Piotr Kucharczyk

TEORIA GRUP LIEGO W ZASTOSOWANIU DO RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

16/1967

WARSZAWA

NA PRAWACH RĘKOPISU
DO UŻYTKU WEWNĘTRZNEGO

Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN
Nakład 200 egz. Arkuszy wyd. 3,5 Arkuszy druk. 4,25. Oddano do drukarni w październiku 1967 r. Druk ukończono w grudniu 1967 r.

WARSZAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA
Warszawa, ul. Śniadeckich 8. Zam. 989/o/67.

TEORIA GRUP LIEGO W ZASTOSOWANIU DO RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

1. Wstęp

Od swego początku teoria ciągłych grup przekształceń, inaczej grup Liego nierozerwalnie wiązała się z równaniami cząstkowymi. To właśnie na badaniu układów równań różniczkowych o określonych własnościach opiera się cała teoria struktury grup skończonych /zależnych od skończonej liczby parametrów/ [19] oraz teoria grup nieskończonych /zależnych także od funkcji dowolnych/ [29]. Z drugiej strony kiedy mamy do czynienia z konkretnym układem równań cząstkowych można zapytywać o takie przekształcenia przestrzeni argumentów i funkcji, które przeprowadzają rozwiązania układu znowu na jego rozwiązania. Jak się okazuje rodzina takich przekształceń stanowi grupę, którą po jej wyznaczeniu można na wiele sposobów spożytkować albo do poszukiwania rozwiązań szczególnych wyjściowego układu albo też do rozszczepienia ogólnego problemu całkowania układu na zagadnienia prostsze. O ile jednak sama teoria grup Liego doczekała się głębokich uogólnień; od strony algebraiczno-topologicznej jako teoria grup topologicznych a od strony analitycznej jako teoria Cartana struktury grup skończonych i nieskończonych, to zastosowania do równań cząstkowych pozostały na uboczu i od końca ubiegłego wieku ukazało się niewiele prac z tego zakresu /np. [5], [3] /.

Ostatnio jednak w związku z poszukiwaniem nowych metod analitycznych, zwłaszcza dla potrzeb hydrodynamiki, sięgnięto po dobrze wypracowany jeszcze za czasów Liego aparat. W znanej książce Birkhoffa [1] aż dwa rozdziały są poświęcone rozlicznym powiązaniom teorii grup przekształceń i hydrodynamiki, przy czym główną uwagę zwrócono tu na powiązania teorii grup i analizy wymiarowej, stąd też zakres przedstawionych metod nie wyczerpywał wszystkich możliwości zastosowania teorii grup.

Przełomowe znaczenie miały w tym zakresie prace Owsiannikowa [26 - 29] i jego uczniów, podsumowane następnie w monografii [30], która niestety z powodu małego nakładu należy do bibliofilskiej rzadkości. Wypracowany przez Owsiannikowa algorytm wyznaczania grupy podstawowej oraz konstrukcji rozwiązań szczególnych oraz postawione przez niego zagadnienia klasyfikacji okazały się w pełni sprawnym instrumentem przy badaniu konkretnych układów równań, z którymi mamy do czynienia w fizyce matematycznej.

Praca niniejsza ma na celu możliwie pełne zapoznanie czytelnika z tym algorytmem i kręgiem stawianych przy tym zagadnień. Tę stronę algorytmiczną mając przede wszystkim na uwadze starałem się zmierzać do celu najprostszymi środkami, co może być nie bez znaczenia dla czytelnika pragnącego przyswoić sobie aparat bez szczegółowego wnikania w trudne działy matematyki, jak np. teoria grup topologicznych, od których właściwie należało by zaczynać. Z tego też względu zrezygnawałem ze zbyt pedantycznego wymieniania założeń, przy których można przeprowadzać występujące tu rachunki. Nieuniknione zbieżności z monografią Owsiannikowa starałem się rekompensować przez rozbudowę występujących tam algorytmów na przypadek grup nieskończonych.

Z nielicznymi wyjątkami unikałem ilustrowania przykładami tych zastosowań, które łatwo znaleźć można w przytoczonej na końcu bibliografii. Pozostałe przykłady wynikły z moich obliczeń.

W całej pracy z wyjątkiem punktu 4.6 jest konsekwentnie stosowana konwencja sumacyjna względem powtarzających się dolnych oraz górnych wskaźników względnie ich zespołów ι.

2. Grupy Liego przekształceń ciągłych. Przedłużanie przekształceń punktowo-punktowych na pochodne cząstkowe

2.1. Grupa jednoparametrowa. Operator infinitezymalny. W naszych rozważaniach $E_N(y)$ będzie oznaczać N - wymiarową przestrzeń euklidesową, której punkty mają współrzędne $y=(y^1,\dots,y^N)$. Założenie, że E_N jest przestrzenią euklidesową nie jest istotne i większość stwierdzeń i konstrukcji odnosi się ogólnie do rozmaitości różniczkowych, ala zachowujemy je dla większej poglądowości rozważań. Pole wektorowe $\lambda(y)=(\lambda^1(y),\dots,\lambda^N(y))$ klasy C^1 wyznacza w $E_N(y)$ lokalną kongruencję linii pola, określoną układem równań różniczkowych

/2.1/ $$\frac{dy^1}{\lambda^1(y)}=\frac{dy^2}{\lambda^2(y)}=\dots=\frac{dy^N}{\lambda^N(y)}.$$

Kongruencja K linii pola powstaje z przecięcia się rodziny powierzchni

/2.2/ $$J_1(y)=C_1,\ \dots,\ J_{N-1}(y)=C_{N-1},$$

gdzie $J_1(y),\dots,J_{N-1}(y)$ są to funkcyjnie niezależne całki pierwsze układu /2.1/.

Z kongruencją K można związać ciągłą rodzinę przekształceń punktowo-punktowych przestrzeni E_N o tej własności, że dla danego punktu $p\in E_N$ jego obrazy $\bar{p}$ zajmują położenia na linii pola poprowadzonej przez p, innymi słowy poruszają się po tej linii jako po trajektorii. W tym celu obok układu /2.1/ rozważmy układ następujący:

/2.3/ $$\frac{d\bar{y}^1}{\lambda^1(\bar{y})}=\frac{d\bar{y}^2}{\lambda^2(\bar{y})}=\dots=\frac{d\bar{y}^N}{\lambda^N(\bar{y})}=d\tau$$

z warunkiem początkowym

/2.4/ $$\bar{y}^s\big|_{\tau=0} = y^s \qquad s=1,\dots,N$$

Na podstawie /2.2/ rozwiązanie układu /2.3/ ma postać

$$\mathcal{J}_1(\bar{y}) = C_1, \dots, \mathcal{J}_{N-1}(\bar{y}) = C_{N-1}, \mathcal{K}(\bar{y}) = \tau + C_N$$

a biorąc pod uwagę /2.4/ znajdujemy

/2.5/ $$T_\tau: \quad \mathcal{J}_1(\bar{y}) = \mathcal{J}_1(y), \dots, \mathcal{J}_{N-1}(\bar{y}) = \mathcal{J}_{N-1}(y), \quad \mathcal{K}(\bar{y}) = \mathcal{K}(y) + \tau .$$

Wzory te ustalają odpowiedniość pomiędzy punktami $p(y) \in E_N$ i punktami $p_\tau(\bar{y})$ o współrzędnych $\bar{y}$. Łatwo sprawdzić, że odwzorowania T_τ mają własności następujące:

/2.6/ $$T_{\tau_2} \circ T_{\tau_1} = T_{\tau_2+\tau_1}, \quad T_0 = I, \quad T_\tau^{-1} = T_{-\tau}$$

oraz że superpozycja przekształceń jest działaniem łącznym [1]. Rodzina T_τ stanowi więc ciągłą grupę przekształceń, zależną od jednego parametru τ .

Jak widzimy, każde dostatecznie regularne pole wektorowe $\lambda(y)$ w przestrzeni E_N generuje jednoparametrową grupę przekształceń $\mathcal{G}_1$. Równocześnie możemy powiedzieć, że grupę $\mathcal{G}_1$ generuje liniowy operator różniczkowy pierwszego rzędu $\mathcal{X} = \lambda^s(y)\partial_s$, gdzie $\partial_s = \partial/\partial y^s$, nazywany też operatorem infinitezymalnym grupy $\mathcal{G}_1$. Za takim ujęciem przemawia z jednej strony to, że w geometrii rozmaitości różniczkowej wektor kontrawariantny jest definiowany aksjomatycznie jako liniowy operator różniczkowy oraz to,

---

[1] Własności /2.6/ stają się jeszcze bardziej widoczne jeśli obrać $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_{N-1}, \mathcal{K}$ jako nowe współrzędne przestrzeni E_N wtedy bowiem /2.5/ zapisze się jako

$$\bar{\mathcal{J}}_1 = \mathcal{J}_1, \dots, \bar{\mathcal{J}}_{N-1} = \mathcal{J}_{N-1}, \bar{\mathcal{K}} = \mathcal{K} + \tau$$

że układ /2.1/ jest równoważny stowarzyszonemu równaniu cząstkowemu pierwszego rzędu

/2.7/ $$\lambda^1(y)\frac{\partial f}{\partial y^1} + \lambda^2(y)\frac{\partial f}{\partial y^2} + \dots + \lambda^N(y)\frac{\partial f}{\partial y^N} = 0$$

Z drugiej strony rola operatora $\mathcal{X} = \lambda^s(y)\partial_s$ przy generowaniu grupy $\mathcal{G}_1$ staje się jeszcze bardziej widoczna, jeśli założywszy analityczność pola $\lambda(y)$ zapiszemy równania /2.3/ w postaci

/2.8/ $$\frac{d\bar{y}^s}{d\tau} = \lambda^s(\bar{y}) \qquad s = 1, \dots, N$$

oraz rozwiążemy je przy warunku /2.4/ przez rozwinięcie $\bar{y}^s$ w szereg potęgowy względem τ, którego współczynniki obliczamy przez różniczkowanie /2.8/ i podstawienie $\tau = 0$. Otrzymamy wówczas formalne rozwinięcie

/2.9/ $$\bar{y}^s = y^s + \frac{\tau}{1!}\mathcal{X}(y^s) + \frac{\tau^2}{2!}\mathcal{X}^2(y^s) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\mathcal{X}^n(y^s),$$

czyli w zapisie symbolicznym

/2.10/ $$\bar{y}^s = \exp(\tau\mathcal{X})y^s$$

Przekształcenia skończone grupy $\mathcal{G}_1$ można więc otrzymać w postaci szeregu potęgowego, którego współczynniki otrzymuje się przez kolejne iteracje operatora infinitezymalnego $\mathcal{X}$ działające na y^s /szereg Liego/. Z dokładnością do wyrazów rzędu drugiego względem τ mamy

/2.11/ $$\bar{y}^s = y^s + \tau\mathcal{X}(y^s) = y^s + \lambda^s(y)\tau.$$

Z tego powodu $\mathcal{X}$ /a dokładniej pole λ / nazywamy także <u>przekształceniem infinitezymalnym</u> grupy $\mathcal{G}_1$.

Odwrotnie, każdej jednoparametrowej grupie przekształceń $\mathcal{G}_1: \bar{y}^s = \bar{y}^s(y,\tau), \bar{y}^s(y,0) = y^s$ odpowiada operator infinitezymalny $\mathcal{X} = \lambda^s \partial_s$, przy czym jego współrzędne obliczamy wg wzorów

$$\lambda^s(y) = \frac{\partial \bar{y}^s}{\partial \tau}\Big/_{\tau=0} \tag{2.11'}$$

Operatorom $\mathcal{X}_1 = \lambda_1^s \partial_s$ oraz $\mathcal{X}_2 = \lambda_2^s \partial_s$ możemy przyporządkować operator $\mathcal{X}_{12}$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{12} &= (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \mathcal{X}_1(\mathcal{X}_2) - \mathcal{X}_2(\mathcal{X}_1) = \\ &= [\mathcal{X}_1(\lambda_2^s) - \mathcal{X}_2(\lambda_1^s)]\partial_s = (\lambda_1^\varrho \partial_\varrho \lambda_2^s - \lambda_2^\varrho \partial_\varrho \lambda_1^s)\partial_s, \\ &\qquad \varrho, s = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Przyporządkowanie to, odgrywające w dalszym ciągu ważną rolę, nazywa się iloczynem Liego albo komutatorem operatorów $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Jest ono

<u>antysymetryczne</u>

$$(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = -(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) \tag{2.13}$$

<u>liniowe</u> względem obu czynników

$$(\alpha \mathcal{X}_1 + \beta \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) = \alpha(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3) + \beta(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3), \quad \alpha, \beta - \text{stałe} \tag{2.14}$$

oraz spełnia <u>tożsamość Jacobiego</u>

$$(\mathcal{X}_1, (\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3)) + (\mathcal{X}_2, (\mathcal{X}_3, \mathcal{X}_1)) + (\mathcal{X}_3, (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)) = 0 \tag{2.15}$$

2.2. Grupa r-parametrowa. Algebra Liego operatorów infinitezymalnych . Bezpośrednim uogólnieniem jednoparametrowej grupy przekształceń jest pojęcie lokalnej r-parametrowej grupy $\mathcal{G}_r$ definiowanej jako rodzina przekształceń przestrzeni E_N , zależna w sposób istotny od r parametrów $a^1, \ldots, a^r$

/2.16/ $$\bar{y}^s = F^s(y^1, \ldots, y^N; a^1, \ldots, a^r), \quad s = 1, \ldots, N$$

i spełniająca następujące warunki /dla skrócenia ich zapisu oznaczamy $y = (y^1, \ldots, y^N)$, $a = (a^1, \ldots, a^r)$, $F = (F^1, \ldots, F^N)$ $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^r)$:

1. Zawiera się w niej przekształcenie tożsamościowe; istnieje $a = e$, że $F(y; e) = y$.

2. Superpozycja przekształceń należy do rodziny; jeśli $T_a \in \mathcal{G}_r$ oraz $T_b \in \mathcal{G}_r$; $T_a : \bar{y} = F(y; a)$, $T_b : \bar{\bar{y}} = F(\bar{y}; b)$, to $T_b \circ T_a = T_{c = \varphi(a,b)} \in \mathcal{G}_r$, czyli $\bar{\bar{y}} = F(F(\bar{y}; a); b) = F(y; \varphi(a,b))$.

3. Jeśli przekształcenie T_a należy do rodziny, to przekształcenie odwrotne T_a^{-1} istnieje i też należy do rodziny, czyli

$$T_a^{-1} = T_{\underline{a} = k(a)}, \quad \varphi(a, \underline{a}) = \varphi(a, k(a)) = e$$

4. Superpozycja przekształceń jest w tej rodzinie działaniem łącznym $T_c \circ (T_b \circ T_a) = (T_c \circ T_b) \circ T_a$, inaczej

/2.17/ $$\varphi(\varphi(a,b), c) = \varphi(a, \varphi(b,c))$$

5. Funkcje $\varphi(a,b), k(a)$ są analityczne w pewnym otoczeniu e a funkcje $F(y; a)$ są dostatecznie regularne w pewnym obszarze E_N i analityczne w pewnym otoczeniu e względem zmiennych $a^1, \ldots, a^r$.

Omówimy bez przytaczania dowodów stwierdzenia składające się na treść trzech podstawowych twierdzeń Liego o r-parametrowych grupach przekształceń [19, 4, 30] .

Grupa $\mathcal{G}_r$ zawiera ∞^r podgrup jednoparametrowych generowanych przez operatory

/2.18/ $$\mathcal{X} = A^1\mathcal{X}_1 + \dots + A^r\mathcal{X}_r, \quad A^1, \dots, A^r - \text{stałe}.$$

Operatory /2.18/ tworzą liniową przestrzeń $\mathfrak{g}_r$ o liniowo niezależnych /względem stałych współczynników/ operatorach bazy $\mathcal{X}_J = \lambda^s_J(y)\partial_s$, $J = 1, \dots, r$ określonych przez pochodne $\lambda^s_J = (\partial F^s/\partial a^J)/_{a=e}$ - zamkniętą względem iloczynu Liego, ponieważ zachodzi

/2.19/ $$(\mathcal{X}_I, \mathcal{X}_J) = C^K_{IJ}\mathcal{X}_K$$

gdzie C^K_{IJ} oznaczają stałe współczynniki, tzw. stałe strukturalne grupy $\mathcal{G}_r$. Przestrzeń $\mathfrak{g}_r$ stanowi tzw. algebrę Liego grupy $\mathcal{G}_r$. Stałe strukturalne grupy czynią zadość związkom

/2.20/ $$C^K_{IJ} = -C^K_{JI}, \quad I, J, K = 1, \dots, r$$

oraz

/2.21/ $$C^L_{IS}C^S_{JK} + C^L_{JS}C^S_{KI} + C^L_{KS}C^S_{IJ} = 0, \quad I, J, K, L, S = 1, \dots, r$$

/tożsamość Jacobiego, pozostająca w ścisłym związku z łącznością superpozycji przekształceń w grupie/.

Funkcje F^s, określające przekształcenia skończone grupy $\mathcal{G}_r$ spełniają następujący układ równań cząstkowych:

/2.22/ $$\frac{\partial F^s}{\partial a^J} = \lambda^s_K(F)\Psi^K_J(a), \quad s = 1, \dots, N, \quad J, K = 1, \dots, r,$$

z warunkiem początkowym $F/_{a=e} = y$, gdzie $\Psi^K_J(a) = \frac{\partial\varphi^K(a,b)}{\partial b^J}/_{a=b}$ są to tzw. funkcje pomocnicze grupy; $\Psi^K_J(e) = \delta^K_J$.
Natomiast funkcje kompozycyjne grupy $\varphi(a,b)$ spełniają równania

$$\Psi_K^{\;I}(\varphi)\frac{\partial\varphi^K}{\partial a^J}=\Psi_J^{\;I}(a) \qquad /2.23/$$

z warunkiem początkowym $\varphi(e,a)=a$.

