową obciążenia kolumny, mianowicie  $\beta < \beta_{\max} = \omega_1^2 - f_0 = \pi^2/L^2 - f_0$ . Zatem należy znaleźć takie ograniczenia na parametry kolumny, które zapewnią jej stateczność dla  $|f_1(t)| < \beta_{\max}$ . Aby to osiągnąć, zastosujmy inne przybliżone warunki stabilności, mianowicie:  $G_4(\omega_n^2) \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , gdzie

$$G_4(z) = c^2 z^4 - \left( \frac{\mu}{2} - 2cd \right) z^2 + \frac{\mu \cdot f_0}{2} \omega_1^2 + d^2. \quad (8.2.20)$$

Jest jasne, że warunek  $G_4(z) \geq 0$  implikuje  $G(z) \geq 0$  dla dowolnego  $z \geq \omega_1^2$ . Co więcej, dwukwadratowa nierówność  $G_4(z) \geq 0$  może być rozwiązana ściśle. Istotnie, łatwo sprawdzić, że warunki  $G_4(\omega_n^2) \geq 0$ ,  $n \in N$  są prawdziwe, gdy  $\mu \leq 8c(d + c \cdot f_0 \omega_1^2)$ , czyli dla dostatecznie dużego tłumienia kolumny. Wynikają z tego następujące warunki dostateczne stateczności kolumny:

$$\beta < \omega_1^2 - f_0 = \pi^2 / L^2 - f_0, \quad \mu \leq 8c(d + c \cdot f_0 \omega_1^2). \quad (8.2.21)$$

Podobnie, można rozwiązać ściśle pewne przypadki szczególne rozważonego zagadnienia stateczności (gdy niektóre parametry  $c$  lub  $d$  znikają), interesujące z praktycznego i teoretycznego punktu widzenia (Ossowski [81]).  $\square$

Otrzymane oszacowania warunków stabilności nie tylko uogólniają znane oszacowania dla kolumny pod obciążeniem harmonicznym (Osiński [54]), ale również stanowią nowe formuły analityczne słuszne dla dowolnych, nieokresowych obciążeń ściskających. Przy użyciu tych formuł można określić zapasy stabilności obciążonej kolumny w przestrzeni parametrów i dokonać optymalizacji kolumny.

Warto zauważyć, że drugi warunek (8.2.21) można odnieść na przykład do problemu wytrzymałości kości długich ma obciążenia dynamiczne. Właśnie w warunkach obciążeń dynamicznych (upadek, bieg, skok) powstaje najczęściej złamań i innych urazów kości u osób z zaawansowaną osteoporozą. Jeśli kość długą (na przykład kość udową) traktować w przybliżeniu jak sprężystą kolumnę z dominującym tłumieniem wewnętrznym  $c$ , to z drugiego warunku (8.2.11) wynika, że dynamiczna stateczność układu, a więc odporność kości na złamanie, zależy kwadratowo od parametru  $c$ . Ponieważ parametr ten maleje wraz ze stopniem zwyrodnienia polegającego na rozrzedzeniu struktury gąbczastej wewnątrz kości, łatwiej zrozumieć przyczyny zwiększonej łamliwości kości długich u osób cierpiących na osteoporozę.

Uzyskane wyżej ściśle rezultaty potwierdzają znaną hipotezę, a często milczące założenie, że o stabilności kolumny obciążonej siłą niestacjonarną rozstrzyga stabilność skończonej liczby jej modów podstawowych. Przy okazji, z podanych tu rozważań wynika, które postaci drgań i jaka ich liczba (uzależniona od parametrów modelu) powinna być wzięta pod uwagę przy analizie stabilności kolumny. Zwyczajowo nawet w przypadku obciążenia harmonicznego bada się stabilność tylko kilku pierwszych modów, co oczywiście w ogólności nie zapewnia warunków dostatecznych stabilności (Osiński [54]).

Podobnie można otrzymać ogólne oszacowania zapasów stateczności dla innych modeli układów ciągłych o zmiennych rozdzielonych. Fakt, że mimo niedostatków dotychczas stosowanych warunków stateczności, realne konstrukcje są niezawodne, może być wynikiem dużych wskaźników wytrzymałości statycznej. Nowoczesne „oszczędne” konstrukcje mogą być bardziej wrażliwe na dobór parametrów.

### 8.3 Problemy realizacji sterowania układów ciągłych

Kwestia praktycznej realizacji optymalnych układów mechatronicznych jest omówiona w Rozdziale 9. Ponieważ jednak w przypadku układów ciągłych względy praktycznej realizacji są dość specyficzne i istotne już na etapie budowania modelu oraz analizy teoretycznej, omówimy je częściowo w tym paragrafie.

Pierwsza sprawa wiąże się z realizacją sterowania elementami sterowanymi (na przykład tłumikami i siłownikami), które z punktu widzenia ciągłego układu mechanicznego są obiektami dyskretnymi. Typowe tłumiki i siłowniki generują bowiem siły skupione. Modele układów mechatronicznych zbudowanych na bazie ciągłych układów mechanicznych byłyby więc dyskretnociągłe. Ponadto, przy projektowaniu takiego układu mechatronicznego pojawia się kwestia właściwego doboru elementów sterowanych oraz miejsca ich połączenia z układem ciągłym. Przyjmując, że liczba elementów sterowanych pokrywa się z liczbą  $l$  niezależnych sterowań, możemy te miejsca określić, podając odpowiadające im wartości współrzędnej przestrzennej  $x_1, \dots, x_l \in [0, L]$  oraz kierunki ich oddziaływania. Dla  $l$  elementów sterowanych mamy w ogólności możliwych  $2^l$  różnych konfiguracji, które mogą być zastosowane w układzie mechatronicznym. Zarówno dobór konfiguracji elementów sterowanych jak i punktów  $x_1, \dots, x_l$  ich oddziaływania z ciągłym układem mechanicznym powinien być optymalny względem odpowiednich kryteriów. Aby można było stwierdzić, która konfiguracja jest najlepsza, należy dla każdej z nich określić optymalny algorytm sterowania i oszacować jego efektywność w realnym układzie. Sterowania  $u_1, \dots, u_l$  odpowiadające poszczególnym elementom sterującym powinny być w ogólności sprzężeniami zwrotnymi od stanu układu. Ponieważ aktualny stan układu ciągłego w dowolnej chwili  $t \geq t_0$  jest określony nie przez skończoną liczbę współrzędnych, lecz przez funkcję  $w(x, t)$  oraz jej pochodną  $\partial_t w(x, t)$  zależną od zmiennej przestrzennej  $x$ , sterowania powinny mieć w ogólności postać  $u_i = u_i(w(x, t), \partial_t w(x, t))$ ,  $i = 1, \dots, l$ .

Metoda syntezy sterowania powinna umożliwiać znalezienie odpowiednich sprzężeń zwrotnych i dalsze teoretyczne badanie własności układu. Ponieważ jednak funkcje  $w(x, t)$ ,  $\partial_t w(x, t)$  na ogół nie są znane dokładnie, pojawia się kolejna kwestia doboru punktów pomiarowych  $y_1, \dots, y_m \in [0, L]$ , w których na bieżąco określane byłyby wielkości odkształcenia  $w(y_j, t)$  układu, oraz ich prędkości  $\partial_t w(y_j, t)$ ,  $j=1, \dots, m$ .

Faktycznie mogą być zastosowane do układu jedynie sterowania następującej postaci dyskretniej:

$$u_i = u_i(w(y_1, t), \partial_t w(y_1, t), \dots, w(y_m, t), \partial_t w(y_m, t)), i = 1, \dots, l. \quad (8.3.1)$$

Określenie czy i na ile takie przybliżone sterowanie jest skuteczne, jest kolejnym problemem do rozstrzygnięcia przez teorię (metodę) syntezy ciągłych układów mechatronicznych. W następnym paragrafie pokażemy jak można wyznaczyć postać

odpowiednich sprzężeń zwrotnych i określić ich efektywność w ramach metody optymalnych funkcji Lapunowa.

Należy zaznaczyć, że nie wszystkie elementy wykonawcze aktualnie stosowane w mechatronice generują siły skupione, działające na układ ciągły. Przykładem tego mogą być elementy piezoelektryczne (Tylikowski [106], [108]), których działanie nie zawsze można sprowadzić do sił skupionych w konkretnych punktach. Stwarza to niewątpliwie nowe możliwości sterowania układami ciągłymi (na przykład w celu tłumienia drgań), ale i nowe problemy teoretyczne, których jednak nie będziemy tu rozpatrywać.

## 8.4 Półaktywne sterowanie układów ciągłych

Ważnym problemem inżynierii mechanicznej jest tłumienie drgań układów mechanicznych maszyn i konstrukcji. Konstrukcje takie jak budynki czy mosty zazwyczaj są na tyle sztywne a ich wewnętrzne tłumienie na tyle duże, że w normalnych warunkach zapewnione jest dobre tłumienie drgań w układzie. Jednak rosnące wymagania stawiane nowoczesnym oszczędnym konstrukcjom wystawionym na działanie szczególnie trudnych warunków zewnętrznych i zmiennych obciążeń wymagają bardziej efektywnego tłumienia drgań układów. Klasyczne, statyczne lub dynamiczne tłumiki drgań nie zawsze są w takich przypadkach skutecznym rozwiązaniem i wtedy musi być zastosowane odpowiednie sterowanie (sprzężenie zwrotne). Dlatego właśnie nowoczesne konstrukcje są faktycznie układami mechatronicznymi. Możliwe jest również zastosowanie metod mechatroniki do istniejących układów starszego typu w celu modyfikacji ich własności. Im lepsze jest bowiem tłumienie drgań w zużytych układach tym wyższa jest jego niezawodność i trwałość oraz niższa emisja hałasu i wibracji.

Sterowanie półaktywne może być szczególnie atrakcyjne w budownictwie lądowym do modyfikacji układów masywnych i sztywnych (na przykład konstrukcji budowlanych, mostów czy masztów) Sterowanie siłowe (a nie parametryczne) w takich układach wymagałoby bowiem dużych siłowników i znacznej energii sterowania. Sterowanie półaktywne, w przeciwieństwie do sterowania aktywnego (siłowego), może być zrealizowane za pomocą sterowanych tłumików i elementów sprężystych, które potrzebują stosunkowo niewielkiej energii do wysterowania.

Sterowanie półaktywne układu ciągłego realizuje się najczęściej za pomocą sterowanych tłumików dyskretnych lub elementów sprężystych, dołączonych do układu w ustalonych punktach. Takie rozwiązanie jest obecnie technicznie realizowalne, a również sam algorytm sterowania może być w miarę prosty. Układy mechatroniczne tego typu będą więc z natury opisywały się modelami dyskretno-ciągłymi. Sposób znajdowania algorytmu sterowania optymalnego dla takich układów za pomocą metody optymalnych funkcji Lapunowa przeanalizujemy teraz na przykładzie półaktywnego tłumienia drgań belki Eulera swobodnie podpartej na obu końcach.



**Problem 8.3:** (Półaktywne tłumienie drgań swobodnych belki)

W niniejszym problemacie rozpatrzmy zagadnienie półaktywnego (parametrycznego) tłumienia drgań swobodnych belki obustronnie podpartej. Zbadamy model w postaci belki Eulera (o długości  $L$  i wewnętrznym tłumieniem wiskotycznym  $c$ ) swobodnie podpartej na obu końcach, oddziaływującej z zespołem  $k$  dyskretnych tłumików łączących nieruchomą bazę z ustalonymi punktami  $x_1, \dots, x_k$  wzdłuż belki.

W takiej sytuacji względnie proste jest zagadnienie pasywnego tłumienia drgań belki polegające na optymalnym rozmieszczeniu  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_k]^T$  tłumików belki i optymalizacji ich stałych parametrów tłumienia  $P_1, \dots, P_k$ . Dlatego rozważymy teraz przypadek bardziej złożony, gdy w czasie rzeczywistego ruchu układu parametry tłumików mogą być zmieniane w pewnym przedziale  $[0, P_0]$ ,  $P_0 > 0$ , stosownie do aktualnego stanu belki. Wtedy można rozważyć problem półaktywnego tłumienia (sterowania) drgań belki, który polega nie tylko na doborze rozmieszczenia  $\mathbf{x}$  tłumików, ale również na znalezieniu algorytmów optymalnego sterowania ich parametrami tłumienia  $P_l$ ,  $l=1, \dots, k$  w postaci sprzężenia zwrotnego (Ossowski [80]).

Zagadnienie półaktywnego tłumienia drgań układów ciągłych jest trudne i rozpatrywane w wielu pracach w różnych aspektach. Najczęściej głównym celem sterowania półaktywnego jest optymalna redukcja amplitudy drgań układu. Ścisłe rozwiązanie tak postawionego zadania nie jest jednoznaczne i może być realizowane w różny sposób. Nie jest bowiem całkiem jasne jak dobrać odpowiedni funkcjonal określający jakość systemu tłumienia drgań układu. Ponadto, układ ciągły wykazuje na ogół nieskończenie wiele różnych postaci drgań, które, co gorsze, mogą wzajemnie na siebie oddziaływać poprzez interakcję z dołączonymi tłumnikami. Z powyższych powodów, trudno jest odgadnąć optymalny algorytm półaktywnego sterowania takich układów. W wielu pracach przyjmuje się jakiś intuicyjny algorytm sterowania bez ścisłego dowodu jego skuteczności, a tym bardziej optymalności. Oceny pracy takich układów sterowania zwykle dokonuje się na podstawie wyników symulacji numerycznych (Bogacz, Bajer [9], Lee [35]).

Dynamikę rozpatrywanej belki sterowanej, jako układu mechatronicznego, można opisać modelem matematycznym w postaci następującej inkluzji różniczkowej cząstkowej (Ossowski [80]):

$$EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + 2EJ c \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial t \partial x^4} + M \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \in \left\{ 2P_1 \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \delta(x-x_1) + \dots + 2P_k \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \delta(x-x_k) : P_i \in [0, P_0], i=1, 2, \dots, k \right\}, \quad (8.4.1)$$

gdzie  $EJ$  jest sztywnością belki na zginanie,  $c$  jest współczynnikiem tłumienia wewnętrznego,  $M = \rho S$  jest współczynnikiem masowym, natomiast  $P_1, \dots, P_k$  są współczynnikami tłumienia zewnętrznych tłumików dyskretnych. Symbolem  $\delta$  oznaczono tu dystrybucję delta Diraca.

Inkluzyę (8.4.1) dogodnie jest przekształcić do następującej znormalizowanej postaci:

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + 2c \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial t \partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \in \left\{ 2 \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \delta(x-x_i) : p_i \in [0, p_0], i=1,2,\dots,k \right\}, \quad (8.4.2)$$

gdzie  $\mu = M / EJ$ ,  $p_i = P_i / EJ$ ,  $i = 0,1,\dots,k$  są znormalizowanymi parametrami rozważanego układu.

Konkretne rozwiązanie postawionego zagadnienia sterowania belki zależy od przyjętego wskaźnika jakości tłumienia drgań oraz znajomości (dostępności) aktualnej funkcji deformacji belki  $w(x, t)$  i jej pochodnej czasowej  $\partial_t w(\mathbf{x}, t)$ . Analogicznie do sterowania parametrami dyskretnego oscylatora o jednym stopniu swobody, rozsądnie jest poszukiwać optymalnego sterowania belki jako sprzężenia zwrotnego następującej postaci:

$$p_l = p_l(w(x,t), \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}), l=1,\dots,k. \quad (8.4.3)$$

Jednak, trzeba pamiętać o tym, że odkształcenie belki  $w(\mathbf{x}, t)$ , jako funkcja ciągła, nigdy nie może być dokładnie zmierzona. Co gorsze, jeśli nie są znane (mierzone) przyczyny drgań belki, funkcja  $w(\mathbf{x}, t)$  nie może być też wyliczona z modelu. Jedyne co można zrobić, to mierzyć aktualne odkształcenie belki w dostatecznie dużej liczbie punktów za pomocą odpowiednich czujników. Rozsądnie będzie dalej założyć, że dostępna jest aktualna informacja o deformacji belki w ustalonych punktach  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ . Oznacza to, że tylko wartości  $w(\mathbf{x}_l, t)$ ,  $l=1,\dots,k$  w tych dyskretnych punktach mogą być bezpośrednio wykorzystane do wyznaczania aktualnego sterowania parametrami tłumienia.

Pomiary prędkości odkształceń belki mogą być jeszcze bardziej problematyczne. Jednak, dowolny skomputeryzowany blok pomiarowy w układzie mechatronicznym zwykle wykonuje pomiary (aktualizuje informację o deformacji belki) w dyskretnych chwilach  $\dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots$  z ustalonym okresem próbkowania  $T$ . Jeśli okres próbkowania  $T$  będzie dostatecznie krótki w porównaniu do charakterystycznych stałych czasowych układu (belki), czyli jeśli częstość próbkowania będzie duża w porównaniu z niższymi częstościami własnymi belki, wtedy jest uzasadnione zastosować sprzężenie zwrotne wyznaczone na podstawie przybliżonych, wartości aktualnych pochodnych czasowych odkształcenia belki, wyliczonych według następującego wzoru:

$$\frac{\partial w(x_l, t)}{\partial t} = \frac{w(x_l, t_{i+1}) - w(x_l, t_i)}{T}, l = 1, \dots, k.$$

Zatem, realne sterowanie belki, jakie może być praktycznie zrealizowane może mieć w ogólności następującą postać dyskretną:

$$p_l = p_l(w(x_1, t), \partial_t w(x_1, t), \dots, w(x_k, t), \partial_t w(x_k, t)), l = 1, \dots, k. \quad (8.4.4)$$

Głównym celem dalszych rozważań jest znalezienie optymalnych funkcji sprzężenia zwrotnego postaci (8.4.4), zapewniających największą poprawę tłumienia drgań belki.

Rozważane tu sterowania są z natury dyskretne i bazują na ograniczonej (dyskretnej) informacji o aktualnym stanie ciągłego układu mechatronicznego. W przypadku rozważanej belki Eulera sterowane tłumiki oddziałują z belką w dyskretnych punktach, w których też mierzone są aktualne deformacje belki a prędkości wyliczane w czasie rzeczywistym. Zatem pełen opis stanu belki ani nie jest znany, ani obserwowany, tak że faktycznie cały układ jest, ściśle biorąc, niesterowalny. Jednak system może być stabilizowany a to dzięki wewnętrznemu tłumieniu belki. Ponieważ model belki jest układem liniowym o zmiennych rozdzielonych, drgania swobodne belki mogą być rozłożone na niezależne postaci drgań. Ponieważ postaci drgań odpowiadające wyższymi częstotliwościami są wygaszane stosunkowo szybko przez wewnętrzne tłumienie wiskotyczne, drgania belki mogą być opisane całkiem dokładnie za pomocą skończonej liczby modów. Zatem zagadnienie sterowania układu ciągłego (belki) może być zredukowane do uproszczonego zagadnienia sterowania układu dyskretnego o skończonej liczbie stopni swobody. Innymi słowy, inkluzja jest skończenie rozwiązywalna w sensie badanej własności jakościowej, jaką jest stabilność.

Aby postąpić zgodnie z powyższą koncepcją założymy na wstępie standardową postać przybliżonego rozwiązania zagadnienia drgań rozważanej belki.

$$w(x, t) \approx \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) g_i(t), \quad (8.4.5)$$

gdzie  $\Phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  stanowi zbiór pierwszych  $n$  funkcji własnych, określających przestrzenną postać drgań. Częstotliwości własne muszą spełniać następujące równania różniczkowe zwyczajne:

$$\Phi_i^{IV}(x) - \mu \omega_i^2 \Phi_i(x) = 0, \quad (8.4.6)$$

gdzie  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  są kolejnymi częstotliwościami własnymi belki zależnymi od warunków brzegowych. Funkcje  $\Phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  są ortogonalne jako funkcje własne operatora samosprężonego i mogą być normalizowane w przestrzeni Hilberta  $L^2(0, L)$ . Konkretna postać funkcji własnych równania (8.4.6) zależy w ogólności od założonych warunków brzegowych, ale tak czy inaczej funkcje te zawsze są

kombinacjami liniowymi czterech funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych, mianowicie:  $\sin(\eta x)$ ,  $\cos(\eta x)$ ,  $\sinh(\eta x)$ ,  $\cosh(\eta x)$ , gdzie parametr  $\eta = (\mu\omega^2)^{1/4}$  jest częstością przestrzenną.

Z kolei funkcje czasu  $g_i(t)$ ,  $i=1, \dots, n$  określają czasową zależność kolejnych modów własnych belki. Wstawiając (8.4.5) do równania (8.4.1) i korzystając z ortogonalności funkcji własnych, łatwo wykazać, że dynamikę belki można w przybliżeniu opisać za pomocą następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych typu oscylatorowego:

$$\ddot{g}_i + 2c\omega_i^2 \dot{g}_i + \omega_i^2 g_i = -\Psi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.4.7)$$

gdzie

$$\Psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{2p_l}{\mu} \Phi_i(x_l) \frac{\partial w(x_l, t)}{\partial t} + \dots + \frac{2p_k}{\mu} \Phi_i(x_k) \frac{\partial w(x_k, t)}{\partial t}, \quad i=1, \dots, n \quad (8.4.8)$$

oraz  $\mathbf{z} = [g_1, \dot{g}_1, \dots, g_n, \dot{g}_n]^T = [z_1, \dots, z_n]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ . Zatem dynamika rozważanej belki w przybliżeniu  $n$  modalnym może być opisana za pomocą układu  $n$  oscylatorów liniowych (8.4.7). Oscylatory te, niezależne w przypadku belki swobodnej, oddziałują ze sobą, gdy belka jest tłumiona za pomocą zewnętrznych tłumików. Jeśli zachodzi równość  $\Phi_i(x_l) = 0$  wówczas  $i$ -ty oscylator układu (8.4.7) nie zależy od sterowanego parametru  $p_l$ . Oznacza to, że jest możliwe częściowe rozprężenie modów belki za pomocą odpowiedniego rozmieszczenia tłumików.

W przypadku rozważanej belki, oddziaływanie między modami dokonuje się poprzez funkcje  $\Psi_i$  będące liniowymi kombinacjami pochodnych czasowych  $\dot{g}_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Istotnie, nietrudno wykazać, że  $\mu \Psi_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 2[a_{i1}\dot{g}_1 + \dots + a_{in}\dot{g}_n]$  dla  $i=1, \dots, n$ , gdzie

$$a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^k p(x_l) \Phi_i(x_l) \Phi_j(x_l), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.4.9)$$

Zatem przy dostatecznie dużej liczbie tłumików oraz możliwie równomiernym ich rozmieszczeniu, prawdziwa będzie następująca przybliżona formuła:

$$a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{x}) \approx \frac{k}{L} \int_0^L p(x) \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.4.10)$$

gdzie  $p(x)$  ciągłą aproksymacją dyskretnego tłumienia belki, czyli taką, że  $p(x_l) = p_l$ .

Z ortogonalności funkcji własnych oraz (8.4.9) wynika, że ewolucja czasowa różnych modów w systemie (8.4.7) jest prawie niezależna, jeśli wszystkie parametry tłumienia są równe tzn. jednocześnie maksymalne lub wyłączone. Wówczas mamy bowiem  $a_{ij} \approx \delta_{ij}$ . Jeśli to nie zachodzi, mody są od siebie zależne. Oznacza to, że można tu wyróżnić dwa tryby sterowania przełączanego. W pierwszym trybie system pozwala na niemal tłumienie wszystkich modów jednocześnie włączając lub

wyłączając wszystkie tłumiki. W drugim trybie, w którym włączanie i wyłączanie każdego z tłumików jest niezależne, może następować przepływ energii między modami poprzez aktywowane sprzężenia  $a_{ij}$ . Głównym zadaniem układu sterowania jest wtedy podjęcie decyzji w czasie rzeczywistym o włączeniu lub wyłączeniu poszczególnych tłumików. Decyzje układu sterowania powinny być w jakimś sensie optymalne i uzależnione od aktualnego stanu belki. Celowa byłaby też optymalizacja układu mechatronicznego ze względu na rozmieszczenia tłumików, jako że opisane interakcje między modami systemu są istotnie zależne od  $\mathbf{x}$ .

Opisany układ oddziałujących oscylatorów może być badany za pomocą standardowych metod analizy stabilności a zwłaszcza za pomocą metody funkcji Lapunowa. Rozważany układ jest oczywiście stabilny jeśli parametry tłumienia  $p_1, \dots, p_k$  zewnętrznych tłumików są stałe. Jeśli jednak te parametry będą zależne od czasu, stabilność układu nie jest oczywista, choćby z powodu możliwości wystąpienia rezonansu parametrycznego. Poza tym, sprzężenie poszczególnych modów może spowodować na przykład gwałtowny wzrost tłumienia jednego z modów belki co może doprowadzić do wzbudzenia się innych modów i destabilizacji układu. Zatem zagadnienie stabilności takiego układu o zmiennych parametrach tłumienia wymaga jednoczesnego badania stabilności modów  $\Phi_i$ ,  $i=1, \dots, n$ . Ściśle biorąc chodzi o stwierdzenie na ile odpowiednie przełączania tłumików poprawią własności stabilności układu.

W wielu pracach do analizy stabilności złożonego układu (8.4.7) drugą metodą Lapunowa, przyjmuje się całkowitą energię systemu

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \dot{g}_i^2 + \omega_i^2 g_i^2 \right) \quad (8.4.11)$$

jako funkcje Lapunowa. Pochodna zupełna funkcji energii (8.4.11) po trajektoriach systemu (8.4.7) jest dana następującym wzorem:

$$\dot{E} = -2c \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \dot{g}_i^2 - \frac{2p_1}{\mu} \left( \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} \right)^2 - \dots - \frac{2p_k}{\mu} \left( \frac{\partial w(x_{1k}, t)}{\partial t} \right)^2, \quad (8.4.12)$$

z którego wynika stabilność całego systemu. Działanie zewnętrznego tłumienia jest oczywiście korzystne z punktu widzenia stabilności układu. Jednak z (8.4.12) można wywnioskować, że maksymalne wartości współczynników tłumienia  $p_1, \dots, p_k$  są najkorzystniejsze. Może to sugerować, że półaktywne sterowanie (tzn. sterowanie parametrami) układu nie ma sensu. Taki wniosek jest jednak nieprawdziwy nawet w przypadku oscylatora o jednym stopniu swobody. Ten przykład pokazuje tylko tyle, że funkcja energii nie nadaje się zbyt dobrze na funkcję Lapunowa rozważanego systemu. Wiadomo, że maksymalne stałe parametry tłumienia mogą powodować znaczącą redukcję mierzonych prędkości deformacji  $\partial w(x_l, t) / \partial t$ ,  $l=1, \dots, k$  tak, że zanik energii nie musi być maksymalny. Dlatego czasami może być korzystniej

wyłączyć niektóre tłumiki, a inne włączyć. Głównym naszym celem będzie wykazanie, że istotnie jest możliwa poprawa własności stabilności układu z pomocą odpowiednich zmian wielkości parametrów zewnętrznych tłumików.

Mody drgań swobodnych belki Eulera są od siebie niezależne. Jednak oscylatory (8.4.7), opisujące belkę z zewnętrznymi tłumikami, są istotnie ze sobą sprzężone. Nie jest więc łatwo znaleźć funkcję Lapunowa dla takiego układu w ogólnym przypadku. Ponieważ jednak zewnętrzne tłumiki tylko modyfikują drgania swobodne belki, uzasadnione jest przyjęcie dla całego systemu funkcji Lapunowa w postaci sumy funkcji Lapunowa dla poszczególnych oscylatorów modalnych

Łatwo jest podać optymalne funkcje Lapunowa dla każdego z oscylatorów

$$\ddot{g}_i + 2p_i \dot{g}_i + q_i g_i = 0 \quad i=1, \dots, k. \quad (8.4.13)$$

W istocie, dla dowolnych stałych wartości parametrów tłumienia i sztywności modalnych  $p_i, q_i$  zawsze istnieją kwadratowe funkcje Lapunowa następującej postaci:

$$V_i = V_i(\mathbf{z}_i) = V_i(g_i, \dot{g}_i) = \mathbf{z}_i^T \mathbf{S} \mathbf{z}_i = a_i g_i^2 + 2b_i g_i \dot{g}_i + \dot{g}_i^2, \quad (8.4.14)$$

gdzie  $\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ b_i & 1 \end{bmatrix}$ ,  $a_i - b_i^2 > 0$ , takie że

$$\dot{V}_i \leq -2\gamma_i V_i. \quad (8.4.15)$$

dla pewnych stałych dodatnich  $\gamma_i > 0$ . Powyższe nierówności różniczkowe zapewniają wykładniczą stabilność oscylatorów (8.4.13), a co za tym idzie – wykładniczą zbieżność normy ich stanu z odpowiednimi wskaźnikami zbieżności  $\gamma_i$ . Dla  $i$ -tej mody możemy oczywiście maksymalizować wskaźnik  $\gamma_i$  poprzez odpowiedni dobór funkcji Lapunowa  $V_i$ . W szczególności, dla tłumienia podkrytycznego (gdy  $\omega_i < 1/c$ ) można przyjąć  $a_i = \omega_i^2$  oraz  $b_i = c \cdot \omega_i^2$ , co zapewnia maksymalną wartość modalnych wskaźników stabilności  $\gamma_i = c \omega_i^2$ .

Gdy określone są już funkcje Lapunowa dla wszystkich oscylatorów modalnych w (8.4.7), można zastosować sumaryczną funkcję kwadratową (Sastry [96]):

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n V_i(g_i, \dot{g}_i) \quad (8.4.16)$$

o macierzy klatkowej  $\mathbf{S} = \text{diag} \{ \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k \}$ , jako funkcje Lapunowa systemu (8.4.7). Funkcja  $V(\mathbf{z})$  jest oczywiście dodatnio określona a jej pochodna czasowa na trajektoriach systemu spełnia następujące oszacowanie:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \dot{V}_i \leq -2 \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i - \sum_{i=1}^n (b_i g_i + \dot{g}_i) \cdot \Psi_i(p_1, \dots, p_k). \quad (8.4.17)$$

Ponieważ funkcje  $\Psi_l$  są liniowe względem parametrów  $p_1, \dots, p_k$  oraz prędkości modalnych  $\dot{g}_i, i = 1, \dots, n$ , pochodna zupełna funkcji Lapunowa będzie ujemna dla dostatecznie małych wartości tych parametrów. Wtedy funkcja (8.4.14) będzie funkcją Lapunowa układu (8.4.7), a wskaźnik stabilności układu będzie szacowany nierównością  $\gamma \geq \min [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$ .

Mając odpowiednią funkcję Lapunowa układu (8.4.7), można teraz próbować poprawić jego własności stabilności za pomocą odpowiednich zmian parametrów tłumienia. Najbardziej sensowny algorytm sterowania można wydedukować z żądania, aby optymalne zmiany parametrów najbardziej poprawiały oszacowanie (8.4.15) zmniejszając pochodną funkcji Lapunowa. Wstawiając wzór (8.4.8) do oszacowania (8.4.17) otrzymujemy następującą formułę na optymalne sterowanie belki:

$$p_l = p_l(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} p_{i \max} \left\{ 1 + \operatorname{sign} \left[ \sum_{i=1}^n (b_i g_i + \dot{g}_i) \Phi_i(x_l) \frac{\partial w(x_l, t)}{\partial t} \right] \right\}, \quad l = 1, \dots, k. \quad (8.4.18)$$

Powyższe sterowanie jest typu bang-bang, co oznacza, że każdy ze sterowanych parametrów  $p_l$  układu będzie albo maksymalny, albo równy zero. Ponadto, jak łatwo można wywnioskować z (8.4.8), funkcje przełączeń we wzorach (8.4.18) będą na ogół iloczynem dwóch funkcji liniowych. Zatem funkcje te określają w przestrzeni stanu  $R^{2n}$  układu powierzchnie przełączeń zbudowane z dwóch hiperpłaszczyzn. Gdy tylko pewna trajektoria systemu przecina jedną z takich hiperpłaszczyzn, znak odpowiadającej jej funkcji przełączeń ulega zmianie, a w konsekwencji odpowiedni tłumik zmienia swój parametr tłumienia (zostaje włączony lub wyłączony). Ponieważ dowolne warunki początkowe są dopuszczalne w rozważanym modelu, każdy ze sterowanych parametrów może ulec przełączeniu podczas ruchu wzbudzonego układu.

Analogicznie możemy zastosować ważoną funkcję Lapunowa w następującej postaci:

$$V(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot V_i(g_i, \dot{g}_i), \quad (8.4.19)$$

gdzie  $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$  są dodatnimi współczynnikami (wagami), odzwierciedlającymi istotność poszczególnych modów drgań belki. Jeśli na przykład z jakichś powodów szczególnie niepożądana jest duża amplituda drgań pierwszego modu, to współczynnik  $\varepsilon_1$  powinien być stosownie zwiększony w stosunku do pozostałych współczynników wagowych. Dzięki temu układ sterowania funkcjonujący według strategii (8.4.18) zapewni zwiększone tłumienie drgań o częstotliwości podstawowej.

Występuje tu pewnie problem ze sterowaniem postaci (8.4.18), ponieważ jego dokładna realizacja praktyczna wymagałaby bieżącej wiedzy (w czasie rzeczywistym) na temat niemierzalnych składowych wektora stanu  $\mathbf{z}$ . Można tą trudność ominąć, stosując odpowiedni obserwator stanu, ponieważ wielkości mierzone są liniowymi kombinacjami potrzebnych wielkości niemierzalnych  $\mathbf{z}$ . Należy w tym celu rozwiązać następujący układ równań

$$w(x_l, t) \approx \Phi_1(x_l)g_1(t) + \dots + \Phi_n(x_l)g_n(t), \quad \frac{\partial w(x_l, t)}{\partial t} \approx \Phi_1(x_l)\dot{g}_1(t) + \dots + \Phi_n(x_l)\dot{g}_n(t)$$

dla  $l = 1, \dots, n$ , którego rozwiązywalność (jako układu  $n$  liniowych równań algebraicznych) względem składowych wektora  $\mathbf{z}$  zależy od macierzy układu i liczby niewiadomych. Jednoznaczne rozwiązanie istnieje, gdy  $k = n$  a macierz układu jest nieosobliwa, czyli  $\text{Det} [\Phi_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ . Tak więc, jeśli w systemie mamy  $k$  sterowanych tłumików, to przede wszystkim należy uwzględnić  $n = k$  pierwszych postaci drgań belki. Wtedy rozwiązania rozważanego układu równań można łatwo wyznaczyć, jeśli układ ten jest dobrze uwarunkowany tzn. moduł wyznacznika jego macierzy jest dostatecznie duży. Można to osiągnąć poprzez odpowiedni dobór konfiguracji  $\mathbf{x}$ .  $\square$

Inny przykład układu ciągłego ze sterowaniem półaktywnym (kolumna ze sterowanym tłumikiem, obciążona siłą śledzącą) został rozpatrzony w pracy (Imiełowski, Ossowski [21]).

