J.Majerczyk-Gómułka
K. Makowski

Wyznaczanie optymalnego sterowania procesami dynamicznymi metodą funkcjonałów Lagrange´a

9/1967

WARSZAWA 1967

Na prawach rękopisu
Do użytku wewnętrznego

Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT-PAN
Nakład 250 egz. Ark.wyd. 2,6. Ark.druk.4
Druk ukończono w sierpniu 1967 r.

Warszawska Drukarnia Naukowa 630/0/67
Warszawa, ul.Śniadeckich 8

Joanna Majerczyk-Gómułka, Karol Makowski

WYZNACZANIE OPTYMALNEGO STEROWANIA PROCESAMI DYNAMICZNYMI METODĄ FUNKCJONAŁÓW LAGRANGE'A

W pracy omówiono podaną przez L. Hurwicza /1/ metodę znajdowania punktu ekstremalnego funkcjonału, określonego na przestrzeni funkcyjnej, przy operatorowych ograniczeniach nierównościowych. Metoda ta jest uogólnieniem metody mnożników Lagrange'a. W oparciu o wprowadzone pojęcia podstawowe podaje się uproszczone dowody zasadniczych twierdzeń oraz proste warunki, ułatwiające sprawdzanie stosowalności metody. Następnie wyprowadza się równania wynikające z tej metody dla przestrzeni C i L^p, $1 \leqslant p < \infty$, oraz omawia ich zastosowanie na przykładzie wyznaczania optymalnego rozdziału obciążeń elektrowni cieplnej i wodnej /2-4/. Dla znajdywania tych równań w konkretnych zadaniach wystarczy w zasadzie znajomość omówionych w pracy pojęć różniczki Frecheta i ogólnej postaci liniowych funkcjonałów nieujemnych, określonych na odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych.

1. Postawienie zagadnienia i pojęcia podstawowe

Wyznaczanie optymalnego sterowania procesami dynamicznymi w wielu zagadnieniach technicznych i ekonomicznych polega na znalezieniu takiej funkcji czasu $x_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, która nadaje największą (albo najmniejszą) wartość tzw. funkcji celu (kryterium jakości) i spełnia pewne ograniczenia nierównościowe (na przykład:

$$a(t) \leqslant x_0(t) \leqslant b(t), \quad c(t) \leqslant \int_0^t x_0(\tau)d\tau \leqslant d(t), \quad e \leqslant \int_0^T x_0(t)dt \leqslant f,$$

gdzie a, b, c, d są zadanymi funkcjami czasu, e, f zaś zadanymi liczbami itp.). Interesujące praktycznie przykłady takich zagadnień były rozpatrywane m. in. w pracach /2-6/. Funkcja celu jest więc pewnym funkcjonałem (tj. jej wartościami są liczby rzeczywiste), określonym na jakiejś przestrzeni funkcyjnej (bowiem jej argumentami są funkcje czasu). Wobec tego omawiany problem sformułować można następująco:

Dany jest funkcjonał $f(x)$, określony na pewnej przestrzeni funkcyjnej X. Należy znaleźć taki punkt [1] x_0 tej przestrzeni, w którym funkcjonał osiąga na przykład maksimum, to jest

$$f(x_0) = \max_{x \in U} f(x), \tag{1}$$

gdzie U (podzbiór przestrzeni X) jesz zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, tzn. zbiorem funkcji czasu, określonych na odcinku $[0,T]$ i spełniających zadane ograniczenia. Ograniczenia te zapiszemy w postaci

$$g(x) \geqslant 0, \tag{2}$$

gdzie g jest operatorem, tj. funkcją, której argumentami są elementy przestrzeni X, a wartościami - elementy innej (lub tej samej) przestrzeni funkcyjnej Z, co zapiszemy symbolicznie wzorem $g : X \to Z$. Element $z = g(x)$, $z \in Z$, jest więc również pewną funkcją czasu, a nierówność (2) oznacza, że nieujemne są wartości funkcji $z(t)$: $z \geqslant 0$, jeśli $z(t) \geqslant 0$ [2].

[1] Elementy przestrzeni funkcyjnej (funkcje) tworzą przestrzeń liniową (można je dodawać i mnożyć przez liczby). Przez analogię do wektorowej przestrzeni skończenie-wymiarowej nazywamy je też punktami lub wektorami.

[2] Piszemy także $z_1 \geqslant z_2$, jeśli $z_1 - z_2 \geqslant 0$. Tak zdefiniowane nierówności dla funkcji mają wszystkie własności nierówności liczbowych (można je dodawać, mnożyć przez liczby nieujemne i przechodzić po obu stronach do granicy), co usprawiedliwia użycie znaku "$\geqslant$".

Na przykład ograniczenie $a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t)$ można zapisać w postaci (2) wprowadzając operator $g(x) = \langle g_1(x), g_2(x) \rangle$, gdzie $g_1(x) = x - a$ i $g_2(x) = b - x$. Przyjmujemy przy tym, że dla pary uporządkowanej $z = \langle z_1, z_2 \rangle$ nierówność $z \geqslant 0$ jest równoważna dwu nierównościom $z_1 \geqslant 0$ i $z_2 \geqslant 0$, podobnie dla n-tki uporządkowanej

$$z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_n \rangle \quad \text{i} \quad z \geqslant 0 \text{ oznacza, że } z_i \geqslant 0, \qquad (3)$$
$$\text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Przestrzeń par uporządkowanych $\langle z_1, z_2 \rangle$, gdzie $z_1 \in Z_1$, a $z_2 \in Z_2$, nazywamy iloczynem kartezjańskim przestrzeni Z_1 przez Z_2 i oznaczamy $Z_1 \times Z_2$. W podanym przykładzie argumenty i wartości operatorów g_1 i g_2 należą do przestrzeni X, $g_1 : X \longrightarrow X$, $g_2 : X \longrightarrow X$, zaś operator g przyjmuje wartości w kartezjańskim iloczynie przestrzeni X przez siebie: $Z = X \times X$.

Z podanych określeń wynika, że jeśli jakaś funkcja x spełnia jednocześnie dwa ograniczenia nierównościowe postaci $g_1(x) \geqslant 0$ i $g_1(x) \geqslant 0$, to spełnia ona ograniczenie równościowe $g_1(x) = 0$, zatem to ostatnie jest szczególnym przypadkiem ograniczenia (2), gdzie $g(x) = \langle g_1(x), -g_1(x) \rangle$.

W dalszym ciągu zakładamy, że X i Z są przestrzeniami Banacha, tj. przestrzeniami unormowanymi zupełnymi [3]. W większości praktycznych zastosowań to założenie jest spełnione, w szczególności dla przestrzeni funkcji ciągłych $C\,[0,T]$, ograniczonych, mierzalnych $L^\infty\,[0, T]$, całkowalnych w p-tej potędze $L^p\,[0, T]$, $1 \leqslant p < \infty$ oraz dla iloczynów kartezjańskich tych przestrzeni. Ponadto zakładamy, że funkcjonał f i operator g są różniczkowal-

---

[3] Dzięki normie określone jest pojęcie granicy: mówimy, że $x_n \to x$, jeśli ciąg liczbowy $\|x_n - x\|$ jest zbieżny do zera. Przestrzenią zupełną nazywamy przestrzeń, w której każdy ciąg Cauchy'ego (tj. taki, że $\|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$) jest zbieżny.

ne w sensie Frecheta. Podstawowe dla przedstawianej poniżej metody pojęcie różniczki Frecheta omawiamy obszerniej - wraz z przykładami obliczeniowymi - w dodatku. Założenie, iż X i Z są przestrzeniami unormowanymi, jest potrzebne głównie dla zdefiniowania tej różniczki, bezpośrednio zaś pojęcie normy nie będzie wykorzystywane.

W rozdziałach 2 i 3 omówimy, podając dowody podstawowych twierdzeń, metodę rozwiązywania postawionego zagadnienia wariacyjnego, która stanowi uogólnienie znanej metody mnożników Lagrange'a. W rozdziale 4 podamy przykład zastosowania tej metody dla wyznaczania optymalnego programu pracy dwu elektrowni (wodnej i cieplnej).

Dla umiejętności stosowania omawianej metody potrzebna jest w zasadzie tylko znajomość treści twierdzeń 1 i 2 (rozdz. 2.2) oraz równań wyprowadzonych w rozdz. 3. Do rozpisania tych równań w konkretnych zadaniach niezbędna jest poza umiejętnością obliczania różniczki Frecheta jedynie znajomość ogólnej postaci funkcjonałów liniowych (tj. addytywnych jednorodnych i ciągłych) nieujemnych, określonych na rozpatrywanych przestrzeniach funkcyjnych (dla przestrzeni C i L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ podajemy ją w następnym podrozdziale). Przy posługiwaniu się warunkami koniecznymi użyteczne być mogą także twierdzenia podane w rozdz. 2.6.

2. Metoda funkcjonałów Lagrange'a

2.1. Metoda mnożników Lagrange'a

Metoda mnożników Lagrange'a w klasycznym zadaniu wyznaczania ekstremum warunkowego funkcji wielu zmiennych f(x) (gdzie $x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, tj. X jest przestrzenią n-wymiarową) przy k ograniczeniach postaci

$$g_i(x) = 0\ , \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad k < n, \tag{4}$$

(gdzie g_i są funkcjami rzeczywistymi n zmiennych) polega, jak wiadomo, na znajdowaniu układu k liczb $\lambda_1^o, \lambda_2^o, \ldots, \lambda_k^o$ (mnożników Lagrange'a) i n składowych x_o^j wektora x_o, spełniających równanie (4) i równanie

$$df(x_o; x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^o \cdot dg_i(x_o; x) = 0 \tag{5}$$

dla każdego x, gdzie $df(x_o; x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_o)}{\partial x_j} x_j$; $dg_i(x_o; x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(x_o)}{\partial x_j} x_j$ (te różniczki zupełne odpowiadają różniczkom Frecheta). Ponieważ równanie (5) musi być spełnione dla każdego x, jest ono równoważne n równaniom

$$\frac{\partial f(x_o)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^o \frac{\partial g_i(x_o)}{\partial x_j} = 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, n , \tag{5a}$$

które razem z k równaniami $g_i(x_o) = 0$ pozwalają wyznaczyć n+k niewiadomych λ_i^o i x_o^j. Jeśli ograniczenia mają postać $g_i(x) \geqslant 0$ $i = 1, 2, \ldots, k$ (tu już nie musi być $k < n$), to zgodnie z tzw. różniczkowymi warunkami Kuhna-Tuckera /7, 8/, obok równań (5a) mamy do dyspozycji zamiast równań (4), które nie muszą już być oczywiście spełnione w punkcie x_o, następujące warunki:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_i^o \geqslant 0 & (6) \\ \lambda_i^o g_i(x_o) = 0 & (7) \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, \ldots, k .$$

Wprowadzając tzw. funkcję Lagrange'a w postaci $\Phi(x, \lambda) =$

$= f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$, możemy równanie (5) zapisać krótko w postaci $d_x \Phi[(x_0, \lambda_0); x] = 0$ dla każdego x. Podobnie można zapisać równanie (7): $d_\lambda \Phi[(x_0, \lambda_0); \lambda_0] = 0$ [4]. Przez λ (odpowiednio λ_0) oznaczyliśmy tu wektor $\lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \rangle$, który wyznacza funkcjonał liniowy, określony na k-wymiarowej przestrzeni Z wartości operatora $g(x) = \langle g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x) \rangle$ wzorem $\lambda(z) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i$.

W pracy /1/ L. Hurwicz udowodnił, że warunki typu (5), (6) oraz (7) mogą być uogólnione na przypadek nieskończenie wielowymiarowych przestrzeni funkcyjnych X i Z.

2.2. Funkcja Lagrange'a i funkcjonały nieujemne

Aby podać dwa podstawowe twierdzenia L. Hurwicza, wprowadzimy następujące pojęcia:

Definicja 1. Funkcją Lagrange'a nazywamy wyrażenie

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \lambda[g(x)], \tag{8}$$

gdzie λ jest funkcjonałem liniowym, określonym na przestrzeni Z wartości operatora g (sama funkcja Lagrange'a jest funkcjonałem liniowym tylko wówczas, gdy f i g są liniowe).

W dalszym ciągu będą nas interesowały jedynie nieujemne funkcjonały λ.

Definicja 2. Funkcjonałem nieujemnym $\lambda \geqslant 0$ nazywamy funkcjonał liniowy, który na wszystkich argumentach nieujemnych przyjmuje

[4] Symbol $d_x \Phi[(x_0, \lambda_0); x]$ (i odpowiednio $d_\lambda \Phi[(x_0, \lambda_0); \lambda_0]$) oznacza różniczkę funkcji w punkcie (x_0, λ_0) względem przyrostu $\langle x, 0 \rangle$ (odpowiednio $\langle 0, \lambda_0 \rangle$).

nieujemne wartości: jeśli $z \geqslant 0$, to $\lambda(z) \geqslant 0$ (oczywiście $z \geqslant 0$ w sensie omówionym przy nierówności (2), bowiem z jest tu elementem dowolnej przestrzeni).

Aby móc rozpisać wyrażenie (8) przy danych f i g ,należy znać ogólną postać funkcjonałów liniowych nieujemnych, określonych na rozpatrywanych przestrzeniach.

Funkcjonały nieujemne, określone na przestrzeni funkcji całkowalnych w p-tej potędze, $1 \leqslant p < \infty$, mają postać całki

$$\lambda(z) = \int_0^T z(t)\ \lambda(t)\ dt, \tag{9}$$

gdzie $\lambda(t)$ jest funkcją o wartościach nieujemnych prawie wszędzie ($\lambda(t) \geqslant 0$ dla prawie każdego $t \in [0, T]$ [5]), całkowalną w potędze q , $q = p/(p - 1)$.

Funkcjonały nieujemne określone na przestrzeni funkcji ciągłych mają postać całki Stieltjesa:

$$\lambda(z) = \int_0^T z(t)\ d\lambda(t), \tag{10}$$

gdzie $\lambda(t)$ jest niemalejącą funkcją prawostronnie ciągłą o wahaniu ograniczonym /9/ [6] .

---

[5] Oznacza to, że funkcję należącą do L^p uważamy za nieujemną, nawet jeśli przyjmuje ona ujemne wartości na zbiorze miary Lebesgue'a zero, bowiem w tych przestrzeniach dwie funkcje przyjmujące różne wartości na zbiorze miary zero uważamy za jedną i tę samą funkcję.

[6] Funkcjonały postaci (9) i (10) są oczywiście nieujemne. Z drugiej strony każdy funkcjonał nieujemny (na odpowiedniej przestrzeni) daje się przedstawić w tej właśnie postaci, a zatem jest wyznaczony przez odpowiednią funkcję $\lambda(t)$ (podobnie jak w przestrzeni n-wymiarowej przez n liczb λ_i: $\lambda < x_1, x_2, \ldots, x_n> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$). Stąd pochodzi nazwa ogólnej postaci funkcjonału. Bez założenia, że $\lambda(t)$ są nieujemne lub niemalejące wzory (9) oraz (10) stanowią ogólną postać funkcjonałów liniowych /10/.

2.3. Przypadek wielu ograniczeń

W praktycznych zagadnieniach mamy zwykle kilka ograniczeń nierównościowych $g_i(x) \geqslant 0$, $g_i : X \rightarrow Z_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Dzięki umowie określonej wzorem (3) możemy, analogicznie do uprzedniego, zapisać je w postaci (2) przy pomocy operatora g wyznaczonego wzorem

$$g(x) = \langle g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x) \rangle , \tag{11}$$

którego wartości leżą w iloczynie kartezjańskim przestrzeni Z_i ; $g : X \rightarrow Z$; $Z = Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_k$.

W związku z tym musimy znać postać funkcjonałów liniowych oraz funkcjonałów nieujemnych, określonych na takim iloczynie. Dowolny funkcjonał liniowy l , określony na iloczynie kartezjańskim X dowolnych przestrzeni Banacha X_j , $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ jest wyznaczony przez n-tkę funkcjonałów liniowych l_j , $l = \langle l_1, l_2, \ldots, l_n \rangle$ prostym wzorem

$$l(x) = \sum_{j=1}^{n} l_j(x_j), \quad x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle , \tag{12}$$

gdzie l_j oznacza funkcjonał liniowy określony na przestrzeni X_j. Zbiór wszystkich funkcjonałów liniowych, określonych na przestrzeni Banacha X nazywamy <u>przestrzenią sprzężoną</u> do X i oznaczamy X^* . Piszemy zatem $l \in X^*$ i $l_j \in X_j^*$. Na przykład we wzorze (8) $\lambda \in Z^*$, a dla operatora (11) funkcja Lagrange'a ma postać

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[g_i(x_i) \right] , \text{ gdzie } \quad \lambda_i \in Z_i^* .$$

Jeśli określony wzorem (12) funkcjonał l jest <u>nieujemny</u>, to <u>nieujemne</u> są <u>wszystkie</u> funkcjonały l_j , zatem wzór (3) obowiązuje również dla funkcjonałów.