Warunki całkowalności układu /2.23/ mają postać

$$\partial_{[J}\Psi_{K]}^{\;I}=C_{MN}^{\;I}\Psi_J^{\;M}\Psi_K^{\;N}. \qquad /2.24/$$

Odwrotnie, jeśli wyjdziemy od stałych strukturalnych grupy, tj. od układu stałych spełniających /2.20/ i /2.21/, i rozpatrzymy liniowy układ

$$\frac{d\theta_J^{\;I}}{dt}=\delta_J^{\;I}+C_{MN}^{\;I}a^M\theta_J^{\;N} \qquad /2.25/$$

o niewiadomych funkcjach $\theta_J^{\;I}$, przy warunku $\theta_J^{\;I}(t,a)/_{t=0}=0$, a następnie przyjmiemy $\Psi_J^{\;I}(a)=\theta_J^{\;I}(t,a)/_{t=1}$, to otrzymamy układ funkcji pomocniczych spełniających /2.24/ a tym samym, ponieważ zapisany przy tych funkcjach układ /2.23/ będzie całkowalny, funkcje kompozycyjne φ .

Z kolei rozważając pewną algebrę Liego $\mathcal{G}_r$ operatorów infinitezymalnych przestrzeni E_N daną przez bazę $X_1,\ldots,X_r$, spełniającą /2.19/ /stałe $C_{JK}^{\;I}$ spełniać będą /2.20/ i /2.21/ na mocy /2.13/ i /2.15/ i powtarzając przytoczoną konstrukcję dla stałych strukturalnych tej algebry Liego oraz całkując następnie układ /2.22/ /warunkiem całkowalności są akurat związki /2.19/ / przy warunku $F/_{a=e}=y$ dojdziemy do skończonych przekształceń grupy G_r , której algebra Liego pokrywa się /jest izomorficzna/ z algebrą $\mathcal{G}_r$, stanowiącą punkt wyjścia.

W praktyce, aby znaleźć skończone przekształcenia grupy G_r danej przez układ jej operatorów infinitezymalnych, szukamy najpierw odpowiednich grup jednoparametrowych generowanych przez te operatory. Jeśli więc $X_J\rightarrow\bar{y}^s=f_J^{\;s}(y;a_J)$, to przekształcenia skończone G_r można napisać w postaci

$$\bar{y}^s=f_1^{\;s}(f_2(\cdots f_{r-1}(f_r(y;a_r);a_{r-1});\cdots);a_2);a_1). \qquad /2.26/$$

Parametry $a_1, \dots, a_r$ są przy tym parametrami <u>kanonicznymi</u> drugiego rodzaju dla $\mathcal{G}_r$. Inny sposób polega na całkowaniu układu

/2.29/ $$\frac{d\bar{y}^s}{dt} = A^J \lambda_J^s(\bar{y}), \quad J=1,\dots,r, \quad s=1,\dots,N$$

przy warunku początkowym $\bar{y}^s/_{t=0} = y^s$ oraz na przyjęciu zmiennych $tA^1, \dots, tA^r$ jako parametrów grupy.

Przytoczone stwierdzenia sprowadzają badanie lokalnych grup przekształceń Liego do badania odpowiednich algebr Liego operatorów infinitezymalnych. W szczególności istnieje odpowiedniość struktur algebraicznych grupy $\mathcal{G}_r$ i jej algebry g_r. Tak więc, dla przykładu, podgrupie $\mathcal{G}_\ell$ grupy $\mathcal{G}_r$ odpowiada podalgebra g_ℓ algebry g_r, dzielnikowi normalnemu $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_r$ odpowiada ideał i algebry g_r, a grupie ilorazowej -algebra residuów algebry g_r względem odpowiedniego ideału itd.

Funkcje $J(y^1, \dots, y^N)$ nie ulegające zmianie przy przekształceniach grupy $\mathcal{G}_r$ /<u>inwarianty grupy</u>/ czyli spełniające tożsamościowo względem y i a związki

/2.28/ $$J(\bar{y}) = J(F(y;a)) = J(y)$$

spełniają równania

/2.28/' $$\mathcal{X}_K J = 0$$

o czym łatwo przekonać się przez różniczkowanie /2.28/ względem a^K i podstawienie $a = e$. Odwrotnie, każde rozwiązanie /2.28/ jest niezmiennikiem - inwariantem - grupy $\mathcal{G}_r$ /por.wzór /2.26/ /. Wobec /2.19/ układ /2.28/ jest układem zupełnym, a liczba funkcyjnie niezależnych rozwiązań [8] czyli liczba niezależnych inwariantów grupy wynosi $\rho = N - \text{rząd}\,[\lambda_K^s]$.

<u>Rozmaitość</u> $\mathcal{M}_\ell$ przestrzeni E_N

/2.29/ $$\mathcal{M}_\ell : \quad \psi^i(y^1, \dots, y^N) = 0 \qquad i = 1, \dots, N-\ell$$

jest niezmiennicza względem grupy $\mathcal{G}_r$, jeśli dla każdego $p \in \mathcal{M}_e$ i dla każdego $T_a \in \mathcal{G}_r$ zachodzi $\bar{p} = T_a(p) \in \mathcal{M}_e$. W terminach operatorów infinitezymalnych grupy $\mathcal{G}_r$ warunek ten tłumaczy się jako warunek styczności g_r do $\mathcal{M}_e$ czyli

$$\mathcal{X}_K \psi^i = 0 \ , \quad (\mathrm{mod}\ \mathcal{M}_e) \qquad /2.30/$$

/Symbolu $(\mathrm{mod}\ \mathcal{M}_e)$ używamy dla podkreślenia, że równość zachodzi tylko dla y spełniających /2.29/, tj tylko na rozmaitości $\mathcal{M}_e$

Jeśli rozmaitość niezmiennicza jest nieosobliwa, to jest jeśli w jej punktach rząd macierzy $[\lambda^o_K]$ nie ulega zmniejszeniu i jest taki sam jak liczony dla dowolnych y z obszaru, gdzie $\mathcal{X}_K$ są dane, to jak dowodzi się, [4 , 30], można ją zapisać w postaci

$$\Psi^i(\mathcal{J}_1(y), \ldots, \mathcal{J}_\rho(y)) = 0 \qquad /2.31/$$

gdzie $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_\rho$ są niezależnymi inwariantami grupy

2.3. Przedłużanie przekształceń punktowo- punktowych na pochodne cząstkowe

2.3.1. Rozważmy w przestrzeni E_N rozmaitość n-wymiarową $\mathcal{M}_n$, przy czym dla wygody oznaczmy współrzędne E_N jako $x^1, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^m, n+m = N$ i niech

$$\mathcal{M}_n: \quad u^\alpha = u^\alpha(x^1, \ldots, x^n) \qquad \alpha = 1, \ldots, m \qquad /2.32/$$

- oraz przekształcenie punktowo-punktowe E_N

$$T: \quad \begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x, u) \qquad & i = 1, \ldots, n \\ \bar{u}^\alpha &= \bar{u}^\alpha(x, u) \qquad & \alpha = 1, \ldots, m \end{aligned} \qquad /2.33/$$

różniczkowalne dostateczną liczbę razy.

Obraz $\mathcal{M}_n$ pod działaniem T oznaczmy przez $\overline{\mathcal{M}}_n = T(\mathcal{M}_n)$ czyli

$$/2.32/' \quad \overline{\mathcal{M}}_n : \quad \begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x, u(x)) \\ \bar{u}^\alpha &= \bar{u}^\alpha(x, u(x)). \end{aligned}$$

Ale $\overline{\mathcal{M}}_n$ można opisać także za pomocą $\bar{x}^i$ przez odwrócenie /2.32/$_1$, a tym samym można ustalić odpowiedniość pochodnych $\bar{p}^\alpha_i = \partial\bar{u}^\alpha/\partial\bar{x}^i$ oraz $p^\alpha_i = \partial u^\alpha/\partial x^i$ przez zróżniczkowanie /2.32/ względem x^i po uprzednim odwróceniu /2.32/$_1$, czyli

$$/2.33/ \qquad \bar{p}^\alpha_i \mathcal{D}^{(1)}_j \bar{x}^i = \mathcal{D}^{(1)}_j \bar{u}^\alpha$$

przy czym operator pomocniczy

$$/2.33/' \qquad \mathcal{D}^{(1)}_j \equiv \partial_j + p^\beta_j \partial_\beta, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

jest operatorem różniczkowania zupełnego względem x^j.

Jeśli $W = |\mathcal{D}_j \bar{x}^i| \neq 0$, to /2.33/ po rozwiązaniu względem $\bar{p}^\alpha_i$ prowadzi do formuł $\bar{p}^\alpha_i = \bar{p}^\alpha_i(x,u,p)$. Dołączając je do wzorów określających T otrzymamy przekształcenie przestrzeni $E_{N^{(1)}}(x,u,p)$, $N^{(1)} = n+m+nm$,

$$/2.34/ \quad \tilde{T}^{(1)} : \quad \begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x,u) \\ \bar{u}^\alpha &= \bar{u}^\alpha(x,u) \\ \bar{p}^\alpha_i &= \bar{p}^\alpha_i(x,u,p), \end{aligned}$$

nazywane <u>przedłużeniem</u> przekształcenia T <u>na pierwsze pochodne</u> u^α <u>względem</u> x^i. Kształt $\tilde{T}^{(1)}$ nie zależy od konkretnej postaci rozmaitości $\mathcal{M}_n$ a jedynie od postaci T.

Analogicznie, odwracając /2.34/$_1$, podstawiając do /2.34/$_2$ a potem do /2.34/$_3$ i różniczkując względem x^k otrzymamy drugie przedłużenie

$$/2.35/ \quad \tilde{T}^{(2)} : \quad \begin{aligned} &\tilde{T}^{(1)} \\ &\bar{p}^\alpha_{ik} \mathcal{D}^{(2)}_j \bar{x}^k = \mathcal{D}^{(2)}_j \bar{p}^\alpha_i \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{D}^{(2)}_j = \partial_j + p^\alpha_j \partial_\alpha + p^\alpha_{jl} \frac{\partial}{\partial p^\alpha_l}$

Ogólnie, przedłużenie na pochodne rzędu ν będzie miało postać

$$/2.36/ \quad \tilde{T}^{(\nu)} : \quad \begin{aligned} &\tilde{T}^{(\nu-1)} \\ &\bar{p}^\alpha_{i_1 \dots i_n j} \mathcal{D}^{(\nu)}_k \bar{x}^j = \mathcal{D}^{(\nu)}_k \bar{p}^\alpha_{i_1 \dots i_n} \end{aligned}$$

gdzie

/2.37/ $$\mathcal{D}_k^{(\nu)} = \partial_k + p_k^\alpha \partial_\alpha + p_{kl}^\alpha \frac{\partial}{\partial p_l^\alpha} + \dots + p^\alpha_{i_1 \dots i_n k} \frac{\partial}{\partial p^\alpha_{i_1 \dots i_n}}$$

oraz $i_1 + \dots + i_n = \nu - 1$. W dalszym ciągu zachowamy oznaczenia $\tilde{T} = \tilde{T}^{(1)}$, $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i^{(1)}$

Przekształcenia $\tilde{T}$ są przypadkiem szczególnym przekształceń stycznościowych, tj. takich przekształceń

/2.38/ $$\bar{x} = \bar{x}(x,u,p), \quad \bar{u} = \bar{u}(x,u,p), \quad \bar{p} = \bar{p}(x,u,p)$$

przestrzeni $E(x,u,p)$, które zachowują zerowanie się form różniczkowych

/2.39/ $$\omega = \omega^\alpha = du^\alpha - p_j^\alpha dx^j$$

czyli dla których zachodzi $\bar{\omega}^\alpha = 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^\alpha = 0)$, $\bar{\omega}^\alpha$ -formy kształtu /2.39/ w zmiennych $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{p}$, czyli $\bar{\omega}^\alpha = d\bar{u}^\alpha - \bar{p}_j^\alpha d\bar{x}^j$. Dowodzi się, że dla $m \geq 2$ przekształcenia stycznosciowe sprowadzają się do przedłużonych przekształceń punktowo-punktowych [25] .

Do wzorów /2.33/ można dojść też następująco. Dopełniamy T wzorami $\bar{p}_j^\alpha = \bar{p}_j^\alpha(x,u,p)$ i żądamy, żeby tak otrzymane przekształcenie przestrzeni $E(x,u,p)$ zachowywało zerowanie się form ω^α. W analogiczny sposób można dojść dp przedłużeń wyższego rzędu. Od $\tilde{T}^{(\nu-1)}$ przechodzimy do $\tilde{T}^{(\nu)}$ przez dołączenie formuł $\bar{p}^\alpha_{i_1 \dots i_n j} = \bar{p}^\alpha_{i_1 \dots i_n j}(x,u,p^{(1)},\dots,p^{(\nu-1)})$ i żądanie, żeby powstałe przekształcenia przestrzeni $E_{N(\nu)}(x,u,p^{(1)},p^{(2)},\dots,p^{(\nu)})$ zachowało zerowanie się form

/2.40/ $$\omega^{(\nu-1)} = \omega^\alpha_{i_1 \dots i_n} = dp^\alpha_{i_1 \dots i_n} - p^\alpha_{i_1 \dots i_n j}\, dx^j, \quad i_1 + \dots + i_n = \nu - 1$$

Przy takim ujęciu łatwo sprawdzić, jak zachowują się przy przedłużeniu przekształcenia tożsamościowe przestrzeni E_N oraz superpozycja $T_2 \circ T_1$ dwóch przekształceń punktowo-punktowych przestrzeni E_N. Mamy mianowicie:

1. Przedłużenie $\tilde{I}^{(\nu)}$ przekształcenia tożsamościowego I przestrzeni E_N jest przekształceniem tożsamościowym $I^{(\nu)}$ przestrzeni $E_{N^{(\nu)}}(x, u, p^{(1)}, \ldots, p^{(\nu)})$, czyli $\tilde{I}^{(\nu)} = I^{(\nu)}$.

2.

$$/2.41/ \qquad (T_2 \circ T_1)^{\sim(\nu)} = \tilde{T}_2^{(\nu)} \circ \tilde{T}_1^{(\nu)}.$$

Udowodnimy ostatni wzór. Przekształcenie $\tilde{T}_1^{(\nu)}$ zeruje formy $\bar{\omega}, \bar{\omega}^{(1)}, \ldots, \bar{\omega}^{(\nu-1)}$ modulo formy $\omega, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(\nu-1)}$, a $\tilde{T}_2^{(\nu)}$ zeruje formy $\bar{\bar{\omega}}, \bar{\bar{\omega}}^{(1)}, \ldots, \bar{\bar{\omega}}^{(\nu-1)}$ modulo formy $\bar{\omega}, \ldots, \bar{\omega}^{(\nu-1)}$. Wobec tego $\tilde{T}_2^{(\nu)} \circ \tilde{T}_1^{(\nu)}$ również zeruje formy $\bar{\bar{\omega}}, \ldots, \bar{\bar{\omega}}^{(\nu-1)}$ modulo $\omega, \ldots, \omega^{(\nu-1)}$ a ten ostatni warunek jest właśnie definicją $(T_2 \circ T_1)^{\sim(\nu)}$ /przypominamy, że $(T_2 \circ T_1)^{\sim(\nu)}$ działa po dwóch pierwszych współrzędnych x, u przestrzeni $E_{N^{(\nu)}}(x, u, p^{(1)}, \ldots, p^{(\nu)})$ jak $T_2 \circ T_1$ na $E_N(x, u)$.

W szczególności, wychodząc ze wzoru $T^{-1} \circ T = I$ i przedłużając do pochodnych rzędu ν, mamy na podstawie /2.41/ $(T^{-1})^{\sim(\nu)} \circ \tilde{T}^{(\nu)} = I^{(\nu)}$ skąd po pomnożeniu prawostronnym obu stron przez $(\tilde{T}^{(\nu)})^{-1}$ otrzymujemy

$$/2.42/ \qquad (T^{-1})^{\sim(\nu)} = (\tilde{T}^{(\nu)})^{-1}$$

Wzory /2.41/ i /2.42/ są w zasadzie prostym wnioskiem /a właściwie wyrazem/ z reguły łańcuchowej obliczania pochodnych funkcji złożonych i funkcji odwrotnych.

W przypadku grupy przekształceń $\mathcal{G}_r$ przedłużenia $\tilde{T}_a^{(\nu)}$ jej elementów $T_a \in \mathcal{G}_r$ także zależą od parametrów a, przy czym rodzina przedłużonych przekształceń z uwagi na 1 oraz /2.41/ i /2.42/ będzie miała własności

$$(T_e)^{\sim(\nu)} = I^{(\nu)},$$

$$/2.43/ \qquad (T_b \circ T_a)^{\sim(\nu)} = (T_{\varphi(a,b)})^{\sim(\nu)} = \tilde{T}_{\varphi(a,b)}^{(\nu)} = \tilde{T}_b^{(\nu)} \circ \tilde{T}_a^{(\nu)}$$

$$(T_a^{-1})^{\sim(\nu)} = (T_{\lambda(a)})^{\sim(\nu)} = \tilde{T}_{\lambda(a)}^{(\nu)} = (\tilde{T}_a^{(\nu)})^{-1}$$

Rodzina przedłużonych przekształceń jest więc zamknięta względem superpozycji i odwracania przekształceń, a tym samym tworzy grupę przedłużoną $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(\nu)}$, przy czym struktura $\mathcal{G}_r$ i $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(\nu)}$ jest taka sama.

Wynika stąd między innymi, że dla danej grupy $\mathcal{G}_r$ przestrzeń działania można powiększyć co do wymiaru bez naruszania struktury przez rozpatrywanie grup przedłużonych.