Podsumowując można powiedzieć, że metoda optymalnych funkcji Lapunowa nadaje się do analizy stabilności wybranych typów ciągłych układów mechatronicznych, dla których można uzyskać konkretne wyniki o znaczeniu praktycznym. Metoda ta umożliwia też wyznaczenie struktury sterowań modyfikujących własności stabilności układów ciągłych. Jednak struktura takich sterowań jest na tyle złożona, że raczej trudno będzie o jakieś analityczne wyniki analizy. Można jednak optymalizować parametry sterowania przy pomocy symulacji numerycznych na modelu lub eksperymentów na obiekcie. Dzięki temu problem syntezy sterowań dla układów ciągłych można sprowadzić do optymalizacji parametrów, wykluczając konieczność heurystycznego odgadywania struktury sterowania optymalnego.

Co więcej, sterowanie układu ciągłego (na przykład belki) z wykorzystaniem funkcji modalnych i ich pochodnych daje duże możliwości modyfikacji dynamiki takich układów, ale wiąże się z problemem pomiaru odpowiednich wielkości w czasie rzeczywistym. Praktycznie ogranicza to liczbę modów, które można uwzględnić w algorytmie sterowania. Dalsza analiza teoretyczna takich układów jest niezbędna, aby w pełni można było ocenić sensowność rozwiązań wynikających z metody optymalnych funkcji Lapunowa.



## 9. ANALOGOWA REALIZACJA UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH

*Charakterystyczną cechą metody optymalnych funkcji Lapunowa jest fakt, że jej zastosowanie do układów mechatronicznych z ograniczeniami na sterowania, prowadzi zwykle do sterowań optymalnych typu bang-bang. Teoretycznie takie sterowania realizuje się za pomocą sprzężeń zwrotnych, dokonujących nagłych przełączeń na odpowiednich hiperpowierzchniach w przestrzeni stanu. Jednak praktycznie takie przełączenia można zrealizować tylko w przybliżeniu za pomocą realnych elementów wykonawczych z nasyceniem, ze strefą liniowości i nieczułości albo z luzem lub histerezą. Powoduje to, rzecz jasna, utratę optymalności sterowania w realnym układzie. Istotną przyczyną pogorszenia jakości sterowań mogą być też opóźnienia sterowania oraz niekontrolowane zaburzenia i zakłócenia nieuniknione w rzeczywistych układach mechatronicznych.*

*Aby uzasadnić praktyczną stosowalność opisanej metody syntezy sterowań, trzeba wykazać to, czego zwykle się nie robi, że mimo wymienionych wyżej niedoskonałości sterowań, układy realne będą działać poprawnie tj. suboptymalnie. W niniejszym rozdziale wykażemy ten fakt, szacując stopień pogorszenia własności stabilności układów nieidealnych w stosunku do układów optymalnych.*

*W kolejnych paragrafach tego rozdziału zostanie oszacowany wpływ wymienionych wyżej czynników na własności układów optymalnych. W szczególności wyprowadzone będą warunki dostateczne niezawodnej stabilności (tzw. robust stability) układów pracujących w warunkach zakłóceń pomiarowych oraz niewielkich opóźnień w pętli sprzężenia zwrotnego.*

*Rozdział ten stanowi ważne uzupełnienie poprzednich rozdziałów niniejszej rozprawy, albowiem określa możliwości i granice praktycznej stosowalności w mechatronice opisanych wcześniej koncepcji i rozwiązań teoretycznych.*

### 9.1 Układy ze sterowaniem liniowym

Optymalne sterowania przełączane typu bang-bang, wyznaczone metodą funkcji Lapunowa, można realizować tylko w przybliżeniu (suboptymalnie), stosując rzeczywiste elementy wykonawcze. Aby opisana metoda funkcji Lapunowa miała praktyczny sens, trzeba wykazać, że niewielkie niedoskonałości takich sterowań nie spowodują istotnych zmian własności jakościowych układu, lecz co najwyżej „dopuszczalne” zmiany ilościowe (pogorszenie własności stabilności układu).

Badanie wymienionych wyżej problemów rozpoczniemy od podstawowej kwestii stabilności układu sprzężenia zwrotnego, w którym idealny przełącznik zastąpiono liniowym elementem wykonawczym (wzmacniaczem) z nasyceniem.

**Problem 9.1:** *(Własności układu aktywnego sterowania w strefie liniowości)*

Rozważmy liniowy układ sterowania  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , dla którego optymalne jest sterowanie bang-bang postaci (9.1.1). Jeżeli w układzie sprzężenia zwrotnego zastosujemy realny element wykonawczy (wzmacniacz) jako przełącznik, należy pamiętać, że

jego charakterystyka będzie w przybliżeniu liniowa dla małych sygnałów, a nasycająca się dla dużych sygnałów wejściowych. Zatem układ sterowania z elementem o takiej charakterystyce będzie działał zgodnie z ogólnie akceptowanymi zasadami w teorii sterowania, a więc: jak regulator przekaźnikowy (dwustawny) daleko od punktu równowagi oraz jak optymalny regulator liniowy w pobliżu punktu stacjonarnego, gdzie przełączenia bang-bang byłyby sterowaniem zbyt gwałtownym. Tak samo przełączenia w pobliżu punktu stacjonarnego za pomocą elementu z histerezą, luzem lub inną nieliniowością, ograniczyłyby wydatnie efektywność sterowania w stosunku do sterowania liniowego. Tę kwestię omówimy w dalszych paragrafach.

Jest oczywiste, że w zakresie nasycenia zbieżność trajektorii układu realnego jest taka sama jak przy optymalnym sterowaniu bang-bang. Jednak w obszarze liniowości wzmacniacza wartości sterowań są na ogół mniejsze od wartości maksymalnych (optymalnych), chociaż są poprawne co do znaku. Powoduje to rzecz jasna pogorszenie efektywności sterowania. Można się spodziewać, że dla zbyt małych wzmocnień nastąpi utrata stabilności układu, jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest niestabilna. Z kolei wzrost wzmocnienia, powodując zważanie strefy liniowości, powinien zapewnić stabilizację układu. Powinno więc istnieć pewne wzmocnienie krytyczne, jako próg stabilności.

Opisane wyżej jakościowe przypuszczenia w pełni potwierdza ścisła analiza. Aby to wykazać, oszacujemy wskaźnik zbieżności dla układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  zamkniętego następującym liniowym sprzężeniem zwrotnym:

$$u = u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}, \quad (9.1.1)$$

będącego praktyczną realizacją idealnego sterowania *bang-bang* (7.2.9) w otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Parametr  $k > 0$ , zwany dalej *wzmocnieniem*, został tu wydzielony dla wygody, choć faktycznie jest on parametrem macierzy funkcji Lapunowa  $\mathbf{S}$ . (Wyłączając wzmocnienie  $k$  poza macierz  $\mathbf{S}$ , jeden z elementów na przekątnej tej macierzy można znormalizować do jedności).

Podstawiając powyższe sterowanie do wzoru na wskaźnik zbieżności (7.2.3) dla układu liniowego  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , dostaniemy następujący wzór na wskaźnik stabilności w strefie liniowości wzmacniacza przełączającego:

$$\gamma_k(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - k \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (9.1.2)$$

Widać, że wskaźnik zbieżności dla układu ze sterowaniem liniowym na ogół zależy od stałego mnożnika macierzy  $\mathbf{S}$  z powodu wyrażenia kwadratowego  $(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2$ . Stanowi to istotną różnicę w stosunku do układu liniowego  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ze sterowaniem bang-bang. Dlatego właśnie uzasadnione jest wydzielenie stałego mnożnika  $k$ , jako wzmocnienia.

Zależność wskaźnika (9.1.2) od wzmocnienia  $k$  w pełni określa podstawowe własności stabilności układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  z liniowym sprzężeniem zwrotnym. Aby to wykazać zauważmy, że wzór (9.1.2) można przekształcić do dogodniejszej postaci:

$$\gamma_k(\mathbf{S}) = - \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - k \cdot \left( \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \right)^2 \right]. \quad (9.1.3)$$

Powyższy wskaźnik zawsze istnieje, jako supremum funkcji ciągłej na zbiorze zwartym. Ponadto widać, że  $\gamma_k(\mathbf{S})$  jest ciągłą i niemalejącą funkcją wzmocnienia  $k$ .

Ważne wnioski odnośnie własności rozważanego układu można wyciągnąć już tylko na podstawie analizy asymptotyki funkcji  $\gamma_k(\mathbf{S})$  dla  $k \rightarrow +\infty$  i dla  $k \rightarrow 0$ . Istotnie, jak widać z (9.1.3), gdy  $k \rightarrow 0$ , wskaźnik  $\gamma_k(\mathbf{S})$  dąży do wskaźnika zbieżności  $\gamma_0(\mathbf{S})$  dla układu otwartego (bez sprzężenia zwrotnego). Jeśli jednak

wzmocnienie  $k \rightarrow +\infty$ , to wskaźnik  $\gamma_k(\mathbf{S})$  dąży do  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{B}_S^T \setminus \{0\}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]$ .

Jeżeli układ bez sprzężenia zwrotnego jest niestabilny, to  $\gamma_0(\mathbf{S}) < 0$  a warunkiem koniecznym liniowej stabilizowalności rozważanego układu będzie nierówność  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$ . Wtedy na mocy ciągłości musi istnieć wzmocnienie krytyczne  $k_0$ , czyli próg stabilności. Tylko dla wzmocnień  $k > k_0$  układ będzie wykładniczo stabilny według normy  $\|\cdot\|_S$ . Zatem nierówność  $\gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$  będzie warunkiem koniecznym i dostatecznym liniowej stabilizowalności układu. Dostajemy więc tu taki sam warunek stabilizowalności jak dla układu liniowego ze sterowaniem stabilizującym typu bang-bang opisanym w Paragrafie 7.2.

Jeżeli natomiast układ swobodny  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  jest stabilny (czyli  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$ ), wówczas celem sterowania poprzez sprzężenie zwrotne (9.1.1) może być modyfikacja (ilościowa poprawa własności stabilności) układu. Ponieważ w takim przypadku wskaźnik zbieżności  $\gamma_k(\mathbf{S})$  układu zamkniętego jest dodatni dla wszystkich wzmocnień  $k \geq 0$ , możemy tylko oszacować wzmocnienie  $k_{\text{sat}}$ , powyżej którego wskaźnik ten jest równy lub odpowiednio bliski swojej maksymalnej wartości asymptotycznej  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$ .

Przedstawione wyżej rozważania ogólne (jakościowe) pokazują, że zastosowanie wzmacniacza liniowego zamiast idealnego przełącznika w pętli sprzężenia zwrotnego nie destabilizuje układu, o ile wzmocnienie jest dostatecznie duże. Aby otrzymać wyniki ilościowe, należy wyznaczyć odpowiednie oszacowanie wskaźnika stabilności  $\gamma_k(\mathbf{S})$  oraz pozostałych istotnych parametrów układu.

Okazuje się, że dla rozważanego układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ze sterowaniem liniowym (9.1.1) można wyznaczyć analityczne oszacowania wskaźnika  $\gamma_k(\mathbf{S})$  w zależności od wzmocnienia (Ossowski [59]). Istotnie, wprowadzając pomocnicze oznaczenia:

$$\delta_1(\mathbf{S}) = \sup_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_{\mathbf{S}} - \{\mathbf{0}\}} \frac{\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{S}}}, \quad k_1(\mathbf{S}) = \frac{1}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \cdot \left[ \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right] \quad (9.1.4)$$

i wykonując proste operacje algebraiczne i analityczne, można dojść do oszacowania  $\gamma_k(\mathbf{S}) \geq \tilde{\gamma}_k(\mathbf{S})$ , gdzie przybliżony wskaźnik stabilności (Ossowski [59]):

$$\tilde{\gamma}_k(\mathbf{S}) = \frac{1}{2} \cdot \left[ k \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 + \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) - \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right] - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(k - k_1)^2 \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^4 + \delta_1^2(\mathbf{S})}. \quad (9.1.5)$$

Rozwiązując nierówność  $\tilde{\gamma}_k(\mathbf{S}) > 0$ , dostajemy następujące oszacowanie progu stabilności układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  z liniowym sprzężeniem zwrotnym:

$$k_0(\mathbf{S}) \leq \tilde{k}_0(\mathbf{S}) = \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} + \frac{\delta_1^2(\mathbf{S})}{4\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2}. \quad (9.1.6)$$

Nietrudno również stwierdzić, że w przybliżeniu możemy przyjąć, iż  $k_{\text{sat}} \approx k_1$ .

Wzory (9.1.4), (9.1.5), (9.1.6) stanowią przybliżone rozwiązanie analityczne (względem wzmocnienia  $k$ ) problemu stabilności układu liniowego stacjonarnego dowolnej wymiarowości, z optymalnym liniowym sprzężeniem zwrotnym. Nietrudno wykazać, że w przypadku dwuwymiarowej przestrzeni stanu albo dla wielowymiarowej i kanonicznej macierzy funkcji Lapunowa, spełniającej warunek  $\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{x}} = 0$  dla każdego  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_{\mathbf{S}}$ , powyższe oszacowania stają się dokładne i przybierają następującą uproszczoną postać:

$$\gamma_k(\mathbf{S}) = \begin{cases} k \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 - \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} & \text{dla } k \leq k_1(\mathbf{S}) \\ \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) & \text{dla } k > k_1(\mathbf{S}) \end{cases}, \quad (9.1.7)$$

gdzie

$$k_0(\mathbf{S}) = \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^4}, \quad k_{\text{sat}}(\mathbf{S}) = k_1(\mathbf{S}) = k_0(\mathbf{S}) + \frac{\gamma_{\infty}(\mathbf{S})}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2}. \quad (9.1.8)$$

Rozważony problemat dobrze ilustruje zalety stosowania kanonicznych funkcji Lapunowa do badania własności wielowymiarowych układów mechatronicznych.  $\square$

Pokażemy teraz, że stabilizatory otrzymywane metodą optymalnych funkcji Lapunowa według lokalnego kryterium o zbieżności wykładniczej trajektorii układu liniowego są również optymalnymi stabilizatorami w sensie klasycznej teorii

sterowania optymalnego, w której rozpatruje się standardowo całkowite wskaźniki jakości [D14]. Podaną tezę wyraża bardziej precyzyjnie następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 9.1:** (*Optymalność liniowego sprzężenia zwrotnego*) (Ossowski [59])  
Liniowy układ stacjonarny  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  o jednym wejściu, stabilizowany liniowym sprzężeniem zwrotnym  $u = u(\mathbf{x}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  jest układem optymalnym w sensie pewnego całkowitego funkcjonału jakości z kwadratową funkcją względem wektora stanu i sterowania. #

*Dowód:* W klasycznej teorii stabilizacji optymalnej zwykle przyjmuje się następujący kwadratowy wskaźnik jakości sterowania układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ :

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt, \quad (9.1.9)$$

gdzie  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  są macierzami dodatnio określonymi odpowiednich wymiarów. W teorii tej dowodzi się, że liniowe sprzężenie zwrotne  $\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{x}$  będzie zapewniało minimalizację podanego całkowitego wskaźnika jakości, jeżeli macierz  $\mathbf{D}$  będzie rozwiązaniem następującego *macierzowego równania Riccatiego* (Kaczorek [23]):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{A} - \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} = -\mathbf{Q}. \quad (9.1.10)$$

Patrząc na sterowanie optymalne  $u(\mathbf{x}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  otrzymane z metody optymalnych funkcji Lapunowa, nietrudno dostrzec podobieństwo wzoru na sterowanie optymalne dla zagadnienia liniowokwadratowego i na tej podstawie oszacować zakresy wartości wskaźnika  $J$ . Istotnie, jeżeli wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$  jest dodatni, oznacza to, że macierz  $\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} - 2k \cdot \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}$  jest określona ujemnie. Zatem istnieje macierz dodatnio określona  $\mathbf{Q}$ , taka że spełnione jest równanie Riccatiego ze względu na macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} - 2k \cdot \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} = -\mathbf{Q}. \quad (9.1.11)$$

Porównując z sobą równania (9.1.10) i (9.1.11), dostajemy  $\mathbf{S} = \mathbf{D}, \mathbf{R} = \mathbf{I}/2k$ , co oznacza, że sterowanie stabilizujące (9.1.1) uzyskane z metody optymalnych funkcji Lapunowa optymalizuje też wskaźnik globalny w postaci następującej całki:

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{+\infty} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \frac{1}{2k} \mathbf{u}^T \mathbf{u} \right] dt. \quad (9.1.12)$$

Zatem stabilizatory „lapunowowskie”, maksymalizujące wskaźnik lokalny (szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii), są zarazem stabilizatorami kwadratowo optymalnymi w sensie klasycznej teorii sterowania (Kaczorek [23]).

W teorii sterowania optymalnego, bazującej na całkowitych wskaźnikach jakości, zawsze istniała kwestia doboru parametrów macierzy  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ , które najlepiej odpowiadałyby konkretnym potrzebom praktycznym (Kundu [29]). Metoda optymalnych funkcji Lapunowa, bazująca na koncepcji wskaźnika stabilności wykładniczej, sama określa te macierze i ich związek z funkcją Lapunowa, a więc i z dynamiką badanego układu (Sastry [96]). Jak widać, macierz  $\mathbf{R}$  jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej, natomiast macierz  $\mathbf{Q}$  jest w ogólności zależna od macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa oraz od wzmocnienia  $k$ .  $\square$

W Rozdziale 6 znaleźliśmy sprzężenia zwrotne realizujące optymalną modyfikację parametryczną układów liniowych. Ponieważ optymalne sterowania są w takim przypadku sterowaniami typu bang-bang z funkcjami przełączeń zależnymi kwadratowo od współrzędnych stanu  $\mathbf{x}$  układu, powstaje pytanie, jak będzie zachowywał się układ modyfikacji parametrycznej, jeśli idealny przełącznik zostanie zastąpiony realnym elementem przełączającym. Poniżej zbadajmy tę sprawę na przykładzie układu z jednym modyfikowanym parametrem.

**Problem 9.2:** (*Własności układu półaktywnego sterowania w strefie liniowości*)

Rozważmy układ liniowy (zależny od jednego parametru  $p$ ), którego dynamika opisana jest inkluzją  $\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + p \cdot \mathbf{C}\mathbf{x} : |p| \leq \alpha\}$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą stabilną i stałą. Wtedy, jak wiadomo, istnieje dodatnio określona macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa rozważanego układu taka, że wskaźnik stabilności  $\gamma_0(\mathbf{S}) > 0$ , natomiast sprzężenie zwrotne  $p(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -\alpha \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}]$  realizuje optymalną modyfikację parametru  $p$ .

Jeżeli idealny przełącznik zastąpimy wzmacniaczem ze strefą liniowości i nasyceniem, to w strefie liniowości modyfikujące sprzężenie zwrotne przyjmie następującą, suboptymalną postać (Ossowski [62]):

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -k \cdot [\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}], \quad (9.1.13)$$

gdzie  $k > 0$  jest parametrem wzmocnienia. Zatem będzie to sprzężenie zwrotne postaci kwadratowej funkcji współrzędnych stanu. Z definicji wzmocnienia wynika, że strefa liniowości, w której będzie obowiązywało powyższe prawo sterowania, będzie wówczas określona warunkiem  $|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}| \leq \alpha/k$ . Widać, że im większe jest wzmocnienie, tym węższa jest strefa liniowości wzmacniacza i tym bardziej jego działanie przypomina przełączanie idealne, czyli bang-bang.

Nietrudno też stwierdzić, że dynamikę opisanego układu suboptymalnego w strefie liniowości opisuje nieliniowe równanie  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - k \cdot (\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x}) \cdot \mathbf{C}\mathbf{x}$ , a jego własności jakościowe determinuje następujący wskaźnik zbieżności:

$$\gamma[\mathbf{S}, c] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - kc^2 \cdot (\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{x})^2 \right]. \quad (9.1.14)$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla każdego  $c > 0$  wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, c) \geq \gamma_0(\mathbf{S})$ , co oznacza, że układ suboptymalnej modyfikacji parametrycznej zachowuje stabilność w strefie liniowości. Ponadto zachodzi własność asymptotyczna  $\gamma(\mathbf{S}, c) \rightarrow \gamma_0(\mathbf{S})$ , gdy  $c \rightarrow 0$ . Zatem rozważany układ w pobliżu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , zachowuje się jak układ swobodny o macierzy  $\mathbf{A}$  (bez modyfikacji). Efektywność suboptymalnej modyfikacji parametrycznej maleje więc wraz ze zmniejszaniem się zakresu ruchu układu. Ale w pobliżu stanu stacjonarnego modyfikacja układu nie jest potrzebna, więc nie jest to poważną wadą. W praktycznym układzie można zapewnić wyłączenie sterowania w pewnym małym otoczeniu punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  $\square$

## 9.2 Układy z nieliniowym przełączaniem sterowania

Oprócz liniowych elementów przełączających istnieją elementy, które mają charakterystyki zasadniczo nieliniowe takie jak: *luz*, *histereza*, *strefa nieczułości*. Tego typu niedoskonałości urządzeń wykonawczych są zwykle uwzględniane w teorii układów sterowania i regulacji (Kaczorek [23]). Stosuje się do tego przybliżone metody, na przykład *metodę funkcji opisujących*.

Poniżej zbadamy (za pomocą metody optymalnych funkcji Lapunowa) wpływ takich nieliniowości na jakość optymalnych układów mechatronicznych, omówionych w poprzednich rozdziałach.

Nieliniowością często występującą w elementach mechanicznych jest luz. Dlatego celowe jest zbadanie wpływu obecności luzu w elementach wykonawczych na dokładność stabilizacji i modyfikacji układów mechatronicznych. Luz jest nieliniowością dość szczególnego rodzaju (Kaczorek [23]). Praktycznie działanie luzu w elemencie wykonawczym objawia się tym, że dla danego sygnału wejściowego  $v$ , sygnał wyjściowy  $u$ , zależnie od „historii” ruchu układu, może przyjmować dowolną wartość z pewnego ograniczonego przedziału, określonego przez wielkość strefy luzu oraz statyczne wzmocnienie  $k$  elementu.

**Problem 9.3:** (*Wpływ luzu na jakość pracy układu z przełączanym sterowaniem*)  
Rozpatrzmy układ liniowy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  z liniowym sprzężeniem zwrotnym (9.1.1). Pojawienie się luzu o szerokości  $d$  sprawi, że sterowanie będzie przedziałowe tzn.

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) \in [-k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + kd, +k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + kd].$$

Wskaźnik zbieżności dla układu z luzem możemy oszacować następująco:

$$\begin{aligned} \gamma_{k,d}(\mathbf{S}) &\geq -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - k \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + kd \cdot \frac{|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \geq \\ &\geq \gamma_k(\mathbf{S}) - \frac{kd}{c} \cdot \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| = \gamma_k(\mathbf{S}) - \frac{kd}{c} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

Z warunku stabilności  $\gamma_{k,d}(\mathbf{S}) > 0$  wynika następujące oszacowanie obszaru granicznego w postaci elipsoidy o promieniu

$$c \geq \tilde{c}_\infty(\mathbf{S}) = \frac{kd}{\gamma_k(\mathbf{S})} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}. \quad (9.2.2)$$

Zatem w układzie z luzem możemy liczyć tylko na zbieżność wykładniczą trajektorii do pewnego zbioru granicznego o promieniu proporcjonalnym do iloczynu wzmocnienia  $k$  i wielkości luzu  $d$  oraz odwrotnie proporcjonalnym do wielkości wskaźnika zbieżności  $\gamma_k(\mathbf{S})$  dla układu bez luzu z liniowym sprzężeniem zwrotnym (9.1.1).  $\square$

Sterowanie liniowe  $u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ , teoretycznie rzecz biorąc, sprowadza stan układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  do punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . W rzeczywistości tak być nie musi również z powodu tzw. *strefy nieczułości*, jako szczególnej cechy charakterystyki wzmocnienia elementu wykonawczego, która sprawia, że element ten nie reaguje na zbyt małe sygnały wejściowe, mieszczące się w granicach tej strefy (Kaczorek [23]).

**Problem 9.4:** (Wpływ strefy nieczułości układów z przelączanym sterowaniem)

Rozważmy układ liniowy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ze sterowaniem (9.1.1). Obecność strefy nieczułości o szerokości  $g > 0$  sprawia, że rzeczywiste sterowanie  $u = u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = 0$ , jeżeli  $|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \leq g$  oraz  $u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$  dla  $|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| > g$ . Zatem szybkość zbieżności trajektorii układu sprzężenia zwrotnego w strefie nieczułości będzie określona przez następujący wskaźnik:

$$\gamma_g[\mathbf{S}, c] = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \quad (9.2.3)$$

liczony po  $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \neq \mathbf{0} : |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \leq g, \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} = c\}$ . Jest jasne, że dla dowolnie ustalonego  $c > 0$  wskaźnik  $\gamma_g[\mathbf{S}, c] \longrightarrow \gamma_\infty(\mathbf{S}) > 0$ , gdy strefa nieczułości  $g \longrightarrow 0$ . Oznacza to, że mimo obecności strefy nieczułości, zbieżność wykładnicza trajektorii będzie zachowana dostatecznie daleko od punktu stacjonarnego. Jednak dla ustalonej strefy nieczułości  $g > 0$  wskaźnik  $\gamma_g[\mathbf{S}, c] \longrightarrow \gamma_0(\mathbf{S}) < 0$ , gdy  $c \longrightarrow 0$ , co oznacza utratę wykładniczej zbieżności (a więc i stabilności), w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego. Aby oszacować wielkość tego otoczenia w postaci odpowiedniej elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ , zastosujemy następującą dekompozycję:

$$\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{B} / \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_S^T \Rightarrow |\lambda| \leq g / \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}, \quad \lambda^2 + \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{S}}^2 = c^2. \quad (9.2.4)$$

Zakładając kanoniczność macierzy  $\mathbf{S}$  i podstawiając (9.2.4) do wzoru (9.2.5), dostajemy następującą formułę na wskaźnik zbieżności:



$$\begin{aligned} \gamma_g[\mathbf{S}, c] &= -\frac{1}{c^2} \sup_{\lambda, \tilde{\mathbf{x}}} \left[ \lambda^2 \cdot \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} + \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{S}}^2} \cdot (c^2 - \lambda^2) \right] = \\ &= \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{g}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} + \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \right). \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Z warunku zbieżności wykładniczej  $\gamma_g[\mathbf{S}, c] > 0$  dostajemy ostatecznie następujące oszacowanie promienia elipsoidy granicznej:

$$\boxed{c_{\infty}^2(\mathbf{S}, g) = \frac{g}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \cdot \left[ 1 + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right]}. \quad (9.2.6)$$

Zatem kwadrat promienia elipsoidy granicznej rośnie proporcjonalnie do szerokości strefy nieczułości.

Warto zauważyć, że powyższe wyniki, niezależnie od wymiaru stanu układu, są dokładne, ale słuszne tylko dla kanonicznych macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa. Analogiczne obliczenia można jednak przeprowadzić dla niekanonicznych macierzy  $\mathbf{S}$ . Wtedy dostaniemy pewne analityczne oszacowania wskaźnika zbieżności i promienia granicznego.  $\square$

Histeresa jest typową nieliniowością występującą w rzeczywistych elementach przełączających. Analiza układów z histerezą w pętli sprzężenia zwrotnego jest trudna z uwagi na niejednoznaczność charakterystyki histerezowej. Większość publikacji na ten temat dotyczy układów o dwuwymiarowym wektorze stanu, a opisane w nich analizy w dużym stopniu opierają się na metodach graficznych lub numerycznych. W układach wielowymiarowych histeresa może być źródłem złożonych własności układu takich jak: *cykle graniczne* czy *dziwne atraktory*. Większość informacji na ten temat pochodzi z wyników symulacji komputerowych, a nie ściślej analizy teoretycznej. Poniżej przedstawiona jest czysto teoretyczna analiza tego zagadnienia bazująca na metodzie optymalnych funkcji Lapunowa.

**Problem 9.5:** (*Stabilność układu stabilizacji z histerezą*)

Aby zbadać jaki wpływ na jakość sterowania (stabilizacji) wywiera obecność histerezy w realnym elemencie przełączającym, ponownie rozważymy układ liniowy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  stabilizowany skalarnym sterowaniem optymalnym (jedną składową siły) typu bang-bang postaci  $u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]$ . Przyjmując, że sterowanie to stabilizuje układ w elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c_{\max})$  o promieniu  $c_{\max}(\mathbf{S}, \beta) > 0$ , zbadamy działanie układu stabilizacji, jeżeli idealny element wykonawczy został zastąpiony przełącznikiem rzeczywistym z niezerową histerezą  $h > 0$  (Ossowski [60]).

Rzeczywiste sterowanie w układzie z histerezą można opisać uwiklaną formułą:

$$u_h(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -\beta \cdot \text{sign} \left[ \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} - \frac{h}{\beta} \cdot u_h(\mathbf{x}, \mathbf{S}) \right]. \quad (9.2.7)$$

Łatwo zauważyć, że poza strefą histerezy, czyli wówczas, gdy  $|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| > h$ , sterowanie  $u_h(\mathbf{x}, \mathbf{S})$  pokrywa się ze sterowaniem optymalnym bang-bang. Zatem w obszarze poza strefą histerezy zbieżność wykładnicza trajektorii układu jest identyczna jak dla układu optymalnego. Jednak w obszarze histerezy  $\{\mathbf{x}: |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \leq h \wedge \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = c^2\}$ , gdy  $c < c_{\max}$ , sterowanie (9.2.7) będzie zależne od historii i może przyjmować skrajną wartość przeciwną do sterowania optymalnego bang-bang. Nie może to nie mieć niekorzystnego wpływu na jakość stabilizacji. Aby ten wpływ oszacować, należy zbadać zbieżność trajektorii układu w obszarze histerezy, określoną przez następujący wskaźnik (Ossowski [60]):

$$\gamma \left[ \mathbf{S}, \frac{\beta}{c}, \frac{h}{c} \right] = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\beta}{c} \cdot |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right], \quad (9.2.8)$$

gdzie supremum jest liczone na zbiorze  $\{\mathbf{x}: |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \leq h/c \wedge \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 1\}$  dla  $c < c_{\max}$ .

Postać funkcji pod supremum wyklucza wykładniczą zbieżność trajektorii w pobliżu punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , gdyż wskaźnik (9.2.8) staje się ujemny dla  $c \rightarrow 0$ . Zatem istnieje graniczny promień  $c_\infty$  elipsoidy, do której będą zbiegać trajektorie układu, ale w jej wnętrzu zbieżność wykładnicza nie będzie już zapewniona przez rozważane sterowanie. Aby oszacować krytyczny promień można posłużyć się następującym oszacowaniem wskaźnika (9.2.8) (Ossowski [60]):

$$\gamma \left[ \mathbf{S}, \frac{\beta}{c}, \frac{h}{c} \right] \geq \tilde{\gamma} = \gamma_\infty(\mathbf{S}) - \frac{\beta h}{c^2} - \frac{\delta_1(\mathbf{S}) h}{c \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} - (\gamma_\infty(\mathbf{S}) + \delta_2(\mathbf{S})) \frac{h^2}{c^2 \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2}, \quad (9.2.9)$$

gdzie  $\gamma_\infty(\mathbf{S})$  jest określony wzorem (7.2.7), natomiast

$$\delta_1(\mathbf{S}) = \sup_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}_{\mathbf{S}}^\perp \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{|\mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{x}}|}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{S}}}, \quad \delta_2(\mathbf{S}) = \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2}. \quad (9.2.10)$$

Nierówność  $\tilde{\gamma} > 0$  jest warunkiem dostatecznym zbieżności wszystkich trajektorii na brzegu elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$ . Rozwiązując tą nierówność względem  $c$ , dostajemy następujące oszacowanie krytycznego promienia elipsoidy:

$$c_\infty \leq \tilde{c}_\infty = \left( \sqrt{4\gamma_\infty(\mathbf{S})\delta(\mathbf{S}) + \delta^2(\mathbf{S})h^2 / \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} - \delta(\mathbf{S})h / \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \right) / 2\delta(\mathbf{S}), \quad (9.2.11)$$

gdzie  $\delta(\mathbf{S}) = \beta \cdot h + h^2 \cdot (\gamma_\infty(\mathbf{S}) + \delta_2(\mathbf{S})) / \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2$ . Widać, że promień ten jest rosnącą i złożoną funkcją histerezy  $h$ .

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że trajektorie układu startujące z elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_{\max})$  są wykładniczo zbieżne według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  i dążą do zbioru granicznego, szacowanego od góry przez elipsoidę  $B(\mathbf{S}, c_\infty)$ . Jest jasne, że warunkiem dostatecznym stabilizowalności rozważanego układu za pomocą sprzężenia zwrotnego z histerezą jest, aby  $B(\mathbf{S}, c_\infty) \subset B(\mathbf{S}, c_{\max})$ , czyli  $c_\infty < c_{\max}$ . Aby to było możliwe, histereza musi być dostatecznie mała. Korzystając z (9.2.9), łatwo wykazać, że

$$h \leq h_{\max} = \left( \sqrt{4\gamma_\infty(\mathbf{S})\delta(\mathbf{S}) + \eta(\mathbf{S}) - \eta(\mathbf{S})} / 2\delta(\mathbf{S}) \right), \quad (9.2.12)$$

gdzie  $\eta(\mathbf{S}) = \beta / c_\infty^2(\mathbf{S}) + \delta_1(\mathbf{S}) / c_\infty(\mathbf{S}) \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}$ .

Z powyższych rozważań wynikają ostatecznie następujące wnioski jakościowe:

- układ sprzężenia zwrotnego z dostatecznie małą histerezą jest wykładniczo stabilny do pewnej elipsoidy granicznej,
- promień elipsoidy granicznej rośnie wraz z histerezą,
- układ staje się niestabilny, gdy histereza przekroczy pewną wartość krytyczną.  $\square$

**Problem 9.6:** (Własności układu z histerezą wewnątrz obszaru granicznego)

Własności układu stabilizacji z histerezą wewnątrz obszaru granicznego, gdzie nie jest zachowana wykładnicza zbieżność trajektorii, nie może być, ściśle biorąc, badane metodą funkcji Lapunowa. Możemy jednak wykorzystać iloczyn skalarny, generowany przez optymalną kwadratową funkcję Lapunowa o macierzy  $\mathbf{S}$ , jako dogodny narzędzie do badania i opisu tych własności, co też czynimy poniżej.