2.4. Twierdzenie o warunkach dostatecznych

Podamy obecnie proste i bardzo ważne dla zastosowań twierdzenie o warunkach dostatecznych, wprowadzając dla sformułowania jego założenia następujące określenie:

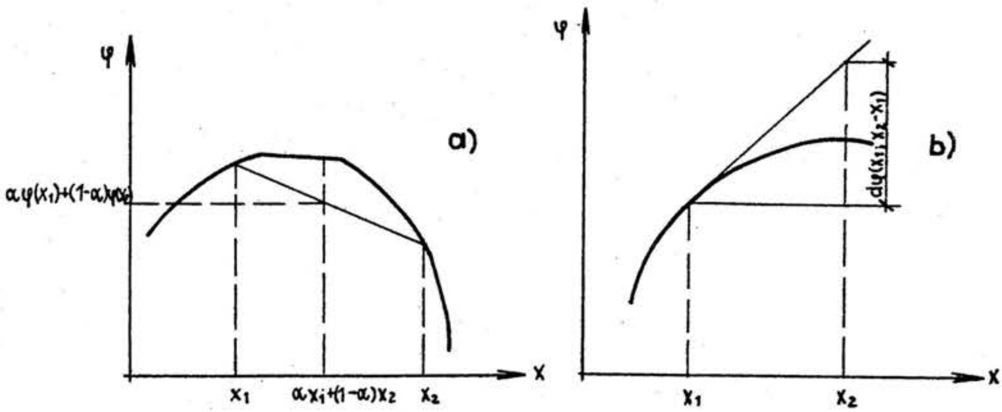
Definicja 3. Funkcją wklęsłą nazywamy funkcję spełniającą zależność

dla dowolnych x_1, x_2

$$\varphi\left[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right] \geqslant \alpha\varphi(x_1) + (1-\alpha)\varphi(x_2), \quad (13)$$

$$0 < \alpha < 1$$

gdzie α jest liczbą rzeczywistą. Oznacza to, że wykres funkcji φ leży nie niżej niż cięciwa łącząca punkty x_1 i x_2 (rys.1a).



Rys. 1

Funkcja φ może tu być zarówno funkcjonałem, jak i operatorem - w tym ostatnim przypadku znak " $\geqslant$ " rozumiemy w takim sensie jak w nierówności (2). Funkcjonał nazywamy ściśle wklęsłym, jeśli nierówność (13) jest spełniona ze znakiem " $>$ ".

Funkcję nazywamy <u>wypukłą</u>, jeśli we wzorze (13) nierówność ma zwrot przeciwny (zatem jeśli $\varphi(x)$ jest wklęsła, to $-\varphi(x)$ jest wypukła) [7].

Łatwo sprawdzić na podstawie definicji różniczki i wzoru (13), że dla funkcji wklęsłych i różniczkowalnych zachodzi oszacowanie

$$\varphi(x_2) \leqslant \varphi(x_1) + d\varphi(x_1; x_2 - x_1), \tag{14}$$

które mówi, że jeśli argument doznaje przyrostu $\Delta x = x_2 - x_1$, to <u>część liniowa</u> przyrostu funkcji $d\varphi(x_1; x_2 - x_1)$ jest <u>nie mniejsza niż przyrost wartości</u> funkcji $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ (rys. 1b).

<u>Twierdzenie</u> 1. Załóżmy, że funkcjonał f i operator g (wzory (1) i (2)) są wklęsłe [8] i różniczkowalne (w sensie Frecheta na przestrzeni X). Wówczas, jeśli istnieje taki punkt x_0 i funkcjonał liniowy $\lambda_0 \in Z^*$, że spełnione są warunki:

dla każdego $x \in X$

$$d_x\Phi\left[(x_0; \lambda_0); x\right] = df(x_0;x) + \lambda_0\left[dg(x_0;x)\right] = 0, \tag{15}$$

$$\lambda_0 \geqslant 0 \tag{16}$$

$$\lambda_0\left[g(x_0)\right] = 0, \tag{17}$$

$$g(x_0) \geqslant 0, \tag{18}$$

to zachodzi zależność (1) przy ograniczeniach (2).

<u>Dowód</u>. Wobec (18) $x_0 \in U$. Dzięki założeniu wklęsłości f i g zgodnie z (14) zachodzą oszacowania:

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x_0) + df(x_0; \bar{x} - x_0),$$

---

[7] Jedynymi funkcjami zarazem wklęsłymi i wypukłymi są oczywiście funkcje liniowe.

[8] Jeśli operator g jest wklęsły, to zbiór U jest <u>wypukły</u> (tj. wraz z każdymi dwoma punktami zawiera łączący je odcinek: jeśli $x_1, x_2 \in U$, to $[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \in U$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$).

$$\lambda_0[g(\bar{x})] \leqslant \lambda_0[g(x_0)] + \lambda_0[dg(x_0; \bar{x} - x_0)],$$

gdzie $\bar{x}$ jest dowolnym elementem przestrzeni X. Dodając te nierówności stronami otrzymujemy

$$f(\bar{x}) + \lambda_0[g(\bar{x})] \leqslant f(x_0) + \lambda_0[g(x_0)] + d_x\Phi[(x_0, \lambda_0); \bar{x} - x_0].$$

Korzystając z (15) przy podstawieniu $x = \bar{x} - x_0$ otrzymujemy stąd

$$f(\bar{x}) + \lambda_0[g(\bar{x})] \leqslant f(x_0) + \lambda_0[g(x_0)],$$ [9]

a korzystając z (17)

$$f(x_0) \geqslant f(\bar{x}) + \lambda_0[g(\bar{x})].$$

Ale dla każdego $\bar{x} \in U$ wobec (2) i (16) $\lambda_0[g(\bar{x})] \geqslant 0$, zatem odrzucając ten składnik po prawej stronie powyższej nierówności możemy ją tylko wzmocnić, czyli dla wszystkich $\bar{x}$ spełniających ograniczenia (2) jest $f(x_0) \geqslant f(\bar{x})$, c.b.d.d. [10].

Nieujemny funkcjonał $\lambda_0 \in Z^*$, dla którego zachodzą zależności (15) - (18), nazywamy funkcjonałem Lagrange'a. Stąd też pochodzi proponowana nazwa omawianej metody [11].

---

[9] Nierówność ta mówi, że $\Phi(x, \lambda_0) \leqslant \Phi(x_0, \lambda_0)$, tj. w punkcie (x_0, λ_0) funkcja Lagrange'a ma bezwzględne maksimum po x. Równie łatwo można pokazać, że w tym punkcie funkcja (8) ma minimum po nieujemnych λ, dlatego nazywa się on nieujemnym punktem siodłowym.

[10] Twierdzenie to zostało udowodnione w pracy /1/ w ogólniejszej postaci, jednak przy nieściśle sformułowanych założeniach.

[11] Nazwa ta jest usprawiedliwiona tym, że warunki (15) - (17) stanowią bezpośrednie uogólnienie warunków (5) - (7), w których funkcjonał Lagrange'a wyznaczał wektor mnożników Lagrange'a λ_i^0.

2.5. Twierdzenie o warunkach koniecznych

Przy konstruowaniu rozwiązania optymalnego w praktycznych obliczeniach wygodnie jest także wiedzieć, że funkcje $x(t)$ nie spełniające warunków (15) - (18) nie mogą być optymalnymi, tj. korzystać z tych warunków jako koniecznych. Poniżej w twierdzeniu 2 udowodnimy, że warunki (15) - (18) są warunkami koniecznymi bez założenia wklęsłości f i g. Jednak pewne założenia odnośnie do własności f i g w punkcie ekstremalnym x_0 (których sens omówimy dokładniej w podrozdz. 2.6) muszą być spełnione. Wprowadzimy obecnie pojęcia pozwalające na sformułowanie tych założeń oraz podamy trzy lematy.

Definicja 4. Wariacją dopuszczalną ze względu na ograniczenie (2) w punkcie x^0 nazywamy taki wektor x, który spełnia ograniczenia w liniowym przybliżeniu, tj. dla którego zachodzi zależność

$$g(x^0) + dg(x^0; x) \geqslant 0 . \tag{19}$$

Definicja 5. Element $x^0 \in X$ nazywamy punktem regularnym operatora g, jeśli dla każdej wariacji dopuszczalnej x w punkcie x^0 istnieje krzywa wychodząca z x^0, styczna do x w tym punkcie i leżąca w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.

Ponieważ krzywa w przestrzeni Banacha jest wyznaczona przez pewną funkcję ψ zmiennej rzeczywistej s $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$, $s_0 > 0$) o wartościach w tej przestrzeni, żądamy tu istnienia takiej funkcji $\psi : [0, s_0] \to X$, aby [12)]

$$\psi(s) \in U , \quad \psi(0) = x^0 , \quad d\psi(0; 1) = x . \tag{20}$$

Operator g nazwiemy regularnym, jeśli każdy punkt zbioru rozwiązań dopuszczalnych $x \in U$ jest punktem regularnym tego opera -

[12)] Warunki (20) są równoważne podanym w /1/ i mają postać nieco dogodniejszą w obliczeniach.

tora. Definicję tę omówimy szerzej w podrozdz. 2.6, obecnie zaś na jej podstawie udowodnimy następujący

Lemat 1. Załóżmy, że x_0 jest punktem maksymalnym funkcjonału f i regularnym operatora g. Wówczas zachodzi zależność

$$\text{jeśli} \quad g(x_0) + dg(x_0; x) \geqslant 0, \quad \text{to} \quad -df(x_0; x) \geqslant 0, \tag{21}$$

tj, jeśli argument funkcjonału doznaje przyrostu o wielkość wariacji dopuszczalnej x, to liniowa część przyrostu funkcjonału jest niedodatnia (w liniowym przybliżeniu funkcjonał nie zwiększa swej wartości).

Dowód. Z definicji 5 wobec założenia regularności wynika istnienie funkcji rzeczywistej $F(s) = f\,[\psi(s)]$. Ponieważ z założenia w punkcie x_0 funkcjonał osiąga swe maksimum na zbiorze U, a $\psi(0) = x_0$ (wzór (20)), to funkcja $F(s)$ osiąga maksimum w punkcie $s = 0$. Wobec tego $dF(0; 1) \leqslant 0$ (różniczka ta jest liczbowo równa wartości prawostronnej pochodnej funkcji F w zerze) a zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej

$$dF(0; 1) = df\,[\psi(0); d\psi(0; 1)] = df(x_0; x),$$

c.b.d.d.

Zależność (21) mówi, że funkcjonał liniowy

$$l_1(x) = -df(x_0; x) \tag{22}$$

przyjmuje nieujemne wartości dla tych x, dla których nieujemne wartości przyjmuje operator

$$G(x) = g(x_0) + dg(x_0; x), \tag{23}$$

to jest

$$\text{jeśli} \quad G(x) \geqslant 0, \quad \text{to} \quad l_1(x) \geqslant 0. \tag{24}$$

Na podstawie zależności (21) dla uzyskania wzorów (15)-(17) należy teraz wywnioskować istnienie takiego funkcjonału Lagrange'a $\lambda_0 \geqslant 0$ (wzór (16)), że spełnione będzie równanie (15), tj. równość

$$l_1(x) = \lambda_0\left[L_1(x)\right]. \tag{25}$$

Przeprowadzeniu takiego wnioskowania przeszkadza fakt, że operator G (wzór (23)) nie jest liniowy; jest on sumą operacji liniowej

$$L_1(x) = dg(x_0; x) \tag{26}$$

i przekształcenia stałego $g(x_0)$. W związku z tym określimy przekształcenie

$$L\langle s, x\rangle = \langle s, sg(x_0) + dg(x_0; x)\rangle, \tag{27}$$

gdzie s jest liczbą rzeczywistą. Przekształcenie L jest już przekształceniem liniowym przestrzeni $R \times X$ w przestrzeń $R \times Z$ (gdzie R oznacza zbiór liczb rzeczywistych). Funkcjonał (22) można oczywiście uważać za określony również na przestrzeni $R \times X$ wzorem

$$l\langle s, x\rangle = -df(x_0; x). \tag{28}$$

Okazuje się, że dla operatora L zachodzi zależność analogiczna do (24), o czym mówi

Lemat 2. Przy założeniach lematu 1 zachodzi zależność

$$\text{jeśli } L\langle s, x\rangle \geqslant 0, \text{ to } l\langle s, x\rangle \geqslant 0. \tag{29}$$

Dowód tego lematu podajemy w dodatku.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\langle s, x\rangle = w, \qquad R \times X = W,$$

przy użyciu których zależność (29) przepiszemy w postaci

$$\text{jeśli} \quad L(w) \geqslant 0, \quad \text{to} \quad l(w) \geqslant 0\,, \tag{30}$$

gdzie $w \in W$. Dzięki temu, że w zależności (30) występuje już liniowy operator L, można na jej podstawie przy pewnym dodatkowym założeniu wnioskować istnienie odpowiedniego funkcjonału Lagrange'a. Sprecyzujmy obecnie to założenie.

Definicja 6. Ciąg funkcjonałów $w_n^* \in W^*$ nazywamy słabo zbieżnym do funkcjonału $w^* \in W^*$, jeśli dla każdego $w \in W$ ciąg liczbowy wartości $w_n^*(w)$ jest zbieżny do $w^*(w)$:

$$w_n^* \xrightarrow{sł} w\,, \quad \text{jeśli} \quad w_n^*(w) \longrightarrow w^*(w) \quad \text{dla każdego} \quad w\,. \tag{31}$$

Definicja 7. Zbiór funkcjonałów $Q \subset W^*$ nazywamy słabo domkniętym, jeśli wraz z każdym słabo zbieżnym ciągiem funkcjonałów zawiera on granicę tego ciągu, tj.

$$\text{jeśli} \quad w_n^* \in Q \quad \text{i} \quad w_n^* \xrightarrow{sł} w^*, \quad \text{to} \quad w^* \in Q\,. \tag{32}$$

Definicję tę omówimy szerzej w podrozdz. 2.6.2, obecnie zaś na jej podstawie sformułujemy podstawowy dla omawianej teorii

Lemat 3 (Minkowskiego-Farkasa). Oznaczmy przez Q_L zbiór wszystkich funkcjonałów w^*, które dają się przedstawić następująco:

$$w^*(w) = v^*\left[L(w)\right], \quad v^* \geqslant 0\,, \tag{33}$$

gdzie v^* jest funkcjonałem liniowym nieujemnym, określonym na przestrzeni wartości operatora L, tj. na $R \times Z$:

$$v^* \in V^*, \qquad V = R \times Z\,.$$

Jeśli zbiór Q_L jest słabo domknięty, to należy do niego każdy funkcjonał w^* o własności (30) [13], istnieje zatem takie $v_0^* \geqslant 0$,

[13] Oczywiście funkcjonały należące do Q_L mają własność (30). Zatem jeśli zbiór Q_L jest słabo domknięty, to zależności (30) i (33) wyznaczają po prostu te same funkcjonały.

że w szczególności funkcjonał (28) można przedstawić w postaci

$$l(w) = v_0^*[L(w)] . \tag{34}$$

Dowód tego lematu podajemy w dodatku.

Obecnie możemy już sformułować i udowodnić twierdzenie o warunkach koniecznych.

Twierdzenie 2. Załóżmy, że :

1) w punkcie x_0 funkcjonał f osiąga maksimum warunkowe (zachodzi zależność (1) przy ograniczeniu (2));

2) punkt x_0 jest punktem regularnym operatora g (definicja 5) ;

3) zbiór Q_L (wzór (33)) jest słabo domknięty (definicja 7), przy czym przekształcenie liniowe $L : W \to V, W = R \times X, V = R \times Z$ jest określone wzorem

$$L\langle s, x\rangle = \langle s, sg(x_0) + dg(x_0; x)\rangle . \tag{35}$$

Wówczas istnieje taki funkcjonał Lagrange'a λ_0 , że spełnione są warunki (15) - (18).