2.3.2. Stwierdzenia powyższe są oczywiście tym bardziej ważne w przypadku grup jednoparametrowych. Po pierwszym przedłużeniu grupy jednoparametrowej $\mathcal{G}$ otrzymamy grupę przedłużoną $\tilde{\mathcal{G}}$. Ale jak wiemy z p.2.1 każdej grupie jednoparametrowej odpowiada operator infinitezymalny. Dla grupy $\tilde{\mathcal{G}}$ oznaczamy go przez $\tilde{\mathcal{X}}$ i nazywamy pierwszym przedłużeniem operatora $\mathcal{X}$. Korzystając ze wzoru /2.11/' oraz /2.33/ /lub co na jedno wychodzi - rozwijając w szereg /2.33/ i korzystając z /2.11/ oraz porównując współczynniki przy τ/ widzimy, że jeśli $\mathcal{G}: \mathcal{X} = \xi^i(x,u)\partial_i + \eta^\alpha(x,u)\partial_\alpha$ to

/2.44/ $$\tilde{\mathcal{G}}: \tilde{\mathcal{X}} = \xi^i(x,u)\partial_i + \eta^\alpha(x,u)\partial_\alpha + \zeta_i^\alpha(x,u,p)\frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} = \mathcal{X} + \mathcal{X}^*$$

przy czym składowe ζ_i^α części $\mathcal{X}^*$ operatora $\tilde{\mathcal{X}}$ działającej na pochodne p_i^α wyrażają się poprzez ξ^i i η^α jak następuje

/2.45/ $$\zeta_i^\alpha = \mathcal{D}_i\eta^\alpha - p_j^\alpha \mathcal{D}_i \xi^j$$

gdzie jak i poprzednio operator pomocniczy $\mathcal{D}_i = \partial_i + p_i^\alpha \partial_\alpha$.

W analogiczny sposób otrzymuje się przedłużenia operatora $\mathcal{X}$ na wyższe pochodne, przy czym jeśli $\mathcal{G}: \mathcal{X} = \xi^i\partial_i + \eta^\alpha\partial_\alpha$ oraz

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(\nu-1)}: \tilde{\mathcal{X}}^{(\nu-1)} = \mathcal{X} + \zeta_j^\alpha \frac{\partial}{\partial p_j^\alpha} + \dots + \zeta^\alpha_{i_1\dots i_n}(x,u,p^{(1)},\dots,p^{(\nu-1)})\frac{\partial}{\partial p^\alpha_{i_1\dots i_n}}$$
$$(i_1 + \dots + i_n = \nu - 1)$$

to

$$\tilde{\mathcal{G}}^{(\nu)}: \tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)} = \tilde{\mathcal{X}}^{(\nu-1)} + \zeta^\alpha_{i_1\dots i_n j}(x,u,p^{(1)},\dots,p^{(\nu)})\frac{\partial}{\partial p^\alpha_{i_1\dots i_n j}}$$

gdzie

/2.46/ $$\zeta^{\alpha}_{i_1\ldots i_n j} = \mathcal{D}^{(\nu)}_j \zeta^{\alpha}_{i_1\ldots i_n} - p^{\alpha}_{i_1\ldots i_n k}\mathcal{D}^{(\nu)}_j \xi^k$$

oraz

$$\mathcal{D}^{(\nu)}_j = \partial_j + p^{\alpha}_j \partial_{\alpha} + p^{\alpha}_{jk}\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_k} + \cdots + p^{\alpha}_{i_1\ldots i_n j}\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_{i_1\ldots i_n}},$$

$$j = 1,\ldots,n, \quad i_1 + \ldots + i_n = \nu - 1, \quad \mathcal{D}^{(\nu)}_j \xi^k = \mathcal{D}_j \xi^k.$$

Przedłużanie operatorów infinitezymalnych jest przedstawialne z iloczynem Liego operatorów. Jeżeli $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ dwa dowolne operatory infinitezymalne, to zachodzi

/2.47/ $$\tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)}_{12} = (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)^{\sim(\nu)} = (\tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)}_1, \tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)}_2).$$

Niech $\nu = 1$, $\mathcal{X}_1 = \xi^i_1 \partial_i + \eta^{\alpha}_1 \partial_{\alpha}$ oraz $\mathcal{X}_2 = \xi^i_2 \partial_i + \eta^{\alpha}_2 \partial_{\alpha}$. Operatory przedłużone mają postać $\tilde{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}^*_1$, $\tilde{\mathcal{X}}_2 = \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}^*_2$, gdzie $\mathcal{X}^*_1 = \zeta^{\alpha}_{1i}\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_i}$ i $\mathcal{X}^*_2 = \zeta^{\alpha}_{2i}\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}_i}$. Obliczając iloczyn Liego mamy

$$(\tilde{\mathcal{X}}_1, \tilde{\mathcal{X}}_2) = (\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}^*_1, \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}^*_2) =$$
$$= (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}^*_2) + (\mathcal{X}^*_1, \mathcal{X}_2) + (\mathcal{X}^*_1, \mathcal{X}^*_2) =$$
$$= \mathcal{X}_{12} + \mathcal{X}_1(\mathcal{X}^*_2) - \mathcal{X}_2(\mathcal{X}^*_1) + (\mathcal{X}^*_1, \mathcal{X}^*_2),$$

ponieważ $\mathcal{X}^*_2(\mathcal{X}_1) = 0$ oraz $\mathcal{X}^*_1(\mathcal{X}_2) = 0$. Ponieważ wyraz po prawej stronie daje operator $\mathcal{X}_{12}$, pozostaje do wykazania, że pozostała część działająca na pochodne pokrywa się z $\mathcal{X}^*_{12}$ obliczonym na podstawie wzorów /2.45/. Ponieważ $\eta^{\alpha}_{12} = \mathcal{X}_1(\eta^{\alpha}_2) - \mathcal{X}_2(\eta^{\alpha}_1)$, $\xi^i_{12} = \mathcal{X}_1(\xi^i_2) - \mathcal{X}_2(\xi^i_1)$ /por./2.12//, pozostaje do udowodnienia tożsamość

$$\tilde{\mathcal{X}}_1(\zeta^{\alpha}_{2i}) - \tilde{\mathcal{X}}_2(\zeta^{\alpha}_{1i}) = \zeta^{\alpha}_{12i} =$$
$$= \mathcal{D}_i[\mathcal{X}_1(\eta^{\alpha}_2) - \mathcal{X}_2(\eta^{\alpha}_1)] - p^{\alpha}_j \mathcal{D}_i[\mathcal{X}_1(\xi^j_2) - \mathcal{X}_2(\xi^j_1)],$$

którą łatwo można sprawdzić, żmudnym wprawdzie, ale elementarnym rachunkiem. Dla wyższych przedłużeń dowód przebiega indukcyjnie. Banalny rachunek wykazuje, że także ma miejsce

/2.48/ $$(\alpha\mathcal{X}_1 + \beta\mathcal{X}_2)^{\sim(\nu)} = \alpha\tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)}_1 + \beta\tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)}_2, \quad \alpha, \beta \text{ - stałe.}$$

Jeśli więc $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_r$ rozpinają algebrę Liego $\mathfrak{g}_r$ grupy $\mathcal{G}_r$, to przedłużając obustronnie /2.19/ i korzystając z /2.47/ i /2.48/ widzimy, że

$$/2.49/ \qquad (\mathfrak{X}_I, \mathfrak{X}_J)^{\sim(\nu)} = (\tilde{\mathfrak{X}}_I^{(\nu)}, \tilde{\mathfrak{X}}_J^{(\nu)}) = C_{IJ}^K \tilde{\mathfrak{X}}_K^{(\nu)}$$

Zatem $\tilde{\mathfrak{X}}_1^{(\nu)}, \dots, \tilde{\mathfrak{X}}_r^{(\nu)}$ rozpinają algebrę Liego $\tilde{\mathfrak{g}}_r^{(\nu)}$ grupy rozszerzonej $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(\nu)}$. Fakt ten wynika także bezpośrednio z końcowych uwag punktu 2.3.1.

2.4. Inwarianty różniczkowe grupy $\mathcal{G}_r$. Równania definicyjne grup. Funkcje określone w przestrzeni $E_{N^{(\nu)}}(x, u, p^{(1)}, \dots, p^{(\nu)})$ i niezmienne przy przekształceniach grupy $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(\nu)}$ noszą nazwę inwariantów różniczkowych rzędu ν dla grupy $\mathcal{G}_r$. Funkcje takie są rozwiązaniami równań różniczkowych /por. /2.28//

$$/2.50/ \qquad \tilde{\mathfrak{X}}_J^{(\nu)} \mathcal{F} = 0 \qquad J = 1, 2, \dots, r$$

Odwrotnie, każde rozwiązanie tego układu, jako niezmiennik grupy przedłużonej jest inwariantem różniczkowym grupy $\mathcal{G}_r$. Analogicznie jak rozmaitości niezmiennicze określa się niezmiennicze rozmaitpści różniczkowe rzędu ν, to jest jako hiperpowierzchnie w $E_{N^{(\nu)}}(x, u, p^{(1)}, \dots, p^{(\nu)})$, których punkty pod działaniem przekształceń $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(\nu)}$ nie wychodzą poza tę hiperpowierzchnię. Dowodzi się również, że nieosobliwe niezmiennicze rozmaitpści różniczkowe dadzą się zapisać przy pomocy inwariantów różniczkowych. Liczba $\rho^{(\nu)}$ niezależnych inwariantów różniczkowych rzędu ν, $\mathcal{J}_1^{(\nu)}, \dots, \mathcal{J}_{\rho^{(\nu)}}^{(\nu)}$ wynosi $\rho^{(\nu)} = N^{(\nu)} - \text{rząd}\,[\tilde{\mathfrak{X}}_J^{(\nu)}]$ [1] gdzie $[\tilde{\mathfrak{X}}_J^{(\nu)}]$ oznacza macierz współczynników operatorów $\tilde{\mathfrak{X}}_1^{(\nu)}, \dots, \tilde{\mathfrak{X}}_r^{(\nu)}$. Ponieważ rząd ten nie może dla $\mathcal{G}_r$ być wyższy niż r, przeto biorąc co raz to wyższe przedłużenia $\mathcal{G}_r$ /tj powiększając liczbę zmiennych niezależnych w układzie /2.50/ i pozostawiając bez zmiany liczbę równań/ dojdziemy do nieograniczonego ciągu inwariantów różniczkowych grupy. Ale nie tylko dysponujemy tu rzędem inwariantów różniczkowych. Jeżeli $\mathcal{G}_r$ działa w $E_N(y)$ możemy

---

[1] Układ /2.50/ jest zupełny na mocy /2.49/.

zmieniać n otrzymując w ten sposób różne ciągi inwariantów w zależności od wymiaru rozmaitości $\mathcal{M}_n$ /2.32/, która stanowiła podstawę do wyprowadzenia wzorów na przedłużanie przekształceń na pochodne cząstkowe. Nie wyczerpuje to jednak wszystkich możliwości, ponieważ samym przedłużeniem można nadać rozmaity sens, różnie ustalając względem czego liczymy pochodne obrazu $\overline{\mathcal{M}_n}$ rozmaitości $\mathcal{M}_n$.

I. Przedłużenie na pochodne względem współrzędnych wleczonych.

Niech T będzie przekształceniem punktowo-punktowym przestrzeni $E_n(y)$, czyli

$$/2.51/ \qquad T: \quad \bar{y}^s = \bar{y}^s(y) \qquad s = 1, \dots, N$$

Rozmaitość $\mathcal{M}_l$ wymiaru l zapiszemy w postaci parametrycznej

$$\mathcal{M}_l: \quad y^s = y^s(\sigma^1, \dots, \sigma^l)$$

Obraz $\overline{\mathcal{M}}_l = T(\mathcal{M}_l)$ rozmaitości $\mathcal{M}_l$ przy przekształceniu T będzie miał przedstawienie parametryczne

$$/2.52/ \qquad \overline{\mathcal{M}}_l: \quad \bar{y}^s = \bar{y}^s(y^1(\sigma), \dots, y^N(\sigma))$$

Przy tej parametryzacji punkt $p \in \mathcal{M}_l$ i jego obraz $\bar{p} \in \overline{\mathcal{M}}_l$ mają jednakowe wartości współrzędnych /są to więc tzw. współrzędne wleczone na rozmaitości $\overline{\mathcal{M}}_l$ /. Oznaczając $p_j^s = \frac{\partial y^s}{\partial \sigma^j}$, $\bar{p}_j^s = \frac{\partial \bar{y}^s}{\partial \sigma^j}$ oraz różniczkując obustronnie /2.52/ względem σ^i otrzymamy odpowiedniość pochodnych

$$/2.53/ \qquad \bar{p}_i^s = \frac{\partial \bar{y}^s}{\partial y^t} \cdot \frac{\partial y^t}{\partial \sigma^i} = \frac{\partial \bar{y}^s}{\partial y^t} p_i^t \qquad \begin{array}{l} s,t = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, l. \end{array}$$

Wzory te są znane w analizie jako transformacja pochodnych przy wprowadzaniu nowych funkcji niewiadomych do wyrażeń różniczkowych. Do tych samych zależności doszlibyśmy przez rozpatrzenie w przestrzeni $E_{N+l}(y,\sigma)$ przekształcenia specjalnego typu.

$$/2.54/ \quad T_I : \quad \begin{aligned} T: \quad & \bar{y}^s = \bar{y}^s(y) \\ & \bar{\sigma}^i = \sigma^i \end{aligned}$$

i powtórzenie rozważań z początku p.2.3.1 kładąc przy tym σ zamiast x oraz y zamiast u .

Uwaga ta pozwala stwierdzić, że przy tym rodzaju przedłużenia pozostają na mocy wszystkie stwierdzenia jakie w poprzednim i na początku obecnego punktu były wypowiadane o przedłużeniach i inwariantach różniczkowych [1]. W szczególności biorąc $\mathfrak{X} \equiv \lambda^s(y)\partial_s$ otrzymamy na podstawie /2.44/ i /2.45/, kładąc $\eta \leftarrow \lambda$, $O \rightarrow \xi$.

$$/2.55/ \quad {}_I\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} + \xi_j^s \frac{\partial}{\partial p_j^s} , \quad \xi_j^s = \frac{\partial \lambda^s(y)}{\partial y^t} p_j^t , \quad \begin{matrix} s,t=1,\dots,N \\ j=1,\dots,l . \end{matrix}$$

II. <u>Przedłużenie na pochodne niezmiennych funkcji</u>. Niech jak i poprzednio T działa w E_N . Dopełnijmy E_N przez l nowych zmiennych $x^1,\dots,x^l$ i rozciągnijmy T na tak powstałą przestrzeń $E_{l+N}(x,y)$ jak następuje

$$/2.56/ \quad T_{II} \quad \begin{aligned} & \bar{x}^i = x^i & i=1,\dots,l \\ T: \quad & \bar{y}^s = \bar{y}^s(y) & s=1,\dots,N \end{aligned}$$

Niech $\mathcal{M}_N : x^i = x^i(y)$ będzie N-wymiarową rozmaitością przestrzeni $E_{l+N}(x,y)$. Pod działaniem T_{II} rozmaitość ta transformuje się na

$$/2.57/ \quad \bar{\mathcal{M}}_N : \quad \begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i(y) & i=1,\dots,l \\ \bar{y}^s &= \bar{y}^s(y) & s=1,\dots,N \end{aligned}$$

1/ Dopełnienie $\mathcal{G}_r$ transformacją $\bar{\sigma}^i = \sigma^i$ wg /2.54/ sprowadza się do rozpatrzenia grupy $\mathcal{G}_r \otimes I$ w przestrzeni $E_N \otimes E_l$

Obierając $\bar{y}^s$ jako parametry na rozmaitości $\mathcal{M}_N$, oraz oznaczając $\bar{p}_s^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{y}^s}$, $p_s^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^s}$ i różniczkując obie strony /2.57/$_1$ względem y^s otrzymamy następującą odpowiedniość pochodnych

$$/2.58/ \qquad \bar{p}_t^i \frac{\partial \bar{y}^t}{\partial y^s} = p_s^i, \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,l \\ t,s = 1,\dots,N, \end{array}$$

którą też można otrzymać w ramach schematu p.2.3.1 kładąc x zamiast u i y zamiast x oraz T_{II} zamiast występującego tam T. W szczególności, biorąc $\mathcal{X} = \lambda^s(y)\partial_s$ otrzymamy na podstawie /2.44/ i /2.45/, kładąc tym razem $\lambda \to \xi, \; \theta \to \eta$. odpowiednie przedłużenie operatora infinitezymalnego na pochodne niezmiennych funkcji.

$$/2.59/ \qquad {}_{II}\widetilde{\mathcal{X}} \equiv \mathcal{X} - \zeta_s^i(y,p)\frac{\partial}{\partial p_s^i}, \qquad \zeta_s^i = -p_t^i \frac{\partial \lambda^t}{\partial y^s}$$

Łatwo otrzymać oba rodzaje przedłużeń na pochodne wyższego rzędu. Będą one między innymi prowadziły do nieograniczonych ciągów inwariantów różniczkowych wyznaczanych z równań zupełnych ${}_{I}\widetilde{\mathcal{X}}_j^{(\nu)}\mathcal{F} = 0$ i ${}_{II}\widetilde{\mathcal{X}}_j^{(\nu)}\mathcal{F} = 0$ odpowiednio, w przypadku przedłużania algebry $\mathcal{G}_r$ operatorów infinitezymalnych.

Podkreślmy przy sposobności, że aby znaleźć inwarianty rzędu zerowego /zwykłe inwarianty/ i inwarianty różniczkowe przy każdym ze sposobów przedłużania /sposób przedstawiony w p.2.3,1 będziemy nazywali dalej - ogólnym/ wystarczy znać algebrę $\mathcal{G}_r$ jej operatorów infinitezymalnych /a właściwie jej bazę $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_r$. Te ciągi inwariantów $\{\mathcal{J}\}_I, \{\mathcal{J}\}_{II}, \{\mathcal{J}\}$ /przy przedłużeniu ogólnym/ dzielą się na serie, w zależności od wartości l w ciągach $\{\mathcal{J}\}_I, \{\mathcal{J}\}_{II}$ i n w ciągu $\{\mathcal{J}\}$. Jak się okazuje w każdej serii inwariantów istnieje zupełny układ inwariantów, z którego wszystkie inwarianty różniczkowe wyższego rzędu tej serii powstają przez różniczkowanie. Twierdzenie to, podane przez Liego [21], udowodnił Tresse [47]. Ma ono liczne zastosowania w teorii równań definicyjnych grup ciągłych oraz w tych zastosowaniach grup do równań różniczkowych, którymi jeszcze zajmowali się Lie oraz Medolaghi [24] i Vessiot [50], [51]. Dowód twierdzenia opiera się na fakcie, że nieograniczony co do rzędu ciąg równań różniczkowych cząstkowych może tylko wtedy mieć rozwiązanie, jeżeli jest ciągiem powstałym przez różniczkowanie pewnego skończonego układu równań. Stąd już prosto wynika istnienie układu zupełnego inwariantów różniczkowych w danej serii, jako że biorąc odpowiednią rozmaitość analityczną i obliczając dla niej wszystkie inwarianty serii, popadlibyśmy w sprzeczność z poprzednim stwierdzeniem, gdyby wszystkie tak otrzymane równania były niezależne wobec różniczkowania.