W obszarze granicznym  $\{\mathbf{x} : |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}| \leq \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 \wedge \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} \leq c_\infty(\mathbf{S})\}$  dynamika układu jest opisana dwoma równaniami różniczkowymi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \pm \beta \cdot \mathbf{B}. \quad (9.2.13)$$

Zależnie od historii ruchu stan układu po wejściu do obszaru histerezy ewoluuje zgodnie z jednym z tych równań. W obszarze granicznym istnieją dwa punkty stacjonarne  $\mathbf{x}_\pm = \pm \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ , ale – jak łatwo zauważyć – są one niestabilne. Dlatego ruch układu wewnątrz obszaru granicznego dokonuje się między

hiperpłaszczyznami przełączeń o równaniach  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} = \pm \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2$ . Trajektoria osiągająca jedną z hiperpłaszczyzn przełączeń od wewnątrz doznaje skokowej zmiany swojego wektora prędkości zgodnie z (7.2.13), co sprowadza się do jej „wewnętrznego odbicia” od danej hiperpłaszczyzny. Co więcej, jak łatwo sprawdzić, kąt padania równa się kątowi odbicia, jeżeli mierzyć kąty w sensie iloczynu skalarnego określonego przez macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa. Mamy więc tu do czynienia ze swego rodzaju nieliniowym bilardem (bo trajektorie nie są na ogół liniami prostymi), w którym ruch aktualnego stanu (odpowiadającego bilardowej kuli) dokonuje się wewnątrz obszaru ograniczonego dwiema hiperpłaszczyznami i powierzchnią elipsoidy. Ruch tego typu układów może być dość złożony, aż do pojawienia się dziwnego atraktora włącznie. W tym wypadku jednak ruch układu wewnątrz obszaru granicznego okazuje się być całkiem regularny, co można wykazać jak następuje:

Kolejne punkty odbicia na obu hiperpłaszczyznach przełączeń są swego rodzaju *odwzorowaniem Poincare’go* dla rozważanego układu (Arrowsmith [2]). Chcąc zbadać jego zachowanie można ograniczyć się do analizy położenia punktów odbicia i chwil, w których te odbicia następują. Ponieważ trajektorie wewnątrz obszaru granicznego są dane jawnym wzorem

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} [\mathbf{x}_0 \pm \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}] \mp \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad (9.2.14)$$

punkty i chwile kolejnych odbić można wyznaczyć, analizując poniższy układ równań rekurencyjnych:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_N &= e^{\mathbf{A}(\tau_N - t_N)} [\mathbf{x}_N + \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}] - \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \\ \mathbf{x}_{N+1} &= e^{\mathbf{A}(t_{N+1} - \tau_N)} [\mathbf{y}_N - \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}] + \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{S} e^{\mathbf{A}(\tau_N - t_N)} [\mathbf{x}_N + \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}] - \beta \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} &= h, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{S} e^{\mathbf{A}(t_{N+1} - \tau_N)} [\mathbf{y}_N - \beta \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}] + \beta \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} &= -h, \end{aligned}$$

gdzie indeksowane punkty  $\mathbf{x}_N$  i  $\mathbf{y}_N$  leżą odpowiednio na hiperpłaszczyźnie o równaniu  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} = \pm \beta \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2$  i odpowiadają im chwile kolejnych odbić  $t_N, \tau_N$ .

Okazuje się, że kolejne punkty odbić  $\mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N$ , niezależnie od punktu początkowego, zbiegają do pewnych punktów granicznych (Ossowski [60]). Można pokazać, że graniczne punkty są określone następującą formułą:

$$\mathbf{x}_\infty (\mathbf{y}_\infty = -\mathbf{x}_\infty) = +(-)\beta \cdot \left( e^{\mathbf{A}\tau} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left( e^{\mathbf{A}\tau} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}, \quad (9.2.15)$$

gdzie  $\tau$  jest granicznym czasem (okresem) między kolejnymi odbiciami, przy czym okres  $\tau$  spełnia następujące równanie przestępne:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{S} \left( e^{\mathbf{A}\tau} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left( e^{\mathbf{A}\tau} - \mathbf{I} \right) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = h/\beta. \quad (9.2.16)$$

Wewnątrz obszaru granicznego rozważanego układu z histerezą istnieje więc stabilny i przyciągający cykl graniczny zawierający punkty  $\pm \mathbf{x}_\infty$ . Z równania (9.2.16) można wywieść następujący wzór na okres ruchu w tym cyklu (Ossowski [60]):

$$\tau \approx \frac{2h}{\beta \|\mathbf{B}\|_S^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^2 \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_S^2} \cdot \left( \frac{h}{\beta} \right)^3 + \dots \quad (9.2.17)$$

Podstawiając (9.2.17) do (9.2.15), można dalej wyznaczyć następujące jawne formuły na punkty krańcowe cyklu granicznego:

$$\mathbf{y}_\infty = -\mathbf{x}_\infty \approx \left[ \frac{h}{\|\mathbf{B}\|_S^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A}^2 \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_S^8} \cdot \frac{h^3}{\beta^2} \right] \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{3\|\mathbf{B}\|_S^6} \cdot \frac{h^3}{\beta^2} \cdot \mathbf{A}^2 \mathbf{B} + \dots \quad (9.2.18)$$

Można też wykazać (Ossowski [60]), że pełne rozwinięcie powyższej formuły względem potęg histerezy  $h$  ma następującą postać:

$$\mathbf{x}_\infty = h \cdot [\eta_0 \mathbf{B} + \eta_2 \mathbf{A}^2 \mathbf{B} + \dots + \eta_{2k} \mathbf{A}^{2k} \mathbf{B}], \quad (9.2.19)$$

gdzie  $\eta_{2i} \propto (h/\beta)^{2i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Oznacza to, że punkty krańcowe  $\pm \mathbf{x}_\infty$  cyklu granicznego są elementami następującej przestrzeni:  $\text{span}\{\mathbf{B}, \mathbf{A}^2 \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{2k} \mathbf{B}\}$ .  $\square$

Rozważana tu dynamika układu z histerezą wewnątrz obszaru granicznego ściśle wiąże się z zagadnieniem ruchu poślizgowego (Ossowski [60]). Można pokazać, że w obszarze granicznym punkty przecięcia kolejnych odcinków dowolnej trajektorii z hiperpłaszczyzną przełączeń o równaniu  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0$  zmiierają, wraz z  $h \rightarrow 0$ , do ruchu poślizgowego opisanego w Rozdziale 7. Uzasadnia to słuszność przyjętej tam koncepcji takiego ruchu dla układu sprzężenia zwrotnego z przełączaniem idealnym (bez histerezy), gdy trajektorie zbiegają do hiperpłaszczyzny przełączeń z obu stron. Zatem nie ma potrzeby wprowadzania dość sztucznej definicji uogólnionych w sensie Filippowa rozwiązań równań opisujących układy o zmiennej strukturze (Sastry [96]). Problemy istnienia klasycznych rozwiązań wynikają bowiem właśnie z założenia o idealnym przełączaniu, które w realnych układach nie występuje.

### 9.3 Układy z opóźnieniem sterowania

Celem niniejszego paragrafu jest krótkie omówienie wpływu małego opóźnienia w pętli sprzężenia zwrotnego na efektywność aktywnej modyfikacji (lub stabilizacji) układu ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ). W szczególności określony będzie wpływ małego opóźnienia w pętli na liniowe oraz histerezowe sprzężenie zwrotne.

Przyjmijmy najprostszy model opóźnienia  $\tau$ , w którym sterowanie  $\mathbf{u}(t)$  zostaje zastąpione przez wektor  $\mathbf{u}(t - \tau)$ . Układy z takimi opóźnieniami, w ogólności opisują się równaniami różniczkowymi, w których występują niewiadome funkcje czasu z przesuniętym (opóźnionym) argumentem. Tego rodzaju równania są więc w istocie modelami różniczkowo-funkcyjnymi, które nie są przedmiotem niniejszej rozprawy. Analiza własności tego typu układów, dla których istnieje specyficzna teoria, stanowi problem sam w sobie. Jednak w przypadku najbardziej istotnym w układach mechatronicznych, gdy jedynym dominującym opóźnieniem jest opóźnienie w pętli sprzężenia zwrotnego, możemy z powodzeniem zastosować pewną przybliżoną analizę, pozostając w ramach teorii równań i inkluzji różniczkowych zwyczajnych.

Opóźnienia w układach mechatronicznych są zwykle rozpatrywane w kontekście ich szkodliwego wpływu na efektywność sterowania (Lee [35]). Istnieją też doniesienia mówiące o tym, że opóźnienie w pętli sprzężenia zwrotnego może mieć wpływ stabilizujący. Ostatnio nawet rozważane są koncepcje wykorzystania opóźnienia w strategiach sterowania układów mechatronicznych (Olgac [51], [52]). Poniżej zbadamy tę kwestię za pomocą metody optymalnych funkcji Lapunowa.

**Przykład 9.1:** (*Wpływ małego opóźnienia na jakość stabilizacji układu liniowego*)

Rozważmy układ  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  z liniowym sprzężeniem zwrotnym (9.1.1). Łatwo zauważyć, że niewielkie opóźnienie  $\tau$  w pętli sprzężenia zwrotnego sprawia, że rzeczywiste sterowanie podawane na wejście układu będzie miało następującą postać:

$$u(t) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t - \tau) \approx -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} [\mathbf{x}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \tau] = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} [\mathbf{x}(t) - (\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t)) \cdot \tau].$$

Stąd

$$u(t) \approx -\tilde{k} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t) + \tilde{k} \tau \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad (9.3.1)$$

gdzie zmodyfikowane (efektywne) wzmocnienie wyraża się następującym wzorem:

$$\tilde{k} = \frac{k}{1 - k\tau \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B}} = \frac{k}{1 - k\tau \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \approx k + k^2 \tau \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2. \quad (9.3.2)$$

Przybliżenie to jest słuszne wówczas, gdy opóźnienie jest odpowiednio małe, mianowicie:  $\tau \ll 1/k \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2$ .

Jak widać, efektem działania małego opóźnienia w pętli sprzężenia zwrotnego jest pewien (proporcjonalny do wielkości opóźnienia  $\tau$ ) przyrost efektywnego wzmocnienia w pętli sprzężenia zwrotnego, ale jednocześnie zaburzenie optymalnej funkcji przełączeń  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}$ . Ponieważ pierwszy z tych efektów jest korzystny a drugi niekorzystny dla stabilności układu, bilans ich wpływu na układ decyduje o tym, czy

w wyniku działania opóźnienia nastąpi poprawa, czy pogorszenie własności stabilności układu. Można to prześledzić ściśle, badając następujące oszacowanie wskaźnika zbieżności:

$$\begin{aligned} \gamma_{k,\tau}(\mathbf{S}) &= -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \tilde{k} \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \tilde{k} \tau \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \geq \\ &\geq \gamma_{\tilde{k}}(\mathbf{S}) - \tilde{k} \tau \cdot \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = \gamma_{\tilde{k}}(\mathbf{S}) - \tilde{k} \tau \cdot \delta(\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

Ponieważ wskaźnik  $\gamma_{\tilde{k}}(\mathbf{S}) \geq \gamma_k(\mathbf{S}) > 0$ , zachowuje się globalna wykładnicza stabilność układu zamkniętego dla dostatecznie małych opóźnień  $\tau$ . Korzystając z wyników analitycznych (9.1.17), (9.1.18) dla kanonicznych macierzy  $\mathbf{S}$ , można pokazać (rozwiązując nierówność  $\gamma_{\tilde{k}}(\mathbf{S}) - \gamma_k(\mathbf{S}) > \tilde{k} \tau \cdot \delta(\mathbf{S})$ ), że niewielkie opóźnienie może mieć korzystny (stabilizujący) wpływ na rozważany układ, jeżeli wzmocnienie  $k$  mieści się w pewnym przedziale poniżej wartości nasycenia  $k_{\text{sat}} = k_1$ . Ponieważ dla wzmocnień  $k \geq k_1$  wskaźnik  $\gamma_k$  nie zależy od wzmocnienia, opóźnienie obniża wartość wskaźnika stabilności dla dużych wzmocnień.  $\square$

**Przykład 9.2:** (Wpływ opóźnienia na układ sprzężenia zwrotnego z histerezą)

Wpływ małego opóźnienia w pętli sprzężenia zwrotnego w układzie z przełącznikiem z histerezą można oszacować, przedstawiając sterowanie w następującej postaci:

$$\begin{aligned} u &= -\beta \cdot \text{sign} \left[ \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t - \tau) - \frac{h}{\beta} \cdot u \right] \approx -\beta \cdot \text{sign} \left[ \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t) - \tau \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{h}{\beta} \cdot u \right] = \\ &= -\beta \cdot \text{sign} \left[ \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}(t) - \tau \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \tau \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} u - \frac{h}{\beta} \cdot u \right] = \\ &= -\beta \cdot \text{sign} \left[ \mathbf{B}^T \mathbf{S} [\mathbf{I} - \tau \cdot \mathbf{A}] \mathbf{x}(t) - \left( \frac{h}{\beta} + \tau \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 \right) u \right], \end{aligned}$$

Jak widać, pojawienie się małego opóźnienia w pętli sprzężenia zwrotnego powoduje nieznaczną zmianę hiperpłaszczyzny przełączeń oraz wzrost efektywnej histerezy  $h_{\tau} = h + \beta \tau \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2$ , czyli rosnący liniowo wraz z opóźnieniem.  $\square$

Podobne działanie opóźnienia występuje w układach wielopętlowych (o sterowaniu wektorowym), a dowodzi się tego w pełni analogicznie. W takich układach pojawia się jednak szkodliwy efekt interakcji międzypętlowej.

Analogicznie, chociaż nieco trudniej, można szacować wpływ opóźnienia w pętli sprzężenia zwrotnego w układach modyfikacji parametrycznej.

## 9.4 Układy z zaburzeniami i zakłóceniami sterowania

Niedoskonałości rzeczywistych przełączników, jako elementów wykonawczych w układach mechatronicznych, nie są jedyną przyczyną pogorszenia jakości funkcjonowania takich układów. Często istotną i praktycznie nieuniknioną tego przyczyną są różnego rodzaju niestacjonarne zaburzenia i zakłócenia. Jeżeli mamy do czynienia z modelem stabilnego układu mechanicznego (bez sterowań), to wówczas podstawową kwestią jest jego odporność na zaburzenia. Stabilność układu (modelu) zachowująca się mimo działających zaburzeń nosi miano *stabilności niezawodnej* (ang. *robust stability*). Jeżeli określone zaburzenia wpływają na układ permanentnie, mówi się też o *stabilności przy stale działających zaburzeniach*. Badanie niezawodnej stabilności układów zostało omówione w Rozdziale 5 i jest tematem wielu publikacji (Olas [47],[48], Ryan [93]). Zastosowanie metody optymalnych funkcji Lapunowa do badania niezawodnej stabilności zostało obszernie omówione w pracach (Ossowski [58], [59], [69]).

W przypadku układów ze sterowaniem i ich modeli kwestia zaburzeń staje się nieco bardziej złożona, gdyż wtedy mamy do czynienia z dwoma rodzajami zaburzeń: zaburzeniami układu (czyli po prostu *zaburzeniami*) i zaburzeniami sterowania (czyli *zakłóceniami*). Zasadnicza różnica między zaburzeniami a zakłóceniami tkwi w tym, że zaburzenia zmieniają sam układ, ale „nie ruszają” sterowania, natomiast zakłócenia zmieniają samo sterowanie.

Jeśli układ sterowania jest stabilny bez zaburzeń, to w obecności zaburzeń zachowuje się tak, jak układ stabilny z zaburzeniami. Zależnie od charakteru i wielkości zaburzeń układ może utracić stabilność albo pozostać asymptotycznie stabilny do punktu nominalnego lub do pewnego zbioru granicznego. Sposoby szacowania obszarów stabilności w takich przypadkach nie różnią się zasadniczo od tych, stosowanych w Rozdziale 5 do układów dynamicznych z zaburzeniami.

Jeśli pojawiają się zakłócenia sterowania, sprawa może być bardziej złożona, gdyż sterowania poddane zakłóceniom mogą już nie spełniać swojej funkcji stabilizującej. Trzeba to udowodnić w każdym konkretnym przypadku. Aby pokazać jak się to robi w ramach metody optymalnych funkcji Lapunowa, rozważmy układ stabilizacji  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(\mathbf{x})$  ze sterowaniem  $u(\mathbf{x}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S}\mathbf{x}$ , opisany w Paragrafie 9.1, gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą niestabilną, natomiast  $\mathbf{S}$  jest macierzą funkcji Lapunowa, taką że wskaźnik  $\gamma_k(\mathbf{S}) > 0$  dla wzmocnienia  $k > k_0$ . Zbadamy odporność układu sprzężenia zwrotnego na różnego rodzaju zaburzenia układu i zakłócenia sterowania. Problem ten został szczegółowo rozpatrzony w pracy (Ossowski [59]), w której wykazano odporność rozważanego tu układu sprzężenia zwrotnego. Dlatego omówimy poniżej dla ilustracji tylko dwa przykłady szczególnie przeprowadzonych tam analiz.

**Przykład 9.3:** (*Odporność układu stabilizacji na zaburzenia układu*)(Ossowski [59])  
Rozważmy model układu sterowania  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , którego macierze podlegają



ograniczonym i addytywnym, zaburzeniom odpowiednio:  $\mathbf{A}_1(t)$ ,  $\mathbf{B}_1(t)$ , tak, że rzeczywiste równania dynamiki układu będą miały postać:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}_1(t))\mathbf{x} + (\mathbf{B} - \mathbf{B}_1(t))\mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (9.4.1)$$

(Pominiemy tu zaburzenia siłowe, czyli nieparametryczne, ponieważ ich wpływ został już omówiony w Rozdziale 7). Przy takich zaburzeniach postać sterowania  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -k\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x}$  nie ulegnie zmianie, ponieważ macierz  $\mathbf{B}$  w sprzężeniu zwrotnym, określona jako macierz nominalna w wyniku identyfikacji układu, nie jest zależna od chwilowych wartości zaburzeń samego układu.

Własności stabilności układu (9.4.1) są określone przez następujący wskaźnik stabilności:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - k \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1(t) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + k \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{B}_1^T(t) \mathbf{S} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \quad (9.4.2)$$

i jego oszacowanie:

$$\gamma(\mathbf{S}) \geq \tilde{\gamma}(\mathbf{S}) = \gamma_k(\mathbf{S}) - \delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{S}) - k\delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{S}), \quad (9.4.3)$$

gdzie wskaźnik  $\gamma_k(\mathbf{S})$  jest określony wzorem (9.1.2) dla układu bez zaburzeń, natomiast

$$\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{t \geq t_0} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_1(t) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{S}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{t \geq t_0} \left[ \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{B}_1^T(t) \mathbf{S} \mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (9.4.4)$$

Obie wielkości  $\delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{S})$ ,  $\delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{S})$  są oczywiście ograniczone (na mocy ograniczoności elementów macierzy  $\mathbf{A}_1(t)$ ,  $\mathbf{B}_1(t)$ ) oraz nie zależą od normy wektora  $\mathbf{x}$ . Ponieważ wskaźnik  $\gamma_k(\mathbf{S}) > 0$ , to dla dostatecznie małych zaburzeń również dodatni będzie wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S})$ , co oznacza, że układ stabilizacji z zaburzeniami  $\mathbf{A}_1(t)$ ,  $\mathbf{B}_1(t)$  pozostanie wykładniczo stabilny według normy  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}}$  dla dostatecznie małych zaburzeń. Konkretnie ograniczenia na dopuszczalne wartości zaburzeń można uzyskać tylko dla określonej macierzy  $\mathbf{S}$  i konkretnej postaci macierzy zaburzeń  $\mathbf{A}_1(t)$ ,  $\mathbf{B}_1(t)$ .

W szczególności dla macierzy kanonicznej  $\mathbf{S}$  dostajemy następujący warunek

$$\gamma(\mathbf{S}) \geq \tilde{\gamma}(\mathbf{S}) = \min \left[ \gamma_{\infty}(\mathbf{S}), k \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 - \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right] - \delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{S}) - k\delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{S}) > 0 \quad (9.4.5)$$

zapewniający stabilność układu. Na tej podstawie dostajemy następujące oszacowania wzmocnienia krytycznego:

$$\tilde{k}_0(\mathbf{S}) = \left[ \delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{S}) + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right] / \left( \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} - \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{S}) \right), \quad (9.4.6)$$

poniżej którego rozważany układ staje się niestabilny. Oszacowanie to ma sens tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność  $\delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{S}) < \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}$ , którą należy traktować, jako granicę stosowalności opisaną tu metody analizy własności stabilności układów. Co więcej, dla wzmoceń  $k > k_{\max} = [\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) - \delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{S})] / \delta_{\mathbf{B}}(\mathbf{S})$  oszacowanie (9.4.5) nie zapewnia już stabilności układu. Zatem stabilność jest zagwarantowana tylko dla wzmoceń z przedziału  $(k_0, k_{\max})$ , a maksymalna wartość wskaźnika  $\tilde{\gamma}(\mathbf{S})$  jest osiągana dla pewnego  $k \in (k_0, k_{\max})$ .  $\square$

**Przykład 9.4:** (Wpływ zakłóceń pomiarowych na układ stabilizacji) (Ossowski [59])  
Wpływ zakłóceń pomiarowych na działanie układu stabilizacji jest szczególnie istotny w pobliżu punktu stacjonarnego. Prześledźmy jak będzie sprawa wyglądać w najprostszym przypadku układu mechatronicznego  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ze sterowaniem liniowym. Jeżeli aktualny stan  $\mathbf{x}$  układu jest mierzony w obecności pewnych *zakłóceń pomiarowych*  $\mathbf{z}$ , wówczas do sterownika liniowego dociera sygnał zwrotny postaci  $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ . Powoduje to niestacjonarną modyfikację sterowania następującej postaci:

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S}(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = -k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} - k \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{z}. \quad (9.4.7)$$

Dla takiego sterowania wskaźnik stabilności układu będzie wyrażał się wzorem:

$$\gamma_{k,z}(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - k \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - k \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{z})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (9.4.8)$$

Widać, że trzeci składnik (zakłóceńowy) pod supremum (9.4.8) sprawia, że niemożliwa jest ścisła stabilizacja do punktu  $\mathbf{x} = 0$ .

Ponieważ dla wskaźnika stabilności (9.4.8) istotne są jedynie składowe wektora zakłóceń zgodne z wektorem  $\mathbf{B}$ , możemy założyć zakłócenia pomiarowe następującej postaci:

$$\mathbf{z}(t) = \lambda(t) \cdot \mathbf{B}, \quad |\lambda(t)| \leq \alpha, \quad (9.4.9)$$

gdzie  $\lambda(t)$  jest skalarną funkcją zakłóceń, ograniczoną parametrem  $\alpha > 0$ . Wówczas antyoptimalne zaburzenia pomiarowe będą równe  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \alpha \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]$ , natomiast wskaźnik stabilności układu można przekształcić do postaci:

$$\gamma_{k,\alpha}(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - k \cdot \frac{(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + k\alpha \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 \frac{|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (9.4.10)$$

która jest w pełni analogiczna do tej, uzyskanej dla układu z luzem. Wpływ luzu i zakłóceń pomiarowych na dokładność stabilizacji (czy modyfikacji) jest więc podobny. Z postaci wzoru (9.4.10) wynika, że wskaźnik  $\gamma_{k,\alpha}(\mathbf{S})$  zależy od ilorazu  $k\alpha/c$ , a zatem promień elipsoidy granicznej rośnie proporcjonalnie do amplitudy zakłóceń, co nie dziwi z racji liniowości układu.

Korzystając z analogii do układu z luzem, nietrudno uzyskać z warunku stabilności  $\gamma_{k,\alpha}(\mathbf{S}) > 0$  oszacowanie obszaru granicznego w postaci elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_\infty)$  o promieniu

$$c_\infty \geq \tilde{c}_\infty(\mathbf{S}) = \frac{k\alpha}{\gamma_k(\mathbf{S})} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}. \quad (9.4.11)$$

Zatem w układzie z zakłóceniami pomiarowymi możemy liczyć tylko na zbieżność wykładniczą trajektorii do pewnego zbioru granicznego o promieniu proporcjonalnym do iloczynu wzmocnienia  $k$  i amplitudy zakłóceń  $\alpha$  oraz odwrotnie proporcjonalnym do wielkości wskaźnika zbieżności  $\gamma_k(\mathbf{S})$  dla układu sterowania bez zakłóceń.

Okazuje się, że można przeprowadzić dokładniejszą analizę własności wskaźnika (9.4.10) i stabilności rozważanego układu dla dowolnej macierzy  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa (Ossowski [59]). Poniżej podamy dla ilustracji wyniki tej analizy dla kanonicznych macierzy  $\mathbf{S}$ . Własności jakościowe układu nie ulegają przy tym zmianie, ale wszystkie formuły i analizy są znacznie prostsze.

Wskaźnik zbieżności dla układu z zakłóceniami można oszacować następująco:

$$\gamma_k \left[ \mathbf{S}, \frac{\alpha}{c} \right] = \begin{cases} k \left( 1 - \frac{\alpha}{c \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \right) \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 - \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B}}, & k \leq k_2 \\ \gamma_\infty(\mathbf{S}) - \frac{\alpha^2}{4c^2} \cdot \frac{k^2}{k - k_1}, & k > k_2 \end{cases}, \quad (9.4.12)$$

gdzie wzmocnienie  $k_1$  dane jest wzorem (9.1.14), natomiast

$$k_2 = \frac{2k_1 \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}}{2\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} - \beta/c}. \quad (9.4.13)$$

Z powyższych formuł, które w klasie macierzy kanonicznych są ścisłe, można już łatwo wywieść następujące analityczne wzory na krytyczne wzmocnienie:

$$k_{\min} = \begin{cases} \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2 (1 - \beta / c_{\infty} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}})}, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\text{kr}} \\ \frac{2c_{\infty}^2 \gamma_{\infty}(\mathbf{S})}{\beta^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \beta^2 k_1 / c_{\infty}^2 \gamma_{\infty}(\mathbf{S})} \right], & \varepsilon_{\text{kr}} \leq \varepsilon \leq \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} \end{cases}, \quad (9.4.14)$$

gdzie

$$\varepsilon_{\text{kr}} = \frac{2\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}}{\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) + k_1 \|\mathbf{S}\|_{\mathbf{S}}} \quad (9.4.15)$$

oraz na promień elipsoidy granicznej:

$$c_{\infty} \geq c_{\min} = \alpha \sqrt{\frac{k_1}{\gamma_{\infty}(\mathbf{S})}} = \frac{\alpha}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2}}. \quad (9.4.16)$$

Interesującą własnością rozważanego układu jest fakt, że optymalne wzmocnienie jest równe podwójnemu wzmocnieniu  $k_1$ , czyli  $\hat{k} = 2k_1$  i, co najważniejsze, nie zależy od amplitudy zakłóceń pomiarowych  $\alpha$ . Można z tego wysnuć wniosek, a raczej praktyczną sugestię, że rozważany układ stabilizacji o parametrach określonych przez kanoniczną funkcję Lapunowa w warunkach rzeczywistych nie będzie wymagał strojenia wzmocnienia stosownie do poziomu zakłóceń pomiarowych, lecz będzie działał niezawodnie dla każdego ich poziomu (mieszczącego się w dopuszczalnych granicach) i dla ustalonego wzmocnienia optymalnego  $\hat{k}$ .  $\square$

Nietrudno zauważyć, że rozważany układ sprzężenia zwrotnego z zakłóceniami pomiarowymi wykazuje stabilność wykładniczą typu  $(0,1,0)$  z możliwością bifurkacji (utruty stabilności) według schematu  $(0,1,0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (0)$ , dla pewnej krytycznej amplitudy  $\alpha$  zakłóceń, którą można ściśle wyznaczyć z formuły (9.4.12).

**Problem 9.7:** (Aktywna modyfikacja układu z niekontrolowanymi wymuszeniami)  
Wiele rzeczywistych układów mechatronicznych można modelować za pomocą inkluzji różniczkowej następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{z} : u \in \Gamma(U) \wedge \mathbf{z} \in \Gamma(Z)\}, \quad (9.4.17)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  reprezentuje stabilizowalną część swobodną układu,  $\mathbf{B}$  – strukturę (kierunek) oddziaływania ograniczonej siły sterowanej  $u$ , natomiast  $\mathbf{z}$  jest wektorem ograniczonych i niekontrolowanych sił o nieokreślonej strukturze (kierunku) działających na układ. Taki model może opisywać na przykład most podwieszany, gdzie  $u$  jest ograniczoną siłą generowaną przez siłownik działający na oddciąg,

natomiast  $\mathbf{z}$  jest wektorem sił pochodzących od drgań gruntu lub zmiennych obciążeń mostu. W sytuacji bez sterowań i zaburzeń taki układ jest asymptotycznie stabilny. Gdy pojawiają się niekontrolowane zaburzenia, układ traci własność asymptotycznej stabilności punktu stacjonarnego, ale może być stabilny do pewnego obszaru granicznego, którego rozmiar (i kształt) można minimalizować (modyfikować) za pomocą sterowań. Naszym zadaniem jest określenie dopuszczalnych wielkości niekontrolowanych zaburzeń oraz optymalnego sterowania, pozwalających na uzyskanie stabilności układu do możliwie małego zbioru granicznego. Wynikiem analizy powinna być zależność wielkości zbioru granicznego od parametrów układu, sterowania i zaburzeń.

Przyjmując sterowania optymalne w postaci (7.2.9) dostaniemy następujący wzór na wskaźnik stabilności wykładniczej układu:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_{\mathbf{z}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \beta \cdot \frac{|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{z}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (9.4.18)$$

Widać, że obecność składnika z zaburzeniami  $\mathbf{z}$  wyklucza możliwość wykładniczej zbieżności trajektorii do punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Aby ocenić wielkość zbioru granicznego  $X_\infty$ , założmy, że  $\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{S}} \leq \alpha$ . Wtedy z (9.4.18) wynika następująca antyoptimalna strategia zaburzeń:

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}}. \quad (9.4.19)$$

Zatem będziemy mieli następujący wzór na wskaźnik stabilności:

$$\gamma(\mathbf{S}) = - \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - \beta \cdot \frac{|\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \cdot \frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}} \right]. \quad (9.4.20)$$

Stąd, wskaźnik zbieżności (wnikania) trajektorii do elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c)$  możemy oszacować jak następuje:

$$\begin{aligned} \gamma[\mathbf{S}, c] &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} \cdot |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| + \frac{\alpha}{c} \right] = \\ &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} \cdot |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right] - \frac{\alpha}{c} = \gamma \left[ \mathbf{S}, \frac{\beta}{c} \right] - \frac{\alpha}{c}, \end{aligned} \quad (9.4.21)$$

gdzie  $\gamma[\mathbf{S}, \beta/c]$  jest wskaźnikiem zbieżności rozważanego układu bez zaburzeń określony wzorem (7.2.12). Ostatecznie, z warunku wnिकania  $\gamma[\mathbf{S}, c] > 0$ , dostaniemy

oszacowanie zbioru granicznego  $X_\infty$  w postaci elipsoidy  $B(\mathbf{S}, c_\infty)$ , gdzie  $c_\infty$  jest rozwiązaniem równania  $\eta[\mathbf{S}, c]=0$ . Równanie to można rozwiązać numerycznie. Ścisłe wyniki analityczne można uzyskać stosując kanoniczną macierz funkcji Lapunowa dla układu  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , o ile taka istnieje.

Zależność (9.4.21) wskaźnika zbieżności od parametrów  $(\alpha, \beta, c)$  determinuje obraz typów stabilności wykładniczej i ich bifurkacji w rozważanej klasie układów. Łatwo uzasadnić, że dla stabilnej macierzy  $\mathbf{A}$  rozważany układ reprezentuje typ stabilności  $(0,1)$ , natomiast dla niestabilnej macierzy  $\mathbf{A}$  – dopuszcza bifurkacje stabilności  $(0,1,0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (0)$ .  $\square$

**Problem 9.8:** (*Bifurkacje stabilności w układzie sterowania z zaburzeniami*)

Rozważmy układ mechatroniczny z aktywnym sterowaniem i zaburzeniami, modelowany za pomocą inkluzji różniczkowej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{C}z : |z| \leq \alpha \wedge |u| \leq \beta \}, \quad (9.4.22)$$

gdzie  $\mathbf{A}$  reprezentuje stabilizowalną część swobodną układu,  $\mathbf{B}$  – strukturę oddziaływania kontrolowanej siły  $u$ , natomiast wektor  $\mathbf{C}$  – strukturę niekontrolowanej siły  $z$  działającej na układ.

Zakładając, że stałe wektory  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  są liniowo niezależne, dostajemy następujący wzór na wskaźnik stabilności układu:

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \sup_z \inf_u \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} - u \cdot \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + z \cdot \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right]. \quad (9.4.23)$$

Tym razem kolejność operacji supremum względem  $z$  i  $u$  nie odgrywa roli. Optymalne sterowanie i antyoptimalne zaburzenia będą miały standardową postać:  $u(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]$ ,  $z(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = -\alpha \cdot \text{sign}[\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}]$ . Stąd, wskaźnik zbieżności trajektorii układu można przedstawić w następującej postaci:

$$\gamma \left[ \mathbf{S}, \frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c} \right] = - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| + \frac{\alpha}{c} |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right]. \quad (9.4.24)$$

Gdy  $c \rightarrow 0$  w pobliżu powierzchni przełączeń  $\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , to wskaźnik (9.4.24) dąży do nieskończoności tak, jak  $\frac{\beta}{c} \cdot \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| = \frac{\beta}{c} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}$ . Z kolei, gdy  $c \rightarrow 0$

w pobliżu hiperpowierzchni przełączeń  $\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , to wskaźnik stabilności (9.4.24) dąży do minus nieskończoności tak, jak  $-\frac{\alpha}{c} \cdot \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| = -\frac{\alpha}{c} \cdot \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}$ , co

wyklucza stabilność wykładniczą układu do punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Dokładniejsze wyniki możemy dostać, korzystając z następującego oszacowania:

$$\begin{aligned} \gamma\left[\mathbf{S}, \frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}\right] &\geq \tilde{\gamma}\left[\mathbf{S}, \frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}\right] \geq \gamma\left[\mathbf{S}, \frac{\alpha}{c}\right] - \frac{\alpha}{c} \cdot \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} |\mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| = \\ &= - \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}=1} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{\beta}{c} |\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{x}| \right] - \frac{\alpha}{c} \cdot \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (9.4.25)$$

Jeżeli wskaźnik  $\gamma[\mathbf{S}, \beta/c]$  jest obliczymy dla macierzy kanonicznej  $\mathbf{S}$ , to ostatecznie otrzymamy następujący wynik:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}\left[\mathbf{S}, \frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}\right] &= \min \left[ \gamma_{\infty}(\mathbf{S}), \frac{\beta}{c} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} - \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B}} \right] - \frac{\alpha}{c} \cdot \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}} = \\ &= \min \left[ \gamma_{\infty}(\mathbf{S}) - \frac{\alpha}{c} \cdot \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}, \frac{\beta \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} - \alpha \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}}{c} - \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B}} \right]. \end{aligned} \quad (9.4.26)$$

Na podstawie powyższego wzoru można teraz ściśle wyznaczyć istotne charakterystyki układu (promień elipsoidy granicznej oraz punkty krytyczne bifurkacji stabilności w przestrzeni parametrów  $\alpha, \beta, c$ ) dla przypadku stabilnej i niestabilnej macierzy  $\mathbf{A}$ . Łatwo pokazać, że obraz typów stabilności i możliwych bifurkacji jest tu identyczny jak w poprzednim przykładzie. W szczególności, dla niestabilnej macierzy  $\mathbf{A}$  dostajemy następujące warunki stabilności układu

$$\frac{\alpha}{c} < \frac{\gamma_{\infty}(\mathbf{S})}{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}}, \quad \frac{\beta}{c} > \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} + \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^3}, \quad (9.4.27)$$

z których wynika obraz bifurkacji układu w przestrzeni parametrów. Łatwo pokazać, że powyższe warunki są dostateczne, o ile amplituda sterowania jest odpowiednio duża w stosunku do amplitudy zaburzeń, a dokładniej

$$\beta > \alpha \cdot \frac{\|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}} \left( 1 + \frac{\mathbf{B} \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}}{\gamma_{\infty}(\mathbf{S}) \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2} \right). \quad (9.2.28)$$

Jeżeli warunki (9.4.27), (9.2.28) są spełnione, trajektorie układu są zbieżne wykładniczo w powłoce elipsoidalnej  $B(\mathbf{S}, c_1, c_2)$ , gdzie

$$c_1 = \frac{\alpha}{\gamma_{\infty}(\mathbf{S})} \cdot \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}, \quad c_2 = \frac{\beta \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}} - \alpha \|\mathbf{C}\|_{\mathbf{S}}}{\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{B}} \cdot \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{S}}^2. \quad (9.4.28)$$

Jak widać granice powłoki stabilności są liniowo uzależnione od amplitudy zaburzeń  $\alpha$  i amplitudy sterowania  $\beta$ .  $\square$

Przedstawione w tym rozdziale przykłady wskazują na odporność sposobów sterowania wynikających z metody optymalnych funkcji Lapunowa na różnego rodzaju zaburzenia i zakłócenia sterowanych układów. Jednocześnie przykłady te stanowią dobra ilustrację przydatności tej metody nie tylko do orzekania o stabilności układów, ale również do głębszej analizy ich własności. Analiza taka jest możliwa dzięki analitycznym formułom, które uzyskuje się, wykorzystując normę i iloczyn skalarny określony w przestrzeni stanu przez kwadratową funkcję Lapunowa.