Dowód. Warunek (18) musi oczywiście być spełniony wobec (2). Dzięki założeniu 1 i 2 z lematów 1 i 2 wiemy, że zachodzi zależność (30). Wobec tego zgodnie z lematem 3 istnieje takie $v_0^* \in V^*$, że

$$l\langle s, x\rangle = v_0^*(L\langle s, x\rangle), \tag{36}$$

przy czym

$$v_0^* \geqslant 0 . \tag{37}$$

Zgodnie ze wzorem (12) mamy

$$v_0^*\langle s, z\rangle = \mu s + \lambda_0(z),$$

gdzie μ jest liczbą, a $\lambda_0 \in Z^*$; warunek (37) daje - zgodnie z (3) -

$$\mu \geqslant 0 \ , \quad \lambda_0 \geqslant 0, \tag{38}$$

skąd (16). Przepisujemy (36) korzystając z określeń (28) i (35):

$$-df(x_0; x) = \mu s + \lambda_0\left[sg(x_0) + dg(x_0; x)\right]. \tag{36a}$$

Podstawiając $s = 0$ otrzymujemy

$$-df(x_0; x) = \lambda_0\left[dg(x_0; x)\right],$$

czyli (15), a podstawiając $x = 0$, $s = 1$ otrzymujemy

$$0 = \mu + \lambda_0\left[g(x_0)\right].$$

Zgodnie ze wzorami (38) i (18) oba składniki po prawej stronie tej ostatniej równości są nieujemne, a zatem oba muszą być równe zeru, co daje zależność (17) i kończy dowód [14].

W pracach /1/, /3/ i /4/ wyróżniano dodatkowo, poza ograniczeniem typu (2): $\tilde{g}(x) \geqslant 0$, $\tilde{g} : X \rightarrow \tilde{Z}$, występujące często w praktyce ograniczenie

$$x \geqslant 0, \tag{39}$$

(które oznacza, że rozwiązania szukamy wśród funkcji o wartościach nieujemnych), a warunki typu (15) - (18) formułowani dla funkcji Lagrange'a

$$\tilde{\Phi}(x, \tilde{\lambda}) = f(x) + \tilde{\lambda}\left[\tilde{g}(x)\right], \tag{40}$$

tj. nie uwzględniającej tego ograniczenia, w następującej postaci

---

[14] Przytoczony dowód jest prostszy niż podany w /1/ głównie dzięki uproszczeniu dowodu lematu 2 (tj. przejścia od zależności (21) do zależności (29) - por. dodatek). Dla przypadku ograniczeń równościowych $g(x) = 0$ (kiedy oczywiście nie zachodzą warunki (16) i (18)) twierdzenie to na innej drodze (na podstawie tzw. twierdzenia o funkcji uwikłanej) udowodnił L.A. Lusternik /10/.

$$d\tilde{\Phi}\left[(x_0, \tilde{\lambda}_0); x_0\right] = 0, \tag{41}$$

dla każdego $x \geqslant 0$ $\quad d\tilde{\Phi}\left[(x_0, \tilde{\lambda}_0); x\right] \leqslant 0,$ (42)

$$d_{\tilde{\lambda}}\tilde{\Phi}\left[(x_0, \tilde{\lambda}_0); \tilde{\lambda}_0\right] = 0, \tag{43}$$

dla każdego $\tilde{\lambda} \geqslant 0$ $\quad d_{\tilde{\lambda}}\tilde{\Phi}\left[(x_0, \tilde{\lambda}_0); \tilde{\lambda}\right] \geqslant 0 .$ (44)

Zarówno warunki Kuhna-Tuckera, jak i warunki Hurwicza są zwykle zapisywane właśnie w postaci (41) - (44) (z dodatkowym żądaniem $x_0 \geqslant 0$, $\tilde{\lambda}_0 \geqslant 0$)[15]. Warunki (15) - (18) stanowią prostszą, ale równoważną ich postać. Równoważności tej dowodzimy w dodatku.

Pozostał jeszcze do rozpatrzenia przypadek poszukiwania minimum a nie maksimum funkcjonału $f(x)$. Sprowadza się on łatwo do poprzedniego dzięki temu, że jeśli funkcjonał $f(x)$ osiąga w punkcie x_0 minimum, to funkcjonał $\bar{f}(x) = -f(x)$ osiąga w tym punkcie maksimum.

Nie zmieniając określenia funkcji Lagrange'a (8) i funkcjonału Lagrange'a (nierówność (16)) ograniczenia zapisujemy w tym przypadku przy pomocy funkcji $\bar{g}(x) = -g(x)$ w postaci

$$\bar{g}(x) \leqslant 0 . \tag{2a}$$

Warunki (15) - (17) i warunek (18) z przeciwnym zwrotem nierówności są wówczas warunkami koniecznymi i dostatecznymi, jeśli funkcjonał f i operator g są wypukłe.

W podrozdz. 2.6 omówimy sposoby sprawdzania, czy założenia 2 i 3 twierdzenia 2 są spełnione (sprawdzanie bezpośrednio na podsta -

---

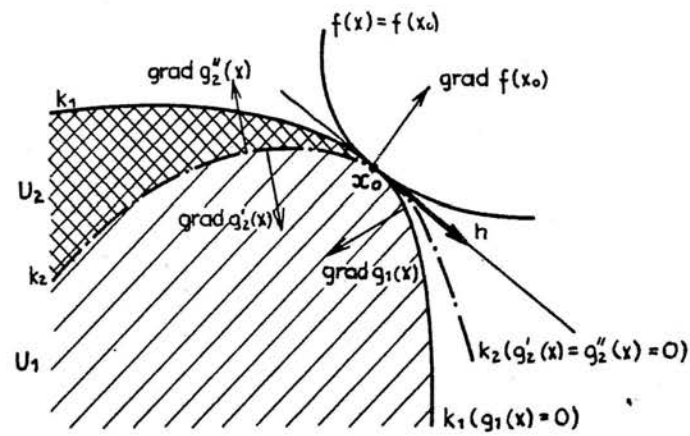
[15] Warunki (41)-(44) oznaczają, że liniowe przybliżenie funkcji Lagrange'a ma w punkcie (x_0, λ_0) maksimum po nieujemnych x i minimum po nieujemnych λ. Dlatego punkt ten nazywa się nieujemnym punktem quasisiodłowym. Twierdzenie 1 mówi, że jeśli f i g są wklęsłe, to punkt quasisiodłowy jest zarazem punktem siodłowym (por. odnośnik po dowodzie twierdzenia 1).

wie określeń (20) lub (30) i (35) może okazać się kłopotliwe).

2.6. Założenia twierdzenia o warunkach koniecznych

2.6.1. Założenie regularności punktu x_0

Dzięki założeniu, że punkt x_0 jest punktem regularnym operatora g (definicja 5) dla rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia, mogliśmy posługiwać się - w myśl lematu 1 - liniowym przybliżeniem funkcji f i g. Założenie to bowiem zapewnia odpowiednio regularny kształt zbioru rozwiązań dopuszczalnych U w pobliżu punktu x_0, co dla dwuwymiarowej przestrzeni X ilustruje rys. 2.



Rys. 2

Na rys. 2 zbiorem U jest albo zbiór U_1, albo zbiór U_2. Zbiory te są ograniczone odpowiednimi częściami krzywej k_1 (o równaniu $g_1(x) = 0$) i krzywej k_2 (o równaniu $g_2'(x) = g_2''(x) = 0$, g_1, g_2' i g_2'' - funkcje rzeczywiste dwu zmiennych, $g_2''(x) = -g_2'(x)$) .

Przy ograniczeniu $g'(x) \geqslant 0$, $g'(x) = \langle g_1(x), g_2'(x)\rangle$ zbiór $U = U_1$ (pojedynczo zakreskowany), a przy ograniczeniu $g''(x) \geqslant 0$, $g''(x) = \langle g_1(x), g_2''(x)\rangle$ $U = U_2$ (podwójnie zakreskowany), bowiem funkcje g_1, g_2' i g_2'' rosną w kierunkach wskazanych przez ich gradienty. W obu przypadkach wektor h (leżący na stycznej do k_1 i k_2 w punkcie x_0) jest wariacją dopuszczalną (definicja 4), ponieważ $dg'(x_0; h) = dg''(x_0; h) = 0$ (h jest prostopadłe do grad $g_1(x_0)$ i grad $g_2'(x_0)$=-grad $g_2''(x_0)$), zatem $g'(x_0) + dg'(x_0;h) = g''(x_0) + dg''(x_0; h) = 0$. Ale w pierwszym przypadku istnieją krzywe styczne do h leżące w U_1 , zatem x_0 <u>jest</u> punktem regularnym operatora g', a w drugim przypadku styczne do h muszą leżeć poza U_2 , czyli x_0 <u>nie jest</u> punktem regularnym operatora g''.

Jeśli w punkcie x_0 funkcjonał f osiąga maksimum warunkowe przy obu ograniczeniach (na rys. 2 przedstawiono kształt poziomicy $f(x) = f(x_0)$ i kierunek wektora grad $f(x_0)$), to w pierwszym przypadku w punkcie x_0 spełnione jest oczywiście równanie grad $f(x_0)$ + λ_1^0 grad $g_1(x_0)$ + λ_2^0 grad $g_2'(x_0) = 0$ przy nieujemnych liczbach λ_1^0 i λ_2^0, a w drugim przypadku współczynnik λ_2^0 przy grad $g_2''(x_0)$ musiałby w tym równaniu być <u>ujemny</u> [16].

Omówiona interpretacja geometryczna nasuwa dwa następujące twierdzenia, które znacznie ułatwiają sprawdzenie, czy założenie 2 twierdzenia 2 jest spełnione.

<u>Twierdzenie</u> 3. Operator postaci $g(x) = A(x) + b$, gdzie A - operator liniowy, jest regularny.

---

[16] Jak pokazano w /8/ (a dla przypadku nieskończenie-wielowymiarowego w /11/) bez założenia regularności warunek konieczny ma postać α grad $f(x_0)$ + λ grad $g(x_0) = 0$; $\alpha \geqslant 0$. Dla operatora g'' $\alpha = 0$ i rozwiązaniem równania (15) jest punkt x_0 <u>niezależnie</u> od funkcjonału f . Podany przykład ilustruje również różnicę między omawianym warunkiem a warunkiem regularności dla ograniczeń równościowych /4/. Ten ostatni wymaga, aby w punkcie x_0 zbiór U był gładki (co nie zachodzi, jeśli ingerują oba ograniczenia) oraz aby wektory grad $g_1(x_0)$ i grad $g_2(x_0)$ były liniowo niezależne (co nie zachodzi także dla $g_2 = g_2'$).

Dowód tego twierdzenia polega po prostu na sprawdzeniu, że dla każdego $x \in U$ warunki (20) są spełnione dla funkcji $\psi(s) = x+sh$, gdzie h jest dowolną wariacją dopuszczalną (tj. krzywą żądaną w definicji 4 jest linia prosta) przy $0 < s_0 \leqslant 1$.

Operatory tej postaci występują na przykład przy ograniczeniu amplitudy bądź całki sterowania:

$$a(t) \leqslant x(t) \leqslant b(t) \; ; \; c(t) \leqslant \int_0^t x(\tau)d\tau \leqslant d(t),$$

gdzie a, b, c, d - zadane funkcje czasu itp. Twierdzenie 3 można również wykorzystać w przypadku kilku ograniczeń nierównościowych, spośród których tylko niektóre mają podobną postać. Może się mianowicie okazać, że ta sama funkcja $\psi(s) = x + sh$ będzie spełniać warunki (20) dla pozostałych (nieliniowych) ograniczeń - tak jest w przykładzie rozpatrywanym w ostatnim rozdziale tej pracy.

Gdy operator g jest nieliniowy, ale jego wartości leżą w pewnych specjalnych przestrzeniach funkcyjnych, znaczne uproszczenie warunku regularności podaje następujące:

Twierdzenie 4. Załóżmy, że przestrzeń Z (wartości opratora g) jest przestrzenią funkcji ciągłych ($Z = C[0, T]$) lub ograniczonych mierzalnych ($Z = L^{\infty}[0, T]$). Wówczas punkt $x_0 \in U$ jest punktem regularnym operatora g, jeśli w punkcie x_0 istnieje taka wariacja dopuszczalna h_0, dla której nierówności (19) jest spełniona w sposób ostry, tj.

$$z_1 = g(x_0) + dg(x_0; h_0) > 0, \tag{45}$$

gdzie znak " $>$ " oznacza w przypadku funkcji ciągłej, że

$$\min_{0 \leqslant t \leqslant T} z_1(t) > 0$$

(tj. $z_1(t)$ jest funkcją dodatnią), a w przypadku funkcji ograniczonej mierzalnej, że

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t \in [0,\, T]} z_1(t) > 0 .$$

Symbol essinf oznacza tzw. istotny kres dolny, tj. kres górny po wszystkich podzbiorach przedziału $[0,T]$ miary zero z wartości kresów dolnych [17].

Dowód twierdzenia 4 został podany w pracy /4/ (nie przytaczamy go ze względu na to, iż wymaga dość długich rachunków).

Stosowanie tego kryterium ogranicza się praktycznie do przypadku funkcji ciągłych, bowiem dla funkcji mierzalnych (nawet ograniczonych) zakładamy na ogół, iż $Z = L^2$, ze względu na niedogodną do obliczeń postać funkcjonałów liniowych określonych na przestrzeni L^∞. W przypadku $Z = C$ sprawdzenie warunku (45) (sprowadzające się do znajdowania takiej funkcji $h_0(t)$, na której liniowe przybliżenie operatora g przyjmuje wartości dodatnie) jest bardzo proste, co ilustruje następujący przykład:

Przykład 1. Rozpatrzmy ograniczenie

$$\int_0^t \varphi[x(\tau)]d\tau \leqslant a(t)\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{46}$$

---

[17] Rozróżnienie to bierze się stąd, iż funkcja mierzalna nie musi osiągać swego minimum na przedziale $[0,T]$, żądanie zaś, aby ta funkcja przybierała wartości dodatnie prawie wszędzie, nie wystarcza, bowiem i wówczas jej kres dolny mógłby być równy zeru. Podkreślamy, że nierówność $z > 0$ definiuje się też niekiedy jako dwa warunki: $z \geqslant 0$ i $z \not\equiv 0$. Spełniająca te warunki funkcja może być oczywiście równa zeru na jakimś zbiorze miary dodatniej, czego definicja podana w tekście nie dopuszcza. Ogólnie warunek (45) można sformułować jako żądanie, by z_1 należała do wnętrza zbioru elementów nieujemnych przestrzeni Z (wnętrze zbioru składa się z tych punktów, które należą do zbioru wraz z pewnym otoczeniem, tj. kulą o środku w danym punkcie). Twierdzeniem 4 można posługiwać się, jeśli zbiór funkcji nieujemnych posiada wnętrze, a tak nie jest we wszystkich przestrzeniach L^p przy $1 \leqslant p < \infty$.

to jest, jeśli $z = g(x)$, to

$$z(t) = [g(x)](t) = a(t) - \int_0^t \varphi[x(\tau)\, d\tau\ , \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{46a}$$

gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją rosnącą o ciągłej pochodnej $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$ zaś $a(t)$ - nieujemną funkcją ciągłą. Wartościami opratora g są tu funkcje ciągłe, czyli $Z = C[0,T]$. Pokażemy, że operator ten jest regularny. W tym celu obliczamy jego różniczkę. Ponieważ φ jest różniczkowalne, to $dg(x;\, h) = -\int_0^t \varphi'[x(\tau)]\, h(\tau) d\tau$. Z założenia, że $x(t)$ jest funkcją dopuszczalną ze względu na ograniczenie (46), wynika nierówność $[g(x)](t) = a(t) - \int_0^t \varphi[x(\tau)\, d\tau \geqslant 0$ dla każdego $0 \leqslant t \leqslant T$. Znajdźmy wariacje dopuszczalne. Zgodnie z (19) będą nimi w szczególności takie funkcje $h(t)$, dla których $-\int_0^t \varphi'[x(\tau)]\, h(\tau) d\tau \geqslant 0$, a więc - ponieważ z założenia $\varphi'(x) > 0$ - funkcje niedodatnie. Zgodnie ze wzorem (45) mamy znaleźć takie $h_0(t)$, aby $-\int_0^t \varphi'[x(\tau)]\, h_0(\tau) d\tau > 0$, ale takimi funkcjami są wszystkie funkcje ujemne, na przykład $h_0(t) = -1$, c.b.d.d.

2.6.2. Założenie, że zbiór Q_L jest słabo domknięty

Założenie słabej domkniętości zbioru Q_L było niezbędne po to, by uzyskać zależność (25), tj. wzór

$$-df(x_0; x) = \lambda_0 [dg(x_0; x)].$$

W przypadku skończenie wymiarowej przestrzeni X wzór ten, tak jak lemat 3, ma prostą interpretację geometryczną /8, 4/. Oznacza on bowiem, że gradient funkcjonału f jest kombinacją liniową o współczynnikach niedodatnich gradientów funkcji, wyznaczających ograniczenia, tj. gradienty te muszą być usytuowane względem siebie tak, jak to przedstawiono na rys. 2 dla przypadku $U = U_1$.