W teorii grup przekształceń przestrzeni $E_N(y)$ ważną rolę odgrywają układy zupełne inwariantów serii $\ell = N$ w obu ciągach $\{J\}_I$ i $\{J\}_{II}$. W punkcie 2.2 przytoczyliśmy układ /2.22/, któremu zadość czynią funkcje $F(y;a)$ określające przekształcenia skończone grupy G_r. Do opisu grupy G_r za pomocą równań różniczkowych można jednak podejść inaczej. Potraktujmy /2.16/ jako całkę ogólną pewnego układu, w którym y będą zmiennymi niezależnymi a F funkcjami szukanymi. Układ ten można otrzymać przez różniczkowanie /2.16/ i wyrugowanie parametrów z /2.16/ i otrzymanych związków. Otrzymamy wówczas układ równań

/2.60/ $$\Lambda\left(y^1,\ldots,y^N; F^1,\ldots,F^N; \frac{\partial F^t}{\partial y^s},\ldots,\frac{\partial^{(\mu)} F^t}{\partial y^{s_1}\ldots\partial y^{s_r}}\right) = 0$$

gdzie Λ oznacza zespół lewych stron tych równań, a μ rząd najwyższej pochodnej. Nazywamy ten układ równaniami definicyjnymi przekształceń skończonych grupy G_r i oznaczamy $(D)_{fin}$. Ma on następujące własności:

$(D)_{fin}$

1. Jest zupełnie całkowalny, co oznacza że każde równanie różniczkowe rzędu niższego lub równego μ jakie można otrzymać z /2.60/ przez różniczkowanie i rugowanie - wynika za pomocą samego rugowania;
2. Jeśli $F_1(y)$, $F_2(y)$ są dwoma szczególnymi rozwiązaniami $(D)_{fin}$, to ich <u>superpozycja</u> $F_{12}(y) = F_2(F_1(y))$ też jest rozwiązaniem $(D)_{fin}$ /ponieważ F_{12} należy do rodziny $F(y;a)$, z której /2.60/ powstało przez eliminację a /;
3. Układ $(D)_{fin}$ jest spełniony przez przekształcenie tożsamościowe $F(y) = y$ oraz przez przekształcenie

odwrotne do danego, czyli jeśli $F=F(y)$ jest rozwiązaniem, to obliczając y w funkcji F i kładąc następnie $F \to y$, $y \to F$ znowu dostaniemy rozwiązanie.

4. Rozwiązanie ogólne układu zależy od r stałych dowolnych /stopień swobody albo dowolności rozwiązania ogólnego/.

Zauważmy, że przy eleminacji parametrów a przez różniczkowanie otrzymaliśmy ostatecznie jako $\Lambda(\cdots)$ wyrażenia zawierające pochodne cząstkowe F względem y. Występujący tu proces różniczkowania można traktować jako przedłużanie grupy $\mathcal{G}_r$ według schematu I /albo II/ przy czym $\ell = N$. W istocie więc późniejszą eleminację parametrów a można traktować jako eliminację parametrów w przekształceniach skończonych grupy ${}_I\tilde{\mathcal{G}}_r^{(\mu)}$ /albo ${}_{II}\tilde{\mathcal{G}}_r^{(\mu)}$/. Zatem $\Lambda(\cdots)$ są inwariantami różniczkowymi rzędu μ grupy $\mathcal{G}_r$ i można je wyrazić jako funkcje pełnego układu inwariantów rzędu μ. Po rozwikłaniu względem tych inwariantów otrzymamy równania $(D)_{fin}$ w postaci Liego

$$/2.60/' \qquad \mathcal{L}(y, F, F^{(1)}, \ldots, F^{(\mu)}) = \mathcal{S}(y)$$

gdzie funkcje $\mathcal{S}(y)$ są to "wartości" inwariantów $\mathcal{L}$ na przekształceniu tożsamościowym $F^i = y^i$.

Ponieważ inwarianty grupy są również inwariantami jej podgrup, dla podgrup jednoparametrowych zawartych w grupie $\mathcal{G}_r$ i generowanym operatorem infinitezymalnym $\mathcal{X} = \lambda^\alpha \partial_\alpha$ powinno zachodzić

$$/2.61/ \qquad \tilde{\mathcal{X}}^{(\mu)}(\Lambda) = 0$$

gdzie $\tilde{\mathcal{X}}^{(\mu)}$ oznacza przedłużenie $\mathcal{X}$ na pochodne rzędu μ według schematu I /albo II/ przy $\ell = N$. Ponieważ /2.61/ musi zachodzić dla każdej podgrupy jednoparametrowej zawartej w $\mathcal{G}_r$ otrzymujemy tym samym, traktując jako funkcje szukane $\lambda^1(y), \ldots, \lambda^N(y)$ liniowy i jednorodny układ równań rzędu μ. Układ ten nazywamy równaniami definicyjnymi przekształceń infinitezymalnych grupy i oznaczymy $(D)_{inf}$. Ma on własności następujące:

$(D)_{inf}$ 1°. Jest zupełnie całkowalny

2°. Kombinacja liniowa /ze stałymi współczynnikami/ rozwiązań szczególnych też jest rozwiązaniem /jako konsekwencja liniowości i jednorodności układu/;

3°. Jeśli $\mathfrak{X}_1 \equiv \lambda_1^s(y)\partial_s$, $\mathfrak{X}_2 \equiv \lambda_2^s(y)\partial_s$ są rozwiązaniami, to ich iloczyn Liego $\mathfrak{X}_{12} \equiv (\lambda_1^t \partial_t \lambda_2^s - \lambda_2^t \partial_t \lambda_1^s)\partial_s$ też jest rozwiązaniem, co wynika ze wzoru /2.47/ i ogólnej własności iloczynu Liego $(\vec{\mathfrak{X}}_1^{(u)}, \vec{\mathfrak{X}}_2^{(u)})f = \vec{\mathfrak{X}}_1^{(u)}(\vec{\mathfrak{X}}_2^{(u)}f) - \vec{\mathfrak{X}}_2^{(u)}(\vec{\mathfrak{X}}_1^{(u)}f)$ skąd jeśli $\vec{\mathfrak{X}}_1^{(u)}f = 0$ i $\vec{\mathfrak{X}}_2^{(u)}f = 0$ to również $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)^{(u)}f = 0$.

4°. Rozwiązanie ogólne zależy od r stałych dowolnych, inaczej mówiąc jest r-wymiarową <u>przestrzenią liniową</u> /<u>zamkniętą</u> względem iloczynu Liego wobec własności 3°/.

Własności układu $(D)_{inf}$ pozostają w ścisłym związku z własnościami 1 - 4 układu $(D)_{fin}$. Okazuje się, że odwrotnie, jeśli dany jest układ równań spełniających warunki 1° - 4°, czyli definiujący algebrę Liego $\mathfrak{g}_r$ operatorów infinitezymalnych przestrzeni $E_N(y)$, to można znaleźć równania $(D)_{fin}$ grupy $\mathcal{G}_r$ przekształceń $E_N(y)$, której algebra Liego pokrawa się z $\mathfrak{g}_r$, przy czym $(D)_{fin}$ znajduje się przez całkowanie układów zupełnych. Nie jest konieczne przy tym całkowanie $(D)_{inf}$. Ważne to stwierdzenie, do którego powrócimy w punkcie następnym sprowadza badanie wszelkich możliwych grup przekształceń w $E_N(y)$ i ich struktury do konstrukcji wszelkich możliwych układów $(D)_{inf}$ i stosownej ich klasyfikacji [19].

<u>2.5. Nieskończone grupy przekształceń</u> $\mathcal{G}_\infty$. Grupy przekształceń wyodrębniają się ze zbioru wszelkich możliwych przekształceń $E_N(y)$ przez jakiś <u>warunek niezmienniczości</u>, wymagający od tych przekształceń zachowania, czy to pewnych tworów w E_N czy też ich określonych własności, co pociąga od razu za sobą, że do wyodrębnionej rodziny wchodzi przekształcenie tożsamościowe /jako że nic nie zmienia/ superpozycja przekształceń i przekształcenie odwrotne, o ile istnieje. Jeśli więc ~~warunek~~ , wyodrębniający daje się zapisać w postaci związków różniczkowych wiążących przekształcenia skończone grupy albo jej przekształcenia infinitezymalne, to możemy od razu stwierdzić, że spełnione będą warunki 2, 3 $(D)_{fin}$ oraz 2°, 3° $(D)_{inf}$. Warunki 1 i 1° łatwo można spełnić przez dołączenie do otrzymanych związków /równań/ różniczkowych warunków całkowalności. Co do stopnia swobody roz-

wiązania ogólnego może on być różny. W przypadku, gdy rozwiązanie ogólne zależy od skończonej liczby stałych dowolnych będziemy mieli do czynienia z grupą zależną od skończonej liczby parametrów. W przeciwnym przypadku, kiedy rozwiązanie ogólne zależy od funkcji dowolnych powiadamy, że $(D)_{fin}$ /albo $(D)_{inf}$ / definiują grupę nieskończoną G_∞. W tym przypadku więc zamiast warunków 4 i 4^0 będziemy mieli warunek

4_∞.Rozwiązanie ogólne zależy nie tylko od stałych dowolnych ale i od funkcji dowolnych.

Przykładem G_∞ jest grupa przekształceń konforemnych płaszczyzny określona układem Cauchy-Riemanna $u_x + v_y = 0$, $u_y - v_x = 0$.

Dla grup nieskończonych nie ma opisu przy pomocy równań wiążących przestrzeń parametrów i przestrzeń działania jak /2.22/ dla grup skończonych. Dlatego też przejście do równań $(D)_{fin}$ i $(D)_{inf}$ przeprowadzone w poprzednim punkcie pozwoliło na łatwe uchwycenie szerszej klasy grup przekształceń. Teoria ciągłych, nieskończonych grup przekształceń /a w szczególności badanie ich struktury i klasyfikacje/ opiera się na badaniu równań definicyjnych $(D)_{fin}$ i $(D)_{inf}$ [20], [23], [49]. Niezbędne w tych badaniach i nasuwające sporo trudności określanie stopnia dowolności rozwiązań /warunek 4_∞ / przywiodło w pracach E.Cartana [2] do innego ujęcia. Zastępując równania $(D)_{fin}$ układem Pfaffa, Cartan wykazał, że każdą grupę nieskończoną określoną przez $(D)_{fin}$ można traktować jako grupę niezmienniczości form różniczkowych o określonej strukturze, zapisującej się przez pochodne zewnętrzne tych form.

Przy stosowaniu grup nieskończonych do równań cząstkowych często wynika konieczność znalezienia jej inwariantów różniczkowych. Podajemy tu algorytm [20], [21] oparty na równaniach $(D)_{inf}$ mający zastosowania przy każdym ze sposobów przedłużania przekształceń infinitezymalnych. Dla znalezienia inwariantów rzędu ν [1] piszemy symbol przekształcenia infinitezymalnego $\mathcal{X} = \lambda^s(y)\partial_s$, przedłużamy w odpowiedni sposób na pochodne rzędu ν i porządkujemy według pochodnych $\lambda^1(y), \dots, \lambda^N(y)$, czyli

/2.62/ $$\tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)} = \mathcal{X} + \partial_t \lambda^s A_s^t + \partial^2_{t_2} \lambda^s A_s^{t_2} + \dots + \partial^{(\nu)}_{t_1 \dots t_\nu} \lambda^s A_s^{t_1 \dots t_\nu},$$

---

[1] Czyli funkcji takich, że $\tilde{\mathcal{X}}^{(\nu)} J = 0$ na każdym rozwiązaniu układu $(D)_{inf}$.

gdzie $A_1^{(\cdots)}$ liniowe operatory w przestrzeni pochodnych $p^{(1)}, \ldots, p^{(\nu)}$. Następnie przedłużamy przez różniczkowanie układ $(D)_{inf}$ aż do pochodnych rzędu ν. Z otrzymanego, nadal liniowego układu równań można wyliczyć część pochodnych λ w funkcji pozostałych, parametrycznych pochodnych $\partial_{t_1 \ldots t_r}^{(\cdots)*}\lambda^{t}$. Podstawiając wyliczone pochodne do /2.62/ i porządkując względem pochodnych parametrycznych otrzymamy $\widetilde{\mathcal{X}}^{(\nu)} = \partial_t^* \lambda^1 \bar{A}_1^t + \cdots + \partial_{t_1 \ldots t_r}^{(\nu)*} \lambda^1 \bar{A}_1^{t_1 \ldots t_r}$. Ponieważ pochodne parametryczne $\partial^* \lambda$ są dowolne, równanie $\widetilde{\mathcal{X}}^{(\nu)} f = 0$ rozszczepia się na układ

$$
/2.63/ \qquad \bar{A}_1^t f = 0, \ \ldots, \ \bar{A}_1^{t_1 \ldots t_r}(f) = 0
$$

Wykażemy, że jest to układ <u>zupełny</u>. W tym celu rozpatrzmy dwa dowolne operatory infinitezymalne $\mathcal{X}_1 = \lambda_1^1 \partial_1$, $\mathcal{X}_2 = \lambda_2^1 \partial_1$ i ich iloczyn $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = \mathcal{X}_{12} = \lambda_{12}^1 \partial_1$. Przedłużamy $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_{12}$ i porządkujemy względem pochodnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$. Następnie liczymy $(\widetilde{\mathcal{X}}_1^{(\nu)}, \widetilde{\mathcal{X}}_2^{(\nu)})$. Jak wiemy zachodzi tożsamość

$$
/2.64/ \qquad (\widetilde{\mathcal{X}}_1^{(\nu)}, \widetilde{\mathcal{X}}_2^{(\nu)}) = \widetilde{\mathcal{X}}_{12}^{(\nu)}
$$

Po lewej stronie wystąpi suma wszelkich iloczynów Liego operatorów $\bar{A}$. Prawa strona jest kombinacją liniową operatorów $\bar{A}$ ze współczynnikami, które są pochodnymi $\lambda_{12}^1 = \lambda_1^t \partial_t \lambda_2^1 - \lambda_2^t \partial_t \lambda_1^1$. Dobierając odpowiednio λ_1^1, λ_2^1 można więc wyrazić poszczególne iloczyny $\bar{A}$ jako kombinacje liniowe tych operatorów. Jeśli teraz $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ będą dwoma dowolnymi rozwiązaniami układu $(D)_{inf}^{(\nu)}$ /przedłużonego na pochodne rzędu ν / to na podstawie związków jakie równania te narzucają na pochodne λ_1^1 /i odpowiednio λ_2^1 / zarówno $\widetilde{\mathcal{X}}_1^{(\nu)}$ jak i $\widetilde{\mathcal{X}}_2^{(\nu)}$ rozłożą się na sumę operatorów $\bar{A}$, a lewa strona /2.64/ będzie zawierać wszelkie możliwe iloczyny operatorów $\bar{A}$. Ale że iloczyn dwóch rozwiązań $(D)_{inf}^{(\nu)}$ jest też rozwiązaniem /taką bowiem własność posiada $(D)_{inf}$ / prawą stronę /2.64/ można wyrazić jako sumę operatorów $\bar{A}$. Przez odpowiedni dobor wartości pochodnych parametrycznych λ_1^1 i λ_2^1 otrzymamy rozkład iloczynów Liego operatorów $\bar{A}$ na kombinację liniową tych operatorów.

Udowodniona zupełność układu /2.63/ odgrywa istotną rolę w przejściu od $(D)_{inf}$ do $(D)_{fin}$ w przypadku nieskończonych algebr Liego $\mathcal{G}_\infty$ /określonych przez $(D)_{inf}$, [20], [23]. Postać równań definicyjnych przekształceń skończonych odpowiedniej $\mathcal{G}_\infty$ znajduje się przez całkowanie układu /2.63/, otrzymanego przy przedłużeniu I gdy $l=N$ do rzędu ν. Operatory A powstałe przy tym przedłużeniu mają tę własność, że same tworzą skończoną algebrę Liego γ a odpowiadająca im grupa skończona Γ odgrywa ważną rolę przy badaniu struktury i klasyfikacji grup nieskończonych [23].