Liczbowe przykłady ilustrujące zastosowanie formuł analitycznych omówionych w niniejszym rozdziale można znaleźć w cytowanych w tekście publikacjach autora Rozprawy (Ossowski [59],[60])

W następnym, ostatnim rozdziale niniejszej rozprawy pokażemy jakie są możliwości dyskretnej (komputerowej) realizacji sterowań wynikających z metody optymalnych funkcji Lapunowa.



## 10. CYFROWA REALIZACJA UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH

*W nowoczesnych układach mechatronicznych często stosuje się sterowania dyskretne, czyli o skończonej liczbie poziomów. Mając to na względzie, omówimy w tym rozdziale różne koncepcje sterowania dyskretnego, będącego przybliżeniem sterowania analogowego rozważanego w rozdziałach poprzednich. Rozpatrzona zostanie możliwość komputerowej realizacji sterowań dyskretnych jak również realizacji za pomocą sterowników zbudowanych na bazie sztucznych sieci neuronowych. Na koniec przedstawione będą koncepcje sterowania adaptacyjnego, wykorzystujące sieci neuronowe oraz algorytmy genetyczne, które mają zastosowanie wówczas, gdy nie jest znany model dynamiki sterowanego układu.*

### 10.1 Koncepcja dyskretnego sterowania układów mechatronicznych

W poprzednim rozdziale omówiliśmy analogowe realizacje optymalnych sprzężeń zwrotnych za pomocą realnych elementów wykonawczych. Teraz, mając na względzie nieanalogową (komputerową) realizację sterowań w układach praktycznych, rozważymy kwestię optymalizacji i realizacji sterowań o wielu wartościach dyskretnych, mieszczących się w założonych granicach.

Wiemy, że optymalizację sterowania układów mechatronicznych można przeprowadzić według różnych wskaźników jakości, które mogą być zasadniczo dwojakiego rodzaju: *wskaźniki funkcjonalne* (globalne) służące do optymalizacji własności całych trajektorii albo *wskaźniki funkcyjne* (lokalne) optymalizujące zachowanie się układu w każdej chwili [D14]. Stosując lokalne kryterium optymalności (3.5.2), możliwe jest wyznaczenie optymalnego sterowania analogowego w postaci sprzężenia zwrotnego  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  określonego dla każdego aktualnego stanu układu  $\mathbf{x}$  i o wartościach w pewnym zbiorze zwartym  $U$ . Sterowania optymalne układów mechatronicznych wyznaczone tą metodą są, jak wiemy, często sterowaniami dwuwartościowymi typu bang-bang. Jeżeli dopuścimy możliwość włączania i wyłączania sterowań, to w najprostszym przypadku będziemy mieli co najmniej trzy poziomy każdej ze składowych wektora sterowania  $\mathbf{u}$ : stan minimalny, maksymalny i zerowy (gdy brak jest sygnału). Ponieważ takie sterowania są generowane na podstawie informacji o aktualnym stanie układu, która w układach dyskretnych (komputerowych) również ma postać dyskretną, to staje się jasne, że do ich realizacji potrzebne będą sterowniki działające w logice trójwartościowej lub w ogólności — wielowartościowej (Ossowski [76]).

Zadaniem sterownika dyskretnego jest włączenie lub wyłączenie odpowiednich składowych sterowania w zależności od aktualnego stanu  $\mathbf{x}$  układu. Dlatego sterowniki dyskretne będą w ogólności układami przełączającymi. W niniejszym paragrafie skupimy się tylko na niektórych aspektach syntezy struktury takich sterowników przy użyciu metody optymalnych funkcji Lapunowa, podając raczej możliwości pewnych rozwiązań niż kompletne rozwiązania.

Rozważmy przeto układ mechatroniczny opisany inkluzją różniczkową:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in U \subset R^m\}, \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (10.1.1)$$

w pewnym otoczeniu  $X \subset R^n$  punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Założymy, że każda składowa  $u_i$ ,  $i=1, \dots, m$  wektora sterowania przyjmuje wartości z pewnego zbioru skończonego  $D(\alpha, l) = \{0, \pm\alpha, \pm 2\alpha, \dots, \pm l\alpha\}$ , gdzie  $\alpha$  jest skokiem dyskretyzacji sterowania. Ponieważ wtedy  $U = D^m(\alpha, l) = D(\alpha, l) \times \dots \times D(\alpha, l)$ , w dowolnej chwili aż  $(2l+1)^m$  różnych wektorów sterowań  $\mathbf{u}$  może być podanych na wejście układu. Dla aktualnego stanu  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  układu sterownik musi dokonać wyboru optymalnego wektora sterowania  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u_1, \dots, u_m]^T$  ze skończonego zbioru  $U = D^m(\alpha, l)$ . W takiej sytuacji, zamiast odtwarzać optymalną funkcję analogową (przedziałami ciągłą)  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  za pomocą sterowań o wartościach w  $D^m(\alpha, l)$ , lepiej od razu generować dyskretne sterowanie  $\mathbf{u} \in D^m(\alpha, l)$ , które maksymalizowałoby lokalną szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii układu. Odpowiada to zastosowaniu do syntezy sterowań następującej dyskretnej wersji kryterium optymalności (3.5.2):

$$\max_{\mathbf{u} \in U^m(\alpha, l)} [-\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})], \quad (10.1.2)$$

w którym operacja „sup” została zastąpiona przez maksimum funkcji na zbiorze skończonym. Własności układu ze sterowaniem wyznaczonym z powyższego kryterium optymalności będą oczywiście zależały od liczby poziomów oraz skoku dyskretyzacji  $\alpha$  sterowania, który przeto sam może być parametrem optymalizacyjnym, jeżeli nie jest z góry ustalony względami technicznymi. Jeżeli funkcja  $\mathbf{F}$  jest dana jawnie, wyznaczenie sterowania dyskretnego według kryterium (10.1.2) nie przedstawia formalnego problemu, gdyż sprowadza się do przeszukania skończonego zbioru wartości pewnej funkcji.

Jest jasne, że dyskretne kryterium optymalności (10.1.2) dzieli założony obszar  $X$  na co najwyżej  $(2l+1)^m$  podzbiorów

$$X(i, j) = \{\mathbf{x} \in X : u_i(\mathbf{x}) = j\alpha\}, i=1, \dots, m; j = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l, \quad (10.1.3)$$

takich że  $X(i, j_1) \cap X(i, j_2) = \emptyset$  dla  $j_1 \neq j_2$ . Jeśli trajektoria  $\mathbf{x}(t)$  układu przechodzi z pewnego zbioru  $X(i, j_1)$  do innego zbioru  $X(i, j_2)$ , to  $i$ -ta składowa sterowania optymalnego doznaje skoku z poziomu  $j_1\alpha$  do poziomu  $j_2\alpha$ . Na przecięciu brzegów sąsiednich obszarów  $X(i, j_1) \cap X(i, j_2)$  obie wartości  $j_1\alpha$  i  $j_2\alpha$  tej składowej sterowania są optymalne, bo ich wpływ na szybkość zbieżności jest jednakowy. Sterownik dyskretny musi na bieżąco rozpoznawać brzegi opisanych zbiorów  $X(i, j)$  i dokonywać odpowiednich przełączeń składowych sterowania. Możliwość praktycznej realizacji takich przełączeń nakazuje założyć pewną regularność układu sterowania, którą określa następująca

**Definicja 10.1:** Zagadnienie sterowania optymalnego (10.1.2) dla układu (10.1.1) nazywamy *regularnym zagadnieniem sterowania*, jeżeli każdy z opisanych zbiorów  $X(i, j)$ ,  $i=1, \dots, m$ ;  $j = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$  ma skończoną liczbę spójnych składowych, a każda trajektoria układu przecina w skończonym przedziale czasu co najwyżej skończoną liczbę brzegów obszarów  $X(i, j)$ . Sterowanie wyznaczone z regularnego zagadnienia sterowania nazywamy *sterowaniem regularnym*, natomiast układ z zastosowanym sterowaniem regularnym – *układem regularnym*. #

Regularność rozumiana w powyższym sensie zapewnia, że w skończonym czasie sterowanie optymalne będzie miało co najwyżej skończoną liczbę przełączeń. Jest jasne, że taki warunek musi być spełniony w każdym realnym układzie sterowania.

Wymaganie regularności zagadnienia sterowania nakłada pewne ograniczenia na funkcję  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , która określa dynamikę układu (a więc przebieg trajektorii), a jednocześnie występuje w kryterium optymalności (10.1.2). Dla typowych modeli układów mechatronicznych warunek ten jest zazwyczaj spełniony.

Z powyższych rozważań wynika, że sterowanie optymalne dla danego układu jest określone przez odpowiedni podział przestrzeni stanu  $X$ , zadany rodziną podzbiorów  $X(i, j)$ . Ponieważ rozważane sterowanie będzie przedziałami stałe, analiza zachowania się układu w poszczególnych obszarach  $X(i, j)$  nie stanowi poważnego problemu teoretycznego. W szczególności dla układu sterowania  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  dynamika układu będzie przedziałami liniowa. Przyjmując dodatkowe założenia pokażemy dalej, że takie sterowanie może być generowane za pomocą sterownika w postaci układu logiki wielowartościowej.

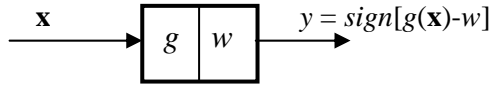
**Definicja 10.2:** Regularne zagadnienie sterowania (10.1.2) nazywamy *zagadnieniem analitycznym*, jeżeli dla każdego niepustego obszaru  $X(i, j) = \{\mathbf{x} \in X : u_i(\mathbf{x}) = j\alpha\}$  istnieją funkcje ciągłe  $g_{ijk} : X \rightarrow R$ ,  $k=1, \dots, l_{ij}$ , takie że

$$\text{int}(X(i, j)) = \{\mathbf{x} \in X : g_{ijk}(\mathbf{x}) > 0, k=1, \dots, l_{ij}\}, \quad (10.1.4)$$

gdzie „int” oznacza topologiczne wnętrze zbioru. Sterowanie optymalne  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , będące rozwiązaniem takiego zagadnienia, będziemy nazywali *sterowaniem analitycznym*. #

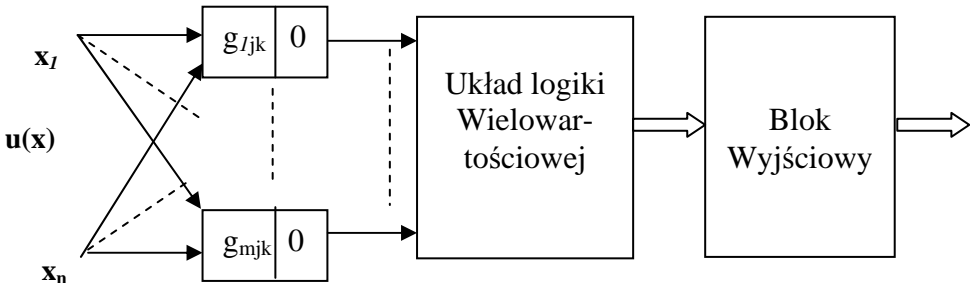
Analityczność rozumiana w powyższym sensie oznacza, że wszystkie niepuste podzbiory  $X(i, j)$  można opisać za pomocą skończonego układu nierówności funkcyjnych. Wówczas chwile, w których następują przełączenia sterowania, mogą być określone na podstawie znaków pewnych funkcji ciągłych zależnych od stanu układu. Oznacza to, że do generacji sterowania optymalnego wystarcza tylko trójkowa (trzywartościowa) informacja. Zatem na wejściu sterownika potrzebny jest odpowiedni konwerter A/D, który przetwarza informację o aktualnie mierzonym (analogowym) stanie układu  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$  na sygnały trójkowe równe  $\text{sign}[g_{ijk}(\mathbf{x})]$ . Taki wejściowy konwerter można zrealizować na przykład za pomocą

warstwy niezależnych komórek neuronalnych o postaci pokazanej na Rysunku 10.1. Każdy z neuronów warstwy (mając  $n$  wejść i jedno wyjście) jest w pełni określony przez pewną nieliniową funkcję wejściową  $g(\mathbf{x})$  i zerowy próg zadziałania  $w = 0$ .



Rys.10.1 Graficzne oznaczenie nieliniowego neuronu

Ponieważ każde z  $(2l+1)$ -wartościowych sterowań  $u_i$  jako sygnałów wyjściowych będzie w takim układzie generowane na podstawie  $l$  wejściowych sygnałów trójkowych, optymalny sterownik w układzie sprzężenia zwrotnego można zbudować w postaci warstwowego systemu złożonego z wejściowej warstwy neuronalnej, bloku logiki wielowartościowej oraz bloku wyjściowego zbudowanego z elementów wykonawczych, jak pokazano na poniższym rysunku (Ossowski [76]):



Rys.10.2 Schemat blokowy wielowartościowego sterownika logicznego

Tak więc synteza optymalnego sterownika w układzie sprzężenia zwrotnego ze sterowaniem dyskretnym sprowadza się w gruncie rzeczy do syntezy układu logiki wielowartościowej o wielu wejściach i wielu wyjściach (Ossowski [76]). W szczególnym przypadku aktywnego sterowania układów mechatronicznych, gdy sterowane siłowniki generują maksymalną siłę napędzającą lub hamującą albo też są wyłączone, do generacji sterowań wystarczy układ logiki trójwartościowej. Analogiczne koncepcje sterowników neuronowych, chociaż konstruowanych według innych zasad, opisane są w wielu pracach (na przykład Cheung [13]).

Idealna realizacja sterowania optymalnego za pomocą opisanego układu logiki wielowartościowej nie jest w rzeczywistości możliwa. Jeżeli sterowania mają być przełączane między dyskretnymi wartościami, to nieuniknione jest rozmycie takiej operacji w każdej realizacji praktycznej ze względów opisanych w poprzednim rozdziale. Zatem sprzętowa (hardware'owa) reprezentacja optymalnej struktury

podziału obszaru  $X$  na zbiory  $X(i,j)$  zawsze będzie rozmyta. Każdy ze zbiorów  $X(i,j)$  będzie w istocie *zbiorem rozmytym* [D6]. Dlatego sterowanie generowane przez sterownik może być niejednoznaczne (zależne od historii) dla stanów układu znajdujących się w strefie rozmycia na granicy między dwoma sąsiadującymi obszarami  $X(i,j)$ . Odpowiada to histerezie w wielowymiarowym układzie sterowania opisanym w Rozdziale 9. Ponieważ odporność optymalnych układów sterowania na niezerową histerezę została tam wykazana, przeto możemy wnosić o odporności rozważanych tu układów na opisane wyżej rozmycie. W rozważanym układzie sterowania mogą wystąpić również wszelkie efekty związane ze zjawiskiem ruchu poślizgowego. Jakie efekty się z tym wiążą, zostało opisane w Rozdziale 7.

**Problem 10.1:** (*Dyskretne sterowanie optymalne układu analitycznego*)

Wykażemy, że problem sterowania optymalnego (10.1.2) jest analityczny, jeżeli funkcja  $F$  ma postać (1.4.2). Istotnie, nietrudno zauważyć, że każdy obszar  $X(i, j)$  jest w takim wypadku określony układem  $(m-1)$  nierówności funkcyjnych:

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^i, \mathbf{u}^j, \mathbf{S}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^i) - \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^j) < 0 \quad i \neq j = 1, 2, \dots, (2m+1)^l,$$

gdzie  $\mathbf{x} \in X$ , a  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^l$  są wszystkimi możliwymi wektorami sterowania dyskretnego o założonej liczbie poziomów. Zatem w realizacji sterownika w postaci warstwowej (jak na Rysunku 10.2) neurony warstwy wejściowej obliczają znaki wszystkich funkcji  $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^i) - \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^j) \quad i \neq j = 1, 2, \dots, (2m+1)^l$ . Następnie, układ logiki wyznacza na tej podstawie aktualne wartości składowych sterowania.  $\square$

Proces syntezy rzeczywistych sterowników tego typu może być optymalizowany pod względem złożoności struktury i uniwersalności odpowiednich bloków logiki wielowartościowej. Jeżeli mamy do czynienia ze stabilnym układem mechanicznym i rozpatrujemy zagadnienie jego (pół)aktywnej modyfikacji, możemy zastosować sterowanie suboptymalne, które niekoniecznie dokładnie odtwarza strukturę optymalnego podziału przestrzeni  $X$  na obszary  $X(i,j)$ . Wystarczy tylko zapewnić, aby odpowiednie składowe sterowań były wyłączone wtedy, gdy ich optymalna wartość nie jest określona.

Poniższy przykład ilustruje proces znajdowania sterowania układu analitycznego.

**Przykład 10.1:** (*Sterowania dyskretnego układu z nieliniowym wejściem*)

Rozważmy problem aktywnej modyfikacji układu z nieliniowym wejściem postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u}^2 : \mathbf{u} \in \{-2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha\} \}, \quad (10.1.5)$$

gdzie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  są macierzami o wymiarach  $n \times n$ , macierz  $\mathbf{A}$  jest stabilna, a sterowanie  $\mathbf{u}$  przyjmuje wartości dyskretne  $0, \pm\alpha, \pm 2\alpha$ , czyli jest pięciowartościowe. Optymalna strategia sterowania jest wtedy określona przez kryterium optymalności:

$$\max_u [-u\mathbf{B}^T\mathbf{Sx} - u^2\mathbf{C}^T\mathbf{Sx}], \quad (10.1.6)$$

gdzie maksimum jest po założonym zbiorze dyskretnym. Wynika z tego, że optymalny sterownik (modyfikator) dla każdego stanu  $\mathbf{x}$  powinien generować sterowanie, które odpowiada maksymalnej z pięciu poniższych wartości:

$$\begin{aligned} 0, & -\alpha\mathbf{B}^T\mathbf{Sx} - \alpha^2\mathbf{C}^T\mathbf{Sx}, \alpha\mathbf{B}^T\mathbf{Sx} - \alpha^2\mathbf{C}^T\mathbf{Sx}, \\ & -2\alpha\mathbf{B}^T\mathbf{Sx} - 4\alpha^2\mathbf{C}^T\mathbf{Sx}, 2\alpha\mathbf{B}^T\mathbf{Sx} - 4\alpha^2\mathbf{C}^T\mathbf{Sx}. \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

W szczególności, sterowanie przybiera wartość zero, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = 0 & \Leftrightarrow \pm\alpha\mathbf{B}^T\mathbf{Sx} - \alpha^2\mathbf{C}^T\mathbf{Sx} < 0 \wedge \pm 2\alpha\mathbf{B}^T\mathbf{Sx} - 4\alpha^2\mathbf{C}^T\mathbf{Sx} < 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow |\mathbf{B}^T\mathbf{Sx}| - \alpha\mathbf{C}^T\mathbf{Sx} < 0 \wedge |\mathbf{B}^T\mathbf{Sx}| - 2\alpha\mathbf{C}^T\mathbf{Sx} < 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \mathbf{C}^T\mathbf{Sx} > |\mathbf{B}^T\mathbf{Sx}|. \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

Analogicznie można wyznaczyć warunki, przy których sterowanie optymalne osiąga pozostałe wartości z założonego zbioru dyskretnego.

Problem generacji sterowania optymalnego w powyższym przykładzie jest prosty o tyle, że sprowadza się do wyliczania i porównywania liniowych funkcji stanu  $\mathbf{x}$ . Optymalny sterownik dyskretny może być więc kompletnie zrealizowany za pomocą sieci neuronowej zbudowanej wyłącznie z komórek o liniowych funkcjach wejściowych, określonych przez wagi każdego z wejść.  $\square$

Ważną sprawą jest możliwość oceny wpływu dyskretyzacji sterowania na zachowanie się układu. Ilustruje tę kwestię poniższy przykład.

**Przykład 10.2:** (Dyskretna realizacja stabilizującego sterowania liniowego)

Rozważmy układ stabilizacji  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ , w którym  $\mathbf{A}$  jest macierzą niestabilną, para  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  jest stabilizowalna, a sterowanie stabilizujące  $u$ , wyznaczone metodą optymalnych funkcji Lapunowa, ma w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  postać liniowego sprzężenia zwrotnego  $u = -k \cdot \mathbf{B}^T\mathbf{Sx}$ . Jeżeli zastosujemy do cyfrowej realizacji takiego sterowania element wykonawczy o skończonej liczbie  $m$  dyskretnych poziomów pokrywających obszar liniowości, to wówczas zachowanie się układu w pobliżu punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  może znacznie odbiegać od zachowania układu liniowego.

Aby to pokazać przyjmijmy, że element wykonawczy jest opisany dwoma dodatkimi parametrami  $d, h$ , takimi że sterowanie dyskretnie

$$u = (k+1)h \text{ gdy } kd < \mathbf{B}^T\mathbf{Sx} \leq (k+1)d, \quad k = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m. \quad (10.1.9)$$

Odpowiada to funkcji schodkowej o wysokości schodka  $h$  i średnim nachyleniu  $h/d$ . Jeżeli to nachylenie jest większe od wzmocnienia krytycznego określonego w

poprzednim rozdziale, czyli  $p = h/d > k_0(\mathbf{S})$ , to układ jest asymptotycznie stabilny w założonym obszarze liniowości. Jeżeli jednak  $p < k_0(\mathbf{S})$ , to wówczas przecięcie się linii prostej o nachyleniu  $k_0$  z wykresem opisanej wyżej funkcji schodkowej generuje złożony typ stabilności układu. Zwiększając stopniowo parametr  $p$  będą następowaly w układzie kolejne bifurkacje stabilności według schematu:

$$\boxed{\dots \rightarrow (1,0,1,\dots,0,1,0) \longrightarrow (1,0,1,\dots,0,1,0,0) \longrightarrow (1,0,1,\dots,1,0,1,0) \dots} \quad (10.1.10)$$

gdzie liczba jedynek  $l$  w regularnych typach stabilności odpowiada  $2l-1$  przecięciom wspomnianej prostej z wykresem funkcji schodkowej. Praktycznie oznacza to, że trajektorie rozważanego układu z dyskretnym sterowaniem będą wykładniczo zbieżne w skończonej liczbie powłok elipsoidalnych  $B(\mathbf{S}, c_i, c_{i+1})$ , oddzielonych powłokami, w których zbieżność wykładnicza nie zachodzi.  $\square$

## 10.2 Sterowniki neuronowe układów mechatronicznych

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że proces syntezy optymalnych sterowań dla układów dynamicznych przy użyciu metody funkcji Lapunowa prowadzi na ogół do sterowań przełączanych, które często można zrealizować za pomocą sieci neuronowych. Warto omówić tę kwestię nieco dokładniej. Jeżeli nałożone są tylko ograniczenia na poszczególne składowe wektora sterowań, a brak jest ograniczeń totalnych, wówczas składowe sterowania  $u_i$  są od siebie niezależne i mają postać bang-bang. Tylko wtedy można je zrealizować za pomocą jednowarstwowej sieci neuronowej złożonej z niezależnych komórek postaci jak na Rysunku 10.1. Będzie to więc sieć w swej istocie binarna. Jeśli jednak istnieją ograniczenia na totalną moc składowych wektora sterowań (na przykład przyjęte zgodnie z *zasadą Turkstry*), to może być konieczne wyłączenie niektórych składowych sterowania w czasie pracy układu po to, aby inne składowe można było włączyć z maksymalną amplitudą. Wówczas algorytm sterowania trzeba już zrealizować za pomocą wielowarstwowej sieci neuronowej pracującej w logice trójkowej. Aby to zilustrować rozważmy następujący

### **Przykład 10.3:** (Aktywny neuronowy modyfikator układu liniowego)

Rozważmy problem realizacji aktywnej modyfikacji wielowejściowego układu opisanego następującą inkluzją:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1 u_1 + \dots + \mathbf{B}_k u_k : |u_1| \leq \beta \wedge \dots \wedge |u_k| \leq \beta \wedge |u_1| + \dots + |u_k| \leq l \cdot \beta\},$$

w której nałożono dodatkowe ograniczenie  $|u_1| + \dots + |u_k| \leq l\beta$  na totalny wydatek wszystkich sterowań. Oznacza to, iż sterowania (siły) mają być włączone lub wyłączone, przy czym nie może być jednocześnie włączonych więcej niż  $l < k$  sterowań. Jak wiemy z Rozdziału 7, optymalne sterowania przy takich graniczeniach przyjmują wartości skrajne  $\pm\beta$  albo zero, a funkcje przełączeń są liniowe względem

wektora stanu  $\mathbf{x}$ . Zatem mamy tu w istocie sterowanie dyskretne (trójwartościowe), które może wygenerować sterownik pracujący w logice trójkowej. Zadaniem sterownika jest dokonanie optymalnego wyboru  $l$  aktywnych sterowań (spośród  $k$  sterowań), które powinny być włączone dla danego  $\mathbf{x}$ . Algorytm takiego wyboru może przebiegać następująco: najpierw obliczane są odpowiednie liniowe funkcje stanu (funkcje przełączeń)  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{Sx}$ ,  $i=1, \dots, k$ , potem dokonuje się uporządkowania ich co do modułu jak następuje:

$$\left| \mathbf{B}_{i_1}^T \mathbf{Sx} \right| \geq \left| \mathbf{B}_{i_2}^T \mathbf{Sx} \right| \geq \dots \geq \left| \mathbf{B}_{i_k}^T \mathbf{Sx} \right|, \quad (10.2.1)$$

a na koniec dokonywany jest wybór  $l$  sterowań o indeksach  $i_1, \dots, i_l$  i określany ich znak zgodnie z zasadą  $u_i = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_i^T \mathbf{Sx}]$ . Pozostałe sterowania są w tym czasie wyłączone.

Ponieważ do podjęcia decyzji odnośnie aktywnych sterowań w zasadzie nie są istotne wartości funkcji przełączeń, lecz ich znaki i wzajemne relacje, można zbudować sieć z neuronów (o liniowych funkcjach wejściowych jak na Rysunku 10.1), która będzie realizowała opisany algorytm sterowania. Struktura i własności takiej sieci neuronowej, opisane w pracach autora Rozprawy (Ossowski [56], [73], [77]), są na tyle złożone, że niecelowe byłoby je tu dokładnie omawiać. W każdym razie jest to sieć siedmiowarstwowa złożona z *bloku wejściowego*, *bloku komparatorów*, *bloku selektora* i *bloku konwertera*. Blok wejściowy złożony z jednej warstwy komórek określa znaki poszczególnych funkcji przełączeń oraz znaki wszystkich różnic między nimi. Blok komparatora realizuje w pewnym sensie operacje porządkowania modułów (10.2.1). Blok selektora wybiera aktywne sterowania, a blok konwertera generuje na aktywowanych wyjściach optymalne sygnały sterujące postaci  $u_i = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{B}_i^T \mathbf{Sx}]$ . Istotną cechą opisaney sieci jest fakt, że tylko wagi neuronów warstwy wejściowej zależą od parametrów macierzy funkcji Lapunowa i mogą być optymalizowane. Wagi pozostałych neuronów są zdeterminowane logiczną funkcją rozważanej sieci.

Opisany modyfikator (stabilizator) neuronowy można zastosować do stabilizacji wielowymiarowych układów liniowych, a w szczególności do systemów wielkich. Ważną cechą opisaney sieci jest uniwersalność jej struktury, co praktycznie oznacza, że sieć o  $n$  wejściach może być bezpośrednio zastosowana do modyfikacji układów o mniejszej liczbie  $m \leq n$  sterowań i wymiarze stanu o dowolnej liczbie  $l < k$  aktywowanych sterowań. Zatem taka sieć może być zaprojektowana i wykonana jako zintegrowany blok o nastawialnych parametrach (wagach neuronów wejściowych i progów neuronów w warstwie selektora).  $\square$

Podobną syntezę można przeprowadzić w przypadku dyskretnej modyfikacji półaktywnej układu liniowego, co pokazuje następujący



**Przykład 10.4:** (*Półaktywna dyskretna modyfikacja układu liniowego*)

Rozważmy problem realizacji sterownika półaktywnej modyfikacji liniowego układu drgającego, opisanego następującą inkluzją:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{A}_0\mathbf{x} + u_1\mathbf{A}_1\mathbf{x} + \dots + u_k\mathbf{A}_k\mathbf{x} : |u_1| \leq \beta \wedge \dots \wedge |u_k| \leq \beta\}, \quad (10.2.2)$$

gdzie  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  są macierzami o wymiarze  $n \times n$ , przy czym  $\mathbf{A}_0$  jest macierzą stabilną, opisującą własności układu mechanicznego bez sterowania. Jak wiemy z Rozdziału 6, sterowania optymalne są w tym przypadku przełączane na kwadratowych funkcjach przełączeń, które dekomponują się na iloczyn funkcji liniowych. Mianowicie:

$$u_i(x) = -\beta \cdot \text{sign}[\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A}_i \mathbf{x}] = -\beta \cdot \text{sign}[(\mathbf{C}_i^T \mathbf{S} \mathbf{x})(\mathbf{D} \mathbf{x})], i = 1, \dots, k. \quad (10.2.3)$$

Dzięki takiej dekompozycji funkcji przełączeń i niezależności powyższych sterowań, również możliwa jest realizacja algorytmu sterowania, tym razem za pomocą dwuwarstwowej sieci neuronowej złożonej z komórek o liniowych funkcjach wejściowych. Znak funkcji będącej iloczynem funkcji liniowych jest bowiem określony przez znaki jej czynników. Struktura sieci neuronowej takiego modyfikatora jest opisana w pracach autora Rozprawy (Ossowski [62], [64]).  $\square$

### 10.3 Komputerowe sterowniki układów mechatronicznych

Realizację sterowania optymalnego za pomocą sterownika logicznego (neuralnego) przedstawionego na Rysunku 10.2 można by określić mianem realizacji sprzętowej (hardware'owej), jako że algorytm sterowania jest realizowany przez specjalizowany układ logiczny istniejący fizycznie. Alternatywą dla sterowników hardware'owych mogą być sterowniki komputerowe.

Istotą sterowników komputerowych jest software'owa realizacja algorytmu sterowania. Każdy sterownik komputerowy również zawiera blok wejściowy (pomiarowy) i blok wyjściowy (wykonawczy), jak na schemacie z Rysunku 10.2, ale specjalizowany układ logiczny jest zastąpiony komputerem z zaimplementowanym algorytmem.

Sterowniki komputerowe ustępują sterownikom hardware'owym szybkością działania, dokładnością i niezawodnością, ale za to są od nich bardziej uniwersalne ze względu na łatwość zmiany i optymalizacji algorytmu sterowania. Istotną i nie zawsze korzystną cechą sterowników komputerowych jest dyskretyzacja czasu. Praktycznie oznacza to, że wyznaczenie optymalnych sterowań następuje tylko w dyskretnych chwilach, a w okresach między kolejnymi aktualizacjami wektor sterowania jest stały i zgodny z ostatnim wyliczeniem. Zadaniem algorytmu sterowania jest więc obliczenie w aktualnym punkcie  $\mathbf{x}(t)$  lokalnej szybkości zbieżności wykładniczej dla wszystkich  $(2l+1)^m$  wektorów sterowań i wybór wektora optymalnego w danej chwili próbkowania.

Można oczekiwać, że efektywność sterownika komputerowego będzie zadowalająca wtedy, gdy okres próbkowania będzie „mały” w porównaniu z charakterystycznymi stałymi czasowymi sterowanego układu. Ścisłe wykazanie odporności układu sterowania na niedoskonałości realizacji komputerowej zapewne nie byłoby łatwe. Można jednak podać dobre uzasadnienie dla takiej odporności układu. Istotnie, dyskretyzacja sterowania w czasie powoduje dezaktualizację informacyjną sterowania, co można zinterpretować jako swego rodzaju opóźnienie w pętli sprzężenia zwrotnego. Podobnie, niedokładność dyskretnego określenia aktualnego stanu układu i wyliczenia aktualnego sterowania można interpretować jako występowanie swego rodzaju zakłóceń pomiarowych w układzie. Wystarczy więc zauważyć, że odporność rozważanych układów na wymienione wyżej rodzaje zaburzeń i zakłóceń została wykazana w poprzednim rozdziale.

W pewnych sytuacjach praktycznych, zwłaszcza wtedy, gdy algorytm sterowania jest bardziej złożony, zastosowanie sterowników komputerowych może być uzasadnione lub wręcz konieczne. Poniżej omówimy dwie koncepcje sterowania komputerowego w tego typu przypadkach.

**Problem 10.2:** (*Neuronowe modyfikatory nieliniowych układów dynamicznych*)

Rozważmy pewien realny układ reprezentowany przez model (10.1.1), wykładniczo stabilny według normy  $\|\cdot\|_S$  (w pewnym obszarze  $X$ ), którego funkcja  $F$  nie jest dokładnie określona. Rozważmy dalej problem półaktywnej modyfikacji własności stabilności takiego układu zakładając, że mamy do dyspozycji wejście sterujące  $\mathbf{u}$ , a jego stan  $\mathbf{x}$  jest dostępny pomiarom w czasie rzeczywistym z pewnym okresem próbkowania  $T$ . Tego rodzaju zagadnienie sterowania raczej nie da się rozwiązać hardware’owo, a to ze względu na bardziej złożony algorytm wyliczania aktualnego sterowania, polegający na zapamiętywaniu i przetwarzaniu dużej ilości informacji. Dlatego adekwatnym rozwiązaniem będzie tu komputerowy układ sterowania (modyfikacji).

Jednym ze sposobów komputerowej realizacji układu sprzężenia zwrotnego dla rozważanego przypadku może być wcześniejsze, empiryczne wyznaczenie wektorów optymalnego sterowania dla pewnej liczby punktów  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N \in X$  i zapisanie w bazie danych systemu rekordów postaci:  $(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . W czasie ruchu układ wyznaczałby suboptymalne sterowanie  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$ , stosując próbkowanie aktualnego stanu  $\mathbf{x}(t)$  układu i na przykład metodę  $k$ -sąsiadów. Rzeczywiście, jeśli lokalny wskaźnik  $\alpha(S, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  jakości układu (na przykład lokalna szybkość zbieżności wykładniczej według normy  $\|\cdot\|_S$ ) jest funkcja ciągłą względem  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ , to jego wartości dla sterowań suboptymalnych będą bliskie wartościom optymalnym, o ile zbiór punktów bazowych  $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N\}$  dostatecznie gęsto i równomiernie wypełnia przestrzeń  $X$ . Jeżeli do tego czas próbkowania  $T$  będzie dostatecznie krótki w porównaniu z charakterystycznymi stałymi czasowymi układu, można oczekiwać, że opisane wyżej sterowanie suboptymalne będzie efektywne (Ossowski [79]).