W odróżnieniu od warunku regularności założenie 3 twierdzenia 2 nie ma jednak odpowiednika w metodzie mnożników Lagrange'a (ani prostej interpretacji geometrycznej), ponieważ w przestrzeni o skończonej ilości wymiarów zbiór Q_L (wzór (33)) jest zawsze słabo domknięty [18]. W przestrzeniach funkcyjnych tak jednak być nie musi. Sprawdzanie czy założenie 3 jest spełnione w przypadku tych przestrzeni, dla których sformułowaliśmy twierdzenie 4, znacznie ułatwia następujące:

Twierdzenie 5. Jeśli $Z = C$ lub L^{∞}, to założenie 3 twierdzenia 2 można zastąpić warunkiem istnienia takiego $\bar{w} \in W = R \times X$, aby

$$L(\bar{w}) > 0, \tag{47}$$

gdzie przekształcenie liniowe $L : W \to V$, $V = R \times Z$, jest określone wzorem (35), a znak " > " oznacza, iż dla pary $\langle \bar{s}, \bar{z} \rangle = \bar{v}$, $\bar{v} = L(\bar{w})$ zachodzą nierówności $\bar{s} > 0$ i $\bar{z} > 0$ (ta ostatnia w sensie omówionym po twierdzeniu 4) [19].

Dowód tego twierdzenia podajemy w dodatku, natomiast korzystanie z warunku (47) (równie proste jak z warunku (45)) zilustrujemy

---

18) Ogólniej, w refleksywnych przestrzeniach Banacha (tj. takich, że $(X^*)^* = X$) w założeniu lematu 2 wymaganie słabej domkniętości można zastąpić wymaganiem domkniętości /1/.

19) Ogólnie biorąc, warunek (47) oznacza, iż $\bar{v}$ ma należeć do wnętrza zbioru elementów nieujemnych przestrzeni V - porównaj odnośnik przy twierdzeniu 4.

również na przykładzie operatora określonego wzorem (46a).

Przykład 2. Obliczamy wartości $L(w)$. Zgodnie z określeniem (35) i obliczeniami przykładu 1

$$\left[L(w)\right](t) = \langle s, \int_0^t \varphi'\left[x_0(\tau)\right] x(\tau)d\tau + s\left\{a(t) - \int_0^t \varphi\left[x_0(\tau)\right]d\tau\right\}\rangle,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T . \qquad (48)$$

Jak w przykładzie 1 zakładamy, że $\varphi'(x)$ jest ciągła i dodatnia, zaś $x_0(t)$ oznacza rozwiązanie optymalne. Mamy znaleźć taką parę $\langle \bar{s}, \bar{x} \rangle = \bar{w}$, aby wyrażenie (48) było dodatnie dla każdego $t \in [0,T]$ (tu $\bar{x}(t)$ nie musi być funkcją dopuszczalną). Przyjmijmy $s = 1$. Ponieważ $a(t) - \int_0^t \varphi\left[x_0(\tau)\right]d\tau = \left[g(x_0)\right](t)$ jest nieujemne z założenia, wyrażenie (48) będzie dodatnie, jeśli dodatnia będzie funkcja $\int_0^t \varphi'\left[x_0(\tau)\right]x(\tau)d\tau$. Z założenia $\varphi'(x) > 0$, zatem wystarczy wziąć $\bar{x}(t) > 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant T$, a taka funkcja oczywiście zawsze istnieje (w tym przypadku x_0 może być dowolnym punktem zbioru rozwiązań dopuszczalnych).

Przykłady 1 i 2 dowodzą, że dla ograniczenia postaci (46) można stosować twierdzenie 2.

W przypadku $Z = L^p[0,T]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sprawdzenie założenia 3 twierdzenia 2 można prowadzić na podstawie definicji słabej domkniętości w sposób, który omówimy dla przypadku k ograniczeń nierównościowych, tj. operatora g o postaci (11).

Wprowadźmy oznaczenie

$$z^1 = s \cdot g_1(x_0) + dg_1(x_0; x). \qquad (49)$$

Zgodnie z określeniami (33) i (35) oraz regułą (12) dla funkcjonału v^* każdy funkcjonał $l \in Q_L$ jest równy

$$l(w) = v^*[L(w)] = sr + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(z^i) \tag{50}$$

gdzie $\lambda_i \in Z_i^*$, $r \in R$, a ponieważ $v^* \geqslant 0$, to wobec określenia (3)

$$\lambda_i \geqslant 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, k \ , \tag{51}$$

$$r \geqslant 0 . \tag{51a}$$

Podstawiając do wzoru (50) wyrażenie (49) na z^i i grupując wyrazy tak, aby doprowadzić funkcjonał l zgodnie z regułą (12) do ogólnej postaci $l(w) = y(x) + \vartheta s$, gdzie $y \in X^*$, $\vartheta \in R$, mamy

$$l(w) = v^*[L(w)] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i[dg_i(x_0; x)] + s\left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i[g_i(x_0)] + r\right\}, \tag{50a}$$

a to znaczy, że

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i[g_i(x_0)] + r , \tag{52}$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i[dg_i(x_0; x)] . \tag{53}$$

Aby dowieść, że zbiór Q_L jest słabo domknięty, należy zgodnie z definicją 7 pokazać, iż, jeśli $l_n \in Q_L$, $l_n = \langle y_n, \vartheta_n \rangle$ i ciąg $l_n \xrightarrow{sł} l$ (definicja 6), to $l \in Q_L$. Ale zbieżność w iloczynie kartezjańskim jest zbieżnością po współrzędnych, tj. ciąg par

$\langle y_n, \vartheta_n \rangle \xrightarrow{sł} \langle y, \vartheta \rangle = l$ wtedy i tylko wtedy, kiedy

$$y_n \xrightarrow{sł} y \ , \ \text{tj.} \ y_n(x) \to y(x) \ \text{dla każdego} \ x \tag{54}$$

oraz

$$\vartheta_n \to \vartheta \, . \tag{55}$$

Dla danych operatorów g_i funkcjonał y jest wyznaczony wzorem (53) i zależy od λ_i (od których wymagamy zgodnie z (51) tylko aby były nieujemne), przy czym oczywiście kombinacje różnych λ_i mogą wyznaczać ten sam funkcjonał y. Załóżmy, że operatory g_i mają tę własność, iż ze wzorów (51) i (53) wynika, że funkcjonał y może być dowolnym funkcjonałem nieujemnym (tj. przyjmującym nieujemne wartości na funkcjach $x(t)$ o wartościach nieujemnych). Założenie to można dla danych g_i sprawdzić, korzystając z ogólnej postaci nieujemnych funkcjonałów λ_i, określonych na zadanych przestrzeniach funkcyjnych Z_i (wzory (9) i (10)).

Jeśli podane założenie jest spełnione, to zbiór Q_L jest słabo domknięty w następujących trzech przypadkach:

a. Jeśli liczba ϑ (wzór (52)) dla dowolnego ustalonego funkcjonału y nie zależy od λ_i. Tak jest na przykład dla liniowych operatorów g_i, bowiem wówczas $y(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[dg_i(x_0; x)\right] =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[g_i(x)\right] \, , \text{ zaś } \vartheta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[g_i(x_0)\right] + r = y(x_0) + r \, .$$

b. Jeśli liczba ϑ dla dowolnego ustalonego y może być dowolnie mała przy odpowiednim doborze λ_i, wyznaczających ten sam funkcjonał y (ze względu na (51a) ϑ zawsze może być dowolnie wielka). Istotnie, oznacza to, że na ϑ nie są nałożone jakiekolwiek ograniczenia, a zatem jakie by nie było $\vartheta = \lim \vartheta_n$, para $\langle y, \vartheta \rangle \in Q_L$, bo y jest nieujemny jako granica ciągu nieujemnych wobec przyjętego założenia funkcjonałów y_n (wzór (54)).

c. Jeśli liczba ϑ jest ograniczona od dołu, minimum to jest osiągane przy odpowiednim doborze λ_i (określających dowolny ustalony funkcjonał y (i wartość tego minimum zależy od y w sposób ciągły. Aby udowodnić to, oznaczmy tę minimalną wartość liczb ϑ dla funkcjonału y takich, że $\langle y, \vartheta\rangle \in Q_L$, przez ϑ_y :

$$\vartheta_y = \min_{\lambda_i \geqslant 0} \left\{ \vartheta : \langle y, \vartheta\rangle \in Q_L \right\} = \min_{\lambda_i \geqslant 0} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[g_i(x_o) \right] . \quad (56)$$

Oznacza to, że dla ustalonego nieujemnego y do zbioru Q_L należą wszystkie pary $\langle y, \vartheta\rangle$ takie, dla których $\vartheta \geqslant \vartheta_y$. Ponieważ założyliśmy, że ϑ_y zależy od y w sposób ciągły, tj. zachodzi zależność

$$\text{jeśli } y_n \xrightarrow{s\ell} y \text{ , to } \vartheta_{y_n} \rightarrow \vartheta_y , \quad (57)$$

a z definicji ϑ_y dla każdego n jest $\vartheta_n \geqslant \vartheta_{y_n}$ (bo pary $\langle y_n, \vartheta_n\rangle \in Q_L$), to przechodząc w tej nierówności do granicy przy $n \rightarrow \infty$ mamy $\vartheta \geqslant \vartheta_y$, ato oznacza, że para $\langle y, \vartheta\rangle \in Q_L$, c.b.d.d.

Zatem w ogólnym przypadku sprawdzenie założenia 3 twierdzenia 2 sprowadza się do obliczenia ϑ_y zgodnie ze wzorem (56) i ewentualnego sprawdzenia, czy zachodzi zależność (57).

Kończąc omawianie strony teoretycznej metody funkcjonałów Lagrange'a wyprowadzimy w następnym rozdziale równania, które wynikają z warunków (15) - (18) dla przestrzeni funkcyjnych $C[0,T]$ i $L^p[0,T]$, $1 \leqslant p < \infty$. Idea omówionego poniżej sposobu wykorzystania warunków (15) - (18) do optymalizacji procesów dynamicznych została zaproponowana w pracy /3/.

3. Zastosowanie metody funkcjonałów Lagrange'a w przestrzeniach funkcyjnych

3.1. Równania odpowiadające warunkowi (15)

Występująca w równaniu (15) różniczka funkcji Lagrange'a

$$d\Phi\left[(x_0, \lambda_0); x\right]$$

jest funkcjonałem liniowym y_0, określonym na przestrzeni X (tj. $y_0 \in X^*$) wzorem

$$y_0(x) = d\Phi\left[(x_0, \lambda_0); x\right] . \tag{58}$$

Funkcjonał ten jest zawsze wyznaczony przez pewną funkcję $y_0(t)$ (por. odnośnik po definicji 2), przy czym jeśli X jest przestrzenią funkcji całkowalnych w potędze p, to

$$y_0(x) = \int_0^T x(t)\, y_0(t)\, dt , \tag{59}$$

gdzie $y_0(t)$ jest funkcją całkowalną w potędze $q = p/(p - 1)$.

Jeśli X jest przestrzenią funkcji ciągłych, to

$$y_0(x) = \int_0^T x(t)\, dy_0(t) , \tag{60}$$

gdzie $y_0(t)$ jest prawostronnie ciągłą funkcją o wahaniu ograniczonym.

Ponieważ równanie (15) musi być spełnione dla każdego $x \in X$, to $y_0 = 0$ [20], zatem w przypadku wzoru (59) mamy równanie

$$y_0(t) = 0 \quad \text{dla prawie każdego} \quad t \in [0, T], \tag{15a}$$

a w przypadku wzoru (60) $y_0(t)$ musi być stała na całym przedziale $[0, T]$, czyli

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = 0 \quad \text{dla} \quad t \in (0, T) . \tag{15b}$$

---

[20] Zgodnie z definicją gradientu funkcjonału /12/ $y_0 = \operatorname{grad} \Phi(x_0, \lambda_0)$. Przy użyciu tego oznaczenia warunki (41)-(44) zostały podane w /3/.

3.2. Równania odpowiadające warunkom (16)-(18)

Warunki (16)-(18) przekształcimy zakładając od razu, że mamy k ograniczeń nierównościowych, tj. operator g postaci (11). Każdy z warunków (16)-(18) daje wówczas, zgodnie z (3) i (12), k warunków:

$$\lambda_i^o \geqslant 0, \tag{16a}$$

$$\lambda_i^o\left[g_i(x_o)\right] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{17a}$$

$$g_i(x_o) \geqslant 0, \tag{18a}$$

gdzie $\langle\lambda_1^o, \lambda_2^o, \ldots, \lambda_k^o\rangle = \lambda_o$ i każdy funkcjonał λ_i jest określony na odpowiedniej przestrzeni Z_i, $\lambda_i^o \in Z_i^*$. Równania (17a) pochodzą stąd, że wobec (12) $\lambda_o\left[g(x_o)\right] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^o\left[g_i(x_o)\right]$

a suma ta równa się zeru zgodnie z (17) i każdy jej składnik jest liczbą nieujemną wobec (18a) i (16a).

Jeśli $Z_i = L^p$, to analogicznie do poprzedniego

$$\lambda_i^o\left[g_i(x_o)\right] = \int_0^T \left[g_i(x_o)\right](t) \cdot \lambda_i^o(t)\, dt\ , \tag{61}$$

gdzie wobec (16a) i (9)

$$\lambda_i^o(t) \geqslant 0 \quad \text{dla prawie każdego} \quad t \in [0,T]. \tag{16b}$$

Zatem zgodnie z (18a) obie funkcje pod całką (61) są nieujemne, czyli równania (17a) dają równania

$$\left[g_i(x_o)\right](t) \cdot \lambda_i^o(t) = 0 \quad \text{dla prawie każdego} \quad t \in [0,T] \tag{17b}$$

Równania (17b) wobec (16b) i (18a) są równoważne dwu warunkom :

jeśli $[g_i(x_0)](t) > 0$ dla prawie każdego $t \in M$, to $\lambda_i^o(t) = 0$ dla prawie każdego $t \in M$,
jeśli $\lambda_i^o(t) > 0$ dla prawie każdego $t \in N$, to $[g_i(x_0)](t) = 0$ dla prawie każdego $t \in N$,
gdzie M i N są dowolnymi podzbiorami miary dodatniej (na przykład podprzedziałami) odcinka $[0,T]$ (tu znak "$>$" ma oczywiście zwykły sens, ponieważ odnosi się do liczb). Warunki te mają następujący jasny sens: tam, gdzie i-te ograniczenie nie ingeruje, tam funkcja wyznaczająca odpowiedni funkcjonał Lagrange'a znika; jeśli zaś jest ona różna od zera, to ograniczenia muszą być spełnione ze znakiem równości.

Jeśli Z_i jest przestrzenią funkcji ciągłych, to zgodnie ze wzorami (16a) i (10)

$$\lambda_i^o[g_i(x_0)] = \int_0^T [g_i(x_0)](t)\, d\lambda_i^o(t) \quad , \tag{62}$$

gdzie $\lambda_i^o(t)$ jest niemalejąca, co można symbolicznie zapisać w postaci

$$d\lambda_i^o(t) \geqslant 0 \ , \tag{16c}$$

gdzie symbol $d\lambda_i^o(t)$ oznacza przyrost funkcji $\lambda_i^o(t)$ w dowolnie małym otoczeniu punktu t [21].

Jak poprzednio, na to, aby równanie (17a) było spełnione, musi wobec (16c) i (18a) znikać wyrażenie podcałkowe w całce (62), zatem

---

[21] Gdyby symbol $d\lambda_i^o(t)$ oznaczał przyrost w punkcie, to warunek (15) spełniałby malejące funkcje ciągłe, które wyznaczają funkcjonały ujemne a mają zerowe przyrosty w każdym punkcie. Jeżeli $\lambda_i^o(t)$ jest różniczkowalna, to warunek (16c) oznacza oczywiście po prostu, że $\frac{d\lambda_i^o(t)}{dt} \geqslant 0$. Ta ostatnia nierówność jest równoważna (16c), jeśli różniczkowanie rozumieć w sensie uogólnionym (tj. jeśli funkcje $\frac{d\lambda_i^o(t)}{dt}$ mogą być δ-funkcjami Diraca).

$$\text{dla każdego} \quad t \in [0,T] \quad [g_i(x_0)](t)\, d\lambda_i^0(t) = 0\,. \tag{17c}$$

Analogicznie do (17b) równanie powyższe prowadzi do wniosku, iż jeśli odpowiednie ograniczenie nie ingeruje, tj. $[g_i(x_0)](t) > 0$ na jakimś przedziale lub w jakimś punkcie (a zatem wobec ciągłości g_i i w pewnym otoczeniu tego punktu), to istnieje taki przedział bądź otoczenie punktu t, na którym funkcja $\lambda_i^0(t)$ jest stała, to jest $d\lambda_i^0(t) = 0$. Jeśli zaś na jakimś przedziale lub w punkcie przyrost $\lambda_i^0(t)$ jest dodatni, to na tym przedziale lub w tym punkcie ograniczenie musi być spełnione ze znakiem równości (oczywiście może zdarzyć się, że oba czynniki w równaniach (17b) bądź (17c) są równe zeru).