3. Grupa podstawowa danego układu równań różniczkowych cząstkowych

3.1. Określenie i równania definicyjne grupy podstawowej.

Rozważmy kwaziliniowy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$/3.1/ \quad (S)_{n,m} \qquad S(u) \equiv A^i_{\alpha\varkappa}(x,u)p^\alpha_i + f_\varkappa(x,u) = 0 \quad \begin{matrix} \alpha = 1,\dots,m \\ i = 1,\dots,n \\ \varkappa = 1,\dots,\sigma \end{matrix}$$

gdzie u^α funkcje szukane, x^i zmienne niezależne, σ liczba równań i $p^\alpha_i = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$. Powiadamy, że układ ten dopuszcza przekształcenie punktowo-punktowe

$$/3.2/ \quad T: \quad \begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x,u) \\ \bar{u}^\alpha &= \bar{u}^\alpha(x,u) \end{aligned}$$

przestrzeni $E_N(x,u)$, $N=n+m$, jeżeli T przeprowadza każde rozwiązanie (S) na rozwiązanie tegoż układu (S). Widać wprost z definicji, że zbiór wszystkich przekształceń dopuszczalnych stanowi grupę, zawiera się w nim bowiem przekształcenie tożsamościowe a superpozycja dwóch przekształceń dopuszczalnych też będzie przekształceniem dopuszczalnym. Przejdźmy do analitycznego zapisu warunku dopuszczalności T. Niech $\mathcal{M}_n: u^\alpha = u^\alpha(x)$ będzie rozwiązaniem układu (S). Obraz $\bar{\mathcal{M}}_n$ rozwiązania $\mathcal{M}_n$, $\bar{\mathcal{M}}_n = T(\mathcal{M}_n)$, powinien jako rozmaitość $\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(\bar{x})$ spełniać (S), przy czym wartości pochodnych trzeba obliczyć przez różniczkowanie $\bar{u}^\alpha$.

względem $\bar{x}^i$, czyli powinno zachodzić

/3.3/ $$A^i_{\alpha x}(\bar{x},\bar{u})\bar{p}^\alpha_i + f_x(\bar{x},\bar{u}) = 0 \quad (mod(S))$$

Warunek /mod (S) / oznacza, że wypisane obok równanie ma być spełnione dla $\mathcal{U}_n$ powstałych z przekształcenia rozwiązań (S)

Pochodne $\bar{p}^\alpha_i$ są jednak związane z pochodnymi $p^\alpha_i = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ następująco /por. /2.33//

/3.4./ $$\bar{p}^\alpha_j \mathcal{D}_i \bar{x}^j = \mathcal{D}_i \bar{u}^\alpha$$

gdzie $\mathcal{D}_i = \partial_i + p^\alpha_i \partial_\alpha$ Warunek /3.3./ można więc traktować jako żądanie, aby transformacja $\tilde{T}$, powstała z przedłużenia T na pierwsze pochodne,[1/] zachowywała (S) pojmowane jako $(N^{(1)}-s)$-wymiarowa rozmaitość przestrzeni $E_{N^{(1)}}(x,u,p)$, $N^{(1)} = n+m+nm$

Inaczej mówiąc T będzie dopuszczalne jeżeli (S) będzie niezmienniczą rozmaitością różniczkową T , czyli niezmienniczą rozmaitością $\tilde{T}$. Wobec tego podstawmy do /3.3./ $\bar{p}^\alpha_i$ obliczone z /3.4./

/3.5./ $$A^i_{\alpha x}(\bar{x},\bar{u})\bar{p}^\alpha_i(x,u,p) + f_x(\bar{x},\bar{u}) = 0$$

Równość ma zachodzić na rozmaitości (S). Z równań /3.1./ można wyrazić część pochodnych p (pochodne główne) za pomocą pozostałych tzw parametrycznych pochodnych, które oznaczamy przez q , a których wartości na rozmaitości (S) mogą być dowolne. Podstawiając główne pochodne w funkcji q do /3.5./ otrzymamy wyrażenie, które musi być spełnione tożsamościowo względem x, u i q . Ale x i u są argumentami szukanych funkcji $\bar{x} = \bar{x}(x,u)$, $\bar{u} = \bar{u}(x,u)$. Wobec dowolności q współczynniki rozwinięcia tego wyrażenia w szereg względem q powinny być tożsamościowo równe zero. Z uwagi na algebraiczny charakter zależności $\bar{p}^\alpha_i = \bar{p}^\alpha_i(x,u,p)$, $p = p(q)$

1/ Przy ogólnym schemacie przedłużania podanym w p. 2.3.1.

prowadzi to do skończonego układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu

$(D)_{fin}$:

/3.6./ $$\Lambda\left(x^1,\dots,x^n,u^1,\dots,u^m,\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n,\bar{u}^1,\dots,\bar{u}^m,\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial \bar{u}^m}{\partial u^m}\right)=0$$

Są to równania definicyjne grupy przekształceń dopuszczalnych dla układu /3.1/, czyli <u>grupy podstawowej</u> układu. Będą one spełniały warunki 2,3 /str. 20 / dzięki temu, że dopuszczalność jest własnością grupową, co podkreślaliśmy na początku tego punktu. Warunek 1 można spełnić przez dołączenie do /3.6./ wszystkich warunków całkowalności tego układu.

Praktyczne wyznaczanie $(D)_{fin}$ grupy podstawowej dla prostych nawet układów (S) nastręcza wiele trudności rachunkowych. Do tego układ $(D)_{fin}$ jest na ogół nadokreślony i bardziej skomplikowany od układu wyjściowego. Dlatego też przy badaniu własności układów równań z punktu widzenia teorii grup posługujemy się znacznie prostszymi równaniami definicyjnymi przekształceń infinitezymalnych grupy podstawowej. Równania $(D)_{inf}$ łatwo otrzymujemy z warunku, że (S) jest niezmienniczą rozmaitością różniczkową grupy przekształceń dopuszczalnych, czyli

/3.7./ $$\tilde{\mathcal{X}}\left[A^i_{\alpha\varkappa}(x,u)p^\alpha_i+f_\varkappa(x,u)\right]=0 \quad (\mathrm{mod}\,(S))$$

gdzie $\tilde{\mathcal{X}}$ jest pierwszym przedłużeniem operatora infinitezymalnego $\mathcal{X} \equiv \xi^i(x,u)\partial_i+\eta^\alpha(x,u)\partial_\alpha$ generującego jednoparametrowe podgrupy grupy podstawowej / por. /2.45/ /

/3.8./ $$\tilde{\mathcal{X}} \equiv \xi^i(x,u)\partial_i+\eta^\alpha(x,u)\partial_\alpha+\zeta^\alpha_j(x,u,p)\frac{\partial}{\partial p^\alpha_j}$$

$$\zeta^\alpha_j=\mathcal{D}_j\eta^\alpha-p^\alpha_k\mathcal{D}_j\xi^k; \quad \mathcal{D}_j \equiv \partial_j+p^\alpha_j\partial_\alpha$$

Rozpisując warunek /3.7./ otrzymamy

/3.9./ $$\mathcal{X}f_\varkappa+A^i_{\alpha\varkappa}\partial_i\eta^\alpha+\left(\mathcal{X}A^i_{\alpha\varkappa}+A^i_{\beta\varkappa}\partial_\alpha\eta^\beta-A^j_{\alpha\varkappa}\partial_j\xi^i\right)p^\alpha_i-$$
$$-A^i_{\alpha\varkappa}\partial_\beta\xi^j p^\alpha_j p^\beta_i=0 \quad (\mathrm{mod}\,(S))$$

Po wyrażeniu pochodnych głównych przez pochodne parametryczne ϱ z układu (S) i podstawieniu do /3.9./ otrzymamy układ niejednorodnych form kwadratowych względem ϱ. Wobec dowolności pochodnych parametrycznych współczynniki te - liniowe i jednorodne wyrażenia względem $\xi^i(x,u)$, $\eta^\alpha(x,u)$ i ich pochodnych $\partial_i\xi^j, \partial_\alpha\xi^i, \partial_i\eta^\alpha, \partial_\beta\eta^\alpha$ - muszą być równe zero. W ten sposób warunek /3.7./ rozszczepia się na układ równań posiadających własności 2°, 3°, i po dołączeniu warunków całkowalności - własność 1° /str. 22 /. Są to równania $(D)_{inf}$ dla grupy podstawowej układu (S). Układ $(D)_{inf}$ będzie zawierał $\frac{1}{2}\sigma(K+1)(K+2)$ równań, gdzie K liczba pochodnych parametrycznych. Utrudnia to dyskusję swobody rozwiązania ogólnego układu $(D)_{inf}$; przez proste przeliczenia można przekonać się, że nawet dla prostych i spotykanych praktycznie układów liczba równań układu $(D)_{inf}$ jest znaczna. Tym między innymi objaśnia się fakt, że w badaniach z tego zakresu nie ma tak ogólnych teorii z jakimi mamy do czynienia przy twierdzeniach o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układów cząstkowych. Dla konkretnych układów na ogół nie wszystkie równania otrzymane z rozszczepienia warunków /3.7./ są niezależne, a stopień dowolności rozwiązań można znaleźć wprost w trakcie rozwiązywania $(D)_{inf}$ jeśli znajdziemy całkę ogólną tego układu $(D)_{inf}$. W niektórych zastosowaniach jak np przy grupowej klasyfikacji zbioru wszystkich rozwiązań układu (S), którą omówimy w p. 5 nie ma potrzeby rozwiązywania $(D)_{inf}$ i wystarcza sama znajomość tego układu.

Rozważania te łatwo uogólnić na przypadek dowolnego układu rzędu ν:

$$/3.10/ \quad (S)^{(\nu)}_{n,m}: \; F(x^1,\dots,x^n, u^1,\dots,u^m, p^{(1)},\dots,p^{(\nu)})=0.$$

Określenie przekształceń dopuszczalnych przestrzeni $E_N(x,u)$ pozostaje oczywiście bez zmiany. Przy wyprowadzeniu $(D)_{fin}$ trzeba posłużyć się przedłużeniem $\widetilde{T}^{(\nu)}$, a przy wyprowadzaniu $(D)_{inf}$ - przedłużeniem $\widetilde{X}^{(\nu)}$, co w obu przypadkach prowadzi do równań rzędu ν. Inny sposób polega na sprowadzeniu układu (S) do równań kwaziliniowych, co zawsze można uczynić przez różniczkowanie (S') i wprowadzenia nowych funkcji szukanych zamiast pochodnych niższego rzędu. Sposób ten jest na ogół łatwiejszy, a komplikacje rachunkowe wynikłe z wprowadzenia większej liczby funkcji szukanych są rekompensowane łatwiejszym rozszczepieniem warunku /3.8./ dla równań kwaziliniowych. Grupa podstawowa otrzymana ostatnim sposobem będzie przedłużeniem grupy, do której dochodzi się pierwszym ze sposobów, co oczywiście jeśli chodzi o samą strukturę grupy podstawowej prowadzi do jednakowych wyników.

3.2. Przykłady wyznaczania grupy podstawowej.

3.2.1. Dla układu równań różniczkowych zwyczajnych w postaci normalnej

/3.10/ $(S)_{1,m} \quad p^\alpha = f^\alpha(x, u^1, \ldots, u^m), \quad p^\alpha = \frac{du^\alpha}{dx}, \quad \alpha = 1, \ldots, m,$

przekształcenia infinitezymalne zapisujemy w postaci

$\mathcal{X} = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ skąd $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} + (\mathcal{D}\eta^\alpha - p^\beta \mathcal{D}\xi)\frac{\partial}{\partial p^\beta}, \quad \mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + p^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$

Warunek dopuszczalności $\tilde{\mathcal{X}}$ przyjmie postać

$$\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x} + p^\beta \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} - p^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} - p^\alpha p^\beta \frac{\partial \xi}{\partial u^\beta} - \mathcal{X} f^\alpha = 0 \quad (mod(S')).$$

Podstawiając $p^\alpha = f^\alpha(x,u)$ otrzymamy

$(\mathcal{D})_{inf}$:

/3.11/ $\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} f^\beta - \frac{\partial \xi}{\partial x} f^\alpha - \frac{\partial \xi}{\partial u^\beta} f^\beta f^\alpha = \xi \frac{\partial f^\alpha}{\partial x} + \eta^\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta},$
$\alpha = 1, \ldots, m.$

Łatwo sprawdzić, że układ ten będzie spełniony przy dowolnym ξ jeśli jako η^α przyjmiemy $\eta_0^\alpha = f^\alpha \xi$, co oznacza że (S) dopuszcza grupę nieskończoną o operatorach $\mathcal{X}_0 = \xi \mathcal{S}$ gdzie $\mathcal{S}$ operator stowarzyszony z układem /3.10/

$\mathcal{S} = \frac{\partial}{\partial x} + f^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$. Ponieważ $(\mathcal{D})_{inf}$ jest liniowy

i jednorodny $\mathcal{X}_* = \mathcal{X} - \mathcal{X}_0$ też jest rozwiązaniem $(\mathcal{D})_{inf}$.
Oznaczając $\eta^\alpha - \eta^\alpha_0 = \theta^\alpha(x,u)$ i podstawiając do /3.11/ otrzymamy na funkcje $\theta^\alpha(x,u)$ układ równań

$$/3.12/ \qquad \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial x} + f^\beta \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^\beta} \theta^\beta$$

Rozwiązanie ogólne tego układu można skonstruować następująco. Weźmy pod uwagę równanie $\mathcal{S}\mathcal{F} = 0$ i oznaczmy przez $\psi^1, \ldots, \psi^m$ pełny układ rozwiązań funkcyjnie niezależnych. Ponieważ równanie to nie może mieć nietrywialnych rozwiązań, które nie zależały by od $u^1, \ldots, u^m$, przeto rząd macierzy $[\psi^\alpha_\beta]$, gdzie $\psi^\alpha_\beta = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial u^\beta}$ wynosi m.
Oznaczając przez $\overline{\psi}^\alpha_\beta$ element macierzy odwrotnej

$$/3.13./ \qquad \psi^\alpha_\beta \overline{\psi}^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma,$$

możemy łatwo sprawdzić, że $\overline{\psi}^\beta_\gamma$ są rozwiązaniem układu /3.12/ przy ustalonym γ. W samej rzeczy, działając operatorem $\mathcal{S}$ na /3.13/ co prowadzi do związków $\psi^\alpha_\beta \mathcal{S}\overline{\psi}^\beta_\gamma + \overline{\psi}^\beta_\gamma \mathcal{S}\psi^\alpha_\beta = 0$ oraz różniczkując $\mathcal{S}\psi^\alpha = 0$ otrzymujemy $\mathcal{S}\psi^\alpha_\beta = -\frac{\partial f^\gamma}{\partial u^\beta}\psi^\alpha_\gamma$ skąd $\psi^\alpha_\gamma\left(\mathcal{S}\overline{\psi}^\gamma_\beta - \frac{\partial f^\gamma}{\partial u^\delta}\overline{\psi}^\delta_\beta\right) = 0$. Tak więc rozwiązanie ogólne /3.12/ ma postać

$$/3.14/ \qquad \theta^\alpha = \overline{\psi}^\alpha_\beta \Phi^\beta$$

gdzie Φ^β dowolne rozwiązanie równania $\mathcal{S}\Phi = 0$.

Ale, że układ stowarzyszony $\mathcal{S}\Phi = 0$ z układem /3.10/ jest równoważny z układem wyjściowym, pełna grupa $\mathcal{G}_\infty$ układu $(\mathcal{S})$ nie może być wyznaczona bez znajomości rozwiązań układu wyjściowego. Tym niemniej znajomość, nawet jednego operatora infinitezymalnego $\mathcal{X}_* = \theta^\alpha(x,u)\partial_\alpha$ grupy podstawowej $\mathcal{G}_\infty$ układu $(\mathcal{S})_{1,n}$ ułatwia jego całkowanie.

Istotnie niech $\mathcal{X}_* = \theta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ będzie dopuszczalny dla układu (S). Obierzmy jako nowe współrzędne przestrzeni E_N $(x^1, \dots, x^n, u)$;, inwarianty $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{m-1}$ grupy $\mathcal{G}: \mathcal{X}_*$ oraz rozwiązanie $\mathcal{K}$ równania $\mathcal{X}_*\mathcal{K} = 1$; którego wyznaczenie sprowadza się do kwadratury, jeśli $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{m-1}$ są znane; pozostawiając bez zmian współrzędną x , co daje układ

/3.15/
$$\frac{d\mathcal{J}_k}{dx} = \mathcal{S}\mathcal{J}_k, \qquad k = 1, \dots, m-1,$$
$$\frac{d\mathcal{K}}{dx} = \mathcal{S}\mathcal{K}.$$

Prawe strony w tym układzie zależą tylko od $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{m-1}$ ponieważ $\mathcal{X}_*(\mathcal{S}\mathcal{J}_k) = (\mathcal{X}_*, \mathcal{S})\mathcal{J}_k = 0$; ostatnia równość wynika z zależności $(\mathcal{X}_*, \xi\mathcal{S}) = \mathcal{X}_*(\xi)\xi\mathcal{S}$ świadczącej o tym, że grupa $\mathcal{H}: \mathcal{X}_0$ generowana przez operatory $\mathcal{X}_0 = \xi(x)\mathcal{S}$ jest dzielnikiem normalnym ogólnej grupy dopuszczalnych przekształceń. Wobec tego szukane funkcje $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{m-1}$ spełniają układ $m-1$ początkowych równań układu /3.15/, a rozwiązanie ostatniego równania sprowadza się do kwadratury.

3.2.2. Podobnie też nieskończoną grupę przekształceń dopuszcza zupełny układ o funkcji niewiadomej $u(x^1, \dots, x^n)$

/3.16/ $(S)_{n,1}$ $\qquad L_\varkappa(u) \equiv a^i_\varkappa(x)\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0 \qquad \varkappa = 1, \dots, \sigma.$

Aby to wykazać pokażemy, że układ ten dopuszcza nieskończoną grupę przekształceń postaci $\bar{u} = u$, $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n)$. Zapisując operator infinitezymalny w postaci $\mathcal{X} \equiv \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ otrzymamy po przedłużeniu $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} - p_j \cdot \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$, $p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$. Warunek dopuszczalności ma więc postać

/3.17/ $\left(\mathcal{X}a^i_\varkappa - \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}a^j_\varkappa\right)p_i = 0$ czyli $(\mathcal{X}, L_\varkappa)(u) = 0$

Ponieważ ma być on spełniony tożsamościowo na rozmaitości (S) a układ ten jest z założenia zupełny, operatory $(\mathcal{X}, L_x)$ powinny rozkładać się na sumę operatorów $L_1, \dots, L_\sigma$ czyli

/3.18/ $(D)_{inf}$:

$$(\mathcal{X}, L_x) = b_x^a(x) L_a .$$

W szczególności warunek ten jest spełniony przez operatory postaci $\mathcal{X}_0 = c^x(x) L_x$ - gdzie $c^x(x)$ dowolne funkcje $x^1, \dots, x^n$.

Operatory $\mathcal{X}$ nie należące do tej trywialnej części dopuszczalnych operatorów mają tę własność, że pozwalają generować nowe rozwiązania układu (S) ze znanego rozwiązania tego układu, jak łatwo bowiem sprawdzić z rozkładu /3.18/ jeśli $u_0(x)$ spełnia /3.17/ to $\mathcal{X}(u_0)$ też jest rozwiązaniem /3.17/

<u>3.2.3.</u> Większość nieliniowych układów równań spotykanych w teoriach fizycznych dopuszcza tylko skończone grupy przekształceń. Na przykład dla <u>równań Eulera</u> występujących w dynamice gazów

/3.19/
$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = 0, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\operatorname{grad}\rho + \rho \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{v} = (u, v, w) \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}\operatorname{grad} p + A \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \qquad A = A(p, \rho), \end{aligned}$$

ogólne rozwiązanie odpowiedniego układu $(D)_{inf}$ ma postać $\mathcal{X} = C^1\mathcal{X}_1 + \dots + C^{11}\mathcal{X}_{11}$ gdzie

$$\mathcal{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{X}_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathcal{X}_4 = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathcal{X}_5 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathcal{X}_6 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \mathcal{X}_7 = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\mathcal{X}_8 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial v} - v\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\mathcal{X}_9 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial u},$$

$$\mathcal{X}_{10} = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\mathcal{X}_{11} = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

Równania Eulera dopuszczają więc grupę $\mathcal{G}_{11}$ zależną od 11-tu parametrów.