Rozkład przestrzenny i liczba punktów bazowych  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$  jak również okres próbkowania  $T$  stanu układu są istotnymi parametrami rozważanego układu sterowania i powinny być określone (dobre) empirycznie. Sygnałem do zwiększenia liczby punktów bazowych powinna być rejestracja znaczącej liczby przypadków, w których sterowanie suboptymalne wyznaczone na podstawie sąsiednich punktów daje w efekcie mniejszą od spodziewanej szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii.

Doświadczalne wyznaczenie sterowań optymalnych w punktach bazowych  $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$  może polegać na wielokrotnym inicjowaniu ruchu układu od każdego punktu początkowego  $\mathbf{x}^i$  z różnymi wartościami sterowań (aż do wyczerpania dyskretnego zbioru wartości dopuszczalnych) i rejestracji empirycznej lokalnej szybkości zbieżności wykładniczej  $\delta(\mathbf{S}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  trajektorii. Wielkość tą w danym punkcie  $\mathbf{x}$  i dla danego sterowania  $\mathbf{u}$  można wyznaczyć z doświadczenia według następującej przybliżonej formuły:

$$\delta(\mathbf{S}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \frac{1}{T} \ln \left[ \frac{\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}}}{\|\mathbf{x}(t+T)\|_{\mathbf{S}}} \right], \quad (10.3.1)$$

gdzie  $T$  jest okresem próbkowania stanu układu, a stan w chwilach próbkowania jest wyznaczony z pomiarów na układzie rzeczywistym (Ossowski [79]).

Do generacji sterowań optymalnych w czasie rzeczywistym można też zastosować algorytm w postaci odpowiedniej sieci neuronowej (o jednej lub dwóch warstwach ukrytych i jednym wyjściu wektorowym), która będzie w stanie dokonać predykcji wartości optymalnego sterowania  $\mathbf{u} \in U$  dla aktualnego stanu  $\mathbf{x}(t)$  układu. Optymalne wagi neuronów sigmoidalnych oraz struktura sieci realizującej takie zadanie może być określona z pomocą standardowej metody *uczenia z nauczycielem* wykorzystującej algorytm *propagacji wstecznej* oraz przykłady trenujące w postaci rekordów  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \delta(\mathbf{S}, \mathbf{x}, \mathbf{u}))$ , gdzie  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  i  $\delta(\mathbf{S}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  są odpowiednio: danymi wejściowymi i wyjściowymi. Potrzebne przykłady trenujące można łatwo wygenerować doświadczalnie korzystając z formuły (10.3.1). Aby tego dokonać przypadkowe, stałe wartości sterowań  $\mathbf{u}^j \in U$  powinny być podawane na wejście układu startującego z pewnych stanów początkowych  $\mathbf{x}^j \in X_0$  w kolejnych okresach próbkowania. Ważne jest, aby dane wejściowe  $(\mathbf{x}^j, \mathbf{u}^j)$ ,  $j \in J$  były reprezentatywne, tzn. aby rozkład punktów  $\mathbf{x}_j \in X_0$  i sterowań  $\mathbf{u}_j \in U$  był możliwie jednorodny. Walidację wag tak wytrenowanej sieci neuronowej można przeprowadzić na dodatkowych przykładach uczących. Omówiona sieć, jako algorytm w pamięci komputera, odtwarza (aproksymuje) w swej istocie strukturę podziału przestrzeni  $X$  na zbiory  $X(i, j)$  określone w Paragrafie 10.1. Opisana wyżej koncepcja sieci neuronowej, jako algorytmu wyznaczania sterowania, omówiona jest dokładniej w pracy autora Rozprawy (Ossowski [79]).  $\square$

Istnieją układy mechatroniczne, dla których wyznaczenie sterowań optymalnych może nastęrczać pewne trudności. Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład wtedy, gdy model układu nie jest dokładnie określony w postaci analitycznej i, co gorsze, jego parametry ulegają stopniowej zmianie. W takich przypadkach w ogóle bezpośrednie zastosowanie sterowań wyznaczonych metodą funkcji Lapunowa nie jest możliwe i w zasadzie jedyną alternatywą jest zastosowanie *sterowania adaptacyjnego*.

Opracowano wiele metod sterowania adaptacyjnego układów dynamicznych. Jednak każdy system sterowania adaptacyjnego z zasady optymalizuje sterowanie w pewnym procesie uczenia opartym na jakiejś informacji o „historii” układu oraz jego zewnętrznych zaburzeniach i zakłóceniach. Jeśli sterowanie pewnym układem z zasady przyjmuje wartości dyskretne, to wówczas może być dogodnie zrealizować proces uczenia na przykład za pomocą *algorytmu genetycznego* (Ossowski [72]).

Sterowanie adaptacyjne może mieć zastosowanie między innymi w tzw. układach *sterowania poślizgowego*. Zadaniem takiego sterowania jest zapewnienie ruchu po pewnej rozmaitości w przestrzeni stanu lub przynajmniej utrzymanie stanu obiektu w pobliżu tej rozmaitości. Stosując metodę optymalnych funkcji Lapunowa, można sformułować zasady sterowania poślizgowego zachowującego stabilność układu. Na tej podstawie można skonstruować algorytm genetyczny zapewniający adaptacyjną optymalizację stabilnych układów poślizgowych (Ossowski [65]).

Opisane wyżej koncepcje wskazują na możliwości zastosowania metody optymalnych funkcji Lapunowa do syntezy realnych układów mechatronicznych wykorzystujących nowoczesne rozwiązania software’owe i hardware’owe. Przedstawione w tym rozdziale rozważania nie wyczerpują jednak tego tematu, który wykracza poza zamierzony bardziej teoretyczny zakres niniejszej rozprawy. Schematy odpowiednich układów sterowania i sieci neuronowych oraz opisy pewnych genetycznych algorytmów adaptacyjnych można znaleźć w cytowanych w tym rozdziale pracach autora Rozprawy (Ossowski [61], [62], [64], [65], [70], [71], [72], [73], [76], [77], [79]).

## DODATKI

*Dodatki stanowią uzupełnienie zasadniczej części Rozprawy (Rozdziały 1–10), czyniąc ją bardziej samowystarczalną. Chociaż zawarte w nich treści są ważne i nie pozbawione elementu twórczego, ich lektura nie jest konieczna.*

*W dodatkach zawarte są niektóre fragmenty dłuższych wywodów, uzupełnienia pewnych myśli i ogólnych kwestii omawianych w Rozprawie oraz filozoficzne czy metodologiczne rozważania na temat teoretycznych perspektyw i praktycznych aspektów zastosowania metody optymalnych funkcji Lapunowa w mechatronice. Omówione są też pewne kontrowersyjne koncepcje matematyczne czy filozoficzne.*

### Dodatek 1: (Wprowadzenie do inkluzji różniczkowych)

Pierwsze doniesienia na temat *inkluzji różniczkowych* lub kwestii ściśle związanych z tym pojęciem pochodzą sprzed kilkudziesięciu laty (Zaremba [119], Ważewski [115]). Do chwili obecnej liczba prac teoretycznych i aplikacyjnych w tym zakresie jest znaczna, chociaż uzyskane wyniki są wciąż mało popularne (Aubin [3]). W publikacjach dużą uwagę przywiązuje się do kwestii istnienia i definicji rozwiązań oraz metod numerycznych i znajdowania tzw. zbiorów osiągalności inkluzji (Raczyński [87], Kurzweil [33]). Ostatnio daje się też zaobserwować wzrost liczby prac na temat zastosowania inkluzji różniczkowych w teorii sterowania. Trudno byłoby jednak wskazać prace dotyczące bezpośrednio jakościowych własności inkluzji różniczkowych, na które można by się powołać przy omawianiu zastosowania metody funkcji Lapunowa w teorii układów mechatronicznych (Aubin [3]). Dlatego w niniejszym dodatku, napisanym specjalnie na użytek niniejszej rozprawy, podane jest dość specyficzne ujęcie teorii inkluzji, a raczej zestawienie jej podstawowych definicji, pojęć i stwierdzeń. Większość podanego tu materiału nie znajduje bezpośredniego odniesienia do literatury (Ossowski [82]).

W niniejszej rozprawie przez *inkluzję różniczkową* ( $I$ ) będziemy rozumieli wyrażenie relacyjne następującej postaci:

$$L_{\mathbf{x},t} w \in \{F(G_{\mathbf{x},t} w, \mathbf{x}, \mathbf{v}): \mathbf{v} \in I(W)\}, \quad (1)$$

gdzie  $L_{\mathbf{x},t}$ ,  $G_{\mathbf{x},t}$  są operatorami różniczkowymi względem zmiennych czasoprzestrzennych  $(\mathbf{x}, t) \in R^n \times R$ , działającymi na niewiadomą, różniczkowalną funkcję rzeczywistą  $w = w(\mathbf{x}, t)$ ,  $I(W) = \{\mathbf{v}: R \rightarrow W \subset R^m\}$  jest pewną przestrzenią wektorowych funkcji czasu  $\mathbf{v}(t)$  o wartościach w zbiorze zwartym  $W \in R^m$ , natomiast  $F: R \times R^n \times R^m \rightarrow R$  jest pewną funkcją rzeczywistą. Relacja “ $\in$ ” zamiast równości “=” w (1) znaczy, że funkcja  $(L_{\mathbf{x},t} w)(\mathbf{x}, t)$  nie jest jednoznacznie określona (jak w przypadku równań różniczkowych), lecz należy do pewnej rodziny funkcji formalnie indeksowanych funkcjami czasu  $\mathbf{v} \in I(W)$ , które mogą być interpretowane jako realizacje pewnego deterministycznego lub stochastycznego procesu w

przestrzeni  $R^m$ . Innymi słowy, inkluzja (1) jest równoważna następującej rodzinie równań różniczkowych:

$$\{L_{\mathbf{x},t} w = F(G_{\mathbf{x},t} w, \mathbf{x}, \mathbf{v}(t)): \mathbf{v} \in \Gamma(W)\}. \quad (2)$$

(Trzeba zwrócić uwagę na to, że zbiór (2) nie jest układem równań różniczkowych. Każde z równań należące do rodziny (2) stanowi oddzielny byt i może być niezależnie rozwiązywane lub analizowane.) W zależności od tego, czy operator różniczkowy  $L_{\mathbf{x},t}$  zależy od obu zmiennych, czy tylko od czasu  $t$ , będziemy mieli do czynienia z *inkluzją różniczkową cząstkową* lub *zwyčajną*.

Zbiór  $W$  nazywamy zbiorem wartości inkluzji (1), natomiast przestrzeń funkcji  $\Gamma(W)$  – zbiorem realizacji.

Dwie inkluzje różniczkowe są *podobne*, jeśli różnią się tylko zbiorem realizacji. Wykonując działania mnogościowe na zbiorach realizacji inkluzji podobnych możemy mówić o ich sumie, różnicy oraz części wspólnej. Można też określić relację zawierania się inkluzji podobnych.

Inkluzję (1) nazywamy *podinkluzją* inkluzji  $L_{\mathbf{x},t} w \in \{F(G_{\mathbf{x},t} w, \mathbf{x}, \mathbf{v}): \mathbf{v} \in \Gamma_1(W_1)\}$ , jeżeli między zbiorami ich realizacji zachodzi relacja  $\Gamma(W) \subset \Gamma_1(W_1)$ , która oznacza zawieranie się odpowiadających im zbiorów równań różniczkowych:

$$\{L_{\mathbf{x},t} w = F(G_{\mathbf{x},t} w, \mathbf{x}, \mathbf{v}(t)): \mathbf{v} \in \Gamma(W)\} \subset \{L_{\mathbf{x},t} w = F(G_{\mathbf{x},t} w, \mathbf{x}, \mathbf{v}(t)): \mathbf{v} \in \Gamma_1(W_1)\}.$$

Podinkluzja danej inkluzji jest jej pewnym uproszczeniem (modelem). W szczególności, jeżeli  $W$  jest skończonym podzbiorem zbioru  $W_1$  a  $\Gamma(W)$  - zbiorem ograniczonych funkcji schodkowych (przedziałami stałych), możemy za pomocą takiej podinkluzji tworzyć dyskretne modele (aproksymacje) układów o procesach ciągłych.

Inkluzję (1) nazywamy skończoną lub (nie)przeliczalną, jeżeli przestrzeń funkcji  $\Gamma(W)$  jest zbiorem skończonym lub (nie)przeliczalnym. Skończoność (przeliczalność) zbioru wartości inkluzji nie gwarantuje skończoności (przeliczalności) zbioru realizacji.

Dowolna funkcja  $w^*$  spełniająca relację (1) nazywa się *rozwiązaniem szczególnym* inkluzji. Funkcja  $w^*$  musi oczywiście spełniać przynajmniej jedno w równań należących do (2). Zatem, musi istnieć pewna funkcja czasu  $\mathbf{v}^* \in \Gamma(W)$  (zwana *generatorem* rozwiązania szczególnego  $w^*(\mathbf{x}, t)$ ), taka że  $L_{\mathbf{x},t} w^*(\mathbf{x}, t) = F(G_{\mathbf{x},t} w^*(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, \mathbf{v}^*(t))$ . Ten fakt można zapisać jako  $w^*(\mathbf{x}, t) = w(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}^*)$ .

*Rozwiązaniem ogólnym* inkluzji (1) będziemy nazywali funkcję  $w(\mathbf{x}, t, \mathbf{v})$ , taką że  $L_{\mathbf{x},t} w(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}) = F(G_{\mathbf{x},t} w(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}), \mathbf{x}, \mathbf{v}(t))$  dla każdego  $\mathbf{v} \in \Gamma(W)$ . Zatem rozwiązanie ogólne  $w(\mathbf{x}, t, \mathbf{v})$  generuje rodzinę  $\{w(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}^*): \mathbf{v}^* \in \Gamma(W)\}$  wszystkich rozwiązań szczególnych inkluzji (1).

Analityczne wyznaczenie ogólnego rozwiązania dowolnej inkluzji jest na ogół niewykonalne. Co więcej, znalezienie (analitycznie lub numerycznie) dowolnego rozwiązania szczególnego  $w(\mathbf{x}, t)$  w zasadzie wymaga zawczasu znajomości

generatora  $\mathbf{v}(t)$  dla wszystkich czasów. Dlatego, w ogólnym przypadku, inkluzja (1) nie może być rozwiązywana żadnym procesem iteracyjnym, tak jak jest to możliwe dla równań różniczkowych. Istnieją jednak dwa przypadki, w których badanie inkluzji nie jest tak kłopotliwe. Po pierwsze, jeśli inkluzja (1) jest skończona (czyli rodzina realizacji  $\Gamma(W)$  jest skończona), to również zbiór równań (2) jest skończony. Wtedy możemy rozwiązanie ogólne inkluzji utworzyć z rozwiązań ogólnych poszczególnych równań różniczkowych rodziny (2), a te można już rozwiązywać analitycznie lub numerycznie.

Drugi skrajny przypadek dogodny w zastosowaniach polega na rozszerzeniu rodziny realizacji  $\Gamma(W)$  do przestrzeni wszystkich funkcji o wartościach w  $W$ . Również wtedy ewolucja układu opisanego takim modelem może być numerycznie wyznaczana, sukcesywnie w kolejnych dyskretnych chwilach bez ustalanej z góry realizacji  $\mathbf{v}(t)$ . Przy takich założeniach odnośnie przestrzeni  $\Gamma(W)$  inkluzję (1), zwaną wówczas *inkluzją zupełną*, możemy zapisać w nieco prostszy sposób:

$$L_{\mathbf{x},t} w \in \{F(G_{\mathbf{x},t} w, \mathbf{x}, \mathbf{v}): \mathbf{v} \in W\}. \quad (3)$$

*Cięciem inkluzji zupełnej* (3) nazywamy dowolną funkcję  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , taką że  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in W$  dla każdego  $(\mathbf{x}, t)$ . Każdemu cięciu inkluzji zupełnej (3) odpowiada jednoznaczne równanie:

$$L_{\mathbf{x},t} w = F(G_{\mathbf{x},t} w, \mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)). \quad (4)$$

Inkluzje zupełne są też szczególnie dogodne do analizy jakościowej. Z tego względu rozważane w niniejszej pracy inkluzje będą zwykle skończone albo zupełne. Warto nadmienić, że rozpatrywane w literaturze inkluzje różniczkowe są z definicji zwyczajne i zupełne (Aubin [3]). Prezentowane tu ujęcie inkluzji różniczkowych jest więc ogólniejsze.

Rozpatrywane w niniejszej rozprawie modele układów mechatronicznych mają zwykle postać następującej inkluzji różniczkowej zwyczajnej:

$$\dot{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}): \mathbf{p} \in \Gamma(P) \wedge \mathbf{z} \in \Gamma(Z) \wedge \mathbf{u} \in \Gamma(U)\}, \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{x} \in R^n$  a  $\mathbf{F}$  jest funkcją wektorową (zwaną funkcją inkluzji), taką że  $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{p}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ;  $P, Z, U$ , są zbiorami zwartymi w odpowiednich przestrzeniach;  $\Gamma(P)$  jest zbiorem wszystkich funkcji stałych o wartościach w  $P$ ,  $\Gamma(Z)$  jest pewnym zbiorem funkcji czasu, odwzorowujących przedział  $[t_0, +\infty)$  w zbiór  $Z$ , natomiast  $\Gamma(U)$  jest zbiorem dopuszczalnych funkcji sterowań. Z tego względu dalsze rozważania ograniczymy do inkluzji różniczkowych zwyczajnych takiej właśnie postaci, stosownie do tego, co jest niezbędne do wyłożenia omawianych tu kwestii.

*Rozwiązaniem szczególnym* inkluzji (5), startującym z warunków początkowych  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , nazywamy funkcję czasu  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ , będącą rozwiązaniem równania różniczkowego  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$  dla określonych  $\mathbf{p} \in \Gamma(P), \mathbf{z} \in \Gamma(Z), \mathbf{u} \in \Gamma(U)$ . Aby

uniknąć problemów egzystencjalnych, założymy tu, że funkcja  $\mathbf{F}$  jak i klasy funkcji  $\Gamma(P)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$  są takie, że dla każdego  $\mathbf{p} \in \Gamma(P)$ ,  $\mathbf{z} \in \Gamma(Z)$ ,  $\mathbf{u} \in \Gamma(U)$  i każdego  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  istnieje rozwiązanie szczególne inkluzji przedłużalne do nieskończoności.

W przypadku inkluzji zupełnych postaci (5) na ogół nie dla wszystkich funkcji  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  o wartościach odpowiednio w zbiorach  $P$ ,  $Z$ ,  $U$  będzie istniało rozwiązanie. Nie ma to jednak znaczenia w analizie teoretycznej. Jakościowe własności inkluzji zupełnej odnoszą się bowiem do istniejących rozwiązań.

Jest jasne, że nawet dla ustalonego sterowania  $\mathbf{u}$  i ustalonych parametrów  $\mathbf{p}$  liczność zbioru trajektorii inkluzji (4), rozpoczynających się w dowolnym punkcie  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , będzie równa mocy zbiorów funkcji  $\Gamma(Z)$ . Zatem z każdego warunku początkowego  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  może wychodzić nieskończenie wiele (zwykle nieprzeliczalnie wiele) trajektorii. Z tego względu symulacje komputerowe rozwiązań inkluzji są mało skutecznym narzędziem badawczym. Zwykle celem symulacji numerycznych jak również analizy teoretycznej jest oszacowanie tzw. *obszaru osiągalności* oraz *obszaru granicznego* inkluzji różniczkowej. Pojęcia te mają sens, jeśli zawczasu ustali się zbiór  $X_0$  obejmujący punkty początkowe rozpatrywanych trajektorii.

*Obszarem osiągalności* inkluzji (5) jest zbiór  $X_-$  wszystkich punktów należących do trajektorii inkluzji startujących z punktów  $\mathbf{x}_0 \in X_0$ . Podobnie *obszarem granicznym (asymptotycznym)* inkluzji (5) nazywamy zbiór  $X_\infty \subset X_-$ , do którego wchodzi wszystkie trajektorie startujące z obszaru  $X_0$ , gdy  $t \rightarrow +\infty$ .

W niniejszej rozprawie będziemy zajmowali się przede wszystkim własnościami jakościowymi inkluzji różniczkowych jako modeli układów mechatronicznych. Analizując własności jakościowe danej inkluzji zwyczajnej (5) możemy, podobnie jak układ równań różniczkowych, utożsamić ją ze zbiorem wszystkich trajektorii. Mówiąc o własnościach jakościowych inkluzji, będziemy więc mieli na myśli własności jakościowe jej trajektorii.

Aby dana własność jakościowa mogła zaistnieć realnie, czyli aby mogła być zaobserwowana (w badaniach symulacyjnych inkluzji albo w zachowaniu się realnego układu modelowanego przez daną inkluzję), musi być własnością przynajmniej lokalną tj. odnoszącą się do wszystkich trajektorii inkluzji startujących z pewnego obszaru  $X_0$  w przestrzeni stanu. Ścisłe biorąc, aby zaobserwować daną własność jakościową, wystarczyłoby założyć, że własność tą posiadają prawie wszystkie trajektorie startujące z danego obszaru. Praktycznie oznacza to, że prawdopodobieństwo realizacji trajektorii niezachowującej rozważanej własności jakościowej jest zerowe. Własności jakościowe mają zatem racje bytu tylko w odniesieniu do nieprzeliczalnych zbiorów trajektorii startujących z nieprzeliczalnej mnogości punktów początkowych. W przeciwnym razie nie będą obserwowalne, a więc nie będą odpowiadały żadnemu bytowi realnemu.

Rozważmy inkluzję (5) w otoczeniu  $X$  punktu  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Powiemy, że inkluzja ma pewną własność jakościową  $Q$  w zbiorze  $X_0 \subset X$ , jeżeli wszystkie trajektorie inkluzji startujące z punktów  $\mathbf{x}_0 \in X_0$  mają tą własność.



Dla danej własności jakościowej  $Q$  możemy zdefiniować funkcję zdaniową  $q(I)$  (określoną na pewnym zbiorze inkluzji różniczkowych  $\mathcal{I}$ ) w taki sposób, że zdanie  $Q(I)$  jest prawdziwe, jeśli inkluzja  $I \in \mathcal{I}$  posiada własność  $Q$  i fałszywe – jeśli tej własności nie posiada. Powiemy, że inkluzja  $I_1$  jest *mocniejsza* (lub *słabsza*) od inkluzji  $I_2$  w sensie własności  $Q$  i zapiszemy następująco:  $I_1 \triangleright I_2$  (lub  $I_1 \triangleleft I_2$ ), jeżeli zachodzi implikacja  $Q(I_1) \Rightarrow Q(I_2)$  (lub  $Q(I_1) \Leftarrow Q(I_2)$ ). Wreszcie, jeżeli zdania  $Q(I_1)$ ,  $Q(I_2)$  są równoważne, czyli  $Q(I_1) \Leftrightarrow Q(I_2)$ , powiemy, że inkluzje  $I_1$ ,  $I_2$  są równoważne w sensie własności  $Q$ , co zapiszemy jako  $I_1 \cong I_2$ . W myśl powyższych definicji, inkluzja równoważna do danej jest jednocześnie od niej słabsza i mocniejsza. Opisana wyżej relacja  $\triangleleft$  jest więc relacją częściowego porządku w zbiorze inkluzji różniczkowych indukowaną przez własność  $Q$ .

Istotą analizy jakościowej inkluzji różniczkowych jest orzekanie o ich własnościach jakościowych. Rzadko udaje się przeprowadzić wprost taką analizę, czyli bezpośrednio dla inkluzji będącej modelem jakiegoś układu realnego. Często w analizie jakościowej zastępujemy jedną inkluzję przez inną, prostszą do analizy. Zastąpienie inkluzji słabszej inkluzją mocniejszą w sensie określonej własności  $Q$  prowadzi na ogół do warunków dostatecznych posiadania własności  $Q$ , natomiast zamiana inkluzji mocniejszej na słabszą – do warunków koniecznych. Najkorzystniej jest dokonywać przejścia od danej inkluzji do inkluzji jej równoważnej. W ogólności analiza jakościowa może przebiegać według dwóch schematów:

$$I_0 \triangleright I_1 \triangleright \cdots \triangleright I_k, \quad I_0 \triangleleft I_1 \triangleleft \cdots \triangleleft I_k, \quad (6)$$

w których przejście od inkluzji początkowej  $I_1$  do inkluzji końcowej  $I_k$  odbywa się zgodnie z relacją  $\triangleright$  albo z relacją odwrotną  $\triangleleft$ . Badanie inkluzji końcowej i określenie warunków posiadania przez nią własności  $Q$  daje w pierwszym wypadku warunki dostateczne a w przypadku drugim – warunki konieczne posiadania własności  $Q$  przez inkluzję wyjściową  $I_1$ .

Aby taka procedura miała uzasadnienie, problem posiadania własności  $Q$  przez inkluzję końcową  $I_k$  powinien być względnie łatwo rozwiązywalny. Powiemy, że zagadnienie własności jakościowej  $Q$  inkluzji różniczkowej jest *skończenie (przeliczalnie) rozwiązalne*, jeśli istnieje skończony (przeliczalny) zbiór rozwiązań szczególnych inkluzji, takich że fakt posiadania przez każde z tych rozwiązań własności  $Q$  implikuje tę własność dla całej inkluzji, czyli dla wszystkich jej rozwiązań. Oznacza to, że inkluzja skończenie rozwiązywalna ze względu na własność  $Q$  jest równoważna pewnej inkluzji skończonej, a więc skończonej rodzinie równań różniczkowych zwyczajnych. Celem analizy jakościowej jest więc doprowadzenie danej inkluzji początkowej  $I_1$  do inkluzji końcowej  $I_k$  w postaci skończonego zbioru równań różniczkowych, dla których analiza własności  $Q$  jest już wykonalna.

Szczególnym rodzajem rozwiązań inkluzji zupełnej (5) są te, generowane przez określone sprzężenia zwrotne  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , a więc przez cięcia wiązki układu mechatronicznego opisanego modelem (5). Metoda optymalnych funkcji Lapunowa omawiana w niniejszej rozprawie umożliwia wyznaczanie *cięć krytycznych* wiązki układu, czyli sprzężeń zwrotnych generujących rozwiązania rozstrzygające o danej własności jakościowej  $Q$  układu.

Cięcie  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  wiązki układu mechatronicznego modelowanego inkluzja (5) nazywamy *cięciem krytycznym*, jeżeli równanie różniczkowe

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (7)$$

jest równoważne inkluzji (5) w sensie określonej własności jakościowej  $Q$ . Rozwiązanie równania (7) nazywamy *rozwiązaniem krytycznym* inkluzji (5).

Znalezienie cięcia krytycznego wiązki (a więc odpowiedniego sprzężenia zwrotnego) układu mechatronicznego sprowadza zagadnienie badania własności  $Q$  inkluzji (5) do badania tej własności dla równania (7). Aby przy użyciu cięcia krytycznego można było wnioskować również odnośnie pewnych własności ilościowych układu, własności te dla rozwiązania krytycznego powinny być nie gorsze (w określonym sensie) niż dla wszystkich trajektorii

Cięcie krytyczne nie musi być jednoznaczne, a nawet w ogóle może nie istnieć. Zależy to zarówno od postaci funkcji  $\mathbf{F}$  opisującej samą inkluzję jak również od badanych własności jakościowych inkluzji. Możliwe są również przypadki, że do orzeknięcia o danej własności jakościowej inkluzji (5) potrzeba będzie skończonej liczby ( $>1$ ) cięć krytycznych. Podstawowym zadaniem jakościowej teorii inkluzji jest ich wyznaczenie. Zwykle analiza jakościowa przebiegać będzie tak, że najpierw zbiór realizacji danej inkluzji niezupełnej jest rozszerzony, aby utworzyć inkluzję zupełną. Następnie dla tak powstałej inkluzji zupełnej znajdujemy cięcia krytyczne i sprowadzamy zagadnienie danej własności jakościowej  $Q$  do badania skończonego zbioru równań różniczkowych.

## Dodatek 2: (Realizowalność sterowań za pomocą dostępnych wyjść układu)

Rozważane w pracy metody syntezy sterowań oparte na metodzie funkcji Lapunowa umożliwiają znalezienie sterowań w postaci „czystego” sprzężenia zwrotnego od stanu  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  albo sprzężenia zwrotnego z zakłóceniami (pomiarowymi)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ . Ponieważ ta metoda syntezy sterowania realizującego określony cel generuje zwykle pewną klasę sterowań, należy najpierw wybrać spośród nich takie sterowania, które są funkcjami mierzonego wyjścia układu tzn.  $\mathbf{u} = \Phi(\mathbf{y})$ , gdzie  $\mathbf{y}$  jest wyjściem układu. Wynika z tego wymogu tzw. *warunek realizowalności*, który w ogólnym przypadku nieznanymi zakłóceniami  $\mathbf{z}$  będzie miał następującą postać:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Phi(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}))). \quad (1)$$

Jeżeli zakłócenia  $\mathbf{z}$  są na bieżąco mierzone, można wykorzystać tę informację do korekcji sterowania (kompensacja zakłóceń) stosując odpowiednią funkcję sprzężenia zwrotnego postaci  $\mathbf{u} = \Psi(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , gdzie  $\Psi$  jest pewną funkcją. Wynika stąd następujący warunek realizowalności:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z})), \mathbf{z}). \quad (2)$$

Wektor stanu modelu układu mechatronicznego składa się z położzeń i prędkości określonych punktów układu. Zwykle wielkości takie mogą być mierzone, więc nie ma zasadniczego problemu z realizowalnością dowolnego sprzężenia zwrotnego od stanu. Jeśli te wielkości nie są mierzalne, to można przypuszczać, że został skonstruowany niewłaściwy model układu. Nie ma bowiem możliwości pełnej identyfikacji i weryfikacji takiego modelu. Sytuacje braku dostępności informacji o stanie układu, są więc szczególne. Możemy natomiast postawić problem doboru sterowania, które wymagałoby jak najmniejszej liczby pomiarów w czasie rzeczywistym. Postępujemy wtedy tak, że najpierw znajdujemy sterowanie optymalne według metody optymalnych funkcji Lapunowa, a następnie staramy się wyrazić to sterowanie za pomocą minimalnej liczby funkcji zależnych od aktualnego stanu układu. Stosowane w niniejszej rozprawie podejście do tej kwestii, odnosi się do sytuacji, w których wyjście układu jest również w pewnym stopniu przedmiotem optymalizacji, a niekoniecznie narzuconym z góry ograniczeniem.

Ściśle biorąc do realizacji sterowań wynikających z metody optymalnych funkcji Lapunowa nie jest konieczna znajomość pełnego wektora stanu, lecz zwykle tylko pewnych liniowych funkcji składowych tego wektora. Dodatkowo parametry tych funkcji zależą od parametrów macierzy funkcji Lapunowa. Zatem możemy w pewnym zakresie dobierać te parametry w trakcie optymalizacji funkcji Lapunowa. Ułatwia to spełnienie warunków realizowalności zwłaszcza w typowej sytuacji, gdy funkcja wyjścia  $\mathbf{g}$  jest liniowa.

### Dodatek 3: (Sterowanie statyczne a dynamiczne)

W niniejszej rozprawie zasadniczo rozpatrywane są sterowania optymalne  $\mathbf{u}$  w postaci sprzężenia zwrotnego od aktualnego stanu  $\mathbf{x}$  układu. Oznacza to, że sterowanie w dowolnie wybranej chwili  $t \geq t_0$  jest wyznaczane na podstawie stanu układu w tej właśnie chwili, czyli  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t))$ . Sterowanie tego typu określa się niekiedy jako *sterowanie statyczne*. Podobnie rozważa się sterowania antyoptimalne, realizowane przez zaburzenia układu, postaci sprzężenia  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(\mathbf{x}(t))$ . Równania dynamiki układu optymalnego mają wtedy następującą stacjonarną postać:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x})). \quad (1)$$

Takie ograniczenie klasy sterowań wynika z samej metody optymalnych funkcji Lapunowa, a dokładniej – z przyjętej zasady punktowej optymalności, według której

sterowania (zaburzenia) powinny w każdym punkcie  $\mathbf{x} \in X$  pewnego obszaru w przestrzeni stanu maksymalizować (minimalizować) szybkość wykładniczej zbieżności trajektorii układu. Powstaje pytanie, czy uzyskane przy takich założeniach oszacowania własności stabilności układów, ewentualnie przewidywana poprawa tych własności, wyczerpują możliwości świadomego wpływania na własności układów i czy odpowiadają rzeczywistości, jeżeli chodzi o wpływ niekontrolowanych zaburzeń? Okazuje się, że niekoniecznie.

Znane są tzw. *sterowania dynamiczne*, które w ogólności polegają na pośrednim sterowaniu danym układem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , za pomocą pewnego, kontrolowanego sygnału  $\mathbf{v}$  oddziałującego poprzez inny układ dynamiczny (tzw. kompensator) dołączony do obiektu. Matematycznie taki sposób sterowania można przedstawić w postaci następującego układu rozszerzonego:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2)$$

Znalezienie statycznego sterowania dla powyższego układu oznacza znalezienie sterowania dynamicznego dla układu  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Okazuje się, że efektywność sterowania dynamicznego może być w pewnym sensie większa niż sterowania statycznego. W szczególności bowiem wykazuje się, że istnieją układy niestabilne i stabilizowalne za pomocą sterowania dynamicznego a niestabilizowalne sterowaniem statycznym (Bacciotti [5]).

Jak można by wytłumaczyć ten fakt i jakie ma to znaczenie dla niniejszej rozprawy? Otóż zastosowanie sterowania dynamicznego oznacza, że aktualne sterowanie jest wyznaczane nie tylko na podstawie aktualnego stanu układu, ale również jest zależne w jakiś funkcjonalny sposób od jego historii. To uzależnienie jest opisane właśnie funkcją  $\mathbf{G}$ . W układach, w których historia ruchu ma znaczenie, sterowanie dynamiczne będzie dawało w ogólności lepsze wyniki. Jak to się ma w przypadku układów mechatronicznych? Statyczne sprzężenia zwrotne oznaczają praktycznie tyle, że sterowanie jest uzależnione od aktualnych położeń i prędkości układu. Odpowiada to stosowanym w liniowej regulacji tzw. regulatorom PD. Zależność od historii (wynikająca z rozwiązania równania  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ) odpowiada bardziej regulatorom całkującym I. Całkowanie w pętli sprzężenia zwrotnego jest potrzebne dla likwidacji tzw. *uchybu statycznego*, jeżeli takowy się pojawia.

Rozszerzenie metody optymalnych funkcji Lapunowa na sterowania dynamiczne jest wskazane i możliwe, ale wymaga to oddzielnego opracowania. Układ rozszerzony (2) można bowiem zwyczajnie badać metodą Lapunowa. To, co trzeba rozwiązać, to problem doboru odpowiedniej funkcji  $\mathbf{G}$  kompensatora. Zbieżność wykładnicza w przestrzeni stanu jest w pewnych przypadkach zbyt rygorystycznym wymaganiem. Rozpatrywanie układu ze sterowaniem dynamicznym jest jakby przeniesieniem analizy stabilności Lapunowa do rozszerzonej przestrzeni stanu. W rozszerzonej przestrzeni trajektorie mogą być zbieżne wykładniczo, podczas gdy ich

rzuty na przestrzeń pierwotną już nie. Z kolei stabilność wykładnicza w przestrzeni rozszerzonej nie musi być wykładnicza w przestrzeni stanu obiektu, lecz tylko może implikować przyciągalność w tej przestrzeni. Stosując rozszerzoną przestrzeń stanu możemy więc osłabić wymagania odnośnie stabilności. Praktyczne aspekty tych kwestii warte są głębszego zastanowienia.