W praktycznych obliczeniach korzystanie z warunków (15) - (18) sprowadza się do korzystania z równań (15a) albo (15b) oraz (17b) i (17c). Te dwa ostatnie równania powodują przy tym, dzięki związkom (18a) i (16b) bądź (16c), znikanie pewnych członów w równaniach (15a) lub (15b), znacznie je upraszczając.

Oczywiście w przypadku poszukiwania minimum funkcjonału zmianie ulega jedynie zwrot nierówności we wzorach (18a).

Przy wyróżnieniu ograniczenia $x \geqslant 0$, tj. korzystaniu z warunków (41) - (44), równania (17b) lub (17c) nie ulegają oczywiście zmianie, bo - jak już pokazaliśmy - warunek (43) stanowi tylko inny zapis warunku (17), podobnie korzystamy nadal z warunków (16b) bądź (16c) i (18a) (równoważnego warunkowi (44)) z dodatkowym warunkiem $x_0(t) \geqslant 0$. Zmianie ulegają natomiast równania (15a) lub (15b). Warunki (41) i (42) oznaczają bowiem, że funkcjonał y_0, określony wzorem (58), jest funkcjonałem niedodatnim, równym zeru dla $x = x_0$. Zatem w przypadku $X = L^p[0,T]$ (wzór (59)) mamy zamiast równania (15a) nierówność

$$y_0(t) \leqslant 0 \quad \text{dla prawie każdego} \quad t \in [0, T], \tag{42a}$$

zaś warunek (41), tj. $y_0(x_0) = \int_0^T y_0(t)\, x_0(t)\, dt = 0$ daje wobec tego równanie

$$y_0(t) \cdot x_0(t) = 0 \quad \text{dla prawie każdego} \quad t \in [0,T] \qquad (41a)$$

Stąd wynika, że jeśli ograniczenie (39) nie ingeruje, tj.na jakimś zbiorze miary dodatniej $x_0(t) > 0$, to prawie wszędzie na tym zbiorze $y_0(t) = 0$. Analogicznie, dla $X = C\,[0,T]$ funkcja $y_0(t)$ nie musi być stała, a tylko nierosnąca, tj. tam, gdzie jest ona różniczkowalna, $\frac{dy_0}{dt} \leqslant 0$, a równanie (15b) musi być spełnione tam, gdzie $x_0(t) > 0$.

Oczywiście, ze względu na stopień ogólności rozważanego zagadnienia wariacyjnego nie można podać ogólnej metody rozwiązywania wyprowadzonych równań. Natomiast wykorzystanie ich zilustrujemy na przykładzie wyznaczania optymalnego rozdziału obciążeń elektrowni wodnej i cieplnej /13-17/. Dla prostego przypadku liniowego monotonicznego przebiegu zapotrzebowania mocy i nieograniczonej pojemności zbiornika elektrowni wodnej zagadnienie to przy użyciu rozpatrywanej metody było omówione w pracy /3/.

4. Wyznaczanie optymalnego rozdziału obciążeń elektrowni wodnej i elektrowni cieplnej

4.1. Sformułowanie problemu

Rozpatrujemy dwie współpracujące ze sobą elektrownie. Zakładamy, że koszty pracy jednej z nich - cieplnej - zależą tylko od zużycia węgla, a praca drugiej elektrowni - wodnej - nic nie kosztuje. Jednostkowe koszty pracy elektrowni cieplnej są zatem wyznaczone przez funkcję $F(P_c)$, gdzie P_c jest mocą tej elektrowni w danej chwili czasu. Zaniedbując wszystkie pozostałe czynniki napiszemy, że całkowite koszty K pracy całego systemu w rozpatrywanym okresie czasu wynoszą

$$K = \int_0^T F\left[P_c(t)\right] dt \, . \tag{63}$$

Zakładamy, że funkcja $F(P_c)$ jest rosnąca, dodatnia, ściśle wypukła i posiada ciągłą pochodną $F' = \frac{dF}{dP_c}$, $F(0) > 0$ (rys. 3a). Ponadto zakładamy, że moc P_c wystarcza zawsze do pokrycia zapotrzebowania.

Charakterystykę elektrowni wodnej stanowi funkcja $P_h(q)$, gdzie P_h jest mocą elektrowni wodnej, a q - przepływem wody przez jej turbiny. Zakładamy, że $P_h(q)$ jest funkcją rosnącą o ciągłej pochodnej $P_h' = \frac{dP_h}{dq}$, przy czym $P_h(0) = 0$, $P_h'(0) > 0$ (rys. 3b).

Oznaczmy zapotrzebowanie mocy przez P_r. Zakładamy, że funkcja $P_r(t)$ jest znaną w rozpatrywanym okresie czasu $[0,T]$, ciągłą (niekoniecznie różniczkowalną) i przedziałami ściśle monotoniczną funkcją czasu.

Warunek pokrycia zapotrzebowania mocy w systemie ma postać równania

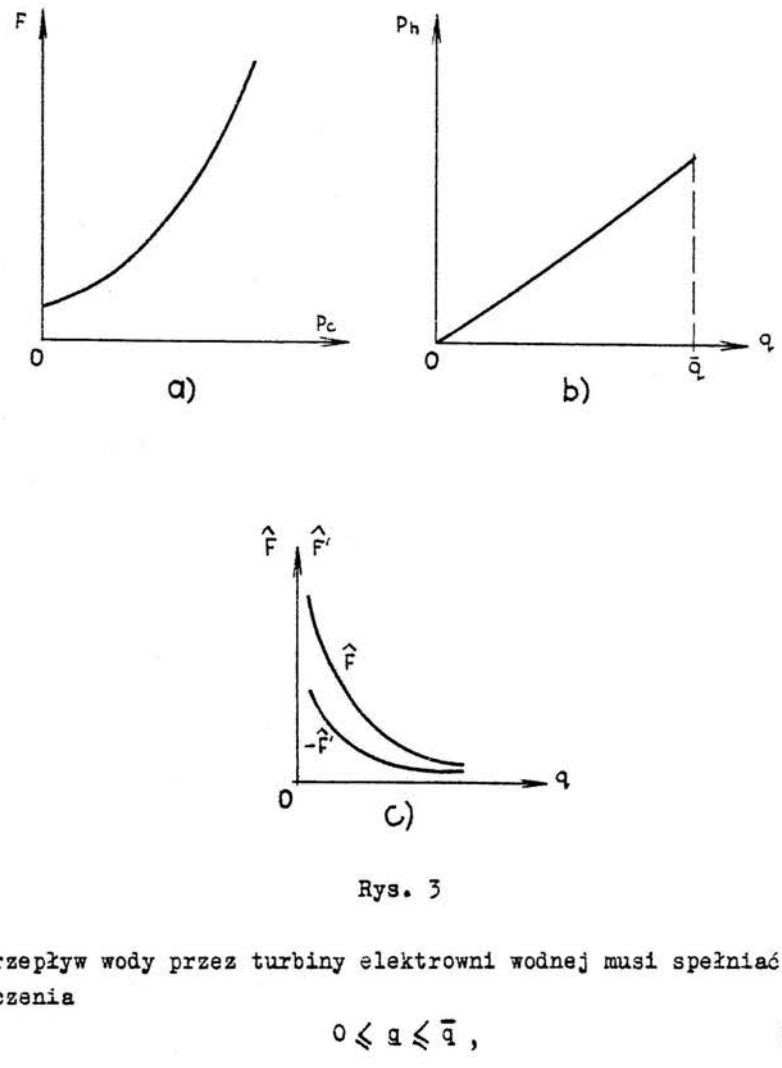
$$P_c + P_h = P_r \, . \tag{64}$$

Wyznaczając z tego równania P_c i podstawiając do wyrażenia (63), otrzymujemy ostateczny wzór na koszty pracy systemu

$$K(q) = \int_0^T F\left\{P_r(t) - P_h\left[q(t)\right]\right\} dt \, . \tag{65}$$

Zadanie polega na <u>minimalizacji</u> tych kosztów poprzez dobór <u>optymalnego przepływu</u> $q_0(t)$.

Zakładamy, że koszty jednostkowe pracy całego systemu, tj. funkcja $\hat{F}(q) = F\left[P_r - P_h(q)\right]$ jest wypukła dla każdego P_r (rys. 3c), dzięki czemu funkcjonał (65) jest wypukły (definicja 3).



Rys. 3

Przepływ wody przez turbiny elektrowni wodnej musi spełniać ograniczenia

$$0 \leqslant q \leqslant \bar{q} \ , \tag{66}$$

gdzie $\bar{q}$ jest stałą maksymalną dopuszczalną wartością przepływu.

Ponadto zakładamy, że elektrownia wodna posiada zbiornik wody o pojemności V, do którego dopływa stały strumień wody p, $0 < p < \bar{q}$. Ponieważ zbiornik nie może zostać przepełniony, a zużycie wody nie może przekroczyć jej zapasu, przepływ q musi spełniać dodatkowo dla każdego $t \in [0, T]$ ograniczenia

$$v_0 + p \cdot t - V \leqslant \int_0^t q(\tau)d\tau \leqslant v_0 + p \cdot t, \qquad (67)$$

gdzie $v_0 \geqslant 0$ oznacza zapas wody w zbiorniku w chwili początkowej $t = 0$. Ograniczenia (67) stanowią o dynamicznym charakterze rozpatrywanego problemu.

Wreszcie przepływ q musi być taki, aby moc elektrowni wodnej nie przekroczyła zapotrzebowania

$$P_h(q) \leqslant P_r . \qquad (68)$$

4.2. Funkcja Lagrange'a i równania wynikające z warunków (15a), (16b) i (16c), (17b) i (17c) oraz (18a)

Wprowadźmy operator $\bar{g}(q)$ o postaci (11), przy pomocy którego zgodnie z umową (3) wszystkie podane ograniczenia (66) - (68) zapiszemy w standartowej formie (2a) $\bar{g}(q) \leqslant 0$:

$$\bar{g}(q) = \langle g_1(q), g_2(q), g_3(q), g_4(q), g_5(q) \rangle , \qquad (69)$$

gdzie

$$[g_1(q)]t = -q(t) \leqslant 0 , \qquad (70)$$

$$[g_2(q)](t) = q(t) - \bar{q} \leqslant 0 , \qquad (71)$$

$$[g_3(q)](t) = \int_0^t q(\tau)d\tau - (v_0 + p \cdot t) \leqslant 0 , \qquad (72)$$

$$[g_4(q)](t) = v_0 + p \cdot t - V - \int_0^t q(\tau)d\tau \leqslant 0 , \tag{73}$$

$$g_5(q) = P_h(q) - P_r \leqslant 0 . \tag{74}$$

Nierówności powyższe przy $q = q_0$ odpowiadają warunkom (18a) (rozdz. 3) dla przypadku poszukiwania minimum. Aby wyznaczyć funkcjonał y_0 (wzór (58)), należy znaleźć różniczkę funkcji Lagrange'a (8) w punkcie (q_0, λ_0) . Funkcja ta zgodnie z (12) ma w rozpatrywanym
rozpatrywanym przypadku postać $\Phi(q, \lambda) = K(q) + \sum_{i=1}^{5} \lambda_i [g_i(q)]$.

Ponieważ nie znamy z góry funkcjonału Lagrange'a

$$\lambda_0 = \langle \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0, \lambda_5^0 \rangle ,$$

musimy przy tym korzystać z ogólnej postaci funkcjonałów nieujemnych (9) lub (10), a zatem określić przestrzenie Z_i wartości operatorów g_i . Wówczas będziemy mogli także napisać warunki (16a) w postaci (16b) lub (16c), a (17a) - w postaci (17b) lub (17c). Wartości operatorów g_1, g_2 i g_5 należą do tej samej przestrzeni co argumenty, należy więc też określić przestrzeń rozwiązań $X \ni q$, co pozwoli również napisać równanie (15) w postaci (15a) lub (15b).

Rozwiązania szukamy w klasie funkcji całkowalnych w kwadracie zakładając, że $q \in L^2[0,T]$ (ponieważ wszystkie funkcje rozpatrujemy na odcinku $[0,T]$, w dalszym ciągu pomijamy ten indeks przy oznaczeniach przestrzeni). Zatem w naszym przypadku $X = L^2$, $g_1 : L^2 \rightarrow L^2$, $g_2 : L^2 \rightarrow L^2$, $g_3 : L^2 \rightarrow C$, $g_4 : L^2 \rightarrow C$ (bowiem wartości operatorów g_3 i g_4 są oczywiście funkcjami ciągłymi), $g_5 : L^2 — L^2$ i $g : X \rightarrow Z$, gdzie $Z = L^2 \times L^2 \times C \times C \times L^2$. Wobec tego zgodnie z (70) - (74)

$$\Phi(q, \lambda) = \int_0^T F\{P_r(t) - P_h[q(t)]\}dt + \int_0^T [-q(t)]\lambda_1(t)dt +$$

$$+\int_0^T\left[q(t)-\bar{q}\right]\lambda_2(t)dt+\int_0^T\left[\int_0^t q(\tau)d\tau-(v_o+p.t)\right]d\lambda_3(t)+$$

$$+\int_0^T\left[(v_o+p.t-V)-\int_0^t q(\tau)d\tau\right]d\lambda_4(t)+\int_0^T\left\{P_h\left[q(t)\right]+\right.$$

$$\left.-P_r(t)\right\}\lambda_5(t)dt \qquad (75)$$

i przyrównując do zera odpowiednie wyrażenia podcałkowe w tym wzorze przy podstawieniu $q = q_o$, $\lambda_1 = \lambda_1^o$ otrzymujemy od razu równania (17a), które wobec powyższego dla operatorów g_1, g_2 i g_5 mają postać (17b), a dla operatorów g_3 i g_4 postać (17c):

$$-q_o(t)\lambda_1^o(t) = 0\ , \qquad (76)$$

$$\left[q_o(t)-\bar{q}\right]\lambda_2^o(t) = 0\ , \qquad (77)$$

$$\left[\int_0^t q_o(\tau)d\tau-(v_o+p.t)\right]d\lambda_3^o(t) = 0\ , \qquad (78)$$

$$\left[(v_o+p.t-V)-\int_0^t q_o(\tau)d\tau\right]d\lambda_4^o(t) = 0\ , \qquad (79)$$

$$\left\{P_h\left[q_o(t)\right]-P_r(t)\right\}\lambda_5^o(t) = 0\ . \qquad (80)$$

Funkcja (75) jest różniczkowalna dzięki założeniu różniczkowalności F i P_h. Obliczając jej różniczkę w punkcie $(q_o, {}_o)$ zgodnie ze wzorami podanymi w dodatku otrzymujemy

$$d\Phi\left[(q_o,\lambda_o);\ q\right] = y_o(q) =$$

$$= - \int_0^T F'\{P_r(t) - P_h[q_o(t)]\} P'_h[q_o(t)] q(t)dt - \int_0^T \lambda_1^o(t)q(t)dt +$$

$$+ \int_0^T \lambda_2^o(t)q(t)dt + \int_0^T \left[\int_0^t q(\tau)d\tau\right] d\lambda_3^o(t) +$$

$$- \int_0^T \left[\int_0^t q(\tau)d\tau\right] d\lambda_4^o(t) + \int_0^T P'_h[q_o(t)] \lambda_5^o(t)q(t)dt .$$

Aby doprowadzić to wyrażenie do postaci (59), należy jeszcze do analogicznej postaci doprowadzić czwartą i piątą całkę, tj. wyodrębnić występujący pod całkami podwójnymi "przyrost" q(t). Całkując przez części [22], otrzymujemy po prostych przekształceniach ostatecznie

$$y_o(q) = \int_0^T \Big\{-F'\{P_r(t) - P_h[q_o(t)]\} P'_h[q_o(t)] - \lambda_1^o(t) + \lambda_2^o(t) +$$

$$+ \int_t^T d\lambda_3^o(\tau) - \int_t^T d\lambda_4^o(\tau) + P'_h[q_o(t)] \lambda_5^o(t)\Big\} q(t)dt ,$$

wobec czego równanie (15a) ma w naszym przypadku postać

$$-F'\{P_r(t) - P_h[q_o(t)]\} P'_h[q_o(t)] - \lambda_1^o(t) + \lambda_2^o(t) + \int_t^T d\lambda_3^o(\tau) +$$

$$- \int_t^T d\lambda_4^o(\tau) + P'_h[q_o(t)] \lambda_5^o(t) = 0 . \tag{81}$$

---

22) Według wzoru $\int_0^T x(t)\, dy(t) = x(t)\, y(t)\Big|_0^T - \int_0^T y(t)\, dx(t)$.