Są jednak w hydrodynamice równania nieliniowe dopuszczające grupę nieskończoną. Należy do nich układ opisujący tzw. <u>fale krótkie</u> w dynamice gazów

/3.21/
$$S_1 \equiv u_y - 2v_t - 2(v-x)v_x - 2kv = 0,$$
$$S_2 \equiv v_y + u_x = 0, \qquad k = \mathrm{const}.$$

Zapisując operator infinitezymalny w postaci

$\mathcal{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{U}\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{V}\frac{\partial}{\partial v}$, $\xi, \eta, \zeta, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ funkcje x, y, t, u, v;

po rozszczepieniu warunku niezmienniczości $\tilde{\mathcal{X}}(S) = 0$ otrzymujemy następujący układ równań definicyjnych

$(D)_{inf}$:
$$\xi_u = 0,\ \xi_v = 0,\ \eta_u = 0,\ \eta_v = 0,\ \zeta_u = 0,\ \zeta_v = 0,\ \zeta_x = 0,$$

/3.22/
$$\mathcal{U}_y + 2kv\,\mathcal{U}_u - 2kv\,\eta_y - 2\mathcal{V}_t - 2(v-x)\mathcal{V}_x - 2k\mathcal{V} = 0,$$
$$(v-x)(\mathcal{U}_u - \eta_y + \xi_x - \mathcal{V}_v) + \xi_t + \xi - \mathcal{V} = 0,$$
$$\mathcal{U}_v + 2(v-x)(\mathcal{V}_u + \eta_x) + \xi_y + 2\eta_t = 0,$$
$$\mathcal{V}_y + 2kv\,\mathcal{V}_u + \mathcal{U}_x - 2kv\,\eta_x = 0,$$
$$2(v-x)(\mathcal{V}_u - \eta_x) - \xi_y + \mathcal{U}_v = 0,$$
$$\mathcal{U}_u - \mathcal{V}_v + \eta_y - \xi_x = 0,$$
$$\mathcal{U}_u - \mathcal{V}_v + \zeta_t - \eta_y = 0,$$
$$2\mathcal{V}_u - \zeta_y - 2\eta_x = 0, \quad 2\mathcal{V}_u + \zeta_y = 0$$

Ogólne rozwiązanie tego układu zależy od dwóch stałych i od trzech funkcji dowolnych jednego argumentu i ma postać

$$\mathcal{X} \equiv C_1\mathcal{X}_1 + C_2\mathcal{X}_2 + \mathcal{Z}(f, g, h)$$

gdzie

$$\mathcal{X}_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{X}_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 3u\frac{\partial}{\partial u} + 2v\frac{\partial}{\partial v}$$

oraz

/3.23/
$$\mathcal{Z}(f, g, h) \equiv (-fy + g)\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y} +$$
$$+ [(f' + f'')x + 2y\,d_k g - y^2 d_k f' - f'v + h]\frac{\partial}{\partial u} + [-(f' + f'')y + g + g']\frac{\partial}{\partial v}$$

We wzorze tym f, g, h - dowolne /dostateczną ilość razy różniczkowalne/ funkcje t, a $d_k = \left(\frac{d^2}{dt^2} + (k+1)\frac{d}{dt} + k\right)$.

Zbiór operatorów $Z(f,g,h)$ jest liniową przestrzenią, zamkniętą względem iloczynu Liego; prócz tego zachodzą związki

$$(\mathcal{X}_1, Z(f,g,h)) = Z(f',g',h'),\ (\mathcal{X}_2, Z(f,g,h)) = -Z(f, 2g, 3h).$$

Zatem $Z(f,g,h)$ generuje podgrupę $\mathcal{H}$, będącą dzielnikiem normalnym grupy podstawowej $\mathcal{G}_\infty$ układu /3.21/

Ponieważ t jest inwariantem $\mathcal{H}$ przekształcenia skończone grupy $\mathcal{H}$ możemy znaleźć przez scałkowanie układu

$$\frac{d\bar x}{d\tau} = \xi_0(\bar x, \bar y, \bar t, \bar u, \bar v), \ldots, \frac{d\bar v}{d\tau} = V_0(\bar x, \bar y, \bar t, \bar u, \bar v), \quad \begin{matrix} \bar x|_{\tau=0} = x \\ \vdots \\ \bar v|_{\tau=0} = v \end{matrix}$$

gdzie $\xi_0, \eta_0, \ldots, V_0$ współrzędne operatora $Z(f,g,h)$. Oznaczając znowu dowolne funkcje t przez f, g, h otrzymujemy

$$\text{/3.24/} \qquad \mathcal{H}: \quad \begin{aligned} \bar x &= x - f'y - \tfrac{1}{2} f f' + g, \\ \bar y &= y + f, \\ \bar t &= t \\ \bar u &= u + (f' + f'')x - d_k f' y^2 + (2 d_k g - f d_k f'')y - f'v + h, \\ \bar v &= v - (f' + f'')y - \tfrac{1}{2} f (f' + f'') + g' + g \end{aligned}$$

<u>Reguły kompozycji</u> przekształceń grupy $\mathcal{H}$ są następujące. Niech

$T(f_1, g_1, h_1) \in \mathcal{H}$ i $T(f_2, g_2, h_2) \in \mathcal{H}$ wtedy $T(f_2, g_2, h_2) \circ T(f_1, g_1, h_1) = T(f_{12}, g_{12}, h_{12}) \in \mathcal{H}$
przy czym

$$\text{/3.25/} \qquad \begin{aligned} f_{12} &= f_2 + f_1 \\ g_{12} &= g_2 + g_1 + \tfrac{1}{2}(f_1' f_2 - f_2' f_1) \\ h_{12} &= h_2 + h_1 + f_2'' g_1 - g_1' f_2' + \tfrac{1}{2} f_1 (f_1'' f_2' - f_1' f_2'') \\ &\quad - f_1 (f_1 + f_2) d_k f_2' + 2 f_1 d_k g_2. \end{aligned}$$

Łatwo też sprawdzić, że $T(0,0,0)$ jest przekształceniem tożsamościowym grupy $\mathcal{H}$ oraz, że ze związku $I = T(\bar f, \bar g, \bar h) \circ T(f, g, h)$ wynikają następujące zależności

$$\bar{f}=-f,\ \bar{g}=-g,\ \bar{\ell}=-\ell+f''g-f'g'+2fd_kg$$

pozwalające wyznaczyć przekształcenie odwrotne do danego.

Przekształceniami skończonymi grupy $\mathcal{H}$ można posłużyć się dla skonstruowania klasy ścisłych rozwiązań z danego rozwiązania układu /3.21/. Poddając rozwiązanie $u_\circ=u_\circ(x,y,t),\ v=v_\circ(x,y,t)$ układu /3.21/ ogólnemu przekształceniu grupy $\mathcal{H}$ otrzymamy wyrażenia

/3.26/
$$u(\bar{x},\bar{y},t)=u_\circ(x,y,t)+(f'+f'')x-y^2d_kf+(2d_kg-fd_kf')y-f'v_\circ(x,y,t)+\ell,$$
$$v(\bar{x},\bar{y},t)=v_\circ(x,y,t)-(f'+f'')y-\tfrac{1}{2}f(f'+f'')+g'+g,$$

które po wyrażeniu x,y,t w funkcji $\bar{x},\bar{y},t$ na podstawie trzech pierwszych wzorów /3.24/ $x=\bar{x}+f'\bar{y}-\frac{1}{2}ff'-g$, $y=\bar{y}-f$ będzie przedstawiało klasę rozwiązań /3.21/. Cała ta klasa jest też rozwiązaniem przy dowolnych funkcjach f,g,ℓ. Tym samym otrzymujemy znacznie szerszą klasę rozwiązań niż rozwiązanie wyjściowe.

Dla zilustrowania postaci, którą przybierają równania definicyjne $(D)_{fin}$ przekształceń skończonych układów kwaziliniowych naszkicujemy algorytm rozszczepienia warunku /3.3./ na przykładzie układu fal krótkich /3.21/. Wprowadzając oznaczenia $u_t=\alpha,\ v_t=\beta,\ u_x=\lambda,\ v_x=\mu,\ u_y=\rho,\ v_y=\varrho$ otrzymujemy z układu /3.21/

/3.27/
$$\rho=2kv+2\beta+2(v-x)\mu$$
$$\varrho=-\lambda$$

czyli α,β,μ,λ są pochodnymi parametrycznymi. Z warunku /3.4./ otrzymujemy następującą odpowiedniość pochodnych /przekształcenia przedłużone/

$$\bar{\rho}=\frac{1}{W}\frac{\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{u})}{\mathcal{D}(x,y,t)},\quad \bar{\lambda}=\frac{1}{W}\frac{\partial(\bar{t},\bar{u},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)},\quad \bar{\beta}=\frac{1}{W}\frac{\partial(\bar{v},\bar{x},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)}$$

$$\bar{\mu}=\frac{1}{W}\frac{\partial(\bar{t},\bar{v},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)},\quad \bar{\varrho}=\frac{1}{W}\frac{\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{v})}{\mathcal{D}(x,y,t)},\quad W=\frac{\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)}$$

gdzie $\frac{\partial(\,,\,)}{\mathcal{D}(\,,\,)}$ itd oznaczają wyznaczniki zbudowane z pochodnych zupełnych funkcji występujących w "liczniku" względem zmiennych występujących w "mianowniku". Warunek /3.5/ dopuszczalności przekształceń

$$\bar{x}=\bar{x}(x,y,t,u,v),\ \bar{y}=\bar{y}(x,y,t,u,v),\ \bar{t}=\bar{t}(x,y,t,u,v),\ \begin{array}{l}\bar{u}=\bar{u}(x,y,t,u,v)\\ \bar{v}=\bar{v}(x,y,t,u,v)\end{array}$$

ma postać

$$/3.28/\quad \begin{array}{l}\frac{\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{u})}{\mathcal{D}(x,y,t)}-2\frac{\partial(\bar{v},\bar{x},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)}-2(\bar{v}-\bar{x})\frac{\partial(\bar{t},\bar{v},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)}-2k\bar{v}\frac{\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)}=0,\\ \frac{\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{v})}{\mathcal{D}(x,y,t)}+\frac{\partial(\bar{t},\bar{u},\bar{y})}{\mathcal{D}(x,y,t)}=0\quad (\mathrm{mod}\,(3.21)).\end{array}$$

Ale na rozmaitości /3.21/ mamy na podstawie /3.27/

$$/3.29/\quad \begin{array}{l}\mathcal{D}_x\equiv\partial_x+\lambda\partial_u+\mu\partial_v\\ \mathcal{D}_y\equiv\partial_y+(2kv+2\beta+2(v-x))\partial_u-\lambda\partial_v\\ \mathcal{D}_t\equiv\partial_t+\alpha\partial_u+\beta\partial_v\end{array}$$

i równość /3.28/ po podstawieniu /3.29/ winna zachodzić tożsamościowo przy dowolnych wartościach α,β,λ,μ, co sprowadza się do żądania aby znikały współczynniki rozwinięcia otrzymanej równości względem potęg α,β,λ,μ. Współczynniki te znajdujemy przez różniczkowanie /3.28/ z uwzględnieniem /3.29/ i wzięcie pochodnych przy zerowych wartościach α,β,λ,μ. Korzystając z tego, że pochodna wyznacznika jest sumą wyznaczników, w których występują kolejno pochodne wierszy /lub kolumn/ oraz uwzględniając /2.39/, widzimy że po zróżniczkowaniu i podstawieniu $\alpha=\beta=\lambda=\mu=0$ odpowiednie wyznaczniki zamienią się na zwykłe Jakobiany. W ten sposób każdej potędze α,β,λ,μ można przyporządkować <u>formalny operator</u>, który prowadzi do odpowiedniego równania $(\mathcal{D})_{fin}$ po pomnożeniu przez symobliczny zapis lewych stron /2.28/

$$/3.30/\quad \begin{array}{l}\mathcal{B}_1\equiv\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{u})-2\partial(\bar{v},\bar{x},\bar{y})-2(\bar{v}-\bar{x})\partial(\bar{t},\bar{v},\bar{y})-2k\bar{v}\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{y}),\\ \mathcal{B}_2\equiv\partial(\bar{t},\bar{x},\bar{v})+\partial(\bar{t},\bar{u},\bar{y}).\end{array}$$

W naszym przypadku niezerowe operatory formalne mają postać

$$\mathcal{A}_1 \equiv \frac{1}{\partial(x,y,t)} + \frac{2kv}{\partial(x,u,t)}, \quad \mathcal{A}_2 \equiv \frac{1}{\partial(x,y,u)}$$

/3.31/ $$\mathcal{A}_3 \equiv \frac{2}{\partial(x,u,t)} + \frac{1}{\partial(x,y,v)}, \quad \mathcal{A}_4 \equiv \frac{1}{\partial(y,t,u)} + \frac{1}{\partial(x,t,v)}$$

$$\mathcal{A}_5 \equiv \frac{1}{\partial(y,t,v)} + \frac{2(v-x)}{\partial(x,u,t)}$$

$$\mathcal{A}_6 \equiv \frac{1}{\partial(t,u,v)}, \quad \mathcal{A}_7 \equiv \frac{1}{\partial(x,u,v)},$$

$$\mathcal{A}_8 \equiv \frac{1}{\partial(y,u,v)}.$$

Przy działaniu ich na /3.30/ z wymnożenia symboli $\partial(\ ,\ ,\ )$ stojących w /3.30/ z odpowiednimi symbolami $\partial(\ ,\ ,\ )$, w mianownikach operatorów $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_8$ powstaną odpowiednie Jakobiany szukanych funkcji $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{v}$ względem zmiennych niezależnych x, y, t, u, v, a przyrównanie do zera $\mathcal{A}_\varkappa B_\alpha = 0, \varkappa = 1, \dots, 8, \alpha = 1, 2$ prowadzi do układu $(\mathcal{D})_{fin}$ zawierającego 16 równań. Z układu $(\mathcal{D})_{fin}$ łatwo można otrzymać $(\mathcal{D})_{inf}$ kładąc

$$\bar{x} = x + \xi\,d\tau, \quad \bar{y} = y + \eta\,d\tau, \quad \bar{t} = t + \zeta\,d\tau, \quad \bar{u} = u + U\,d\tau, \quad \bar{v} = v + V\,d\tau$$

i pomijając wyższe potęgi $d\tau$.

<u>Uwaga.</u> Jak wiemy z punktu 24 i końcowych uwag punktu 2.5. lewe strony równań definicyjnych są inwariantami różniczkowymi grupy $\mathcal{G}$ określonej przez $(\mathcal{D})_{fin}$ przy pierwszym sposobie przedłużania przekształceń. Naszkicowany algorytm prowadzi więc <u>od niezmienniczych rozmaitości różniczkowych</u> /tu układ/3.21/ <u>do inwariantów różniczkowych grupy</u> $\mathcal{G}$ przy pierwszym przedłużeniu. Fakt ten wykorzystuje się do konstruowania za pomocą różniczkowania inwariantów wyższych rzędów, kiedy są dane inwarianty rzędu niższego. Istotnie jeśli $\mathcal{J}$ jest inwariantem $\mathcal{G}$ to równanie

/3.32/ $$\mathcal{D}_j \mathcal{J} = 0$$

przedstawia niezmienniczą rozmaitość różniczkową grupy $\mathcal{G}$. Wynika to z tożsamości

/3.33/ $$\tilde{\mathcal{X}} \mathcal{D}_j \mathcal{F} = \mathcal{D}_j \mathcal{X} \mathcal{F} - \mathcal{D}_j(\xi^k) \mathcal{D}_k \mathcal{F}$$

zachodzącej dla dowolnej funkcji F. Skąd w szczególności dla $\mathcal{J}$ otrzymamy $\tilde{\mathcal{X}}\mathcal{D}_j\mathcal{J} = -\mathcal{D}_j(\xi^k)\mathcal{D}_k\mathcal{J}$ i $\tilde{\mathcal{X}}\mathcal{D}_j\mathcal{J}$ zeruje się na rozamitości $\mathcal{D}_j\mathcal{J} = 0$. Układ równań /3.32/ dopuszcza więc $\mathcal{G}$ i algorytm wyznaczania $(\mathcal{D})_{fin}$ grupy podstawowej $\mathcal{G}^*$ tego układu prowadzi do inwariantów różniczkowych $\mathcal{G}^*$. Ponieważ $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^*$, a inwarianty grupy są też inwariantami jej podgrup. Ten sposób tworzenia inwariantów /czyli metoda tzw parametrów różniczkowych/ wykorzystuje się przy wyznaczaniu zupełnego układu inwariantów grupy [47] /por. str. 19 /.