#### **Dodatek 4:** (*Geometryczny opis dynamiki układu mechatronicznego*)

Złożoność modelowania i opisu dynamiki układów mechatronicznych za pomocą inkluzji różniczkowych sprawia, że pożyteczne jest spojrzenie na układy mechatroniczne również z nieco innej, geometrycznej strony. Ułatwia to właściwą interpretację ruchu układu w przestrzeni stanu  $X$  i jego odniesienia do przestrzeni  $P$ ,  $Z$ ,  $U$ , odpowiednio parametrów, zaburzeń i sterowań, co pozwala na bardziej przejrzystą interpretację dynamiki inkluzji różniczkowych ze sterowaniami i zaburzeniami.

Aby to pokazać, przypomnijmy, że wybór wektora stanu  $\mathbf{x}$  układu nie jest na ogół jednoznaczny. O wyborze współrzędnych stanu decyduje zwykle prostota ich interpretacji fizycznej, prostota opisu układu lub postaci samej funkcji  $\mathbf{F}$  w modelu układu. Na przykład układ o kilku położeniach równowagi dogodnie jest lokalnie reprezentować za pomocą różnych układów quasiliniowych a wtedy nominalne parametry macierzy części liniowej układu mogą być zależne od położenia w przestrzeni stanu. W szczególności, badanie zachowania się układu w otoczeniu wybranego stanu równowagi  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , oznacza na ogół użycie pewnego lokalnego układu współrzędnych do opisu modelu układu. Zakres stosowalności danych współrzędnych  $\mathbf{x}$  jest zwykle pewnym obszarem otwartym  $O_{\mathbf{x}}$  w przestrzeni stanu  $X$ . Opis układu będzie kompletny, jeśli dziedziny poszczególnych układów współrzędnych pokrywają całą przestrzeń  $X$  i możliwa będzie zmiana współrzędnych na częściach wspólnych ich dziedzin. Przestrzeń stanu można więc w ogólności traktować jako pewną rozmaitość różniczkową o lokalnych współrzędnych  $(O_{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ . Dla układów mechanicznych bez więzów przestrzeń stanu będzie zwykle pewnym obszarem w  $R^n$ , natomiast w przypadku układów z więzami holonomicznymi lub całkowalnymi więzami nieholonomicznymi – nietrywialną rozmaitością  $n$ -wymiarową zanurzoną w przestrzeni euklidesowej o większym wymiarze. Z przestrzenią stanu układu w postaci rozmaitości mamy również do czynienia po redukcji wymiaru jego modelu zgodnie z *twierdzeniem o rozmaitości centralnej*.

Wybór wielkości  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{u}$  jako współrzędnych w przestrzeni  $P \times Z \times U$  też nie jest jednoznaczny i w zasadzie można tu dokonywać dowolnych, odwracalnych transformacji. Tej możliwości nie będziemy jednak w pełni wykorzystywali, poprzestając na takim wyborze, który jest najdogodniejszy z jakichś względów, ma najprostszą interpretację fizyczną, techniczną itp. W szczególności, współrzędne w przestrzeni  $P$  powinny, o ile to możliwe, odpowiadać parametrom fizycznym

układu, natomiast wybór współrzędnych  $\mathbf{z}$  powinien zapewniać brak korelacji składowych poszczególnych wielkości  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{u}$ . Dobór współrzędnych w przestrzeni  $Z$  powinien odpowiadać więc niezależności składowych wektora zaburzeń  $\mathbf{z}$ . Tak będzie na przykład wtedy, gdy każda ze składowych zaburzeń będzie związana z niezależnym źródłem zaburzeń rzeczywistego układu. Podobnie składowe sterowania dogodnie jest dobrać tak, aby odpowiadały poszczególnym parametrom sterowanym układem (a więc poszczególnym Elementom wykonawczym, na przykład siłownikom).

Ponieważ przestrzenie  $X$  oraz  $P \times Z \times U$  są w ogólności rozmaitościami, można określić przestrzeń  $E$  o strukturze rozmaitości, rozpiętą nad rozmaitością  $X$ , która lokalnie we współrzędnych daje się przedstawić w postaci iloczynu kartezjańskiego  $X \times P \times Z \times U$ . Możemy też określić naturalne odwzorowanie różniczkowalne rzutowania  $\pi : E \rightarrow X$  takie, że  $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}$ . Zestaw  $(E, \pi, X)$  o podanych własnościach będzie wtedy tzw. wiązką włóknistą różniczkowalną odpowiadającą danemu układowi mechatronicznemu. Przestrzeń  $E$  nazywa się przestrzenią totalną wiązki, natomiast przestrzeń  $X$  – bazą wiązki. Podobnie, zbiór  $P \times Z \times U$  nazywa się włóknem wiązki, natomiast podany lokalny rozkład przestrzeni  $E$  na iloczyn kartezjański – lokalną trywializacją wiązki.

Zatem model matematyczny (1.4.1) układu mechatronicznego można zinterpretować w geometrycznym języku *wiązek włóknistych*, czego dogodność uzasadnimy w dalszym ciągu. W takim ujęciu ruch układu mechatronicznego jest reprezentowany przez pewną krzywą na rozmaitości  $X$  będącej przestrzenią stanu układu. Trajektorię ruchu można wyrazić w lokalnych współrzędnych  $(O_{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$  jako  $\{\mathbf{x}(t) : t \geq t_0\}$ . W ogólności, w każdej chwili  $t$  układ mechatroniczny jest scharakteryzowany nie tylko przez aktualny stan  $\mathbf{x}(t)$ , ale również przez wielkości  $\mathbf{p} \in P$ ,  $\mathbf{z} \in Z$ ,  $\mathbf{u} \in U$ , które na ogół również zależą od czasu i wpływają na ewolucję stanu układu. Pełny opis ruchu układu wymaga więc podania przebiegu czasowego  $\mathbf{x}(t)$  oraz funkcji  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  przynależnych do odpowiednich przestrzeni  $\Gamma(P)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$ . Znajomość aktualnych wartości  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ , dla dowolnego  $t > t_0$  jest niezbędna do określenia stanu układu w chwilach następnych. Istotny jest fakt, że dla dowolnych warunków początkowych  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  ruch układu nie jest na ogół określony jednoznacznie. Zależy to istotnie od przyjętych klas funkcji czasu  $\Gamma(P)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$ . W ogólności, z danych warunków początkowych może wychodzić nawet nieprzeliczalna liczba trajektorii. W realnym układzie zawsze realizuje się tylko jedna z nich, określona przez aktualne realizacje procesów  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ .

W teorii wiązek szczególną rolę odgrywiają pewne odwzorowania zwane cięciami wiązek. Cięciem wiązki  $(E, \pi, X)$  nazywamy dowolne odwzorowanie  $s : X \rightarrow W$  spełniające warunek złożenia  $\pi \bullet s = \text{id}_X$ , który zapewnia przypisanie każdemu punktowi bazy  $\mathbf{x} \in X$  dokładnie jednego elementu włókna  $P \times Z \times U$ . W teorii wiązek zwykle rozpatruje się cięcia różniczkowalne. Do opisu dynamiki układów mechatronicznych konieczne jest jednak rozważanie cięć bardziej

ogólnych. Istotnie, nietrudno stwierdzić, że każde cięcie wiązki  $(E, \pi, X)$  modelu układu mechatronicznego oznacza nic innego jak uzależnienie parametrów, zaburzeń lub sterowań od stanu  $\mathbf{x}$  układu. Zatem każde sprzężenie zwrotne  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  w układzie mechatronicznym, odpowiada pewnemu cięciu jego wiązki  $E$ . Ponieważ sprzężenia zwrotne rozważane w niniejszej rozprawie mogą być nieciągłe (typu bang-bang), musimy rozpatrywać cięcia przedziałami różniczkowalne.

Z drugiej strony, możliwości cięcia wiązki  $(E, \pi, X)$  układu mechatronicznego są ograniczone założonymi przestrzeniami funkcji  $\Gamma(P)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $\Gamma(U)$ , określającymi inkluzję modelu układu. Jeżeli mamy rozwiązanie  $\mathbf{x}(t)$  równań modelu ze sprzężeniami zwrotnymi  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , to powinny zachodzić relacje  $\mathbf{p}(\mathbf{x}(t)) \in \Gamma(P)$ ,  $\mathbf{z}(\mathbf{x}(t)) \in \Gamma(Z)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) \in \Gamma(U)$ . W ogólnym przypadku niepełnej inkluzji modelu układu trudno by było znaleźć sprzężenia zwrotne spełniające takie warunki, a ich istnienie nie byłoby zagwarantowane. Dlatego rozpatrując sprzężenia zwrotne w układach mechatronicznych, będziemy zwykle zakładali zupełność opisujących je inkluzji.

#### **Dodatek 5:** *(Ograniczenia w modelach układów mechatronicznych)*

Określone w Paragrafie 1.5 ograniczenia na zaburzenia  $\mathbf{z}$  układu mechatronicznego są – jak łatwo zauważyć – najlepiej dostosowane do sytuacji stale działających zaburzeń. W przypadku inkluzji zupełnych ograniczenia takie oznaczają nic innego, jak ograniczoność normy  $\|\mathbf{z}\|_\infty = \sup_{t>t_0} \|\mathbf{z}(t)\|$ , gdzie  $\|\cdot\|$  jest pewną normą w przestrzeni

Z albo ograniczenia analogicznej normy  $|z_i|_\infty = \sup_{t>t_0} |z_i(t)|$ ,  $i = 1, \dots, k$  dla każdej ze

składowych zaburzeń. Obszerne omówienie układów z zaburzeniami ograniczonymi co do modułu można znaleźć w literaturze (Gutowski [18]).

W literaturze rozważa się jednak często również zaburzenia znikające w nieskończoności czasowej tzn. działające głównie w pewnym ograniczonym odcinku czasu. Tego typu zaburzenia (zwykle należące do pewnych unormowanych przestrzeni funkcyjnych, na przykład przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem  $L^2([t_0, +\infty))$ ) mogą modelować zaburzenia w realnych układach takie jak: wymuszenia sejsmiczne budynku albo obciążenia dynamiczne mostu spowodowane przejeżdżającym pociągiem. Założenie tego typu ograniczeń bywa dość dogodne w analizie teoretycznej, ale ma istotne wady, jeżeli chodzi o aspekt praktyczny. Przynależność do przestrzeni  $L^2([t_0, +\infty))$  nie wyklucza bowiem dużych wartości chwilowych, wykraczających poza obszar prawdziwości stosowanych modeli. Poza tym na ogół nie wiadomo, jaki będzie faktycznie czas trwania zaburzeń (na przykład sejsmicznych). Jeśli ten czas będzie znacząco większy od typowych stałych czasowych układu, wówczas założenie ograniczoności co do modułu, będzie bardziej uzasadnione.

Pozostając w klasie inkluzji zupełnych i ograniczeń co do modułu, można jednak modelować układy z zaburzeniami zanikającymi w nieskończoności. Istotnie, jeżeli na przykład dla układu liniowego o macierzy  $\mathbf{A}$  chcemy zamodelować zaburzenia  $\mathbf{z}$  zanikające w czasie, możemy zastosować asymptotycznie stabilny dynamiczny model zaburzeń, czyli rozpatrywać układ rozszerzony następującej postaci:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz}, \\ \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{Cz} \in \{\mathbf{D}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} : |\mathbf{w}| \leq \alpha\}, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą stabilną, natomiast  $\mathbf{D}$  macierzą liniowo zależną od wektora niestacjonarnych zaburzeń  $\mathbf{w}$  ograniczonych co do modułu. Jeżeli norma zaburzeń  $\mathbf{w}$  będzie odpowiednio mała, wówczas zaburzenia  $\mathbf{z}$  będą niestacjonarnymi zaburzeniami zanikającymi w czasie. W ten sposób, pozostając w klasie układów z zaburzeniami ograniczonymi co do modułu, można wygenerować szeroką klasę zaburzeń znikających w czasie  $t \rightarrow +\infty$ .

Warto też zauważyć, że przyjęte w Paragrafie 1 ograniczenia na zaburzenia dopuszczają skokowe zmiany ich wartości, co oznacza założenie nieograniczonego widma takich zaburzeń. Antyoptimalne strategie takich zaburzeń wyznaczane metodą funkcji Lapunowa zwykle wykorzystują możliwość takich zmian. To sprawia, że uzyskiwane wyniki analizy stabilności układów będą dostateczne, ale nie zawsze niekonieczne. Realne zaburzenia mają bowiem ograniczone widmo, a więc ograniczoną szybkość zmian wartości w czasie. Gdyby założyć różniczkowalność zaburzeń  $\mathbf{z}$  po czasie, można by było uwzględniać w modelu układu również ograniczenia na pochodną  $d\mathbf{z}/dt$ . Oznaczałoby to traktowanie realizacji zaburzeń jako ograniczonych elementów w pewnej przestrzeni Sobolewa. Nie wiadomo jednak jak można by w metodzie funkcji Lapunowa bezpośrednio uwzględnić takie ograniczenia. Możemy jednak również i w tym przypadku posłużyć się dynamicznym modelem zaburzeń, który sam z siebie będzie gwarantował ograniczoność zaburzeń i ich pochodnych. Dla układu liniowego o macierzy  $\mathbf{A}$  model taki może mieć następującą postać:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} \\ \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{Cz} \in \{\mathbf{D}\mathbf{w} : \mathbf{w} \in \Gamma(W)\}, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą stabilną, natomiast zaburzenia  $\mathbf{w}$  są ograniczone co do modułu. Ponieważ dla ograniczonych zaburzeń  $\mathbf{w}$ , dynamika zaburzeń  $\mathbf{z}$  gwarantuje ich asymptotyczną zbieżność do pewnego ograniczonego obszaru granicznego, zaburzenia  $\mathbf{z}$  będą ograniczone, pod warunkiem, że ich wektor początkowy  $\mathbf{z}_0$  należał do zbioru granicznego.

Skoro ograniczoność zaburzeń  $\mathbf{w}$  co do modułu implikuje taką samą ograniczoność zaburzeń  $\mathbf{z}$ , to model (2) gwarantuje również ograniczoność pochodnej zaburzeń  $\mathbf{z}$ . Wynika to z następującego oszacowania:



$$\|\dot{\mathbf{z}}\| = \|\mathbf{Cz} + \mathbf{Dw}\| \leq \|\mathbf{Cz}\| + \|\mathbf{Dw}\| \leq \|\mathbf{C}\| \cdot \|\mathbf{z}\| + \|\mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \leq (\|\mathbf{C}\| \cdot \eta + \|\mathbf{D}\|) \cdot \|\mathbf{w}\|. \quad (3)$$

Zaburzenia  $\mathbf{w}$  są tu tylko pewną pomocniczą wielkością, która nie występuje realnie, lecz tylko w modelu. Dlatego ich ewentualnie skokowe zmiany nie kłócą się już z fizyką, albowiem na układ realny, którego stan modelowany jest wektorem  $\mathbf{x}$ , oddziałują tylko zaburzenia  $\mathbf{z}$ , które są już ograniczone i mają ograniczoną pochodną.

#### Dodatek 6: (Zbiory rozmyte w opisie własności układów mechatronicznych)

Najogólniej rzecz ujmując, zbiór rozmyty  $\tilde{X}$  to obiekt matematyczny określony przez parę niepustych zbiorów  $(\underline{X}, \bar{X})$  należących do pewnej przestrzeni (na przykład euklidesowej)  $E$ , przy czym  $\underline{X} \subset \bar{X}$ . Zbiory  $\underline{X}$ ,  $\bar{X}$  nazywają się odpowiednio: ograniczeniem dolnym i ograniczeniem górnym zbioru rozmytego  $\tilde{X} = (\underline{X}, \bar{X})$ . Powiemy, że  $\mathbf{x} \in E$  całkowicie należy do zbioru rozmytego  $\tilde{X}$ , jeżeli  $\mathbf{x} \in \underline{X}$ , natomiast do niego nie należy, jeżeli  $\mathbf{x} \notin \bar{X}$ . Jeżeli zaś  $\mathbf{x} \in \bar{X} - \underline{X}$ , będziemy mówili o częściowej przynależności punktu  $\mathbf{x}$  do zbioru rozmytego  $\tilde{X}$ .

Różnicę zbiorów  $\bar{X} - \underline{X}$  nazywa się rozmytym brzegiem zbioru  $\tilde{X} = (\underline{X}, \bar{X})$ . Jeżeli  $\bar{X} = \underline{X}$ , wówczas pojęcie zbioru rozmytego jest tożsame z pojęciem zbioru rozumianym w zwykłym sensie teoriomnogościowym.

W teorii zbiorów rozmytych, aby określić liczbowo stopień przynależności punktów do zbioru rozmytego, wprowadza się tzw. *funkcję przynależności*, która z zasady odwzorowuje przestrzeń  $E$  w przedział jednostkowy  $[0,1]$ . Jeżeli funkcja  $f: E \rightarrow [0,1]$  jest funkcją przynależności zbioru rozmytego  $\tilde{X} = (\underline{X}, \bar{X})$ , to wówczas  $f_{\underline{X}} \equiv 1, f_{\bar{X}} \equiv 0$ , natomiast  $f(\mathbf{x}) \in (0,1)$  dla  $\mathbf{x} \in \bar{X} - \underline{X}$ . Innymi słowy,

funkcja przynależności znika poza zbiorem rozmytym i osiąga maksymalną wartość 1 na jego ograniczeniu dolnym, natomiast przyjmuje wartości pośrednie na rozmytym brzegu tego zbioru. Wartość funkcji  $f(\mathbf{x})$  określa właśnie stopień przynależności punktu  $\mathbf{x}$  do danego zbioru rozmytego, przy czym wartości skrajne 0, 1 oznaczają odpowiednio zupełny brak przynależności i całkowitą przynależność punktu  $\mathbf{x}$  do tego zbioru. Zależnie od sposobu definiowania funkcji przynależności i rodzaju przestrzeni  $E$ , uprawia się teorie różnego rodzaju zbiorów rozmytych. W szczególności mogą to być teorie tzw. *fuzzy sets* lub *rough sets* (czyli *zbiorów przybliżonych*). W niniejszej rozprawie nie będziemy dokonywali wyboru którejś z wersji tych teorii, ponieważ nie będziemy istotnie korzystali z pojęcia funkcji przynależności, poprzestając na ograniczeniach górnych i dolnych rozważanych zbiorów. Funkcje przynależności można jednak rozważać w bardziej precyzyjnej analizie stabilności.

Jest jasne, że pojęcie zbioru rozmytego jest użyteczne w sytuacjach, w których niemożliwe jest dokonanie ostrego rozgraniczenia między pewnymi klasami obiektów. Problem ten pojawia się praktycznie zawsze, gdy mamy do czynienia z jakąś realną klasyfikacją opartą na danych empirycznych. Klasyfikacja polega w swej istocie na orzekaniu o określonych cechach jakościowych obiektów badań. Dlatego kwestia rozmycia odnosi się w szczególności do każdej analizy jakościowej, której wnioskowanie opiera się na niepełnej informacji o przedmiocie.

Niepełność informacji w analizie jakościowej modeli układów dynamicznych wynika z faktu, że na ogół nie znamy dokładnie rozwiązań równań modelu. Gdybyśmy badali analitycznie lub numerycznie jedną trajektorię, moglibyśmy określić jakościowo oraz ilościowo jej obraz geometryczny (czyli powiedzieć, gdzie znajdują się wszystkie punkty trajektorii) oraz jej własności czasowe (mówiące o tym gdzie znajduje się aktualny punkt trajektorii w dowolnej chwili  $t > t_0$ ). Ponieważ analiza jakościowa wykorzystuje jedynie informację o funkcjach (równaniach) opisujących dynamikę danego układu (ale ich nie rozwiązuje) oraz odnosi się z zasady do całych rodzin trajektorii zwykle nieprzeliczalnych, nieuniknione jest „rozmycie” wnioskowania jakościowego. Jeżeli chodzi o geometrię trajektorii, analiza jakościowa zwykle szacuje, gdzie (w jakim obszarze) na pewno znajdują się wszystkie trajektorie przynależne do określonej klasy (na przykład startujące z pewnego obszaru) oraz gdzie (przez jaki obszar) żadna z tych trajektorii na pewno nie przebiega. Zwykle oba te obszary nie wypełniają całej przestrzeni stanu. Ta pozostała część przestrzeni to właśnie strefa rozmycia, odnośnie której dana metoda analizy jakościowej nie wypowiada się jednoznacznie.

Jeżeli chodzi o własności czasowe trajektorii sytuacja wygląda podobnie. Analiza jakościowa może określać, gdzie w danej chwili  $t > t_0$  na pewno znajdują się aktualne punkty wszystkich trajektorii startujących w chwili  $t_0$  z danego obszaru oraz może określać, gdzie na pewno żaden z aktualnych punktów trajektorii przynależnych do rozważanej klasy jeszcze nie dotarł. W pozostałej części przestrzeni stanu, odpowiadającej rozmyciu, mogą ale nie muszą znajdować się aktualne punkty pewnych trajektorii z rozważanej klasy.

Z rozmyciem w analizie jakościowej mamy do czynienia również wtedy, gdy szacujemy z góry i/lub z dołu pewne zbiory w przestrzeni stanu za pomocą innych zbiorów przynależnych do pewnej wyróżnionej klasy. W metodzie funkcji Lapunowa wyróżnioną klasą zbiorów stanowią elipsoidy (określone przez macierz  $\mathbf{S}$  funkcji Lapunowa) oraz zbiory od nich pochodne, na przykład

$$B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < c^2\}, B[\mathbf{S}, c] = \partial B(\mathbf{S}, c) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = c^2\},$$

$$B(\mathbf{S}, c_1, c_2) = \{\mathbf{x} : c_1 < \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} < c_2\}, B[\mathbf{S}, c_1, c_2] = \{\mathbf{x} : c_1 \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} \leq c_2\},$$

$$B(\mathbf{S}, c_1, c_2) = \{\mathbf{x} : c_1 \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} < c_2\}, B(\mathbf{S}, c_1, c_2) = \{\mathbf{x} : c_1 < \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}} \leq c_2\}.$$

Podobnie, jeżeli dany obszar  $X$ , taki że  $\mathbf{0} \in \text{int } X$ , szacujemy za pomocą elipsoid  $B(\mathbf{S}, c)$ ,  $c > 0$ , to dogodnie jest wprowadzić następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} X(\underline{\mathbf{S}}, \underline{c}) &= \underline{X}(\mathbf{S}) - \text{maksymalna elipsoidalna } B(\mathbf{S}, c) \text{ wpisana w } X \\ X(\overline{\mathbf{S}}, \overline{c}) &= \overline{X}(\mathbf{S}) - \text{minimalna elipsoidalna } B(\mathbf{S}, c) \text{ opisana na } X \end{aligned}$$

$(\underline{X}(\mathbf{S}), \overline{X}(\mathbf{S}))$  – zbiór rozmyty aproksymujący z góry i z dołu obszar  $X$  za pomocą elipsoid klasy  $B(\mathbf{S}, c)$ .

Zbiór  $X$  może być na przykład obszarem asymptotycznym  $X_\infty$  lub obszarem procesów przejściowych  $X_\infty$ . Punkty przestrzeni stanu, należące do ograniczenia dolnego  $\underline{X}(\mathbf{S})$  (albo do  $R^n - \overline{X}(\mathbf{S})$ ) na pewno należą (nie należą) do aproksymowanego zbioru  $X$ . Z kolei punkty należące do brzegu  $\overline{X}(\mathbf{S}) - \underline{X}(\mathbf{S})$  zbioru rozmytego mogą należeć lub nie należeć do obszaru  $X$ . Im mniejsze jest to rozmycie, tym dokładniejszy jest opis obszaru  $X$  za pomocą elipsoid  $B(\mathbf{S}, c)$ .

Rozmycie spowodowane elipsoidalną aproksymacją zbiorów stanowi granicę dokładności opisu jakościowych własności badanych układów za pomocą jednej kwadratowej funkcji Lapunowa. Można tą dokładność zwiększyć, stosując jednocześnie wiele funkcji Lapunowa, czyli tzw. *wielowymiarowe funkcje Lapunowa*. Własności układu wewnątrz brzegu rozmytego trzeba już badać inną metodą, na przykład za pomocą symulacji numerycznych.

Rodzina elipsoid  $\{B(\mathbf{S}, c): c > 0\}$  jest wyróżniona przez samą metodę optymalnych funkcji Lapunowa. Jednak w wielu praktycznych sytuacjach mamy również klasy zbiorów wyróżnione przez techniczne wymagania odnośnie układów mechatronicznych. Wówczas będziemy mieli problem odwrotny, mianowicie problem aproksymacji elipsoid  $B(\mathbf{S}, c)$  za pomocą zbiorów wyróżnionej klasy.

Jeśli  $\{X(r): r > 0\}$  będzie rodziną zbiorów (o niepustym wnętrzu) takich, że

$$(i) \quad \forall (r_1 < r_2) \Rightarrow X(r_1) \subset X(r_2) \text{ (uporządkowanie),}$$

$r_1, r_2$

$$(ii) \quad \bigcup_{r \geq 0} X(r) = E \text{ (zupełność), to}$$

$X(\underline{r}) = X(\underline{r}(\mathbf{S}, c))$  – maksymalny zbiór  $X(r)$  wpisany w daną elipsoidę  $B(\mathbf{S}, c)$

$X(\overline{r}) = X(\overline{r}(\mathbf{S}, c))$  – minimalny zbiór  $X(r)$  opisany na elipsoidzie  $B(\mathbf{S}, c)$

$(X(\underline{r}(\mathbf{S}, c)), X(\overline{r}(\mathbf{S}, c)))$  – zbiór rozmyty, aproksymujący z góry i z dołu elipsoidę  $B(\mathbf{S}, c)$  za pomocą zbiorów z rodziny  $\{X(r): r \geq 0\}$ .

Parametr  $r: (\{X(r): r \geq 0\}, \subset) \longrightarrow ([0, +\infty), \leq)$ , będący w istocie izomorfizmem zbiorów dobrze uporządkowanych, można interpretować jako uogólniony promień (parametr skali) zbiorów rodziny  $X(r)$ . Zupełność oznacza tu, że zwiększając  $r$  można dowolnie zwiększać zbiory  $X(r)$ , które stopniowo wypełniają całą przestrzeń.

**Dodatek 7:** (*Równoważność norm w przestrzeni stanu*)

Definicje stabilności w sensie Lagrange'a, Poincaré'go i Lapunowa podane w Rozdziale 2 wykorzystują pojęcie normy w przestrzeni stanu układu, przy czym nie jest sprecyzowane, jaka jest ta norma. Powstaje więc naturalne pytanie, czy tego rodzaju stabilności zależą od wyboru normy? Innymi słowy, czy stabilność udowodniona przy założeniu jednej normy (na przykład Euklidesowej) będzie zachowana dla innej normy w przestrzeni stanu? Twierdząca odpowiedź na powyższe pytania wynika z tzw. równoważności norm w skończone wymiarowych przestrzeniach wektorowych. Takimi bowiem przestrzeniami są przestrzenie stanu rozważanych tu układów dynamicznych. Powyższą kwestię rozstrzyga następujące

**Twierdzenie 1.** Jeżeli  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  są pewnymi normami w przestrzeni  $R^n$ , to istnieją stałe dodatnie  $\mu$ ,  $\nu$ , zależne od tych norm, takie że dla każdego  $\mathbf{x} \in R^n$  zachodzą nierówności:

$$\mu \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \nu \|\mathbf{x}\|_1, \quad \mu \leq \nu. \quad \# (1)$$

*Dowód:* Wystarczy zauważyć, że wartości współczynników  $\mu$ ,  $\nu$  wyznaczonych według następujących wzorów:

$$\mu = \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_1, \quad \nu = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \|\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_1. \quad (2)$$

spełniają warunki podane w tezie twierdzenia. Istnienie skończonych wartości  $\mu$ ,  $\nu$  wynika z faktu, że optymalizację po przestrzeni  $R^n - \{\mathbf{0}\}$  można w powyższych wzorach ograniczyć do sfery jednostkowej  $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_1 = 1\}$ , czyli do zbioru zwarteo.

Łatwo też zauważyć, że parametry  $\mu$ ,  $\nu$  są określone przez wartości własne pewnych macierzy symetrycznych. ♦

Podane wyżej twierdzenie jest szczególnym przypadkiem tzw. *twierdzeń o włożeniu* (jednej przestrzeni w drugą) rozpatrywanych w analizie funkcjonalnej. Z podanej nierówności bezpośrednio wynika, że normy w przestrzeni  $R^n$  są równoważne, ponieważ generują tą samą *topologię* (czyli rodzinę zbiorów otwartych) oraz *bornologię* (czyli rodzinę zbiorów ograniczonych). Oznacza to, że przy zmianie normy zachowana jest własność ciągłości i ograniczoności. Mogą przy tym zmienić się jedynie charakterystyki ilościowe tych własności jakościowych. Zatem rodzaje stabilności bazujące na pojęciu ciągłości (na przykład *SLP*) lub ograniczoności (na przykład *SLG*) będą inwariantne, jako własność układu dynamicznego, ze względu na zmianę normy, czyli będą własnościami topologicznymi (bornologicznymi).

Powyższy wniosek jest zgodny z klasyczną „filozofią”, według której stabilność układu w jakimkolwiek sensie powinna być własnością samego układu, a nie narzędzia, jakim się ją opisuje i bada. W szczególności więc stabilność nie powinna zależeć od normy. Jednak to z pozoru oczywiste stwierdzenie nie jest całkiem

słuszne. W niniejszej rozprawie propagowana jest inna filozofia. Norma jest wszakże pewnym arbitralnym narzędziem, które przykłada się do danego modelu w celu zbadania jego własności. Wcale nie musi tak być, że zastosowanie każdej normy musi dawać taki sam wynik badania. Normy są równoważne topologicznie, ale nigdzie nie jest powiedziane, że musimy stosować definicje stabilności i innych własności jakościowych, które są własnościami topologicznymi. To niepotrzebne ograniczenie możliwości badawczych. Rezygnacja z takiego ograniczającego założenia daje w istocie większe i bardziej precyzyjne możliwości badawcze. Zależność pewnej własności jakościowej od normy nie świadczy o tym, że dana własność nie jest wyłącznie własnością układu, lecz tylko o tym, że zależy od topologii.

Podobną sytuację mamy na przykład w przypadku ciągłości funkcji. Ta sama funkcja może być lub nie być ciągła w różnych topologiach. Dobór odpowiednich topologii mówi nam wiele o danej funkcji. Podobnie w przypadku normy powstanie wówczas kwestia jej optymalnego doboru do celu badania. Co więcej, okazuje się, że różne normy, chociaż są równoważne topologicznie, mogą się też istotnie różnić pod względem możliwości przeprowadzenia różnych oszacowań.

#### **Dodatek 8:** (Ciągła zależność wskaźnika stabilności od parametrów)

W analizie stabilności i dowodzie niektórych twierdzeń istotna jest własność ciągłości wskaźnika stabilności określonego wzorem

$$\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p}) = - \sup_{\mathbf{x} \in X \setminus \{0\}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] \quad (1)$$

od parametrów  $\mathbf{p}$  układu oraz parametrów macierzy funkcji Lapunowa  $\mathbf{S}$ . W ogólnym przypadku taka ciągłość nie zawsze zachodzi. Pokażemy jednak, że przy mało ograniczających założeniach (zwykle spełnionych przez modele układów mechatronicznych) wskaźnik  $\gamma(\mathbf{S}, \mathbf{p})$  jest ciągłą funkcją parametrów  $\mathbf{p}$ . W tym celu wykażemy następujący

**Lemat 1:** Dla dowolnych rzeczywistych i ciągłych funkcji  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x}) \neq 0$  określonych na zbiorze  $X \in R^n$  o zwartym domknięciu, wskaźnik

$$\delta(p) = \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + p \cdot g(\mathbf{x})] \quad (2)$$

jest funkcją ciągłą parametru  $p \in R$ . #

*Dowód:* Na mocy przyjętych założeń wskaźnik (2) istnieje. Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że  $\delta(p) \geq \delta(p^*)$ . Wtedy, korzystając z własności operacji supremum [D13] łatwo przeprowadzić następujące oszacowania:

$$\begin{aligned}
\delta(p) - \delta(p^*) &= \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + p \cdot g(\mathbf{x})] - \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + p^* \cdot g(\mathbf{x})] = \\
&= \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + p^* g(\mathbf{x}) + (p - p^*) \cdot g(\mathbf{x})] - \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + p^* g(\mathbf{x})] \leq \\
&\leq \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + p^* g(\mathbf{x})] + \sup_{\mathbf{x} \in X} [(p - p^*) \cdot g(\mathbf{x})] - \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + p^* g(\mathbf{x})] \leq \\
&\leq |p - p^*| \cdot \sup_{\mathbf{x}} |g(\mathbf{x})| \leq L \cdot |p - p^*|
\end{aligned}$$

gdzie  $L$  jest pewną stałą dodatnią  $< \infty$ . Biorąc moduł obu stron pierwszej i ostatniej nierówności, dostajemy ostatecznie oszacowanie:

$$|\delta(p) - \delta(p^*)| \leq L|p - p^*|, \quad (3)$$

które świadczy o tym, że wskaźnik  $\delta(p)$  jest funkcją ciągłą a nawet funkcją Lipschizowską (ze stałą Lipschiza  $L = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} |g(\mathbf{x})|$ ).  $\blacklozenge$

Powyższą własność ciągłości można łatwo uogólnić na przypadek wielu parametrów tzn. na funkcje postaci:  $f(\mathbf{x}) + p_1 \cdot g_1(\mathbf{x}) + \dots + p_k \cdot g_k(\mathbf{x})$  (Ossowski [57]).

Innego uogólnienia można dokonać rozpatrując funkcje argumentu  $\mathbf{x}$  o wielomianowej zależności od parametru  $p$ , czyli na funkcje postaci:  $f(\mathbf{x}) + p \cdot g_1(\mathbf{x}) + \dots + p^k \cdot g_k(\mathbf{x})$ . Dla wykazania ciągłości wskaźnika (2) w takim przypadku wystarczy skorzystać z algebraicznej podzielności wielomianu  $p^i - (p^*)^i$  przez jednomian  $p^i - p^*$ .

Rozpatrywane w niniejszej rozprawie modele układów mechatronicznych będą zwykle opisane przez funkcje postaci  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) + p_1 \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \dots + p_k \cdot \mathbf{F}_k(\mathbf{x})$ , gdzie  $p_i$  będą parametrami (najczęściej tłumienia i sztywności oraz wzmocnienia) układu mechatronicznego. Z dowiedzionej wyżej własności wynika ciągła zależność wskaźnika zbieżności (1) od parametrów  $\mathbf{p}$  układu.