Człony tej samej postaci, tylko o przeciwnych znakach w tym równaniu odpowiadają ograniczeniom dwustronnym: drugi i trzeci - ograniczeniu amplitudy (66), a czwarty i piąty - całki (67). Postać tych ostatnich powoduje przy tym, że aby wyznaczyć rozwiązanie w punkcie t, musimy znać jego "przyszły" przebieg aż do T w związku z globalnym w czasie charakterem ograniczeń (67).

Jeśli funkcja $P_h(q)$ jest wypukła [23], to wypukły jest operator g_5 (wzór (75)), a zatem i $\overline{g}$ (wzór (69)), ponieważ operatory $g_1 - g_4$ (wzory (70)-(74)) są liniowe niejednorodne. Wobec tego jeśli dobierzemy nieujemne prawie wszędzie funkcje $\lambda_1^o(t), \lambda_2^o(t)$ i $\lambda_5^o(t)$ i niemalejące funkcje $\lambda_3^o(t)$ i $\lambda_4^o(t)$ oraz spełniający ograniczenia (70) - (74) przepływ $q_o(t)$ tak, aby były spełnione równania (76) - (81), to $q_o(t)$ będzie rozwiązaniem optymalnym na mocy twierdzenia 1. Jeśli funkcja $P_h(q)$ jest liniowa, to funkcjonał (65) jest ściśle wypukły i rozwiązanie to jest jednoznaczne.

Z drugiej strony można pokazać /4/, że w rozpatrywanym przypadku są spełnione założenia twierdzenia 2 [24], wobec czego dla każdego rozwiązania optymalnego musi istnieć taki nieujemny funkcjonał λ_o, aby były spełnione równania (76) - (81).

---

[23] Założenia tego można pozbyć się /18/, wymaga to jednak użycia bardziej złożonych i mocniejszych metod wariacyjnych, jak np. rozwinięte w pracy /11/. W szczególności połączenie ograniczeń (71) i (74) w jedno: $q \leqslant \min\left[\overline{q},\ P_h^{-1}(P_r)\right]$ prowadzi do operatora nieróżniczkowalnego w sensie Frecheta.

[24] Regularność operatora g łatwo jest udowodnić metodą omówioną po twierdzeniu 3. Okazuje się przy tym, że dla funkcji $\psi(s) = q + sh$ jest $s_o = P_h'(0)/P_h'(\overline{q})$. Słabą domkniętość zbioru Q_L można udowodnić ogólną metodą omówioną pod koniec rozdz. 2.3. Okazuje się przy tym, że rozpatrywany tam przypadek b zachodzi dla $v_o > 0$, zaś przypadek c dla $v_o = 0$ (lub $v_o = v_{min}$, jeśli minimalny dopuszczalny poziom wody w zbiorniku $v_{min} > 0$).

4.3. Rozwiązanie dla zapotrzebowania z dwoma szczytami dobowymi

Będziemy starali się przewidzieć najpierw kształt rozwiązania $q_o(t)$ spełniającego ograniczenia (70)-(74) i dla tego rozwiązania wyznaczać $\overset{o}{_i}(t)$ tak, aby były spełnione równania (76)-(81). Równania te dadzą zarazem związki pozwalające na ścisłe wyznaczenie $q_o(t)$.

Załóżmy w tym celu, że okres czasu T odpowiada jednej dobie i przebieg zapotrzebowania dobowego $P_r(t)$ ma dwa szczyty dobowe - rys. 4a. Z uwagi na to, że funkcja F rośnie szybko w zakresie dużych wartości P_c , elektrownia wodna powinna pracować z maksymalną mocą $P_h(\overline{q})$ właśnie w okresie szczytów. Ograniczenie (71) będzie przy tym ingerowało, jeśli ta moc nie wystarczy na pokrycie zapotrzebowania. Ograniczenie (72) będzie ingerowało, jeśli w okresie szczytu zostanie wyczerpany zbiornik. Skoro zbiornik zostanie wyczerpany, to przed szczytem opłaca się go napełnić, przy czym mogą ingerować ograniczenia (70) i (73). Wreszcie pod koniec doby, gdy zapotrzebowanie opadnie na tyle, że będzie je mogła pokryć sama elektrownia wodna, powinna pracować tylko ona, w związku z czym ingerować będzie ograniczenie (74).

Przeprowadzone rozumowanie, ogólnie biorąc, odpowiada temu, że chcielibyśmy dla minimalizacji wartości całki (65) minimalizować po prostu wartości funkcji F w każdej chwili czasu przy ograniczeniach (66) i (68). To może jednak nie udać się ze względu na ograniczenia (67) i taki właśnie przypadek przewidujemy.

Przewidywany przebieg rozwiązania $q_o(t)$ przedstawia rys. 4b . Gdy zbiornik jest napełniony, cała dopływająca woda musi być odprowadzana, a gdy zbiornik jest wyczerpany, dysponujemy co najwyżej dopływem p , dlatego $q_o(t) = p$ na odcinkach $[t_2, t_3]$, $[t_{10}, t_{11}]$, $[t_6, t_7]$ i $[t_{14}, t_{15}]$; w szczytach z założenia $q_o(t) = \overline{q}$, a w okresie akumulacji wody $q_o(t) = 0$.

Nie znamy zaś przepływów $q_o^1 - q_o^8$ i czasów przełączeń t_1-t_{15}.

Przepływ $q_o^8(t)$ możemy wyznaczyć od razu, ponieważ z założenia na odcinku $[t_{15}, T]$ zachodzi równanie $P_h[q_o(t)] = P_r(t)$, zatem

$$q_o^8(t) = P_h^{-1}[P_r(t)] \quad , \quad t_{15} \leqslant t \leqslant T \tag{82}$$

i czas t_{15} jest największym pierwiastkiem równania

$$P_r(t) = P_h(p) \ . \tag{83}$$

Wszystkie wymagane warunki są przy tym spełnione. Istotnie, dla $t \in [t_{15}, T]$ nie ingerują żadne ograniczenia poza (74), wobec czego z równań (76)-(79) mamy tu $\lambda_1^o(t) = \lambda_2^o(t) = 0$; $\lambda_3^o(t) = \text{const}$, $\lambda_4^o(t) = \text{const}$ i zgodnie z (82) równanie (81) upraszcza się do postaci $F'(0)P_h'[q_o^8(t)] = P_h'[q_o^8(t)]\ \dot{\lambda}_5^o(t)$, a stąd $\dot{\lambda}_5^o(t) = F'(0) > > 0$.

Znajomość $q_o^8(t)$ daje wygodną ze względu na postać całek

$$\int_t^T d\lambda_3^o(\tau) \quad \text{oraz} \quad \int_t^T d\lambda_4^o(\tau)$$

możliwość rozwiązywania układu równań (76)-(81) "od końca". Wprowadźmy dla uproszczenia zapisu równania (81) oznaczenie

$$\varphi(q, t) = F'\left\{P_r(t) - P_h[q(t)]\right\} P_h'[q(t)] \ . \tag{84}$$

Dla każdego t funkcja $\varphi(q, t) = -\frac{d\hat{F}}{dq}$ i zgodnie z założeniami o charakterystyce ekonomicznej całego systemu (rys.3c) funkcja ta jest nierosnącą funkcją q (malejącą, jeśli $\hat{F}$ jest ściśle wypukła).

Na odcinku (t_{14}, t_{15}) ze znakiem ostrej nierówności są spełnione wszystkie ograniczenia poza (72). Zatem tak jak poprzednio równanie (81) upraszcza się tu do postaci

$$\varphi(p, t) = \int_t^T d\lambda_3^o(\tau) = \lambda_3^o(T) - \lambda_3^o(t) \ . \tag{85}$$

Ze względu na monotoniczność F funkcja $\varphi(q, t)$ dla $q = const$ ma przebieg taki jak $P_r(t)$. Stąd wobec (16c) wynika podstawowy wniosek, że ograniczenie całkowe (72) może ingerować jedynie tam, gdzie zapotrzebowanie $P_r(t)$ nie rośnie. Z założenia ścisłej monotoniczności $P_r(t)$ wynika, że na rozpatrywanym odcinku $\lambda_3^o(t)$ rośnie.

Równanie (81) musi być spełnione tylko prawie wszędzie, dla wyznaczenia punktów przełączenia $t_1 - t_{14}$ zaś niezbędne są związki, które muszą zachodzić właśnie w tych punktach. Aby uzyskać tego rodzaju zależności, posłużymy się następującą ogólną metodą:

Dzięki założeniu ciągłej różniczkowalności F i P_h oraz ciągłości $P_r(t)$ funkcja $\varphi(q, t)$ jest ciągłą funkcją czasu. Będziemy pisali równanie (81) dla przedziałów leżących po obu stronach punktów przełączenia i korzystając z ciągłości $\varphi(q, t)$ przechodzili w tych równaniach do granicy dla t dążącego do odpowiedniego punktu przełączenia z jednej lub drugiej strony. Na przykład przechodząc w równaniu (85) do granicy dla t dążącego lewostronnie do t_{15} otrzymujemy $F'(0)P_h(p) = \lambda_3^o(t_{15}) - \lambda_3^o(t_{15} - 0) > 0$, to jest wielkość przyrostu $\lambda_3^o(t)$ w punkcie t_{15} (z definicji $\lambda_3^o(t)$ jest prawostronnie ciągła, zatem wobec poprzedniego $\lambda_3^o(T) = \lambda_3^o(t_{15})$).

Na odcinku (t_{13}, t_{14}) z założenia nie ingerują żadne ograniczenia, na nim więc równanie (81) upraszcza się do postaci

$$\varphi(q_o^7, t) = \alpha_1 , \tag{86}$$

gdzie $\alpha_1 = \int_{t_{14}}^{t_{15}} d\,\lambda_3^o(t)$, tj. na tym odcinku system pracuje przy stałej pochodnej kosztów jednostkowych.

Ponieważ $\varphi(q, t) = F'(P_c)P_h'(q)$, to warunek stałości tej funkcji może być spełniony przy malejącym zapotrzebowaniu tylko, jeśli q maleje, zaś moc elektrowni cieplnej rośnie (rys. 4a). Jest to uzasadnione faktem, że elektrownia wodna powinna odciążać cieplną szczególnie w zakresie dużych mocy. Dla liniowej charakterystyki $P_h(q)$ równanie (86) oznacza po prostu, że P_c = const (rys. 4c).

Punkt t_{14} można wyznaczyć z warunku wyczerpania zbiornika

$$\int_0^{t_{14}} q_o(t)\,dt = v_o + p \cdot t_{14} \,. \tag{87}$$

Ponieważ w otoczeniu punktu t_{14} jest spełnione równanie (81) w postaci $\lambda_3^o(t) = \varphi(q_o, t) - \lambda_3^o(t_{15})$, to $\lambda_3^o(t)$ jest w tym punkcie ciągła i stałą α_1 można wyznaczyć z równania

$$\varphi(p, t_{14}) = \alpha_1 \,, \tag{88}$$

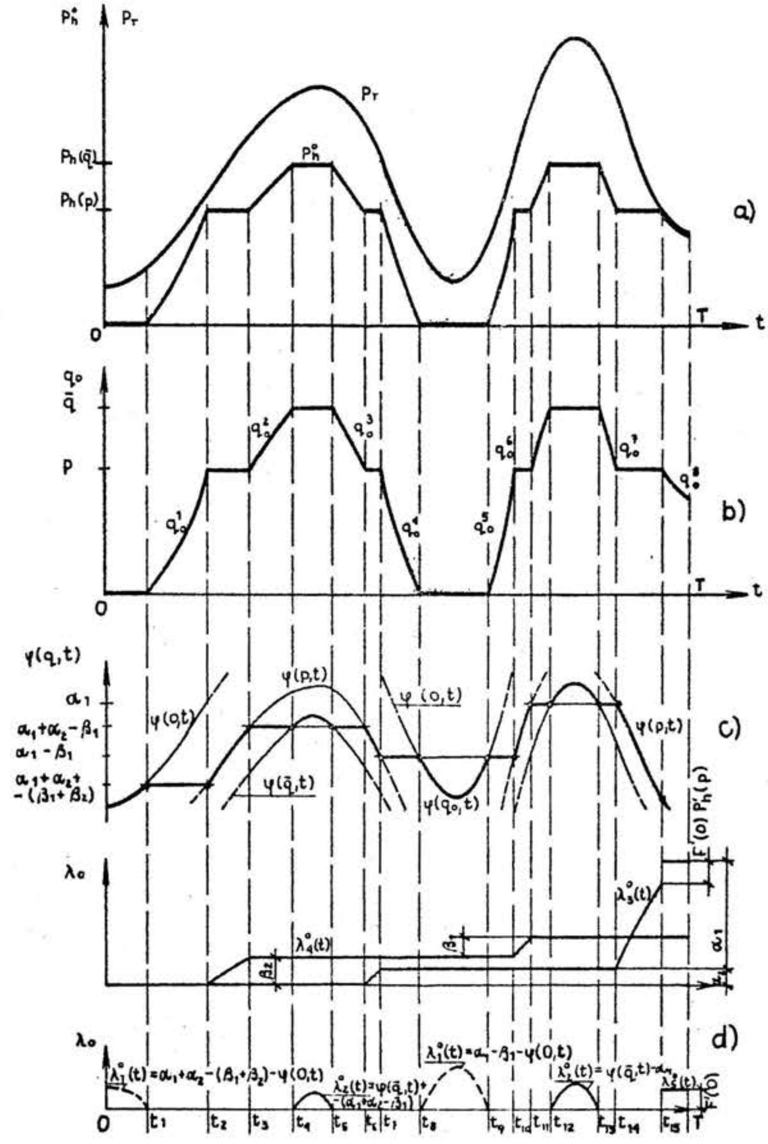
będącego prawostronną granicą równania (85) i lewostronną równania (86).

Na odcinku (t_{12}, t_{13}) ingeruje jedynie ograniczenie (71) i równanie (81) przybiera postać $\varphi(\bar{q}, t) - \alpha_1 = \lambda_2^o(t)$. Ponieważ z założenia tu $P_r(t) > P_h(\bar{q})$, to $\varphi(\bar{q}, t) > \alpha_1$ i $\lambda_2^o(t) > 0$, zaś oba punkty przełączenia t_{12}, t_{13} otrzymujemy jako pierwiastki równania

$$\varphi(\bar{q}, t) = \alpha_1 \,, \tag{89}$$

wobec czego leżą one po dwu stronach szczytu.