3.2.4. Inny przykład nieliniowego równania cząstkowego, dopuszczającego grupę nieskończoną stanowi równanie opisujące przepływy okołodźwiękowe

/3.34/ $$-\varphi_x\varphi_{xx} + \Delta\varphi - 2\varphi_{xt} = 0,$$

gdzie

$$\Delta = \partial^2_{yy} + \partial^2_{zz}$$

Wprowadzając oznaczenia $x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^4 = t,\ p_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\ p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x^j}$ zapiszemy układ /3.34/ jako

/3.34/′ (S): $$p_{14} = \frac{1}{2}(p_{22} + p_{33} - p_1 p_{11})$$

/p_i, p_{jk} $j \neq 1$, $k \neq 4$ pochodne parametryczne/. Biorąc operator infinitezymalny w postaci $\mathcal{X} = \xi^i(x,\varphi)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x,\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ znajdujemy pierwsze i drugie przedłużenie

$$\tilde{\mathcal{X}}^{(1)} = \mathcal{X} + \zeta_k\frac{\partial}{\partial p_k}, \quad \tilde{\mathcal{X}}^{(2)} = \tilde{\mathcal{X}}^{(1)} + \zeta_{kl}\frac{\partial}{\partial p_{kl}}$$

$$\zeta_{ij} = \mathcal{D}_j^{(2)}\zeta_i - p_{ik}\mathcal{D}_j^{(2)}\xi^k, \quad \mathcal{D}_j^{(2)} = \partial_j + p_j\partial_\varphi + p_{jl}\partial_{p_l}$$

a następnie z warunku

/3.35/ $$\tilde{\mathcal{X}}^{(2)}(S) = 0 \quad (\mathrm{mod}(S))$$

otrzymujemy równania

/3.36/ $$(\mathcal{D})_{inf}: \ \xi^k_\varphi = 0, \ \eta_{\varphi\varphi} = \eta_{\varphi x} = \eta_{\varphi y} = \eta_{\varphi z} = 0,$$
$$\xi^1_{xx} = 0, \ \xi^2_x = \xi^3_x = \xi^4_x = \xi^4_y = \xi^4_z = 0,$$

$$\Delta\eta - 2\eta_{xt} = 0.$$

$$\Delta\xi^1 - 2\xi^1_{xt} + \eta_{xx} + 2\eta_{\varphi t} = 0.$$

$$2\xi^1_t - \eta_x = 0,\quad \xi^2_t - \xi^1_y = 0,\quad \xi^3_t - \xi^1_z = 0,$$

$$\xi^1_x + \xi^4_t - 2\xi^2_y = 0,\quad 2\xi^1_x - \xi^4_t - \eta_\varphi = 0,$$

$$\xi^2_z + \xi^3_y = 0,\quad \xi^2_y - \xi^3_z = 0.$$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$\mathscr{X} = \sum_{\alpha=1}^{5} C_\alpha \mathscr{X}_\alpha + \mathscr{Z}(\lambda,\mu,\nu;f) \qquad /3.37/$$

gdzie

$$\mathscr{X}_1 = z\partial_y - y\partial_z,$$

$$\mathscr{X}_2 = 2x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + 4\varphi\partial_\varphi,$$

$$\mathscr{X}_3 = (tx + \tfrac{3}{2}(y^2+z^2))\partial_x + 3ty\partial_y + 3tz\partial_z + \tfrac{5}{2}t^2\partial_t - 3t\varphi\partial_\varphi,$$

$$\mathscr{X}_4 = x\partial_x + 3y\partial_y + 3z\partial_z + 5t\partial_t - 3\varphi\partial_\varphi,$$

$$\mathscr{X}_5 = \partial_t$$

oraz

$$\mathscr{Z}(\lambda,\mu,\nu;f) = (\lambda^{(1)}y + \mu^{(1)}z + \nu)\partial_x + \lambda\partial_y + \mu\partial_z +$$

$$+ [(\lambda^{(2)}y + \mu^{(2)}z + \nu^{(1)})x + f(y,z,t)]\partial_\varphi \qquad /3.38/$$

λ, μ, ν funkcja jednego argumentu t, a funkcja $f(x,y,t)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania $\Delta f = 2(\lambda^{(3)}y + \mu^{(3)}z + \nu^{(2)})$. Zbiór operatorów $\mathscr{Z}(\lambda,\mu,\nu;f)$ jest przestrzenią liniową, zamkniętą względem iloczynu Liego; jeśli $\mathscr{Z}_1 = \mathscr{Z}(\lambda_1,\mu_1,\nu_1;f_1)$, $\mathscr{Z}_2 = \mathscr{Z}(\lambda_2,\mu_2,\nu_2;f_2)$ to $(\mathscr{Z}_1, \mathscr{Z}_2) = \mathscr{Z}(\lambda_{12},\mu_{12},\nu_{12};f_{12})$

gdzie $\lambda_{12} = 0$, $\mu_{12} = 0$ oraz

$$\nu_{12} = \begin{vmatrix} \lambda_1'' & \lambda_1 \\ \lambda_2'' & \lambda_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu_1'' & \mu_1 \\ \mu_2'' & \mu_2 \end{vmatrix},$$

$$f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} f_1 & \lambda_1 \\ f_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} f_1 & \mu_1 \\ f_2 & \mu_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1''y + \mu_1''z & \lambda_1'y + \mu_1'z + \nu_1 \\ \lambda_2''y + \mu_2''z & \lambda_2'y + \mu_2'z + \nu_2 \end{vmatrix},$$

skąd $\Delta f_{12} = 2\nu_{12}^{(2)}$.

Operatory $\mathscr{Z}(\lambda,\mu,\nu;f)$ generują dzielnik normalny $\mathscr{N}$ grupy podstawowej $\mathscr{G}_\infty$ równania /3.34/. Przekształcenia skończone $\mathscr{N}$ znajdujemy przez całkowanie układu

$$\frac{d\bar{y}}{\lambda} = \frac{d\bar{z}}{\mu} = \frac{d\bar{x}}{\lambda'\bar{y} + \mu'\bar{z} + \nu} = \frac{d\bar{\varphi}}{(\lambda''\bar{y} + \mu''\bar{z} + \nu')\bar{x} + f(\bar{y},\bar{z},t)} = d\tau$$

przy warunku początkowym $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\varphi})\big/_{\tau=0} = (x, y, z, \varphi)$, skąd

$$
/3.39/ \qquad \mathcal{H}: \quad \begin{aligned}
\bar{t} &= t, \\
\bar{y} &= y + \lambda, \\
\bar{z} &= z + \mu, \\
\bar{x} &= x + \lambda' y + \mu' z + \tfrac{t}{2}(\lambda\lambda' + \mu\mu'') + \nu, \\
\bar{\varphi} &= \varphi + (\lambda'' y + \mu'' z + \nu' + \tfrac{1}{2}(\lambda\lambda'' + \mu\mu''))x + f(y, z, t),
\end{aligned}
$$

gdzie λ, μ, ν dowolne funkcje t a funkcja $f(y,z,t)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania

$$
\Delta f = 2[\lambda^{(3)} y + \mu^{(3)} z + \nu^{(2)}] + \\
+ \lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \lambda\lambda^{(3)} + \mu\mu^{(3)}.
$$

Reguły kompozycji przekształceń skończonych grupy $\mathcal{H}$ mają postać:

$$
T(\lambda_2, \mu_2, \nu_2; f_2) \circ T(\lambda_1, \mu_1, \nu_1; f_1) = T(\lambda_{21}, \mu_{21}, \nu_{21}; f_{21})
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\lambda_{21} &= \lambda_2 + \lambda_1, \quad \mu_{21} = \mu_2 + \mu_1, \\
\nu_{21} &= \nu_2 + \nu_1 - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' \\ \lambda_2 & \lambda_2' \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1' \\ \mu_2 & \mu_2' \end{vmatrix} \\
f_{21} &= \lambda_1' \lambda_2'' y^2 + \mu_1 \mu_2'' z^2 + f_2(y + \lambda_1, z + \mu_1, t) + f_1(y, z, t) + \ldots
\end{aligned}
$$

Podobnie jak dla równań fal krótkich przekształcenia skończone grupy $\mathcal{H}$ pozwalają budować szersze klasy rozwiązań z danego rozwiązania $\varphi_0(x, y, z, t)$. równania /3.34/.

3.3. Grupowa klasyfikacja równań i układów.

Jeżeli w wyjściowym układzie równań (S) istnieje pewien rodzaj nieokreśloności, przejawiający się występowaniem parametrów lub funkcji, które nie są w pełni określone, to nieokreśloność ta przenosi się także na równania $(D)_{inf}$ i rzutuje na stopień dowolności rozwiązania ogólnego tego układu, przy czym im większa nieokreśloność (S) tym mniejsza jest swoboda rozwiązania ogólnego $(D)_{inf}$. Dyskusja wpływu nieokreśloności (S) na rozwiązanie ogólne $(D)_{inf}$ prowadzi tym samym do rozbicia (S) na klasy dopuszczające coraz to szersze grupy podstawowe przy czym dla tych klas układów (S) stopień niedookreśloności jest coraz mniejszy. Jak zobaczymy w następnym punkcie znajomość grupy podstawowej może być spożytkowana do łatwiejszego wyznaczania pew:ych szczególnych rozwiązań układu (S) , dlatego grupową klasyfikacja układu prowadzi do odpowiednich klas rozwiązań. Ich zasób będzie ogólnie mówiąc tym większy im więcej parametrów ma grupa podstawowa /w przypadku, gdy jest ona skończona/. Przykłady zastosowania grupowej klasyfikacji równań różniczkowych można znaleźć w pracach [29], [11] i w pracach przytaczanych w p. 4.4.

Innym czynnikiem rozszerzającym grupę dopuszczalnych przekształceń są wszelkie procesy aproksymacji układu wyjściowego. Np równania /3.21/ i /3.34/ są pewnymi aproksymacjami układu Eulera /3.19/ dopuszczającego grupę skończoną, a same dopuszczają grupy nieskończone. Nasuwająca się tu idea oparcia na pojęciach teorii grup Liego racjonalnej teorii aproksymacji wymagałaby jednak algorytmów pozwalających na uchwycenie struktury grup nieskończonych co przy operowaniu układami $(D)_{fin}$ i $(D)_{inf}$ nie jest możliwe. Pewną perspektywę otwiera tu podejście Cartana do struktury grup nieskończonych, naszkicowane w uwagach końcowych tej pracy.

4. Zastosowanie grupy podstawowej do konstrukcji rozwiązań szczególnych. Klasyfikacja pełnego zbioru rozwiązań

4.1. Rozwiązania niezmiennicze względem podgrup grupy podstawowej. Fakt znajomości grupy podstawowej, a właściwie jej algebry Liego, czy też nawet samych równań definicyjnych $(D)_{inf}$ przekształceń infinitezymalnych może być na różne sposoby spożytkowany, czy to do konstrukcji rozwiązań szczególnych, czy też do redukcji zagadnienia całkowania wyjściowego układu (S). W pierwszym przypadku postępujemy następująco. Bierzemy określoną skończoną podgrupę $\mathcal{H}$ grupy podstawowej. Niech $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{\bar{r}}$ będą generatorami tej podgrupy, czyli

$$/4.1/ \quad (\mathcal{X}_I, \mathcal{X}_J) = \bar{C}^K_{IJ} \mathcal{X}_K, \quad I, J, K = 1, \ldots, \bar{r}$$

gdzie $\bar{C}^K_{IJ}$ stałe strukturalne podgrupy $\mathcal{H}$.

Rozwiązując układ zupełny $\mathcal{X}_J \mathcal{J} = 0$ znajdujemy pełny układ funkcyjnie niezależnych inwariantów grupy $\mathcal{H}$, czyli $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_{\bar{\rho}}$ gdzie $\bar{\rho} = N - \bar{R}$, a $\bar{R}$ jest to rząd macierzy współrzędnych operatorów $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{\bar{r}}$

Zakładamy dodatkowo, że

$$/4.2/ \quad \text{rząd} \left[\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial u^\alpha}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{J}_{\bar{\rho}}}{\partial u^\alpha} \right] = m, \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Rozwiązanie $\mathcal{M}_n$ układu /3.1/ nazywa się rozwiązaniem niezmienniczym względem podgrupy $\mathcal{H}$ grupy podstawowej $\mathcal{G}$ jeżeli jest ono nieosobliwą rozmaitością niezmienniczą grupy $\mathcal{H}$, czyli jeżeli daje się zapisać w sposób uwikłany /por. /2.31// następująco

$$/4.3/ \quad \begin{aligned} &\Phi(\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_{\bar{\rho}}) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Phi_m(\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_{\bar{\rho}}) = 0. \end{aligned}$$

<u>4.2. Zasadnicze twierdzenie o rozwiązaniach niezmienniczych</u>. Z przytoczonej definicji nie wynika jeszcze istnienie rozwiązań niezmienniczych i generalne rozstrzygnięcie tej kwestii nie może wchodzić w rachubę. Tym niemniej, jak pokażemy ich <u>wyznaczanie jest prostsze niż całkowanie wyjściowego układu</u> (S).

W tym celu, aby znaleźć układ, któremu winny czynić zadość funkcje $\Phi_\alpha(J_1, \dots, J_F)$ obliczamy pochodne rozwiązania przez różniczkowanie /4.3./ co prowadzi do związków

/4.4/ $$\mathcal{D}_j \Phi_\alpha = 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

z których wyznaczamy $p_j^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} = \psi_j^\alpha(x, u)$ i podstawiamy do /3.1/. Ponieważ grupa $\mathcal{G}$ jest dopuszczalna dla układu (S) można go zapisać jako

/4.5/ $$S(J, J^{(1)}) = 0$$

w funkcji inwariantów J i inwariantów różniczkowych $J^{(1)}$ grupy $\mathcal{G}$ /wyłączamy z rozważań przypadek kiedy (S) jest osobliwą, niezmienniczą rozmaitością różniczkową grupy $\mathcal{G}$. Po tym podstawieniu lewe strony równań (S) będą inwariantami grupy $\mathcal{G}$. Aby to wykazać wystarczy dowieść, że inwarianty różniczkowe $J^{(1)}(x, u, p)$ grupy $\mathcal{G}$ po podstawieniu $p_j^\alpha = \psi_j^\alpha(x, u)$ stają się zwykłymi inwariantami grupy $\mathcal{G}$, czyli że zachodzi równość

$$\mathcal{X} J^{(1)}(x, u, \psi(x, u)) = \mathcal{X} J^{(1)} + \frac{\partial J^{(1)}}{\partial \psi_j^\alpha} \mathcal{X} \psi_j^\alpha = 0$$

Ale $J^{(1)}(x, u, p)$ spełniają równanie

/4.6/ $$\tilde{\mathcal{X}} J^{(1)} = \mathcal{X} J^{(1)} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial p_i^\alpha} J^{(1)} = 0$$

Pozostaje więc do wykazania, że $\mathcal{X} \psi_j^\alpha = \zeta_j^\alpha(x, u, \psi(x, u))$

Działając operatorem $\mathcal{X}$ na /4.4/ znajdujemy

/4.7/ $$\mathcal{X}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x^i} + \psi_i^{\beta}\,\mathcal{X}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u^\beta}\,\mathcal{X}\psi_i^{\beta} = 0$$

Z drugiej strony mamy na podstawie tożsamości /3.33/ i równań /4.6/, /4.4/ związek, $\mathcal{X}\mathcal{D}_i(\Phi_\alpha) = 0$, który po rozpisaniu

$$\mathcal{X}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x^i} + \psi_i^{\beta}\,\mathcal{X}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u^\beta}\,\zeta_i^{\beta}(x,u,\psi) = 0$$

i porównaniu lewej strony z lewą stroną /4.7/ prowadzi do szukanej równości $\mathcal{X}\psi_i^\alpha = \zeta_i^\alpha$ /rząd $\left[\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u^\beta}\right] = m$ /

Ostatecznie więc układ, z którego wyznaczamy rozwiązania niezmiennicze daje się zapisać jako układ, w którymi szukanymi funkcjami są $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ a argumentami $J_1, \dots, J_{\bar{p}}$.
W szczególności zapisując /4.3/ w postaci rozwikłanej względem inwariantów

/4.7/ $$J_\alpha = J_\alpha(J_{m+1}, \dots, J_{\bar{p}}) \qquad \alpha = 1, \dots, m$$

dojdziemy do układu, w którymi niewiadomymi będą inwarianty $J_1, \dots, J_m$ a argumentami $J_{m+1}, \dots, J_{\bar{p}}$. Ten zredukowany układ $(S)/\mathcal{G}$ jest więc o tyle prostszy od wyjściowego układu (S), że liczba zmiennych niezależnych wynosi /indeks rozwiązania/ $k = \bar{p} - m$ i jest o $\bar{r}$ mniejszy od liczby argumentów układu wyjściowego (S). W szczególności rozwiązania o indeksie 1 wyznaczają się z układu równań różniczkowych zwyczajnych, a rozwiązania indeksu 2 sprowadzają się do dyskusji równań w dwóch zmiennych niezależnych, dla których i metody matematyczne /np metoda charakterystyk jeśli $(S)/\mathcal{G}$ jest układem hiperbolicznym/ oraz numeryczne są dostatecznie dobrze rozwinięte. Redukcja liczby zmiennych niezależnych jest podstawowym "chwytem" w rozwiązywaniu równań, stąd też uświadomienie sobie jaką rolę odgrywa przy tym grupa podstawowa układu (S) ma ważne znaczenie zarówno dla systematycznego, racjonalnego, poszukiwania takich zredukowanych układów $(S)/\mathcal{H}$ jak i dla dyskusji, jaki jest charakter ograniczeń narzucanych na rozwiązania.

Można postawić ogólnie zagadnienie jakie ograniczenia /warunki wyodrębniania/ można narzucić na rozwiązania, tak aby układ wraz z tymi ograniczeniami pozostał nie sprzeczny i miał rozwiązanie ogólne o maksymalnej /najlepiej funkcyjnej/ swobodzie, pozwalającej tym samym traktować dostatecznie szeroką klasę warunków granicznych. Badanie warunków zgodności prowadziłoby tu w szczególności do wyznaczenia grupy podstawowej układu (S). Takie ujęcie zagadnienia poszukiwania rozwiązań szczególnych nawet przy prostych układach (S) prowadzi do bardzo żmudnych rachunków i chociaż w zasadzie ogólniejsze od metody opartej na wykorzystaniu warunków typu /4.3/ nie ma jak dotąd wypracowanej jasnej i przejrzystej strony algorytmicznej.