Powyższy wynik można też uogólnić na klasę liniowych układów niestacjonarnych o liniowej zależności funkcji modelu od składowych zaburzeń. Aby to wykazać, wystarczy po wykonaniu operacji supremum względem niestacjonarnych zaburzeń przy obliczaniu wskaźnika zbieżności, zaliczyć do zestawu parametrów również parametry ograniczeń na te zaburzenia. Otrzymamy wówczas następujący wzór na wskaźnik stabilności układu:

$$\gamma(\mathbf{S}, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \alpha_1 \cdot \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} + \dots + \alpha_k \cdot \frac{|\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{C}_k \mathbf{x}|}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right], \quad (4)$$

który będzie oczywiście ciągłą funkcją parametrów  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ .

Podane wyżej stwierdzenia o ciągłości wskaźnika stabilności względem parametrów są w pewnym sensie szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 1:** Jeżeli funkcja  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest ciągła w pewnym obszarze  $X \times Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  i jednostajnie ciągła względem  $\mathbf{x}$ , to w obszarze  $X$  ciągła jest również funkcja

$$F(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y})]. \quad \# (5)$$

*Dowód:* Z założeń wynika, że dla każdego  $\mathbf{y} \in Y$  i  $\varepsilon > 0$  istnieje taka  $\delta(\mathbf{y}) > 0$ , że jeżeli  $|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2| < \delta(\mathbf{y})$ , to dla każdego zachodzi nierówność  $|f(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^2, \mathbf{y})| < \varepsilon$ . Nie zmniejszając ogólności, możemy przyjąć, że  $F(\mathbf{x}^1) \geq F(\mathbf{x}^2)$ . Wtedy zachodzi oszacowanie:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}^1) - F(\mathbf{x}^2) &= \sup_{\mathbf{y} \in Y} [f(\mathbf{x}^1, \mathbf{y})] - \sup_{\mathbf{y} \in Y} [f(\mathbf{x}^2, \mathbf{y})] \leq \sup_{\mathbf{y} \in Y} [f(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^2, \mathbf{y})] \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{y} \in Y} |f(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^2, \mathbf{y})| < \sup_{\mathbf{y} \in Y} \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Biorąc moduł obu stron powyższej nierówności mamy oszacowanie  $|F(\mathbf{x}^1) - F(\mathbf{x}^2)| < \varepsilon$ . Dla zamknięcia dowodu trzeba jeszcze wykazać, że istnieje niezerowa wielkość  $\delta = \inf_{\mathbf{y} \in Y} \delta(\mathbf{y}) > 0$ . To jednak wynika z jednostajnej ciągłości funkcji  $f$ . ◆

Wynika z tego wniosek, że wskaźnik stabilności jest ciągłą funkcją parametrów macierzy  $\mathbf{S}$ . Mamy bowiem

$$\gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \right] = -\sup_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{F}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{y})}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \right],$$

gdzie  $\mathbf{P}$  jest pierwiastkiem macierzy  $\mathbf{S}$ . W szczególności wynika stąd wniosek, że dla lokalnie stabilnych układów quasiliniowych istnieje nieskończenie wiele macierzy funkcji Lapunowa w pobliżu optymalnej macierzy dla części liniowej. Mamy bowiem

$$\gamma(\mathbf{S} + \alpha \mathbf{Q}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T (\mathbf{S} + \alpha \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T (\mathbf{S} + \alpha \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{x}} \right] = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \alpha \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}} \right].$$

Ciągłość wskaźnika stabilności względem parametrów macierzy  $\mathbf{S}$  jest dla układów liniowych oczywista, gdyż wskaźnik ten jest algebraiczną funkcją tych parametrów.

### Dodatek 9: (Uwagi o funkcjach Lapunowa)

*Funkcja Lapunowa* w klasycznym rozumieniu jest pojęciem odnoszącym się do pewnego układu dynamicznego

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in R^n \quad (1)$$

w pewnym otoczeniu  $U$  punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Z założenia, funkcja Lapunowa dla takiego układu jest dodatkowo określoną funkcją  $V(\mathbf{x}, t)$  klasy  $C^1$  względem zmiennych  $\mathbf{x}, t$  w otoczeniu  $U$ , spełniającą dodatkowe warunki niezbędne dla dowodów podstawowych twierdzeń dotyczących stabilności rozważanego układu. Tezy tych twierdzeń pozwalają wnioskować o stabilności układu (w sensie Lapunowa lub stabilności asymptotycznej). Wybór funkcji Lapunowa dla danego układu na ogół nie jest jednoznaczny. Funkcja Lapunowa jest jedynie narzędziem umożliwiającym badanie jakościowych własności rozwiązań układu dynamicznego bez konieczności ich znajdowania.

Warunki nakładane na funkcje Lapunowa dla danego układu zależą nie tylko od rodzaju badanej stabilności, ale również w istotny sposób od tego, czy rozpatrujemy funkcje jawnie zależne lub niezależne od czasu. Jawna zależność od czasu w przypadku niestacjonarnym pozwala niekiedy lepiej dostosować funkcje Lapunowa do dynamiki układu. Dzięki temu można uzyskać lepsze oszacowania własności stabilności. Jednak w przypadku układów mechatronicznych, w których mamy na ogół do czynienia z niestacjonarnymi zaburzeniami  $\mathbf{z}$  przynależnymi do pewnych nieprzeliczalnych klas funkcji ograniczonych  $\Gamma(Z)$ , jawne uzależnienie funkcji Lapunowa od czasu (a zatem z konieczności dopasowane do wybranej realizacji zaburzeń  $\mathbf{z} \in \Gamma(Z)$ ) jest mało przydatne. Do tego trzeba by bowiem z góry znać aktualną realizację zaburzeń układu. Wynik takiej analizy nie byłby więc praktycznie użyteczny, bo nie można zbadać wszystkich realizacji. Dlatego w niniejszej rozprawie rozpatrywane są tylko *stacjonarne funkcje Lapunowa*, czyli niezależne od czasu. Ponieważ część stacjonarna układu mechatronicznego jest z założenia układem liniowym o stałych współczynnikach, zawsze mamy zagwarantowane istnienie takich funkcji Lapunowa dla układów mechatronicznych przy dostatecznie małych zaburzeniach.

Ograniczenie rozważań do kwadratowych funkcji Lapunowa niezależnych od czasu jest więc wyrazem pewnej ogólnej filozofii, według której narzędzie do badania danego układu powinno być zależne od układu jako całości, a nie od jego chwilowej realizacji. Zatem funkcja Lapunowa powinna być stacjonarna i najlepiej dopasowana do układu oraz do klasy  $\Gamma(Z)$  wszystkich realizacji zaburzeń. Rozszerzenie metody optymalnych funkcji Lapunowa na przypadek funkcji zależnych od czasu nie jest jednak niemożliwy i być może wskazany.

Wybór niestacjonarnej funkcji Lapunowa mógłby być uzasadniony na przykład wtedy, gdyby zaburzenia skupiały się „w pobliżu” pewnej ich nominalnej realizacji. Wtedy badane byłyby własności układu nominalnego za pomocą takiej funkcji, a



następnie uzyskane wyniki byłyby ekstrapolowane na wszystkie realizacje zaburzeń. Wymagałoby to jednak dowiedzenia twierdzeń zapewniających zasadność takiego postępowania. Ważne jest bowiem, czy pogorszenie się oszacowań na skutek ekstrapolacji nie byłoby większe niż to, co można by uzyskać stosując stacjonarną funkcję Lapunowa dopasowaną do całej klasy zaburzeń.

Brak ogólnej metody wyznaczania funkcji Lapunowa dla układów dynamicznych niekoniecznie jest wynikiem niedostatecznego rozwoju teorii. Znajomość funkcji Lapunowa dla danego układu dostarcza jednak pewnej informacji (również ilościowej) na temat układu. Jeśli niemożliwe jest znalezienie ścisłych rozwiązań dla danego układu, to równie dobrze uzyskanie częściowej, lecz dokładnej informacji ilościowej o zachowaniu się rozwiązań może nie być możliwe. Dobierając mniej lub bardziej przypadkowe funkcje w nadziei, że będą funkcjami Lapunowa dla danego układu, zawsze możemy jednak uzyskać pewne oszacowanie własności stabilności układu.

#### Dodatek 10: (Gry różniczkowe)

Z grą różniczkową mamy do czynienia wtedy, gdy równanie różniczkowe, opisujące jakiś obiekt dynamiczny, zależy od czynników dwójakiego rodzaju: sterowań  $\mathbf{u}$  (sprzyjających osiągnięciu korzystnych wartości pewnego wskaźnika jakości  $J$ ) oraz zaburzeń lub zakłóceń  $\mathbf{z}$  (przeciwdziałających osiągnięciu dobrej jakości  $J$ ). Sama gra różniczkowa jest zatem procesem, jaki rozgrywa się między sterowaniami i zaburzeniami w czasie ruchu opisanego równaniem:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{x} \in X \subset R^n$  jest wektorem stanu układu, natomiast zaburzenia i sterowania są w ogólności funkcjami czasu, przynależnymi do określonych klas funkcji. Zwykle zakłada się, że  $\mathbf{z} \in I(Z) = \{\mathbf{z}: [t_0, +\infty) \rightarrow Z\}$ ,  $\mathbf{u} \in I(U) = \{\mathbf{u}: [t_0, +\infty) \rightarrow U\}$ , gdzie  $Z$ ,  $U$  są pewnymi zbiorami zwartymi w odpowiednich przestrzeniach  $R^k$ ,  $R^m$ .

Wskaźnikiem jakości  $J$  jest zwykle pewien globalny funkcjonal (całka) zależny od całego przebiegu ruchu  $\mathbf{x}(t)$  w określonym odcinku czasu lub między określonymi stanami (początkowym i końcowym) oraz od całego przebiegu funkcji zaburzeń i sterowań  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ . W niniejszej rozprawie będziemy rozważali gry różniczkowe, w których funkcja jakości będzie lokalna, a więc zależna tylko od chwilowych wartości  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ .

Przyjmijmy, nie zmniejszając ogólności, że pożądana jest maksymalna wartość wskaźnika  $J$ . Oznacza to, że sterowania powinny maksymalizować wskaźnik  $J$ , natomiast zaburzenia powinny go minimalizować. Sterowania i zaburzenia występują tu więc w roli dwóch graczy o przeciwstawnych interesach (wygrana jednego jest przegraną drugiego), którzy realizują swoje strategie. Strategią sterowań czy zaburzeń jest określony algorytm doboru ich przebiegu w czasie (uzależnionego na ogół od przebiegu  $\mathbf{x}(t)$  oraz od zachowania się „przeciwnika”). W przypadku

lokalnego wskaźnika jakości strategii sterowań i zakłóceń będą zależne jedynie od chwilowych (aktualnych) wartości  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{z}$ . W ustaleniu optymalnych strategii istotną rolę odgrywa (jak w szachach) „pierwszeństwo posunięcia”, czyli znajomość lub niezajomość strategii (ruchu) przeciwnika. Jeśli zaburzenia są znane (mierzone), wówczas optymalna strategia sterowań można wyznaczyć z zagadnienia

$$\min_{\mathbf{z}} \max_{\mathbf{u}} J . \quad (2)$$

W przypadku lokalnej funkcji jakości  $J$  będzie to na ogół sprzężenie zwrotne  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ . W przeciwnym razie, jeśli musimy dobrać sterowanie nie wiedząc nic o zaburzeniach, musimy założyć najbardziej niekorzystną (antyoptymalną) strategię zaburzeń  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , którą można wyznaczyć z zagadnienia

$$\max_{\mathbf{u}} \min_{\mathbf{z}} J . \quad (3)$$

Podane zagadnienia optymalizacji różnią się tylko kolejnością operacji min i max. W przypadku znanych zaburzeń sterowania (czynnik maksymalizujący wskaźnik  $J$ ) są w uprzywilejowanej pozycji, gdyż mogą dostosować swoją strategię do posunięć przeciwnika (zaburzeń). W drugim przypadku uprzywilejowane są zaburzenia (czynnik minimalizujący jakość  $J$ ). Zatem musi być [D13]

$$\max_{\mathbf{u}} \min_{\mathbf{z}} J \leq \min_{\mathbf{z}} \max_{\mathbf{u}} J . \quad (4)$$

Na ogół jakość ruchu osiągnięta bez znajomości strategii zaburzeń jest więc mniejsza niż wtedy, gdy zaburzenia są znane. Jeżeli zachodzi równość, mówimy, że w grze osiągną jest punkt siodłowy (McKinsey [43]).

### **Dodatek 11:** (Podstawowe nierówności różniczkowe)

W niniejszej rozprawie do analizy jakościowej układów mechatronicznych wykorzystywane są różnego rodzaju nierówności różniczkowe. Poniżej omówione są najważniejsze z nich.

**Twierdzenie 1:** Jeżeli pochodna zupełna funkcji  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{S}}^2$  dodatnio określonej na trajektoriach układu dynamicznego  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  spełnia nierówność

$$\dot{V} \geq -2\sigma V \quad (\text{lub } \dot{V} \leq -2\gamma V), \quad (1)$$

to dla rozwiązań  $\mathbf{x}(t)$  układu zachodzi następujące oszacowanie:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}} \geq \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathbf{S}} \cdot e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad (\text{lub } \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{S}} \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_{\mathbf{S}} \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}). \quad \# (2)$$

*Dowód:* Pierwsza z podanych nierówności (2) wynika z następujących oszacowań:

$$\begin{aligned} \dot{V} \geq -2\sigma V &\Rightarrow \frac{\dot{V}}{V} = \frac{d}{dt} \ln V \geq -2\sigma \Rightarrow \exists \frac{d}{dt} \ln V = -2\sigma + \varphi(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln V(t) - \ln V(t_0) = \ln \frac{V(t)}{V(t_0)} = -2\sigma(t-t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \geq -2\sigma(t-t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow V(t) \geq V(t_0) e^{-2\sigma(t-t_0)} \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \geq \|\mathbf{x}(t_0)\| \cdot e^{-\sigma(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Analogicznie przebiega dowód dla drugiej nierówności. ◆

Twierdzenie 2: Wskaźniki  $\sigma, \gamma$  można wyznaczyć z następujących formuł analitycznych:

$$\sigma = \sigma(\mathbf{S}) = -\inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}, \quad \gamma = \gamma(\mathbf{S}) = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}. \quad \# (3)$$

*Dowód:*

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{V} \geq -2\sigma &\Rightarrow \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\dot{V}}{V} \geq -2\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{1}{2} \inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\dot{V}}{V} = -\inf_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}} \\ \frac{\dot{V}}{V} \leq -2\gamma &\Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\dot{V}}{V} \leq -2\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2} \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\dot{V}}{V} = -\sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Rozwiązania równania  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  spełniają dla każdego  $t \geq t_0$  następującą

Nierówność Wazewskiego: (Gutowski [17], Wazewski [115])

$$\|\mathbf{x}_0\| \exp \left[ -\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right] \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| \exp \left[ -\int_{t_0}^t \Lambda(\tau) d\tau \right], \quad (4)$$

gdzie  $\lambda(t), \Lambda(t)$  oznaczają odpowiednio: najmniejszą i największą wartość własną macierzy symetrycznej  $[\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)]/2$ . W szczególności, gdy macierz  $\mathbf{A}$  jest stała, to wskaźniki

$$\lambda = \lambda_{\min}((\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2), \quad \Lambda = \lambda_{\max}((\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2) \quad (5)$$

nie zależą od czasu, a rozwiązania układu spełniają dla każdego  $t \geq t_0$  następującą nierówność:

$$\|\mathbf{x}_0\| \exp[-\lambda(t-t_0)] \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| \exp[-\Lambda(t-t_0)]. \quad (6)$$

Praktyczna użyteczność nierówności Wazewskiego w badaniu stabilności układów dynamicznych jest jednak ograniczona.

**Przykład 1:** Stabilna macierz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ , opisująca liniowy oscylator tłumiony,

ma wartości własne  $\lambda_{1,2} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ . Zatem wskaźnik stabilności jest równy  $1/2$ .

Jednak macierz  $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ma wartości własne równe  $\lambda_{1,2} = 0, -1$ .

Z nierówności Wazewskiego (6) wynikają następujące oszacowania dla rozwiązań równania  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ :

$$\|\mathbf{x}_0\|e^{-(t-t_0)} \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\|. \quad (7)$$

Jak widać, oszacowanie to niewiele wnosi o własnościach stabilności układu i zbieżności jego trajektorii, bowiem gwarantuje tylko ograniczoność rozwiązań, a więc stabilność w sensie Lagrange'a.

**Dodatek 12:** (O zbieżności i rozbieżności wykładniczej według normy)

Dla wykazania istnienia rozwiązań układu dynamiczne następującej postaci:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), t \geq t_0, \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{F}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

w otoczeniu punktu stacjonarnego  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  zwykle nakłada się na funkcję  $\mathbf{F}$  tzw. warunek Lipschiza następującej postaci:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad (2)$$

gdzie  $L > 0$  nazywa się stałą Lipschiza. Warunek ten powinien zachodzić dla każdej pary punktów z pewnego otoczenia punktu  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$  oraz dla każdego  $t \geq t_0$ . Funkcja spełniająca warunek Lipschiza jest, oczywiście, ciągła. Z kolei, jeżeli funkcja  $\mathbf{F}$  jest różniczkowalna i ma w pewnym otoczeniu początku układu współrzędnych ograniczone pochodne cząstkowe względem współrzędnych  $\mathbf{x}$ , to jest lipschizowska. Warunek Lipschiza zachowuje się, oczywiście, przy zmianie normy, ale ulega przy tym odpowiedniej zmianie stała Lipschiza.

Okazuje się, że warunek Lipschiza nakłada również istotne ograniczenia na szybkość ewentualnej zbieżności lub rozbieżności rozwiązań w otoczeniu punktu stacjonarnego. Mówi o tym następujące

**Twierdzenie 1:** (Sastry [96]) Jeżeli funkcja  $\mathbf{F}$  układu (1) spełnia warunek Lipschiza w punkcie  $\mathbf{x}$  ze stałą Lipschiza  $L$  i jest kawałkami stała ze względu na  $t$ , to rozwiązanie  $\mathbf{x}(t)$  układu spełnia lokalnie następujące oszacowanie:

$$\|\mathbf{x}_0\|e^{-L(t-t_0)} \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\|e^{L(t-t_0)}. \quad \# (3)$$

*Dowód:* Ponieważ  $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ , to

$$\left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}\|^2 \right| = 2\|\mathbf{x}\| \cdot \left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}\| \right| = 2 \left\| \mathbf{x}^T \frac{d}{dt} \mathbf{x} \right\| \leq 2\|\mathbf{x}\| \cdot \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{x} \right\|.$$

Zatem

$$\left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}\| \right| \leq \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{x} \right\| = \|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\| \quad (4)$$

a stąd, na mocy warunku Lipschiza  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)\| \leq L\|\mathbf{x}\|$  mamy  $\left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}\| \right| \leq L\|\mathbf{x}\|$ . Rozwijając moduł, dostajemy ostatecznie:

$$-l\|\mathbf{x}\| \leq \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}\| \leq l\|\mathbf{x}\|. \quad (5)$$

Rozwiązanie powyższych nierówności z warunkiem początkowym  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , daje tezę twierdzenia.  $\blacklozenge$

Z podanego twierdzenia wynika, że dla typowych układów dynamicznych (których funkcja modelu spełnia warunek Lipschiza), rozwiązania nie mogą zbiegać szybciej niż wykładniczo według danej normy (o ile w ogóle zbiegają do punktu stacjonarnego), ale nie mogą też rozbiegać się szybciej niż wykładniczo, przy czym oszacowaniem wskaźnika zbieżności (rozbieżności) jest stała Lipschiza  $L$ .

Graniczne szybkości zbieżności (rozbieżności) według normy są, jak wykazano w tekście Rozprawy, osiągalne dla układów liniowych stacjonarnych i niektórych układów quasilineowych, ale tylko dla odpowiednio dobranych norm. Zatem badanie własności stabilności układów za pomocą wskaźnika zbieżności zdefiniowanego w Rozdziale 3 i poszukiwanie optymalnej funkcji Lapunowa oznacza w istocie poszukiwanie oszacowań najszybszej możliwej zbieżności rozwiązań. To jest jakby wyciąganie z układu jego najlepszych stron, potencjalnych możliwości, które ujawniają się dopiero po użyciu właściwego narzędzia, przyrządu obserwacji, jakim jest właściwa norma w przestrzeni stanu.

Zbieżność (stabilność) wykładnicza według normy rozwiązań modeli układów dynamicznych nie jest więc niczym unikalnym i stanowi oszacowanie własności trajektorii układów dynamicznych. W przypadku układów o zmiennej strukturze (o funkcji  $\mathbf{F}$  przedziałami ciągłej) ta zbieżność jest zachowana, bowiem w każdym z obszarów ciągłości funkcja  $\mathbf{F}$  spełnia warunek Lipschiza, choć może z inną stałą  $L$ .

### **Dodatek 13:** (*Własności supremum i infimum funkcji wielu zmiennych*)

W analizie stabilności metodą funkcji Lapunowa i wskaźnika stabilności często wykorzystuje się pewne własności operacji supremum oraz infimum funkcji wielu zmiennych. Własności te precyzuje następujące

Twierdzenie 1: Dla dowolnych funkcji rzeczywistych  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  określonych dla każdego  $\mathbf{x} \in X \subset R^n$  zachodzą następujące oszacowania:

$$\boxed{\sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x})] + \sup_{\mathbf{x} \in X} [g(\mathbf{x})]}, \quad (1)$$

$$\boxed{\inf_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] \geq \inf_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x})] + \inf_{\mathbf{x} \in X} [g(\mathbf{x})]}, \quad (2)$$

$$\boxed{\sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x})] - \inf_{\mathbf{x} \in X} [g(\mathbf{x})]}, \quad (3)$$

$$\boxed{\sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] \geq \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x})] - \sup_{\mathbf{x} \in X} [g(\mathbf{x})]}. \quad \# (4)$$

*Dowód:* Trzy pierwsze nierówności są oczywiste. Z kolei nierówność czwarta wynika z pierwszej. Mamy bowiem następujące oszacowanie:

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x})] = \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] + \sup_{\mathbf{x} \in X} [g(\mathbf{x})] \Rightarrow (4). \quad \blacklozenge$$

Powyższe nierówności są przydatne do znajdowania oszacowań różnych wskaźników wyrażających się za pomocą operacji *sup* i/lub *inf* dla pewnych funkcji opisujących dynamikę układów mechatronicznych w określonych obszarach przestrzeni stanu. W szczególności nierówności pierwsza i trzecia nadają się do szacowania z dołu wskaźnika stabilności (lub zbieżności wykładniczej) dla układów quasiliniowych z zaburzeniami. Ten fakt był wielokrotnie wykorzystany w rozważaniach niniejszej rozprawy. Z kolei nierówność (4) jest przydatna do szacowania wskaźnika stabilności układów z modyfikacją parametrów lub do wykazania ciągłości wskaźnika stabilności względem parametrów [D8].

Twierdzenie 2: Dla dowolnej funkcji rzeczywistej  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  określonej dla każdego  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y \subset R^m \times R^n$  zachodzi następujące oszacowanie:

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \inf_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \inf_{\mathbf{y} \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad \# (5)$$

*Dowód:*

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\Rightarrow \inf_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \in X} \inf_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq \sup_{\mathbf{x} \in X} \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \in X} \inf_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\Rightarrow \inf_{\mathbf{y} \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} \inf_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \inf_{\mathbf{y} \in Y} \sup_{\mathbf{y} \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \in X} \inf_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \inf_{\mathbf{y} \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

**Definicja 1:** Funkcja rzeczywista  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  określona dla  $\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y} \in Y \subset \mathbb{R}^n$  ma punkt siodłowy w  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in X \times Y$ , jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$\text{i) } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \leq f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \text{ dla każdego } \mathbf{x} \in X,$$

$$\text{ii) } f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \text{ dla każdego } \mathbf{y} \in Y. \quad \#$$

**Twierdzenie 3:** Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dowiedziona wyżej nierówność „minimaksowa” była równością, jest posiadanie punktu siodłowego przez funkcję  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

*Dowód:* [D10] ◆

Filozofia nierówności (5) jest następująca: mamy pewną „jakość” opisaną funkcją  $f$  i dwa przeciwstawne czynniki, z których jeden chce tą jakość maksymalizować za pomocą swoich oddziaływań  $\mathbf{x}$ , a drugi minimalizować za pomocą oddziaływań  $\mathbf{y}$ . Jeśli czynnik maksymalizujący  $\mathbf{x}$  działa najpierw (czyli może dostosować się do każdej strategii czynnika minimalizującego  $\mathbf{y}$ ), to osiągnięta zostanie wyższa jakość, niż w przypadku, gdy czynnik maksymalizujący działa po czynniku minimalizującym. Mamy więc tu do czynienia z pewną grą. Strategią każdego z graczy jest dobór odpowiedniej wartości  $\mathbf{x}$  lub  $\mathbf{y}$ . Jeśli jest kolejność  $\sup$   $\inf$ , to osiągnięta jest wyższa efektywność czynnika minimalizującego, bo jego strategia dostosowana jest do każdego  $\mathbf{x}$  czyli do każdej strategii przeciwnika (czynnika maksymalizującego). Jeżeli jest odwrotna kolejność operacji ( $\inf$   $\sup$ ), to osiągnięta jest wyższa efektywność czynnika maksymalizującego, bo wtedy z kolei jego strategia uwzględnia każdą strategię przeciwnika, czyli każde  $\mathbf{y}$ . W teorii układów mechatronicznych czynnikami konkurencyjnymi będą niekontrolowane zaburzenia i sterowania a funkcją „zysku” – szybkość zbieżności wykładniczej trajektorii układu dynamicznego. Zwykle sterowania będą starały się maksymalizować szybkość zbieżności, natomiast niekontrolowane zaburzenia – ją minimalizować.

Równość zamiast nierówności minimaksowej oznacza pewną niezależność własności funkcji od poszczególnych zmiennych, na przykład, gdy ekstremalna wartość jednej zmiennej nie zależy od drugiej zmiennej. W szczególności równość taka będzie zachodzić, jeśli funkcja będzie postaci  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y})$ .

Na koniec wykażemy równość, która ma zastosowanie na przykład do obliczania wskaźnika zbieżności wykładniczej układów w wielowymiarowych przestrzeniach stanu.

**Twierdzenie 4:** Dla dowolnej funkcji rzeczywistej  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  określonej dla każdego  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  zachodzi oszacowanie:

$$\boxed{\sup_{\mathbf{x} \in X} \sup_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \quad \# (6)$$

*Dowód:*

$$\begin{aligned} \sup_{y \in Y} f(\mathbf{x}, y) \geq f(\mathbf{x}, y) &\Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \in X} \sup_{y \in Y} f(\mathbf{x}, y) \geq \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{y \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} \sup_{y \in Y} f(\mathbf{x}, y) \geq \sup_{y \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, y) \Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \in X} \sup_{y \in Y} f(\mathbf{x}, y) \geq \sup_{y \in Y} \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, y) \end{aligned}$$

Dowód nierówności odwrotnej jest analogiczny. Stąd wynika teza. ♦

#### **Dodatek 14:** (Wskaźniki oceny własności układów mechatronicznych)

Układy mechatroniczne są pewnego typu układami sterowania. Dlatego kwestie oceny ich własności i doboru wskaźników optymalizacji są analogiczne jak dla układów sterowania. Przeważnie jest tak, że wymagania stawiane realnemu układowi sterowania formułujemy najpierw werbalnie, a potem staramy się wyrazić je za pomocą formuł matematycznych, co jest konieczne do przeprowadzenia jego optymalizacji. To tłumaczenie wymogów praktyki na język teorii bywa czasem trudne, a jeżeli możliwe, to często prowadzi do problemów matematycznych. Z kolei dogodne matematycznie, lecz arbitralnie przyjęte kryteria oceny bywają nieprzetłumaczalne bezpośrednio na własności użytkowe układu. Wybór właściwych kryteriów jest więc pewnym niejednoznacznym kompromisem.

Najczęściej stosowane kryteria optymalności układów sterowania można w ogólności podzielić na *kryteria funkcjonalne* i *kryteria funkcyjne* (lokalne). Kryteria (wskaźniki) funkcjonalne, wyrażane zwykle za pomocą całki z kwadratowych funkcji wektorów stanu i sterowania, odnoszą się do trajektorii układu. Wartość wskaźnika funkcjonalnego jest trudno przetłumaczalna na użytkowe (a zwłaszcza chwilowe) własności układu i zależy od całej historii ruchu układu. Chociaż istnieją skuteczne algorytmy znajdowania sterowań optymalnych w takim sensie, to jednak poważną wadą takiego sterowania jest to, że układ zaprogramowany na realizację określonej trajektorii optymalnej może być bardzo wrażliwy na zaburzenia i zakłócenia. Taki układ wytracony z trajektorii optymalnej w zasadzie musi w całości wyliczyć nową trajektorię i nowe sterowanie.

Kryteria funkcyjne, zwykle wyrażane za pomocą funkcji od aktualnych wartości stanu i sterowań, mają tę zaletę, że układ w każdej chwili i dla każdego stanu potrafi określić sobie optymalną wartość sterowania, a więc zawsze i wszędzie „wie”, co ma robić. Wytraconie układu z jakiejś trajektorii nie stanowi wtedy problemu. Poza tym wyznaczenie optymalnego sterowania z kryterium optymalizacji funkcji jest zadaniem stosunkowo prostym i najczęściej rozwiązywalnym analitycznie, co jest rzadko możliwe w przypadku wskaźników funkcjonalnych (Jedynie tzw. problem liniowo-kwadratowy sterowania układu liniowego z kwadratowym funkcjonałem jakości, jest rozwiązywalny w tym sensie, że prowadzi do *macierzowego równania Riccatiego*).



Wskaźniki funkcjonalne są bardziej adekwatne w sytuacjach, gdy układ rzeczywiście ma za zadanie realizować konkretne trajektorie, czyli w zasadzie wykonywać zadania sterowania programowego (w układzie otwartym). Z kolei wskaźniki funkcyjne, ponieważ nie wyróżniają żadnej trajektorii, odpowiadają bardziej wymaganiom odnoszącym się do nieprzeliczalnych klas trajektorii, a więc – wymaganiom jakościowym, stawianym wobec układu sterowania.

Ponieważ układom mechatronicznym rozpatrywanym w niniejszej rozprawie, stawiane są wymagania odnośnie stabilności, zastosowanie do nich lokalnego (punktowego) kryterium optymalności w postaci maksymalizacji szybkości zbieżności wykładniczej trajektorii układu, jest w pełni uzasadnione. Istotny jest przy tym fakt, że w metodzie funkcji Lapunowa takie kryterium nie determinuje jednoznacznie sterowania. Sterowanie jest bowiem zależne od parametrów funkcji Lapunowa, które można dalej optymalizować. Mamy więc tu dwuetapowy problem optymalizacyjny. W pierwszym etapie wyznaczana jest tylko struktura optymalnego sterowania (sprzężenia zwrotnego), a więc klasa sterowań sparametryzowana elementami macierzy funkcji Lapunowa. W drugim etapie dopiero następuje optymalizacja parametrów tej struktury, a więc wybór konkretnego sterowania. Zatem do lokalnego kryterium optymalności należy jeszcze dodać jakieś praktyczne kryterium optymalizacji parametrów sterowania (czyli parametrów macierzy funkcji Lapunowa). Istnieje tu duża swoboda wyboru, dzięki czemu można optymalnie projektować układy mechatroniczne dostosowane do różnych funkcji użytkowych.

#### **Dodatek 15:** (*Energia całkowita układu jako funkcji Lapunowa*)

Realne układy mechaniczne dysypatywne, na przykład liniowe układy drgające z tłumieniem zupełnym, stopniowo tracą swoją energię przy braku zewnętrznych wymuszeń. Układy takie są więc asymptotycznie stabilne. Mówią o tym odpowiednie twierdzenia (Sastry [96]). Jednak energia całkowita nie jest dla nich zbyt dobrą funkcją Lapunowa, bowiem pochodna zupełna energii na ogół nie jest funkcją ujemnie określoną. Aby to pokazać, obliczmy pochodną zupełną funkcji energii całkowitej liniowego układu drgającego (5.1.2) o macierzach  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}) \right] = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = -2\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}. \quad (1)$$

W szczególności pochodna zupełna energii całkowitej liniowego oscylatora tłumionego o jednym stopniu swobody (opisanego równaniem  $m\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + kx = 0$ ) zależy od kwadratu prędkości jak następuje:

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}^2 + kx^2) / 2 = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}[m\ddot{x} + kx] = -2\alpha(\dot{x})^2. \quad (2)$$

Ponieważ prędkość ruchu może osiągać wartość zero dla niezerowego położenia,

pochodna energii, nie jest funkcją określoną ujemnie, lecz tylko funkcją niedodatnią. Dlatego na podstawie funkcji energii można wnioskować tylko o stabilności układu w sensie Lapunowa ale nie o asymptotycznej stabilności, o którą nam tu chodzi. Dla wykazania asymptotycznej stabilności trzeba w takim przypadku stosować mało dogodną analitycznie *zasadę LaSalle'a* (Sastry [96]).

Jak można zinterpretować fakt, że energia nie jest dobrą funkcją Lapunowa dla układu mechanicznego? Fizycznie można by tłumaczyć to następująco: jeśli układ jest stabilny w sensie Lagrange'a tzn. wykonuje ruch ograniczony w przestrzeni położeń, muszą istnieć na trajektorii układu punkty zawracania, w których zerują się niektóre składowe prędkości ruchu. Jeżeli tłumienie jest proporcjonalność do prędkości, pochłanianie (dysypacja) energii mechanicznej w pobliżu takich punktów maleje w pewnych chwilach do zera. Geometrycznie oznacza to, że trajektorie układu są styczne w pewnych punktach do poziomicy energii, która w przypadku układów liniowych jest pewną wielowymiarową elipsoidą. Jest jasne, że taką osobliwą sytuację łatwo jest zaburzyć. Można przypuszczać, że dokonując nieznacznego obrotu i/lub deformacji odpowiedniej elipsoidy stałej energii można sprawić, by wszystkie trajektorie wchodziły do jej wnętrza. Wtedy taka forma kwadratowa byłaby już dobrą funkcją Lapunowa.

Powyższa sugestia może posłużyć do szybkiego znajdowania suboptymalnych funkcji Lapunowa dla układów o wielu stopniach swobody. Co więcej, okazuje się, że dla każdego stabilnego liniowego układu stacjonarnego można znaleźć formę kwadratową, która będzie dla niego funkcją Lapunowa (Rozdział 5).

**Dodatek 16:** (*Kryterium stabilności Hurwiza a kryterium Kharitonova*)

Rozważmy układ dynamiczny opisany poniższym równaniem:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = 0, \quad x = x_1. \quad (1)$$

Układ ten można zapisać w postaci macierzowej Frobeniusa

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}. \quad (2)$$

Wielomian charakterystyczny układu (1) oraz powyższej macierzy  $\mathbf{A}$  ma następującą postać:

$$W(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (3)$$

Dla stabilności układu (1), (2) istotne jest, aby pierwiastki tego wielomianu leżały w lewej półpłaszczyźnie zespolonej.

*Kryterium Hurwiza* mówi, że układ (1) (lub (2)) jest stabilny, (czyli wielomian (3) ma pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zespolonej), wtedy i tylko wtedy, gdy dodatnie są wszystkie wyznaczniki głównej następującej macierzy (Gutowski [17]):

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Stabilność wielomianu można więc badać bez znajdowania jego pierwiastków.