Na odcinku (t_{11}, t_{12}) obowiązuje oczywiście identyczna jak dla $t \in (t_{13}, t_{14})$ zależność (86), zaś odcinek (t_{10}, t_{11}), na którym ingeruje drugie ograniczenie całkowe (73), odpowiada (t_{14}, t_{15}), z tą tylko różnicą, że w punkcie t_{11} funkcja $\lambda_4^o(t)$ jest ciągła. Istotnie, w otoczeniu tego punktu z (81) mamy $\lambda_4^o(t) = \varphi(q_o, t)$+const. Mamy zatem w tym punkcie równanie $\varphi(p, t_{11}) = \alpha_1$, zaś w punkcie t_{10} warunek napełnienia zbiornika $\int_0^{t_{10}} q_o(t)dt = v_o + p.t_{10} - V$



P_h^o
P_r
P_r
P_h^o
$P_h(\bar{q})$
$P_h(p)$
0
T
t
a)
q_o
$\bar{q}$
p
q_o^1
q_o^2
q_o^3
q_o^4
q_o^5
q_o^6
q_o^7
q_o^8
0
T
t
b)
$\varphi(q,t)$
α_1
$\alpha_1+\alpha_2-\beta_1$
$\alpha_1-\beta_1$
$\alpha_1+\alpha_2+-(\beta_1+\beta_2)$
$\varphi(0,t)$
$\varphi(p,t)$
$\varphi(\bar{q},t)$
$\varphi(0,t)$
$\varphi(q_0,t)$
$\varphi(p,t)$
c)
λ_o
$\lambda_4^o(t)$
$\lambda_3^o(t)$
β_2
β_1
α_1
$F'(0)P_h'(p)$
d)
λ_o
$\lambda_1^o(t)=\alpha_1+\alpha_2-(\beta_1+\beta_2)-\varphi(0,t)$
$\lambda_2^o(t)=\varphi(\bar{q},t)+-(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1)$
$\lambda_1^o(t)=\alpha_1-\beta_1-\varphi(0,t)$
$\lambda_2^o(t)=\varphi(\bar{q},t)-\alpha_1$
$\lambda_3^o(t)$
$F'(0)$
0
t_1
t_2
t_3
t_4
t_5
t_6
t_7
t_8
t_9
t_{10}
t_{11}
t_{12}
t_{13}
t_{14}
t_{15}
T

Rys. 4

oraz równanie

$$\varphi(p, t_{10}) = \alpha_1 - \beta_1 , \tag{90}$$

gdzie $\beta_1 = \int_{t_{10}}^{t_{11}} d\lambda_4^o(t) > 0$. Analogicznie do poprzedniego wobec (81) dla $t \in (t_{10}, t_{11})$ zachodzi równanie $\varphi(p, t) = \lambda_4^o(t) - \lambda_4^o(T) + \alpha_1$ i zgodnie z (16c) odcinek (t_{10}, t_{11}) musi znajdować się tam, gdzie $P_r(t)$ rośnie. Na odcinku (t_9, t_{10}) znów nie ingerują żadne ograniczenia i równanie (81), z którego wyznaczamy przepływ $q_0^5(t)$, przyjmuje analogiczną postać do (86)

$$\varphi(q_0^5, t) = \alpha_1 - \beta_1 . \tag{91}$$

Odcinek (t_8, t_9) odpowiada odcinkowi (t_{12}, t_{13}). Mianowicie dla $t \in (t_8, t_9)$ otrzymujemy z (81) $\lambda_1^o(t) = (\alpha_1 - \beta_1) + - \varphi(0, t)$ i jeśli zapotrzebowanie $P_r(t)$ opada na tyle, że $\varphi(0, t) < \alpha_1 - \beta_1$, to $\lambda_1^o(t) > 0$ (ingeruje ograniczenie (70)), a leżące po obu stronach "doliny" punkty t_8 i t_9 są pierwiastkami równania

$$\varphi(0, t) = \alpha_1 - \beta_1 .$$

Na odpowiednich odcinkach pierwszego szczytu $0 \leqslant t \leqslant t_8$ obowiązują oczywiście zależności zupełnie analogiczne do omówionych. Wszystkie uzyskane równania wraz z niewiadomymi podano w tabl. 1, w której oznaczono $\alpha_2 = \int_{t_6}^{t_7} d\lambda_3^o(t)$, $\beta_2 = \int_{t_2}^{t_3} d\lambda_4^o(t)$.

Tablica 1

Niewiadome	Równania
t_1	$\varphi(0,t) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$
t_2	$v_o + pt_2 - \int_0^{t_2} q_o(t)dt = V$
t_3	$\varphi(p,t) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$
t_4 , t_5	$\varphi(\bar{q},t) = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1$
t_6	$\int_{t_3}^{t_6} q_o(t)dt = V + p(t_6 - t_3)$
t_7	$\varphi(p, t) = \alpha_1 - \beta_1$
t_8 , t_9	$\varphi(0, t) = \alpha_1 - \beta_1$
t_{10}	$p(t_{10} - t_7) - \int_{t_7}^{t_{10}} q_o(t)dt = V$
t_{11}	$\varphi(p, t) = \alpha_1$
t_{12} , t_{13}	$\varphi(\bar{q}, t) = \alpha_1$
t_{14}	$\int_{t_{11}}^{t_{14}} q_o(t)dt = V + p(t_{14} - t_{11})$
$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$	$\varphi(p,t_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 - \beta_2)$
$\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1$	$\varphi(p, t_6) = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1$
$\alpha_1 - \beta_1$	$\varphi(p, t_{10}) = \alpha_1 - \beta_1$

c.d. na str. 48

c.d. Tablicy 1

Niewiadome	Równania
1	$\varphi(p, t_{14}) = \alpha_1$
$q_o^1(t)$	$\varphi(q,t) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$
$q_o^2(t)$, $q_o^3(t)$	$\varphi(q, t) = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1$
$q_o^4(t)$, $q_o^5(t)$	$\varphi(q, t) = \alpha_1 - \beta_1$
$q_o^6(t)$, $q_o^7(t)$	$\varphi(q, t) = \alpha_1$

Na rys. 4a przedstawiono przebieg optymalnej mocy elektrowni wodnej $P_h^o = P_h(q_o)$, a na rys. 4b przebiegi $q_o(t)$. Rysunek 4c ilustruje wyznaczanie punktów przełączania na podstawie przebiegu funkcji $\varphi(0, t)$, $\varphi(p, t)$ i $\varphi(\bar{q}, t)$ oraz przebieg pochodnej jednostkowych kosztów pracy systemu $\hat{F}(q)$ przy optymalnym sterowaniu: $\varphi(q_o,t) = F'\{P_r(t) - P_h[q_o(t)]\} P_h'[q_o(t)]$. Zaznaczony na tym rysunku linią grubą przebieg $\varphi(q_o, t)$ jest zarazem (w odpowiedniej skali) wykresem optymalnej mocy elektrowni cieplnej $P_c^o = P_r - P_h^o$ przy liniowej charakterystyce $P_h(q)$. Na podstawie rys. 4c można wyznaczyć przebieg funkcji $\lambda_1^o(t)$ (rys. 4d) (wyznaczanie tych funkcji nie jest potrzebne dla uzyskania rozwiązania).

4.4. Ogólne własności rozwiązania

Należy podkreślić następujące wnioski o charakterze jakościowym.

1. Załóżmy, że ograniczenie (73) nie ingeruje, tj. $\lambda_4^o(t)$=const, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ (jak dla zbiornika o dostatecznie dużej pojemności). Ponieważ zapotrzebowanie mocy musi wówczas maleć wszędzie tam, gdzie ingeruje ograniczenie całkowe (72) (bo równanie (85) musi

być spełnione dla $t \in (t_6, t_7)$ i $t \in (t_{14}, t_{15})$), muszą zachodzić nierówności $P_r(t_6) > P_r(t_{14})$ i $P_r(t_7) > P_r(t_{15})$. Nierówności te mówią, że kolejne chwile wyczerpania zbiornika odpowiadają coraz mniejszemu zapotrzebowaniu mocy. Podobnie dla $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, zaś $\beta_1 > 0$ i $\beta_2 > 0$ byłoby $P_r(t_2) < P_r(t_{10})$, $P_r(t_3) < P_r(t_{11})$. Stąd wynika, że jeśli funkcja $P_r(t)$ jest okresowa, to rozwiązanie będzie okresowe tylko, jeśli nie ingeruje ograniczenie całkowe (72), tj. nie ma odcinków (t_6, t_7) i (t_{14}, t_{15}). Wniosek ten jest ważny dla porównania optymalizacji długofalowej z optymalizacją krótkofalową /4/.

2. Ponieważ musi zachodzić nierówność $\alpha_1 > \beta_1$ (równanie (90)) to całkowite napełnienie zbiornika przed szczytem ($\beta_1 > 0$) może opłacić się tylko, jeśli później zostanie on wyczerpany ($\alpha_1 > 0$) . Ale wówczas może zajść rozpatrywana sytuacja, w której opłaca się ponosić straty na odcinku (t_{10}, t_{11}) (i analogicznie dla $t \in \in (t_2, t_3)$) w oczekiwaniu na szczyt, tj. nie można zwiększyć wartości t_{10}.

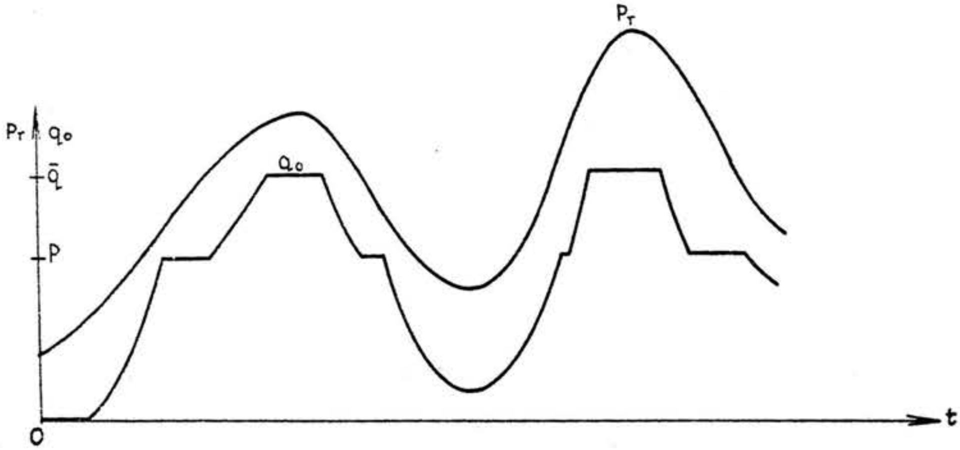
3. Może okazać się, że nie wszystkie równania (tabl. 1) mają rozwiązanie. Na przykład "dolina" zapotrzebowania może być tak płytka, że przepływ $q_0(t)$ nie spada do zera na odcinku (t_8, t_9) (lub $(0, t_1)$). Wówczas na całym przedziale (t_7, t_{10}) nie ingerują żadne ograniczenia i na całym tym przedziale przepływ wyznaczamy z równania (91): $\varphi(q_0, t) = \alpha_1 - \beta_1$ (rys. 5).

Analogiczna sytuacja zachodzi, jeśli któryś ze szczytów jest na tyle "mały", że w czasie jego trwania nie ingeruje ograniczenie (71) itp. Rozpatrzenie tego rodzaju przypadków nie nastręcza żadnych trudności, a podany w tabl. 1 układ równań odpowiednio wówczas upraszcza się /4/.

4. Zachodzą następujące, upraszczające obliczenia, równości:

$$P_r(t_4) = P_r(t_5),\ P_r(t_8) = P_r(t_9),\ P_r(t_7) = P_r(t_{10}),$$
$$P_r(t_{11}) = P_r(t_{14}),\ P_r(t_{12}) = P_r(t_{13})$$

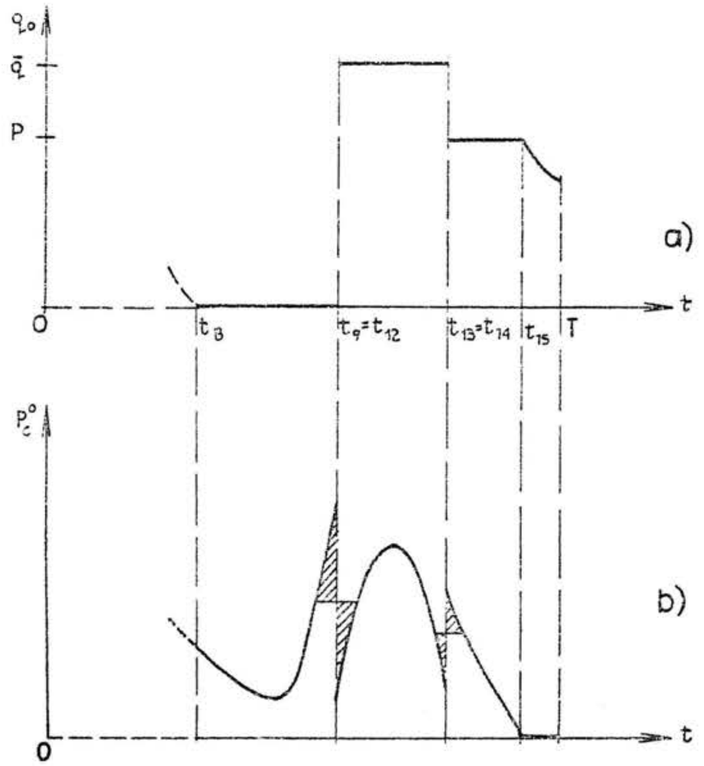
Dalsze wnioski omówimy w oparciu o twierdzenie 2, tj. korzystając z faktu, że równanie (81) stanowi warunek konieczny i nie za-



Rys. 5

kładając już wypukłości funkcji $P_h(q)$. Załóżmy mianowicie, że łączna charakterystyka systemu $\hat{F}(q)$ nie jest ściśle wypukła i zbadajmy sytuację na tych przedziałach, na których zachodziło ciągłe przejście od pracy przy $q_0 = 0$ do $q_0 = p$ i $q_0 = \bar{q}$. Na tych przedziałach nie ingerowały żadne ograniczenia, co różni uzyskany wynik od odpowiedniego przypadku dla liniowego funkcjonału /5/.

Weźmy pod uwagę najpierw przedział $[t_{13}, t_{14}]$ i załóżmy, że redukuje się on do punktu: $t_{13} = t_{14}$ (co może zdarzyć się, jeżeli $\varphi(q, t)$ nie jest ściśle malejącą funkcją q), tj. zachodzi skokowa zmiana sterowania od $q_0 = \bar{q}$ do $q_0 = p$ (rys. 6a). Równanie (81) na prawo od punktu t_{13} przyjmuje wówczas postać $\varphi(p, t_{13}) = \int_{t_{13}+0}^{t_{15}} d\lambda_3^0(t)$, a na lewo od tego punktu $\varphi(\bar{q}, t_{13}) = \lambda_2^0(t_{13}-0) +$



Rys. 6

$$+ \int_{t_{13-0}}^{t_{15}} d\lambda_3^0(t).$$ Odejmując stronami te równania, otrzymuje się

$$\varphi(\bar{q}, t_{13}) - \varphi(p, t_{13}) = \lambda_2^0(t_{13} - 0) + \left[\lambda_3^0(t_{13}) - \lambda_3^0(t_{13} - 0)\right].$$

Ale wyrażenie po lewej stronie tej ostatniej równości jest niedodatnie, a po prawej nieujemne wobec (16a) i (16c), obie strony muszą więc być równe zeru, czyli $\varphi(\bar{q}, t_{13}) = \varphi(p, t_{13})$, a to oznacza po prostu, że charakterystyka $\hat{F}(q)$ jest liniowa właśnie na odcinku $p \leqslant q \leqslant \overline{q}$, bo tu $d\hat{F}/dq$ = const. Analogicznie, zakładając $t_9 = t_{12}$ (dla uproszczenia zakładamy, że nie ingeruje tu ograniczenie całkowe (73) - rys. 6a), otrzymujemy po lewej stronie t_9 $\varphi(0, t) = F'(P_r)\, P_h'(0) \leqslant \alpha_1$, a po prawej $\lambda_2^0(t) = \varphi(\overline{q}, t) - \alpha_1 \geqslant 0$, zatem funkcja $\hat{F}(q)$ musi być liniowa na całym przedziale $0 \leqslant q \leqslant \overline{q}$. Udowodniliśmy w ten sposób, że istnienie charakterystycznych przedziałów, na których nie ingerują żadne ograniczenia, wynika z nieliniowości funkcjonału (65) [25].

Sens fizyczny tego wyniku ilustruje rys. 6b, na którym przedstawiono przebieg mocy elektrowni cieplnej przy rozwiązaniu nieciągłym. Przy takiej samej wartości energii elektrowni cieplnej (zakreskowane pola na rys. 6b) mniejsze koszty uzyskuje się, gdy moc tej elektrowni nie zmienia się skokowo.

Pokażemy jeszcze, że jeśli tylko ingerują ograniczenia całkowe, to w początkowym, poprzedzającym szczyt okresie małego zapotrzebowania, na przykład dla $t_7 \leqslant t \leqslant t_{10}$ (lub $0 \leqslant t \leqslant t_2$) nie można prowadzić procesu jak przy końcu dla $t_{15} \leqslant t \leqslant T$, tj. wyłączać elektrowni cieplnej. Istotnie, przed włączeniem tej elektrowni z równania (81) mielibyśmy $F'(0)P_h'(q) - (\alpha_1 - \beta_1) = P_h'(q)\lambda_5^0(t)$. Ale w chwili włączenia (dla t dążącego lewostronnie do t_{10}) mamy $F'(0)P_h'(q) = \alpha_1 - \beta_1$, zatem dla $t < t_{10}$, gdzie zapotrzebowanie jest mniejsze, $F'(0)P_h'(q) < \alpha_1 - \beta_1$ i funkcja $\lambda_5^0(t)$ byłaby ujemna. Fakt ten świadczy również o różnicy między optymalizacją długo- i krótkofalową.

W sposób całkowicie analogiczny do przedstawionego można uwzględnić żądanie, by przy końcu procesu w zbiorniku pozostała określona ilość wody, na przykład równa początkowej (tj. ograniczenie fun-

---

25) Dla liniowego funkcjonału $f(q) = \int_0^T \varphi(t)q(t)dt$ pierwszy człon w równaniu (81) nie zależy od q i (jeśli tylko $\varphi(t)$ nie jest stała) nie mogą być spełnione równania typu (86) lub (91), obowiązujące poza tymi wszystkimi podzbiorami odcinka [0,T], na których którekolwiek z ograniczeń (66)-(68) jest spełnione ze znakiem równości.

kcjonałowe $\int_0^T q(t)dt \leqslant p.T$, któremu w równaniu (81) odpowiadałaby nieujemna liczba λ_6^o), rozpatrzyć przypadek zmiennego dopływu wody p(t) i zaburzeń w przebiegu zapotrzebowania $P_r(t)$, pracę elektrowni pompowej itp. /4/.

Omówiony przykład, przykłady zastosowania metody funkcjonałów Lagrange'a do zagadnień sterowania czasowo optymalnego /5/, optymalnego planowania inwestycji /6/ i inne /2, 3/ wskazują, iż ta prosta metoda pozwala efkytwnie rozwiązać wiele interesujących i praktycznie ważnych zadań optymalizacyjnych.

Dodatek

I. Różniczką Frecheta (mocną) operatora $g : X \rightarrow Z$ w danym punkcie x_0 nazywamy operator $dg(x_0; x)$, liniowy względem x i określony równością

$$g(x_0 + x) - g(x_0) = dg(x_0; x) + \omega(x_0; x),$$

przy czym

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega(x_0, x)\|}{\|x\|} = 0 .$$

Zatem wartość operatora $dg(x_0; x)$ stanowi liniowe przybliżenie przyrostu wartości operatora g przy zmianie argumentu o x, a reszta $\omega(x_0, x)$ jest małą wyższego rzędu (oczywiście podana definicja obejmuje również funkcjonały, tj. przypadek $Z = R$).

Bezpośrednio z definicji łatwo jest obliczyć różniczkę Frecheta operatora g o postaci $g(x) = A(x) + b$, gdzie A jest operatorem liniowym. Istotnie, $g(x_0 + x) - g(x_0) = \left[A(x_0 + x) + b\right] + - \left[A(x_0) + b\right] = A(x)$. Zatem w tym przypadku $dg(x_0; x) = A(x)$, różniczka nie zależy od punktu x_0, a reszta $\omega(x_0, x) = 0$ jak w przypadku rzeczywistej, liniowej funkcji zmiennej rzeczywistej (uzyskana zależność daje możliwość od razu napisać różniczki operatorów (70) - (73)).

Dla operatorów o postaci bardziej złożonej na ogół łatwiej jest obliczyć tzw. różniczkę słabą, tj. następującą różniczkę funkcji $g(x_0 + \alpha x)$ zmiennej rzeczywistej α w punkcie $\alpha = 0$:

$$\frac{d}{d\alpha} g(x_0 + \alpha x)\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{g(x_0 + \alpha x) - g(x_0)}{\alpha} .$$

Obliczmy na przykład słabą różniczkę operatora

$$[g(x)](t) = \int_0^t g[x(\tau),\tau]\, d\tau .$$

Iloraz różnicowy ma postać

$$\frac{1}{\alpha}\left[g(x_0 + \alpha x) - g(x_0)\right] = \frac{1}{\alpha}\int_0^t \Big\{g\left[x_0(\tau) + \alpha x(\tau),\tau\right] +$$

$$-\left[g\, x_0(\tau),\tau\right]\Big\}d\tau = \frac{1}{\alpha}\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}\left[x_0(\tau) + \Theta(\tau)\,\alpha\, x(\tau),\tau\right]\alpha x(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,\tau)x(\tau)\,d\tau + \int_0^t x(\tau)\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x_0 + \Theta\,\alpha x,\tau) +\right.$$

$$\left. - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,\tau)\right]d\tau$$

(skorzystaliśmy tu z twierdzenia o wartości średniej, $0 < \Theta < 1$) i skoro funkcja $g(x, t)$ jest różniczkowalna względem x w sposób ciągły, to przy $\alpha \to 0$ wyrażenie w nawiasie kwadratowym pod drugą całką dąży do zera jednostajnie względem τ, zatem słaba różniczka tego operatora ma postać $\int_0^t g'\left[x_0(\tau),\tau\right] x(\tau)\,d\tau$. Obliczenie to można wykorzystać dzięki twierdzeniu, które mówi, że ciągła w punkcie x_0 różniczka słaba jest zarazem różniczką Frecheta /12/. Na tej podstawie obliczyliśmy np. różniczki funkcjonału (65) oraz operatorów (46a) i (74).

II. Dowód lematu 2 (rozdz. 2.5). Zgodnie ze wzorem (27) warunek $L\langle s, x\rangle \geqslant 0$ znaczy, że

$$s \geqslant 0 \quad \text{i} \quad sg(x_0) + dg(x_0; x) \geqslant 0 . \tag{a}$$

Jeżeli $s > 0$, to drugą z powyższych nierówności można podzielić przez s:

$$g(x_0) + dg(x_0; x/s) \geqslant 0 .$$

Z (21) wynika wówczas, iż $-df(x_0; x/s) \geqslant 0$, co po pomnożeniu przez s daje $-df(x_0; x) \geqslant 0$, czyli z (28)

$$l\langle s, x\rangle \geqslant 0 . \tag{b}$$

Funkcjonał l jest zatem nieujemny na zbiorze P tych par $\langle s,x\rangle$ które spełniają warunek (a) przy $s > 0$. Pokażemy, że każdy punkt $\langle s, x\rangle$ o własności (a), dla którego $s = 0$, tzn. punkt $\langle 0,x\rangle$, gdzie

$$dg(x_0; x) \geqslant 0 \tag{c}$$

jest granicą pewnego ciągu punktów ze zbioru P. Stąd już oczywiście wynika, że nierówność (b) jest spełniona także dla takiego punktu i dowód lematu zostanie zakończony. Obierzmy w tym celu dowolny punkt $\overline{x}$ o własności

$$g(x_0) + dg(x_0; \overline{x}) \geqslant 0 . \tag{d}$$

Dzieląc (d) przez $n = 1, 2, \ldots$ i dodając do (c) otrzymujemy

$$\frac{1}{n} g(x_0) + dg(x_0; \frac{1}{n} \bar{x} + x) \geqslant 0 ,$$

co dowodzi, że $\langle \frac{1}{n} , \frac{1}{n} \bar{x} + x \rangle \in P$. Ale $\lim_{n \to} \langle \frac{1}{n} , \frac{1}{n} \bar{x} + x \rangle =$

$= \langle 0, x \rangle$, co kończy dowód.

III. Dowód lematu 3 (rozdz. 2.5). Dowód ten oprzemy na twierdzeniu: wypukły i słabo domknięty zbiór funkcjonałów w^* ,określonych na przestrzeni W jest regularnie wypukły /19/. Zbiór funkcjonałów Q nazywamy regularnie wypukłym, jeśli dla każdego nie należącego doń funkcjonału $w_0^* \notin Q$ znajdziemy taki element $w_0 \in W$, że

$$\sup_{w^* \in Q} w^*(w_0) < w_0^*(w_0) ,$$

to jest element w_0 pozwala ściśle oddzielić zbiór Q od nie należącego doń funkcjonału w_0^* .

Zbiór Q_L (wzór (33)), jak łatwo sprawdzić, jest wypukły i z założenia lematu 3 słabo domknięty, jest zatem regularnie wypukły. Przypuśćmy, że jakiś funkcjonał w_0^* ma własność (30) (tj. jeżeli $L(w) \geqslant 0$, to $w_0^*(w) \geqslant 0$), a nie należy do zbioru Q_L i weźmy istniejący wobec tego element w_0 , dla którego napisaną wyżej nierówność przepiszemy w postaci: dla każdego $w^* \in Q_L$ jest $w^*(w_0) \leqslant 0 < w_0^*(w_0)$. Oznaczmy $w_1 = -w_0$. Z definicji zbioru Q_L mamy $w^*(w_1) = v^*[L(w_1)]$, zatem dla każdego $v^* > 0$ jest $v^*[L(w_1)] \geqslant 0$, a to oznacza, iż $L(w_1) \geqslant 0$, uzyskaliśmy więc sprzeczność,bo z założenia powinno być $w_0^*(w_1) \geqslant 0$, a $w_0^*(w_1) = w_0^*(-w_0) < 0$.

Dla przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych prostą interpretację geometryczną tego lematu podano w /8/.

IV. Dowód równoważności warunków (15)-(18) i (41)-(44). Aby móc ograniczenie $x \geqslant 0$ uwzględnić w funkcji Lagrange'a, należy wprowadzić operator $g(x) = \langle \tilde{g}(x), x \rangle$, $g : X \to Z, Z = \tilde{Z} \times X$ (przy pomocy którego zgodnie z (3) nierówności $\tilde{g}(x) \geqslant 0$ i (39) zapisują się w postaci (2): $g(x) \geqslant 0$) i określić funkcję Lagrange'a dla tego operatora: $\Phi(x, \lambda) = f(x) + \lambda[g(x)]$. Zgodnie z (12) funkcjonał Lagrange'a λ_0 jest wyznaczony przez dwa funkcjonały $\langle \tilde{\lambda}_0, \hat{\lambda}_0 \rangle$, gdzie nadal $\tilde{\lambda}_0 \in \tilde{Z}^*$, zaś $\hat{\lambda}_0 \in X^*$. Ponieważ $\Phi(x, \lambda) = \tilde{\Phi}(x, \tilde{\lambda}) + \hat{\lambda}(x)$, z zależności (15) mamy

$$d_x\tilde{\Phi}\left[(x_0, \tilde{\lambda}_0); x\right] = - \hat{\lambda}_0(x), \qquad (*)$$

bowiem

$$\lambda_0\left[g(x)\right] = \tilde{\lambda}_0\left[\tilde{g}(x)\right] + \hat{\lambda}_0(x)$$

oraz

$$d_x\Phi\left[(x_0, \lambda_0); x\right] = d_x\tilde{\Phi}\left[(x_0, \tilde{\lambda}_0); x\right] + \hat{\lambda}_0(x) .$$

Ale zgodnie z (17) jest $\hat{\lambda}_0(x_0) = 0$, zatem dla $x = x_0$ otrzymujemy wzór (41).

Ponieważ wobec (16) dla każdego $x \geqslant 0$ jest $\lambda_0(x) \geqslant 0$, to zależność ($*$) daje nierówność (42).

Ponieważ $\tilde{\lambda}\left[\tilde{g}(x)\right] = d_{\tilde{\lambda}}\tilde{\Phi}\left[(x_0, \tilde{\lambda}_0); \tilde{\lambda}\right]$, to wzór (17) można zapisać w postaci podobnej do (41), co daje (43).

Z uwagi na to, że (jak można pokazać) $\tilde{g}(x_0) \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdego $\tilde{\lambda} \geqslant 0$ mamy $\tilde{\lambda}\left[\tilde{g}(x_0)\right] \geqslant 0$, zależność (18) również można przepisać w postaci podobnej do (42), skąd (44).

W ten sposób wyprowadziliśmy wzory (41)-(44) ze wzorów (15) do (18). Odwrotnie, jeśli nie wyróżniamy ograniczenia (39), tj. za dopuszczalne (nieujemne) uznajemy wszystkie $x \in X$ ($\tilde{\Phi} = \Phi$), to warunek (42) przechodzi na (15), bowiem jedynym funkcjonałem liniowym niedodatnim na całej przestrzeni jest funkcjonał zerowy (równy zeru dla każdego $x \in X$).

W przypadku wyróżnienia ograniczenia (39), jeśli wzór (19) oraz operator L (wzór (35)) chcemy nadal zapisywać w zależności od operatora $\tilde{g}$, a nie g, to w określeniu wariacji dopuszczalnej x zjawi się dodatkowy warunek

$$x_0 + x \geqslant 0 , \qquad (19a)$$

a operator L będzie przybierał wartości w przestrzeni $R \times X \times Z$

zgodnie ze wzorem

$$L\langle s, x\rangle = \langle s,\ sx_0 + x,\ s\tilde{g}(x_0) + d\tilde{g}(x_0; x)\rangle. \qquad (35a)$$

V. Dowód twierdzenia 5 (rozdz. 2.6.2). Jak w lemacie 3 chcemy, aby istniał taki funkcjonał v^*, przy pomocy którego funkcjonał w^* o własności (30) można było przedstawić w postaci $w^*(w) = v^*[L(w)]$. Otóż v^* jest jednoznacznie określony dla $v = L(w)$ (tj. na obrazie $L(w)$ przestrzeni W przy przekształceniu L) warunkiem

$$v^*(v) = w^*(w) = w^*[L^{-1}(v)],$$

gdzie $L^{-1}(v)$ oznacza dowolny przeciwobraz elementu v, bez założenia istnienia przekształcenia odwrotnego do L. Istotnie, jeśli $w_1 = L^{-1}(v)$ i $w_2 = L^{-1}(v)$, to podane określenie jest jednoznaczne, jeżeli $w^*(w_1) = w^*(w_2)$, czyli $w^*(w_1 - w_2) = 0$. Ale ponieważ $L(w_1) = L(w_2)$, to $L(w_1 - w_2) = 0$, czyli zarazem $L(\bar{w}) \geqslant 0$ i $L(-\bar{w}) \geqslant 0$, gdzie $\bar{w} = w_1 - w_2$. Stąd wobec (30) $w^*(\bar{w}) = 0$, to jest właśnie $w^*(w_1) = w^*(w_2)$. Należy więc tylko rozszerzyć tak określony funkcjonał v^* na całą przestrzeń V (tj. wyznaczyć jego wartości dla wszystkich $v \in V$), a fakt, że to można zrobić przy warunku (47), wynika ze znanych twierdzeń matematycznych, na przykład wniosek 1 z twierdzenia 1, praca /20/. W nieco słabszym sformułowaniu i bez dowodu twierdzenie 5 zostało podane w pracy /11/.

Literatura

1. H u r w i c z L.: Programming in linear spaces. W: Arrow K.J., Hurwicz L., Uzawa H.: Studies in linear and non-linear programming. Stanford 1958.
2. K u l i k o w s k i R.: On optimal control with integral and magnitude type of constraints. Automatica (w druku).
3. K u l i k o w s k i R.: On optimum control of nonlinear, dynamic industrial processes. Arch. Autom. i Telemech. 1967 z. 1.
4. M a k o w s k i K.: Metoda funkcjonałów Lagrange'a i jej zastosowanie do optymalizacji procesów dynamicznych. Praca doktorska. Warszawa 1966.

5. Makowski K., Malanowski K.: Sterowanie optymalne układów liniowych przy ograniczeniach amplitudy i pochodnej sygnału sterującego. Arch. Autom. i Telemech. (w druku).
6. Gómułka J., Gómułka S.: O względności optymalnej stopy akumulacji. Ekonomista (w druku).
7. Kuhn H., Tucker A.W.: Nonlinear programming. Proc. 2nd Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability, 1951.
8. Hadley G.: Nonlinear and dynamic programming. Reading 1964.
9. Krejn S.G. red.: Funkcjonalnyj analiz. Moskwa 1964.
10. Lusternik L.A., Sobolew W.I.: Elemienty funkcjonalnowo analiza. Moskwa-Leningrad 1951.
11. Dubowickij A.J., Milutin A.A.:Zadaczi na ekstriemum pri naliczii ograniczenij. Żurn. wyczyslit. matiemat.i matiemat. fiz. 1965 Nr. 3.
12. Wajnberg M.M.:Wariacjonnyje mietody issledowanija nieliniejnych opieratorow . Moskwa 1956.
13. Lindquist J.: Operation of a hydro-termal electric system. Trans. AIEE Power a. Apparatus Systems 1962 No. 59.
14. Bernholtz B., Graham L.J.: Hydro-termal economic scheduling. Trans. AIEE Pt. 3: 1960 No. 79, 1962 No. 81.
15. Kirchmayer L.K.: Economic operation of power systems. New York 1958.
16. Kirchmayer L.K., Ringle R.J.: Optimal control of thermal-hydro system operation. Proc. 2nd IFAC Congr. 1963 Basel.
17. Przyłuski A.: Ekonomiczny rozdział obciążeń na elektrownie dla potrzeb planowania rozwoju systemu elektroenergetycznego. Cz. 1. Warszawa 1964 Instytut Energetyki.
18. Malanowski K.: Maksymalizacja funkcjonału całkowego przy ograniczeniu amplitudy i całki argumentu. Arch. Autom. i Telemech. (w druku).
19. Burgin D.G.: Linear topological spaces. Amer. J.Mathemat. 1943 vol. 65.
20. Day M.M.: Normed linear spaces. Berlin 1958.