Mniej znane jest *kryterium stabilności Kharitonowa*, które odnosi się do układów (wielomianów) o parametrach przedziałowych, czyli takich, które są stałe, ale ich wartości są znana z dokładnością do pewnego przedziału domkniętego.

Wielomian przedziałowy stopnia  $n$  ma następującą postać:

$$p(s, \mathbf{q}) = [q_0^-, q_0^+] + [q_1^-, q_1^+] \cdot s + \dots + [q_n^-, q_n^+] \cdot s^n, \quad (5)$$

i wyznacza nieprzeliczalną klasę wielomianów o stałych współczynnikach. Dla stabilności układu o parametrach przedziałowych i o wielomianie charakterystycznym (5) istotne jest, aby wszystkie wielomiany należące do klasy (5) były stabilne. Wtedy powiemy, że wielomian (5) jest stabilny.

Kryterium Kharitonowa mówi, że wielomian (5) o parametrach przedziałowych jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z czterech poniższych wielomianów (zwanymi *wielomianami Kharitonwa*) o stałych współczynnikach jest stabilny.

$$\begin{aligned} p^{--}(s) &= q_0^- + q_1^- \cdot s + q_2^+ \cdot s^2 + q_3^+ \cdot s^3 + q_4^- \cdot s^4 + q_5^- \cdot s^5 + \dots \\ p^{-+}(s) &= q_0^- + q_1^+ \cdot s + q_2^+ \cdot s^2 + q_3^- \cdot s^3 + q_4^- \cdot s^4 + q_5^+ \cdot s^5 + \dots \\ p^{+-}(s) &= q_0^+ + q_1^- \cdot s + q_2^- \cdot s^2 + q_3^+ \cdot s^3 + q_4^+ \cdot s^4 + q_5^- \cdot s^5 + \dots \\ p^{++}(s) &= q_0^+ + q_1^+ \cdot s + q_2^- \cdot s^2 + q_3^+ \cdot s^3 + q_4^+ \cdot s^4 + q_5^+ \cdot s^5 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Kryteria Hurwiza i Kharitonowa są z natury swej kryteriami jakościowymi, albowiem orzekają o czymś (o stabilności) bez konieczności znajdowania pierwiastków odpowiednich wielomianów lub rozwiązywania równań.

Twierdzenie Kharitonowa jest w istocie twierdzeniem o skończonej rozwiązalności (za pomocą czterech krytycznych cięć odpowiedniej wiązki) zagadnienia stabilności liniowej inkluzji różniczkowej w klasie funkcji stałych o wartościach w zbiorze zwartym. Zagadnienie stabilności niestacjonarnego układu liniowego (o nieznanach, lecz stałych współczynnikach), czyli zagadnienie odpowiedniej inkluzji, sprowadza się do badania stabilności czterech układów zwyczajnych o współczynnikach stałych i określonych.

Rzadko się o tym pamięta, że warunki Kharitonowa stabilności są adekwatne jedynie w sytuacji, gdy nieznanne parametry układu są stałe w czasie i od siebie niezależne. Jednak w rzeczywistych układach dynamicznych ani jeden, ani drugi warunek na ogół nie jest ściśle spełniony. Bywa tak, że nie można pominąć zmian parametrów układu w czasie oraz niezależności tych zmian. Parametry wielomianu charakterystycznego macierzy układu są bowiem zwykle jedynie funkcjami pewnych niezależnych parametrów fizycznych układu podlegających niekontrolowanym zmianom. Tak się dzieje w szczególności w przypadku układów mechanicznych. Na przykład współczynniki wielomianu charakterystycznego macierzy układu drgającego o wielu stopniach swobody są złożonymi funkcjami sztywności i tłumień układu. Zatem na ogół możemy się spodziewać, że na podstawie kryterium Kharitonowa dostaniemy dość konserwatywne warunki stabilności w przypadku stałych, nieznanych parametrów układu, a w przypadku parametrów zmiennych w czasie w ogóle nie możemy skorzystać z tego kryterium.

## Podsumowanie głównych wyników Rozprawy:

- Opis modeli układów mechatronicznych w języku inkluzji różniczkowych.
- Matematyczny opis obiektywnych (realnych) ograniczeń na zaburzenia, zakłócenia i sterowania w układach mechatronicznych.
- Objasnienie istoty własności ilościowych i jakościowych układów dynamicznych.
- Filozoficzna analiza porównawcza metod badania układów dynamicznych: metody ilościowe a jakościowe, metody pośrednie a bezpośrednie, metody numeryczne.
- Sprecyzowanie pojęcia własności (stabilności) układu dynamicznego, jako modelu układu mechatronicznego, oraz zasad optymalizacji tych własności.
- Sformułowanie koncepcji: wskaźnika stabilności, wskaźnika zbieżności i średniego wskaźnika zbieżności, jako podstawowych narzędzi badania i opisu własności jakościowych układów dynamicznych.
- Formalne i operacyjne uogólnienie pojęcia minimalnej części rzeczywistej wartości własnej macierzy układu liniowego (jako wskaźnika stabilności) na przypadek układów nieliniowych i niestacjonarnych.
- Sformułowanie metody optymalnych funkcji Lapunowa zapewniającej sformalizowane i jednolite ujęcie zagadnień stabilności szerokiej klasy układów stacjonarnych i niestacjonarnych, zależnych od parametrów niepewnych lub przedziałowych, układów z zaburzeniami, zakłóceniami i sterowaniami.
- Sformułowanie i zastosowanie koncepcji wielowymiarowych funkcji Lapunowa do nadania stabilności złożonych układów nieliniowych.
- Wprowadzenie i zastosowanie pojęcia *typu zbieżności wykładniczej* oraz *bifurkacji stabilności* do globalnego opisu własności stabilności układów dynamicznych.
- Nakreślenie możliwości zastosowania *zbiorów rozmytych* do opisu, analizy i syntezy układów mechatronicznych.
- Koncepcje algorytmów genetycznych i procedur przydatnych do wyznaczania i optymalizacji macierzy kwadratowych funkcji Lapunowa oraz optymalizacji sterowania adaptacyjnego.
- Ocena wpływu na własności układów różnego rodzaju nieliniowości takich jak: histereza, strefa nieczułości, luz, opóźnienie, zaburzenia, zakłócenia pomiarowe, które mogą wystąpić w wielowymiarowych modelach realnych układów sterowania.
- Ogólny opis ruchu poślizgowego w wielowymiarowej przestrzeni stanu.
- Uzyskanie wielu oryginalnych rozwiązań (wyników) ścisłych lub oszacowań dla różnych zagadnień i klas układów dynamicznych (dyskretnych oraz ciągłych).

- Określenie i zastosowanie pojęcia *kanonicznej* oraz *regularnej funkcji Lapunowa* do badania stabilności układów wielowymiarowych.
- Znalezienie i zastosowanie ścisłych (regularnych) rozwiązań algebraicznego równania Lapunowa dla macierzy dowolnego wymiaru parzystego.
- Opis koncepcji optymalnych sterowników neuronowych i komputerowych oraz algorytmów adaptacyjnych sterowania, opartych na wynikach uzyskanych metodą optymalnych funkcji Lapunowa.

Ważnym wynikiem Rozprawy, podważającym utarte opinie, jest wykazanie, że:

- analiza jakościowa jest możliwa bez ustalania parametrów układu i macierzy funkcji Lapunowa.
- dla wielu ważnych układów wielowymiarowych możliwe jest ściśle wyznaczenie optymalnych funkcji Lapunowa bez obliczeń numerycznych.
- możliwe jest ściśle wyznaczenie wskaźników stabilności i zbieżności dla wielu nietrywialnych układów nieliniowych i niestacjonarnych.
- możliwe jest wyznaczenie jawnych zależności wskaźników stabilności od pewnych istotnych parametrów dla wielu układów wielowymiarowych, nieliniowych i niestacjonarnych.

Na uwagę zasługują oryginalne pojęcia *typu stabilności* i *bifurkacji stabilności* wprowadzone w Rozdziale 5. Pojęcia te nie są bowiem równoważne lokalnym opisom układów dynamicznych i bifurkacjom rozumianym w klasycznym sensie (Arrowsmith [4]) i chociaż odnoszą się do określonego punktu stacjonarnego, nie są efektami lokalnymi, lecz dotyczą zbieżności wykładniczej trajektorii układu w całej przestrzeni stanu. Nie można więc badać bifurkacji stabilności na podstawie przybliżenia równań układu (ich postaci kanonicznej) w otoczeniu punktu stacjonarnego.

Przedstawiony w Rozprawie sposób zapisu własności stabilności układów oraz bifurkacje stabilności stanowią ogólny sformalizowany i bardziej wnikliwy opis jakościowych własności układów dynamicznych z zaburzeniami. W szczególności na podstawie podanej systematyki typów stabilności (zbieżności) wykładniczej i dopuszczalnych przejść między nimi, można dokonać klasyfikacji bifurkacji stabilności w układach nieliniowych i niestacjonarnych.

Uzasadnione jest więc podjęcie dalszych badań w zakresie zastosowania tych pojęć do opisu i analizy własności stabilności złożonych układów dynamicznych (nieliniowych i niestacjonarnych), a w szczególności – modeli układów mechatronicznych. To jednak wykracza już poza istotę zastosowań metody optymalnych funkcji Lapunowa, czego dotyczy niniejsza rozprawa.

## Uwagi końcowe

W Rozprawie eksploatowana jest metoda bezpośrednia Lapunowa oraz szereg pojęć takich jak: wykładnicza stabilność według normy, kwadratowa stabilność, kwadratowa funkcja Lapunowa, wskaźnik stabilności, wskaźnik zbieżności wykładniczej, które stanowią zestaw podstawowych elementów opisanej metody analizy i syntezy układów mechatronicznych, wobec których stawia się różnorodne wymagania odnośnie własności stabilności. Stosowane w Rozprawie rodzaje stabilności w połączeniu z kwadratowymi funkcjami Lapunowa wydają się najbardziej odpowiednie do badania i opisu własności jakościowych liniowych, quasiliniowych i niestacjonarnych modeli układów mechatronicznych o dominującej części liniowej stacjonarnej. Podobnie, zdefiniowane wskaźniki stabilności i zbieżności wykładniczej okazały się dobrym uogólnieniem wskaźnika zbieżności dla układów liniowych stacjonarnych.

Opisana metoda optymalnych funkcji Lapunowa rodzi określone problemy obliczeniowe dla układów o wielu stopniach swobody, ale daje też duże możliwości uzyskiwania analitycznych ścisłych lub przybliżonych wyników (oszacowań). Zagadnienia teoretyczne opisanej metody nie są jeszcze w pełni zbadane, a jej aspekty obliczeniowe wymagają dopracowania.

Myśląc o uogólnieniach lub modyfikacjach opisanej metody, można rozważyć inne (niż wykładnicza) rodzaje stabilności asymptotycznej oraz szersze klasy funkcji Lapunowa (na przykład formy kwadratowe plus całka z nieliniowości, albo funkcje wymierne). Wiadomo, że tego rodzaju modyfikacje są możliwe i przydatne, ale zakres ich stosowalności, będzie ograniczony do węższych klas modeli układów. Poza tym wiąże się to z pewnymi trudnościami wyznaczania struktury optymalnych sterowań. Podobnie, rezygnacja z kwadratowych funkcji Lapunowa prawdopodobnie wykluczy możliwość uzyskania jakichkolwiek rozwiązań analitycznych i tak zgrabnego opisu własności układów za pomocą normy czy iloczynu skalarnego, określonego przez kwadratowe funkcje Lapunowa.

Warto dodać, że wiele określeń, koncepcji i twierdzeń składających się na metodę optymalnych funkcji Lapunowa nie jest istotnie uzależniona od specyfiki układów mechatronicznych oraz ich modeli. Specyfika ta odgrywa rolę głównie w sformułowaniach i wyborze zagadnień, nazewnictwie oraz interpretacji uzyskiwanych wyników. Z tego względu opisana metoda oraz większość przedstawionych w Rozprawie rozważań i wyników szczegółowych zachowuje swoją aktualność w odniesieniu do szerokiej klasy układów dynamicznych, a nie tylko modeli układów mechatronicznych.

Rozważania ogólne (Rozdziały 1–4) poparte wynikami szczególnymi (Rozdziały 5–10) niniejszej rozprawy pozwalają teraz na dokładniejsze sformułowanie koncepcji metodologii analizy i syntezy układów mechatronicznych, którą zarysowaliśmy w Paragrafie 3.6.

Metodologię analizy i syntezy układów mechatronicznych, wynikającą z metody optymalnych funkcji Lapunowa, można streścić w następujących punktach:

- Opis analityczny modelu układu w języku inkluzji różniczkowych,
- Określenie realnych ograniczeń zaburzeń, zakłóceń i sterowań i ich mierzalności,
- Werbalne określenie praktycznych wymagań jakościowych odnośnie realnego układu. Wyrażenie tych wymagań w języku zbiorów rozmytych oraz lokalnych (funkcyjnych), a nie funkcjonalnych kryteriów.
- Wypisanie ogólnej formuły na wskaźnik zbieżności wykładniczej układu,
- Wykonanie pierwszego etapu optymalizacji, czyli wyznaczenie struktury antyoptimalnej strategii zaburzeń i zakłóceń oraz optymalnej strategii sterowań w postaci sprzężeń zwrotnych zależnych od parametrów nie określonej jeszcze macierzy  $S$  funkcji Lapunowa,
- Podstawienie otrzymanych sprzężeń zwrotnych do modelu dynamiki układu,
- Wnioskowanie jakościowe na podstawie samej postaci modelu układu zamkniętego, bez ustalania parametrów układu i funkcji Lapunowa,
- Wypisanie ogólnej formuły na wskaźnik zbieżności wykładniczej układu zamkniętego,
- Analiza jakościowa wskaźnika zbieżności wykładniczej układu zamkniętego,
- Wyznaczenie zależności (ściśle lub oszacowania) wskaźnika zbieżności układu zamkniętego od istotnych parametrów układu,
- Wnioskowanie jakościowe na podstawie otrzymanej formuły,
- Wyrażenie przyjętych kryteriów optymalności układu za pomocą funkcji (danych jawnie lub w postaci procedury numerycznej) zależnych od parametrów macierzy  $S$ ,
- Przeprowadzenie optymalizacji (analitycznie lub numerycznie) parametrów macierzy  $S$  względem przyjętych kryteriów,
- Wyznaczenie ostatecznej postaci (struktury) modelu układu zamkniętego, wartości wskaźników optymalizacji oraz optymalnych sterowań,
- Badanie analityczne i/lub numeryczne tego modelu,
- Konfrontacja otrzymanych wyników z danymi empirycznymi.

Podana lista punktów jest orientacyjna i na pewno wymaga jeszcze dopracowania. W zależności od konkretnego przypadku pewne punkty mogą być pominięte albo rozwinięte.

Opisana wyżej metodologia może stanowić podstawę paradygmatu określającego zasady formułowania, budowania i badania modeli oraz syntezy sterowań dla klasy układów mechatronicznych rozważanych w niniejszej rozprawie (Rozdział 1). Wysiłek w kierunku opracowania takiego paradygmatu wart jest podjęcia.



## Literatura

1. Ahmadian M., Mojjoram R.H., *Effects of passive and semi-active suspension on body and wheel-hop control*, Journal of Commercial Vehicles, 98, pp. 536-604, 1989.
2. Arrowsmith D.K, Place C.M., *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1990.
3. Aubin J.P., Cellina A., *Differential Inclusions*, Springer-Verlag: New York, 1984.
4. Babakov I.M., *Teorija kaliebanji*, Izdatielstvo Nauka, 1965.
5. Bacciotti A., *Local stabilizability of non-linear control systems*, World Scientific, 1992.
6. Bailey F.N., *The Application of Liapunov's Second Method to Interconnected Systems*, Journal of SIAM Control 3, pp. 443 – 462, 1966.
7. Bartels R.H., Stewart G.W., *Solution to the matrix equation  $AX +XB = C$* , Communications of the ACM, 15(9), pp. 820-826, 1972.
8. Bellman R., *Vector Lyapunov functions*, Journal of SIAM ser. A.I., pp. 32-34, 1962.
9. Bogacz R., Bajer Cz., *Active control of beam vibration under a moving load*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 523-530, No 3, Vol 38, Warsaw, 2000.
10. Bogusz W., *Stateczność Techniczna*, PWN, Warszawa 1972.
11. Buchacz A., Żurek K., *Mechatronic systems in reduction of vibration*, Machine Dynamics Problems, Vol. 28, No 3, pp. 63-68, 2004.
12. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Niemyshkin W.W., *Teorija pokazatieliej Ljapunova*, Moskwa, Nauka, 1966.
13. Cheung J.Y., Mulholland J., *Using neural network as a feedback controller*, Proc. of 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems, Washington, 1989.
14. Crawley E.F., De Luis J., *Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures*, AIAA Journal, 25, pp. 1373-2322, 1987.
15. Flont P., Holnicki-Szulc J., *Adaptive railway track with improved dynamic response*, Second World Congress of STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION, WCSM0-2, Vol.1, pp. 339-344, Warsaw 1997.

16. Guo D.C.L., Huang J., *On quadratic Lyapunov functions*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No 5, pp. 885-890, May 2003.
17. Gutowski R. *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1972
18. Gutowski R., Świetlicki W., *Dynamika i drgania układów mechanicznych*, PWN, Warszawa 1986.
19. Holnicki-Szulc J., *Optimal design of adaptive structures*, Smart Structures, NATO Scientific Series, 3-High Technology, Vol. 65, pp. 97-106, 1998.
20. Hu T., Lin Z., *Properties of the composite, quadratic Lyapunov functions*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No 7, pp. 1162-1167, July 2004.
21. Imiełowski Sz., Ossowski A., *Semi-active vibration control of a column subjected to the general follower force*, SMART'03, Jadwisin 2003.
22. Johansson M., Rantzer A., *Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No 5, pp. 555-559, May 1998.
23. Kaczorek T. *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, Warszawa 1974.
24. Kalman R., Beltram J., *Control system analysis and design via the "second method of Lyapunov" I-continuous time systems*, Trans. ASME. J. of Basic Engineering, pp. 371-393, 1960.
25. Kanianthra J.N., Speckhart F.H., *A technique for determining damping values and damper locations in multi-degree-of-freedom systems*, Design Engineering Technical Conference, Washington, D.C., 1975.
26. J Kejval, M. Valasek, Z. Sika, *Synthesis of controlled vibration suspension*, International Conference MECHATRONICS 2000, pp. 45-48, September 21-23, Warsaw 2000.
27. Kozanecka, *Algorytmy sterowania aktywnych łożysk magnetycznych*, Trzecia Konferencja Naukowo-Techniczna MECHATRONICS 97, pp. 139-145, Warsaw 1997.
28. Krbec P., *Stability through quadratic forms as Lyapunov functions*, International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, 1978.
29. Kundu S., Osyczka A., *Optimization of structural control systems using genetic algorithms*, Second World Congress of STRUCTURAL AND MULTI-DISCIPLINARY OPTIMIZATION, WCSM0-2, Vol.1, pp.375-380, Warsaw 1997.

30. Kurnik W., *Piezoelectric stabilization of Leipholz column*, Machine Dynamics Problems, Vol. 24, No 1, pp. 121-129, 2000.
31. Kurnik W., *Damping of mechanical vibrations utilizing shunted piezoelements*, Machine Dynamics Problems, Vol. 28, No 4, pp. 15-26, 2004.
32. Kurzhansky A.B., Valyi I., *Ellipsoidal techniques for dynamic systems: Control synthesis for uncertain systems*, Dynamics and Control, Vol. 2, No 2, pp. 87-111, 1992.
33. Kurzweil J., *On differential relations*, International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, September, 1978.
34. Lakshmikantham V., *Several Lyapunov functions*, The Fifth International Conference on Nonlinear Oscillations, pp. 268-275, Kiev, 1969.
35. Lee T.Y., Kawashima K., *Semi-active control of non-linear isolated bridges with time delay*, Journal of Structural Engineering, Vol. 133, No 2., pp. 235-241, February 2007.
36. Lepore J.A., Shah H.C., *Dynamic stability of axially loaded columns subjected to stochastic excitation*. AIAA Journal, Vol. 6, No 8, pp. 1515-1521, 1968.
37. Luo N., Rodellar J., Magana M.E., *Decentralized sliding mode control for a two-cable stayed bridge*, Smart Structures, NATO Scientific Series, 3-High Technology, Vol. 65, pp. 183-192, 1998.
38. Magana M.E., Rodellar J., *Active control of cable-stayed bridges*, Smart Structures, NATO Scientific Series, 3-High Technology, Vol. 65, pp. 193-202, 1998.
39. Magiros D.G., *The stability in the sense of Liapunov, Poincare and Lagrange of some precessional phenomena*, Proc. of The Fifth International Conference on Nonlinear Oscillations, pp. 347-357, Kijev 1969.
40. Maiti D.K., Shyju P.P., Vijayaraju K., *Vibration control of mechanical systems using semi-active MR damper*, Smart Structures and Systems, Vol. 2, No 1, pp. 61-80, 2006.
41. Malkin I.G., *Teorija ustoicziwosti dwizenija*, Moskwa 1947.
42. Mao W.J., Chu J., *Quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No 6, pp. 1007-1012, June 2003.

43. McKinsey J.C.C., *Introduction to the theory of games*, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1952.
44. Mohler R.R., *Non-linear systems*, Vol. II, *Application to bilinear control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
45. Muszyńska A., Radziszewski B., *Exponential stability as a criterion of parametric modification in vibration control*, *Nonlinear Vibration Problems*, **20**, pp. 175-191, PWN 1981.
46. Nagarajalah S., ASCE M., Sonmez E., *Structures of semi-active variable stiffness single/multiple tuned mass dampers*, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 133, No 1, pp. 67-77, January, 2007
47. Olas A., *Construction of optimal Lyapunov function for systems with structured uncertainties*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, Issue 1, pp. 167-171, 1994.
48. Olas A., Ahmedkhanlou F., *Globally optimal quadratic Lyapunov functions for robust systems with structured uncertainty*, *Dynamics and Control*, Vol. 4, Issue 1, pp. 5-20, 1994.
49. Olgac N., Holm-Hansen B., *A novel active vibration absorption technique: Delayed resonator*, *Journal of Sound and Vibration* **176**, 93-104, 1994.
50. Olgac N., Holm-Hansen B., *Tunable active vibration absorber: The delayed resonator*, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control* **117**, pp. 513-519, 1995.
51. Olgac N., Elmali H., Hosek M., Renzulli M., *Active vibration control of distributed systems Delayed Resonator with acceleration feedback*, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control* **119**, pp. 380-389, 1997.
52. Olgac N., Jalili N., *Optimal delayed feedback vibration absorber for flexible beam*, *Smart Structures*, NATO Scientific Series, 3-High Technology, Vol. 65, pp. 237-246, 1998.
53. Onoda J., Minesugi M., *Semi active vibration suppression by variable damping members*, *AIAA J.* pp. 355-361, 34, 2, 1996.
54. Osiński Z., *Teoria drgań*, PWN, Warszawa, 1978.
55. Ossowski A., *On the exponential stability of non-stationary dynamical systems*, *Nonlinear Vibration Problems*, **23**, PWN, Warszawa, 1989.
56. Ossowski A., *Zastosowanie sieci neuronowych do stabilizacji układów dynamicznych*, *Zeszyty IPPT*, 32/ 1992.

57. Ossowski A., *Nonlinear stabilization of linear systems*, Archives of Control Sciences, Vol.3 (XXXIX), No 1-2, 1994.
58. Ossowski A., *Robust stability of dynamical systems*, Engineering Transactions, 44, 3-4, Polish Academy of Sciences, 1996.
59. Ossowski A., *On the robustness of optimal nonlinear stabilization of linear systems*, Archives of Control Sciences, Vol.5 (XLI), No 3-4, 1996.
60. Ossowski A., *On the dynamics of a closed-loop system with hysteresis*, Archives of Control Sciences, Vol.6 (XLII), No 3-4, 1997.
61. Ossowski A., *Active parametric modification of a linear oscillator*, 5-th Polish-German Workshop, Mathematical Problems in Dynamical Systems, Zakopane, 1997.
62. Ossowski A., *Active parametric modification of linear vibrating systems*, Smart Structures, NATO Science Series, 3. High Technology - Vol.65, 1998.
63. Ossowski A., *Asymptotic behavior of an oscillator excited by dry friction forces*, Journal of Sound and Vibration, 222(4), 1999.
64. Ossowski A., *Genetyczna optymalizacja neuronowych systemów aktywnej modyfikacji parametrycznej układów dynamicznych*, XI Ogólnopolskie Konwersatorium nt. Sztucznej Inteligencji, AI-14', Siedlce-Warszawa, 1999.
65. Ossowski A., Kotowski S., *Inteligentne układy sterowania polizgowego*, XI Ogólnopolskie Konwersatorium nt. Sztucznej Inteligencji, AI-14', Siedlce-Warszawa, 1999.
66. Ossowski A., *Charakterystyki statystyczne algorytmów ewolucyjnych*, IV Krajowa Konferencja Naukowa nt. Sztucznej inteligencji, SzI-15, Siedlce-Warszawa, 2000.
67. Ossowski A., *Statistics and topological dynamics of evolutionary algorithms*, Workshop - Intelligent Information Systems IX, Bystra, 2000.
68. Ossowski A., Żytkow J., *Geometrical approach to a coherent set of operational definitions*, Intelligent Information Systems, Advances in Soft Computing, Springer -Verlag, Physica, 2000.
69. Ossowski A., *Quadratic stability of dynamical systems with perturbations*, International Journal of Non-linear Mechanics, 35, 2000.
70. Ossowski A., *Neural controller stabilization of multidimensional linear systems*, International Conference, MECHATRONICS 2000, Warsaw, 2000.

71. Ossowski A., *Genetyczna modyfikacja układów dynamicznych*, IV Krajowa Konferencja Naukowa nt. Sztucznej inteligencji, SzI-15, Siedlce-Warszawa, 2000.
72. Ossowski A., *Application of genetic algorithms to adaptive control systems*, International Conference, MECHATRONICS 2000, Warsaw, 2000.
73. Ossowski A., *Stability and control of smart structures*, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, Warsaw, 2000.
74. Ossowski A., *Philosophy of data analysis and modeling of mechanical systems*, Artificial Intelligence in Mechanics, AI-MECH 2001, Gliwice 2001.
75. Ossowski A., Święcicka A., *Statistical Genetic Algorithms*, Intelligent Information Systems, Advances in Soft Computing, Springer-Verlag, Physica, 2001.
76. Ossowski A., Święcicka A., *Multi-valued logic controllers for stabilization of dynamical systems*, International Symposium - Intelligent Information Systems X, Zakopane, 2001.
77. Ossowski A., *Intelligent control of smart structures*, Artificial Intelligence in Mechanics, AI-MECH 2001, Gliwice 2001.
78. Ossowski A., *Vector Lyapunov Functions in the stability analysis of dynamical systems*, XX Polish-Ukrainian Conference, Mathematical Problems in Civil Engineering, Warsaw, 2002.
79. Ossowski A., *Neural networks modifiers of non-linear dynamical systems*, Proceeding of The Sixed International Conference, Neural Networks and Soft Computing, Zakopane, Poland 2002. Springer-Verlag 2003.
80. Ossowski A., *Semi-active control of free beam vibration*, Polish-Ukrainian Transactions, OWPW, "Theoretical Foundations of Civil Engineering", Warszawa, 2003.
81. Ossowski A., *Stability of an elastic column under non-stationary compressing loads*, Engineering Transactions 1-2, Polish Academy of Sciences, 2005.
82. Ossowski A., *Application of differential inclusions in dynamics of structures*, XIV Konferencja Polsko-Ukraińsko-Litewska, "Theoretical Foundations of Civil Engineering", Warszawa-Wilno 2006.

83. Ossowski A., Wołowicz J., *Detection of certain damage in structures by a wavelet method*, Polish-Ukrainian Transactions, OWPW, "Theoretical Foundations of Civil Engineering", Warszawa 2007.
84. Ossowski A., *Estimation of dynamical response of structures on undetermined external excitations*, Polish-Ukrainian Transactions, OWPW, "Theoretical Foundations of Civil Engineering", Warszawa 2007.
85. Pantelides C.P., *Optimum design of actively controlled structures*, Earthquake eng. struct. dyn.19, 583-596, 1990.
86. Połozý G.N., *Metody Przybliżonych Obliczeń*, WNT, Warszawa 1996.
87. Raczýnski S., *On the determination of reachable sets and optimal control by the random method*. IFAC Symposium "Optimization Methods", Varna, Bulgaria, 1974.
88. Raczýnski S., *Differential Inclusions in System Simulation*, Transaction of the SCS, vol.13 (1), pp. 47-54, March 1996.
89. Radziszewski B., Ziemba S., *Stability – the main feature of the mechanical systems*, International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, September, 1978.
90. Radziszewski B., *Badanie stateczności ruchu na podstawie najlepszej funkcji Lapunowa*, Praca zbiorowa: Stateczność i Wrażliwość w Układach Mechanicznych, IPPT PAN, 1978.
91. Radziszewski B., Sławiński A., *Comparative analysis of some criteria of stability of motion*, Nonlinear Vibration Problems, 23, pp. 123-135, PWN 1989.
92. Radziszewski B., *Elementy Teorii Stabilności*, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 1999.
93. Ryan E.P., *Finite-time stabilization of uncertain nonlinear planar system*, Dynamics and Control, Vol. 1, No 1, pp. 83-94, 1991.
94. Sanchez D.A., *Ordinary differential equations and stability theory: An introduction*, A series of books in Mathematics, W.H.Freeman and Company, 1968.
95. Sapiński R., Pilat A., *Semi-active suspension with a MR damper*, Machine Dynamics Problems, 27(2), pp. 125-134, 2003.
96. Sastry S., *Nonlinear Systems, Analysis, Stability and Control*, Springer, 1999.

97. Setaren M., Asce M., *Seniactive tuned mass damper for floor vibration control*, Journal of structural Engineering, Vol. 133, No 2, pp. 242-250, February 2007.
98. Shahruz S.M., T.R.C. Lords, *Upper bounds on responses of linear systems under transient loads*. Journal of Sound and Vibration 227(4), 886-894, 1999.
99. Sierra R. D., Fairen V., *New method for the estimation of domains of attraction of fixed points from Lyapunov functions*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 12, No 11, pp. 2467- 2477, 2002.
100. Slama L., Vorel P., *Optimization of electromagnetic vibro-isolation system*, International Conference MECHATRONICS 2000, pp. 97-100, September 21-23, Warsaw 2000.
101. Skalmierski B., Tylikowski A., *Stabilność układów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1973.
102. Sławiński A., *On some properties of the indices for the estimation of stability degree of mechanical systems*, Nonlinear Vibration Problems, 23, pp. 137-153, PWN 1989.
103. Szadkowski J., *Synthesis of Differential Models by Conversion to the problems of differential games with nature*, Nonlinear Vibration Problems, 17, 1976.
104. Tang Y., Tomizuka M., Guerrero G., Moutenayor G., *Decentralized robust control of mechanical systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No 4, pp. 771-776, April 2000.
105. Turnał A., Rosół M., *Optimisation of vibration acceleration in a quarter car suspension model*, Archives of Control Sciences, Vol. 16(LII), No. 1, pp. 9-18, 2006.
106. Tylikowski A., *Piezoelectric vibration absorber*, Proc. Of the X Polish-German Seminar, Development Trends in Design of Machines and Vehicles, Faculty of Automobiles and Heavy Machinery Engineering, pp. 132-135, October 20-21, Warsaw 1998.
107. Tylikowski A., *Intelligent structures*, International Conference MECHATRONICS 2000, pp. 19-25, September 21-23, Warsaw 2000.
108. Tylikowski A., *Stabilization of plate parametric vibration via distributed control*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 43, 3, pp. 695-706, Warsaw 2005.



109. Uhl T., *Mechatronic system controller design – interdisciplinary approach*, International Conference MECHATRONICS 2000, pp. 75-78, Poland, September 21-23, Warsaw 2000.
110. Valasek, Z. Sika, *Synthesis of controlled vibration suspension*, International Conference MECHATRONICS 2000, pp. 45-48, September 21-23, Warsaw 2000.
111. Vannelli A., Vidyasagar M., *Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems*, Automatica, Vol. 21. No 1, pp. 69-80, 1985.
112. Vinter R.B., Clark J.M.C., James M.R., *The interpretation of discontinuous state feedback control law as n-anticipative control strategies in differential games*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, No 8, pp. 1360-1365, August 2004.
113. Warburton G.R., *Reduction of Vibrations*, John Wiley & Sons Ltd., 1992.
114. Warnitchal P., Hoang N., *Optimal placement and tuning of multiple tuned mass dampers for suppressing multi-mode structural response*, Smart structures and systems, Vol. 2, Np 1, pp. 1-24, 2006.
115. Ważewski T., *Sur un système de commande dont les trajectoires coïncident avec les quasitrajectoires système de commande donné*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Ser. Sci. Math., Astr., Phys, Vol 11, No 3, 1963.
116. Ważewski T., *Sur un principe topologique de l'allure asymptotique de intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math., **20**, 1947.
117. Wojewodin W.W., Kuzniecowa J.A., *Matricy i wycislenieja*, Moskwa, Nauka, 1984.
118. Yamakawa H., Takagi Y., *Simultaneous optimization of topology, shape of structural systems and control systems by genetic algorithms*, Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO-2, Vol.1, pp. 411-416, Warsaw 1997.
119. Zaremba S.K., *Sur les équations au paratingent*, Bull. Sci. Math., 60, Warszawa 1936.
120. Zecevic A.I., Siljak D.D., *Parallel solutions of very large sparse Lyapunov equations by balanced BBD decompositions*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No 3, pp. 612-618, March 1999.

## Summary

The subject of this dissertation, encompassing selected theoretical topics of mechatronics, is focused on qualitative analysis of models of mechatronic systems. The main aim of this work is to provide a universal method of such an analysis and demonstrate its usefulness.

A unified formalized approach to the qualitative analysis of dynamical and control systems based on the second method of Lyapunov and the conception of the stability index is presented. The idea of quadratic Lyapunov functions optimization in the state space as well as in the space of parameters is formulated. The conception of multidimensional optimal Lyapunov functions is described. General aspects of numerical algorithms of Lyapunov functions optimization are discussed in details.

The presented approach is applied to stability analysis of a wide class of dynamical systems (linear stationary systems with determined or interval parameters, quasi-linear systems, non-stationary systems with uncertain parameters or undetermined excitations) as well as to synthesis of optimal control systems with disturbances. In particular, the problem of semi-active and active modification of mechatronic systems with perturbations and uncertain parameters is studied. Special attention is paid on the stability analysis of non-linear vibrating systems with non-stationary perturbations and dry friction. Furthermore, the impact of the typical real non-linearities such as finite amplification, saturation or hysteresis on the mechatronic systems performance is discussed. Exact solutions to certain multidimensional problems are presented.

The concepts of rough sets and differential inclusions are applied to *robust stability* analysis and control synthesis of mechatronic systems

The dissertation can be divided into the two main parts: introduction to the method of optimal Lyapunov functions (Chapters 1 – 4) and applications of the method (Chapters 5 – 10). However, the main theoretical conceptions and original results are contained in Chapters 3 – 9.

The Appendixes 1–16, including additional descriptions, discussions, explanations and generalization of certain topics associated with the main subject of the dissertation, make it more self-contained.