4.3. Klasyfikacja rozwiązań niezmienniczych. Optymalny układ podgrup. Konstrukcja zasobu rozwiązań niezmienniczych układu (S), dla którego grupa podstawowa $\mathcal{G}_r$ jest znana w postaci odpowiedniej algebry $\mathcal{g}_r$ operatorów infinitezymalnych

$$\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$$

zaczyna się od wyznaczenia wszystkich podgrup $\mathcal{H}_{\tau}$ danego rzędu τ, czyli do wyznaczenia wszystkich podprzestrzeni

$$\mathcal{Y}_a = \lambda_a^{\gamma} \mathcal{X}_{\gamma}, \quad a = 1, \ldots, \tau < r, \quad \mathrm{rząd}[\lambda_a^{\gamma}] = \tau \tag{4.8}$$

przestrzeni $\mathcal{g}_r$, zamkniętych względem iloczynu Liego. Przy badaniu struktury podgrup grupy $\mathcal{G}_r$ tzw grupy podobne, takie że od jednej do drugiej przejść można za pomocą automorfizmu wewnętrznego grupy nie są rozróżniane. Podobnie rzecz ma

---

1/ Dla podgrup jednoparametrowych $\mathcal{G}: \mathcal{X} = \xi^i \partial_i + \eta^\alpha \partial_\alpha$ dopuszczalnych przez (S) indeks wynosi $n-1$, mamy więc redukcję liczby zmiennych niezależnych o 1.

się rozwiązaniami niezmienniczymi na podgrupach podobnych. Jeżeli $\mathfrak{h}^{*}=T\mathfrak{h}T^{-1}$ gdzie T jest pewnym elementem $\mathcal{G}_r$, to rozwiązanie ϕ niezmiennicze względem $\mathfrak{h}$; $\mathfrak{h}\phi=\phi$, pod działaniem tego samego automorfizmu wewnętrznego przejdzie na rozwiązanie niezmiennicze względem $\mathfrak{h}^{*}$, co wynika z równości

$$\phi^{*}=T\phi T^{-1};\quad \mathfrak{h}^{*}\phi^{*}=T\mathfrak{h}T^{-1}T\phi T^{-1}=T\mathfrak{h}\phi T^{-1}=$$
$$=T\phi T^{-1}=\phi^{*}$$

Nie ma więc w zasadzie potrzeby traktowania rozwiązań niezmienniczych na podgrupach podobnych jako różnych. W takim razie zadanie sprowadza się do wyznaczenia po jednym przedstawicielu z klasy podgrup podobnych /optymalny układ podgrup/ i do skonstruowania rozwiązań niezmienniczych na tych przedstawicielach. W terminach algebr Liego należy więc utożsamić odpowiednie podprzestrzenie /4.8/ odpowiadające podgrupom podobnym. Jak wiadomo automorfizmom wewnętrznym grupy $\mathcal{G}_r$ odpowiadają automorfizmy wewnętrzne algebry $\mathfrak{g}_r$, ta zaś ostatnia grupa może być zastąpiona przy konstrukcji optymalnego układu podgrup grupą dołączoną $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ algebry $\mathfrak{g}_r$.
Operatory infinitezymalne algebry $\mathfrak{a}$ grupy $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ mają postać[1/]

$$\mathcal{E}_K=(\mathfrak{X}_K,\mathfrak{X}_J)\frac{\partial}{\partial \mathfrak{X}_J} \tag{/4.9/}$$

można je więc wypisać, jeśli utworzymy tabelkę komutatorów bazy $\mathfrak{X}_1,\ldots,\mathfrak{X}_r$ algebry $\mathfrak{g}_r$.

Znajdując następnie przekształcenia <u>skończone</u> grupy dołączonej w parametrach kanonicznych drugiego rodzaju /przez całkowanie odpowiednich równań dla przekształceń skończonych generowanych przez poszczególne operatory $\mathcal{E}$ /, utożsamiamy te podprzestrzenie /4.8/, które wiążą przekształc~~ene~~enia grupy $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$

1/ Grupa $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ działa na wektory w przestrzeni $\mathfrak{g}_r$ jako grupa odpowiednich przekształceń liniowych.

oraz wybieramy po jednym przedstawicielu z tak powstałych klas $\bar{r}$ – wymiarowych podprzestrzeni rozpiętych na $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$.

Sprowadza się to do nadania postaci kanonicznych bazom tych podprzestrzeni, nierównoważnych przy przekształceniach grupy $\mathfrak{A}$. Następnie należy wyodrębnić te podprzestrzenie, które są zamknięte względem iloczynu Liego. Warunek ten

/4.10/ $$(\mathcal{Y}_a, \mathcal{Y}_b) = \bar{C}^c_{ab}\, \mathcal{Y}_c$$

/ $\bar{C}^c_{ab}$ stałe strukturalne grupy $\mathcal{G}_{\bar{r}}$ / po uwzględnieniu równań strukturalnych algebry $\mathcal{G}_r$ przyjmie postać

/4.11/ $$\lambda^I_a \lambda^J_b C^K_{IJ} = \bar{C}^c_{ab} \lambda^K_c .$$

Jest to nadokreślony układ równań algebraicznych o niewiadomych $\bar{C}^c_{ab}$. Aby układ ten miał rozwiązanie musi zachodzić warunek

$$\text{rząd} \left[\lambda^I_a \lambda^J_b C^K_{IJ}, \lambda^K_c \right] = \bar{r}$$

/4.12/

Warunek ten powoduje ostateczne rozdzielenie reprezentantów klas równoważności względem $\mathfrak{A}$ na przedstawicieli algebr optymalnego układu podgrup . Zagadnienie konstrukcji optymalnego układu podgrup /a właściwie odpowiadających im algebr Liego/ może być przeprowadzone także na podstawie samych równań $(D)_{inf}$ grupy $\mathcal{G}_r$ [19], [23], [49]. A że przy koncu punktu 2 podkreślaliśmy, że także wyznaczenie inwariantów grup nie wymaga obowiązkowo znalezienia jej algebry Liego, cały proces badania 1/ rozwiązań niezmienniczych może być w zasadzie prowadzony przy pomocy równań $(D)_{inf}$ grupy podstawowej układu (S).

4.4. Przegląd zastosowań. Od pierwszych prac Owsiannikowa [26], [27], [28] do chwili obecnej zgromadził się ok-

1/ To jest jeśli chodzi o konstrukcję odpowiednich układów $(S)/\mathcal{G}$

reślony zasób informacji o przydatności przedstawionej metody i samych uzyskiwanych rozwiązań szczególnych. przy czym pamiętać należy, że rozwiązanie matematycznie nawet poprawne nie zawsze jest przydatne w fizyce.

Początkowe prace [34], [35] korzystające z tej metody dotyczyły równań hydrodynamiki i wniosły nie wiele wyników nowych dla mechaników. Prace późniejsze objęły zakres równań stosunkowo mało zbadanych, poczynając od meteorologii [9], [10], [11], poprzez teorię wiązki elektronów [43, - 46], do teorii plastyczności [17], [18]. Na szczególną uwagę zasługuje ta ostatnia praca, w której zostały połączone wszystkie dotychczas omówione zastosowania, jak grupowa klasyfikacja układu, konstrukcja optymalnego układu podgrup grupy podstawowej dla każdego stopnia jej swobody, oraz konstrukcje i dyskusje rozwiązań odpowiednich układów $(S)/\mathcal{H}$. Rozważany układ (S) opisuje zagadnienie plastycznego płynięcia metali pod wpływem temperatury. Metody teorii grup Liego pozwoliły tu na skonstruowanie klasy rozwiązań przy fizycznie nieistotnych i dosyć ogólnych ograniczeniach, wynikąych z grupowej klasyfikacji wyjściowego układu, na współczynnik przewodnictwa cieplnego i na związek pomiędzy naprężeniem ścinającym a prędkością deformacji. Wszystkie te prace, łącznie z pracą [7] i [38] wykazały, że metody teorii grup mogą być mocnym narzędziem badań analitycznych.

Inne możliwości wykorzystania grupy podstawowej polegają na konstruowaniu rozwiązań częściowo niezmienniczych, to jest takich które są zanurzone w niezmienniczej rozmaitości grupy $\mathcal{H}$. W tym przypadku zamiast /4.3/ należy wziąć $\bar{m} < m$ związków pomiędzy inwariantami $J_1, \dots, J_F$. Przy tym jednak w układzie $(S)/\mathcal{H}$ następuje zmniejszenie liczby szukanych funkcji, a tym samym należy dołączyć do układu warunki zgodności. Do rozwiązań częściowo niezmienniczych należą znane w teorii równań hiperbolicznych fale proste i fale podwójne układów postaci $A^{\alpha i}_{\beta}(u)\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{i}} = 0$. Opartą na pojęciach teorii grup klasyfikację fal podwójnych w dynamice gazów można znaleźć w pracach [31], [32].

4.5. Rozwiązania prostsze geometrycznie. Z punktu widzenia konstrukcji rozwiązań szczególnych sporo należałoby oczekiwać od niezmienniczej, czy jak się niekiedy mówi, tensorowej postaci układów równań występujących w fizyce. Ponieważ postać tych równań wyraża określone postulaty o równoprawności dopuszczalnych układów współrzędnych przestrzennych, niektóre podgrupy grupy podstawowej powinny być widoczne z samej budowy równań, czyli powinny tkwić w ich strukturze geometrycznej. Poza polami poszukiwanymi /jak pole prędkości itp/ w równaniach tych występują pewne pola absolutne, jak pole tensora metrycznego, pole obiektu koneksji afinicznej itd. Nazwijmy grupą geometryczną zbiór przekształceń inwariantności wszystkich wielkości absolutnych w rozważnym układzie. Oznaczając przez ξ wektor kontrawariantny na rozmaitości, na której układ (S) jest rozważany, łatwo stwierdzamy że równaniami $(D)_{inf}$ grupy geometrycznej będą równania następujące

$$(D)_{inf}: \qquad \mathcal{L}_\xi g_{ij} = 0$$

/4.13/
$$\mathcal{L}_\xi \Gamma_{ij}^{k} = 0$$
$$\cdots\cdots$$

gdzie $\mathcal{L}_\xi$ oznacza pochodną Liego względem wektora ξ. O tym, że będą między innymi spełnione warunki 3^o ze strony 22, przekonuje tożsamość, udowodniona przez K.Yano [52]

/4.14/
$$\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_\eta \Omega^\Lambda) - \mathcal{L}_\eta(\mathcal{L}_\xi \Omega^\Lambda) = \mathcal{L}_{(\xi,\eta)} \Omega^\Lambda,$$

$$(\xi,\eta)^i = \mathcal{L}_\xi \eta^i = \xi^k \partial_k \eta^i - \eta^k \partial_k \xi^i,$$

gdzie Ω^Λ – liniowy obiekt geometryczny

Jeśli układ /4.13/ jest całkowalny, to można konstruować jego prostsze rozwiązania na podgrupach jednoparametrowych, żądając żeby także pola szukane były niezmiennicze względem jednoparametrowych podgrup grupy geometrycznej. Otóż we współrzędnych kanonicznych generatora $\mathcal{X}=\xi^i\partial_i$ grupy $\mathcal{G}_1$, to jest w takich współrzędnych, że $\mathcal{X}=\partial_\lambda$ /ich znalezienie sprowadza się do wyznaczenia pełnego układu inwariantów $\mathcal{G}_1$ i do całkowania równania $\mathcal{X}\lambda=1$ / warunki /4.13/ tłumaczą się jako warunek niezależności składowych wielkości absolutnych od współrzędnej λ . Narzucenie tego samego warunku na rozwiązania /we współrzędnych kanonicznych/ nie prowadzi więc na ogół do sprzeczności, ponieważ redukuje tylko o jeden liczbę zmiennych niezależnych. Tak więc nie wnikając w to jak ma się grupa geometryczna do grupy podstawowej układu (S) widzimy, że pozwala ona na konstruowanie pewnych klas rozwiązań prostszych geometrycznie. Na ogół dla układów występujących w fizyce grupa niezmienniczości g_{ij} jest też grupą niezmienniczości Γ^k_{ij} /jeśli są to symbole Christoffela zbudowane na danym g_{ij} / i cała analiza znacznie upraszcza się. Dla takich układów, gdzie wszystkie wielkości absolutne są komitantami geometrycznymi jednej z nich, oprócz rozwiązań niezmienniczych względem podgrupy izometrii, można, też otrzymać redukcję liczby zmiennych niezależnych dla rozwiązań względnie niezmienniczych itd. Zastosowania tej idei w dynamice gazów znaleźć można w pracach [13], [14], przy czym rozważano rozwiązania niezmiennicze na grupach jednoparametrowych izometrii oraz względnie niezmiennicze na jednoparametrowych grupach podobieństw

Dalszą redukcję, przynajmniej jeśli chodzi o układ dynamiki gazów

/4.15/
$$\begin{aligned}
&\partial_t\rho+\nabla_k(\rho v^k)=0\\
&\partial_t v^i+v^j\nabla_j v^i+\frac{1}{\rho}g^{ik}\partial_k p=0, \qquad i,j,k=1,2,3\\
&\partial_t(p/\rho^\gamma)+v^l\partial_l(p/\rho^\gamma)=0.
\end{aligned}$$

można otrzymać przez rozpatrzenie podgrup grupy izometrii. Jeśli $\mathcal{X}_I = \xi_I^i \partial_i$, $I = 1, \dots, r$ tworzą podgrupę, to wprowadzając jako nowe współrzędne inwarianty tej podgrupy $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_p$ i oznaczając pozostałe współrzędne przez $\lambda^1, \dots, \lambda^s$, $s = 3-p$ widzimy, że p początkowych współrzędnych wektorów $\xi_1, \dots, \xi_r$ jest równa zero. Wynika stąd, że w tych współrzędnych kanonicznych podgrupy $\mathcal{G}$ grupy izometrii, niezmienniczy skalar charakteryzuje się tym, że nie zależy od $\lambda^1, \dots, \lambda^s$ a niezmienniczy wektor kontrawariantny - tym, że p jego początkowych składowych nie zależy od $\lambda^1, \dots, \lambda^s$. Ponieważ poszczególne wyrazy w równaniach $/4.15/_1$ i $/4.15/_3$ są skalarami, a w równaniach $/4.15/_2$ - składowymi wektorów kontrawariantnych, przeto zakładając, że rozwiązanie ρ, p, v jest niezmiennicze względem grupy $\mathcal{G}$, czyli $\mathcal{L}_{\xi_I}\rho = 0, \mathcal{L}_{\xi_I} p = 0, \mathcal{L}_{\xi_I} v^i = 0$ po przejściu do współrzędnych kanonicznych $\mathcal{G}$, $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_p$, $\lambda^1, \dots, \lambda^s$, $s = 3-p$
/pochodna Liego jest przestawialna z ∇_k dla izometrii / otrzymamy układ, w którym wszystkie wyrazy w $/4.15/_1$ i $/4.15/_3$ są funkcjami tylko $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_p$ a w p początkowych równaniach $/4.15/_2$ wszystkie wyrazy także są funkcjami tylko inwariantów $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_p$. Kładąc pozostałe składowe v oraz gradientu p jako równe zero, otrzymamy zamknięty układ równań, w którym redukuje się liczba zmiennych niezależnych o $3-p$ i w tym samym stopniu liczba funkcji szukanych.

Postępowanie to łatwo przenieść na przypadek innych układów występujących w fizyce.

4.6. Grupa podobieństw i związki z analizą wymiarową. Inny uproszczony sposób konstruowania rozwiązań szczególnych (S) /3.1/ bez wyznaczania grupy podstawowej polega na znalezieniu dopuszczalnej dla układu (S) podgrupy $\mathcal{P}_{\alpha}$ grupy podobieństw $\mathcal{P}_N$, $N = n+m$, dla której przekształcenia skończone mają postać[1/]

$$\mathcal{P}_N: \qquad \bar{x}^i = a^i x^i \qquad i = 1,\dots,n$$
/4.16/
$$\bar{u}^\alpha = a^{n+\alpha} u^\alpha \qquad \alpha = 1,\dots,m$$

a algebrę Liego określają operatory

/4.17/ $$\mathcal{X}_i \equiv x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathcal{X}_{n+\alpha} = u^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

Współczynniki $a^1,\dots, a^{n+m}$ /parametry grupy $\mathcal{P}_N$ / przebiegają wartości dodatnie, są to współczynniki dylatacji na poszczególnych osiach układu (x,u). Łatwość znalezienia podgrupy $\mathcal{P}_k$ grupy $\mathcal{P}_N$ polega na tym, że są one wszystkie określone /po ewentualnej zmianie numeracji/ związkami kształtu /4.16/, gdzie

/4.18/ $$\mathcal{P}_k: \quad a^j = (a^1)^{m_{1j}} (a^2)^{m_{2j}} \cdots (a^k)^{m_{kj}}, \quad j = k+1,\dots,N$$

/Dowód tego stwierdzenia można znaleźć w pracach [37] i [16]/.

Wobec tego całe zagadnienie wyznaczania podgrupy $\mathcal{P}_{\alpha}$ dopuszczalnych podobieństw układu (S) sprowadza się do znalezienia <u>wykładników podobieństwa</u> $m_{1j},\dots, m_{rj}$, $j = r+1,\dots,N$, r-ilość parametrów $\mathcal{P}_{\alpha}$, które natychmiast wynikają z żądania, że (S) dopuszcza /4.17/ i powtórzenie rozważań, które w przypadku ogólnym prowadzą do układu $(D)_{fin}$ /dla grupy $\mathcal{P}_{\alpha}$ układ ten sprowadza się do prostych związków

---
1/ W punkcie tym nie stosujemy konwencji sumacyjnej.

algebraicznych, z których wynikają wzory /4.18//. Można też posłużyć się ogólnym operatorem infinitezymalnym grupy $\mathcal{P}_r$. Rozwiązanie równań definicyjnych $(D)_{inf}$ będzie wtedy postaci[1/]

$$\mathcal{X} = C_1\left(y^1\frac{\partial}{\partial y^1} + m_{r+1,1}\, y^{r+1}\frac{\partial}{\partial y^{r+1}} + \dots + m_{N,1}\, y^N\frac{\partial}{\partial y^N}\right) +$$

/4.19/ $\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$C_r\left(y^r\frac{\partial}{\partial y^r} + m_{r+1,r}\, y^{r+1}\frac{\partial}{\partial y^{r+1}} + \dots + m_{N,r}\, y^N\frac{\partial}{\partial y^N}\right),$$

gdzie $C_1, \dots, C_r$ stałe dowolne $m_{r+1,1}, \dots, m_{N,r}$ stałe zależne od rozpatrywanego układu (S), a jednocześnie wykładniki potęg we wzorze /4.18/.

Z tej postaci operatora infinitezymalnego wynika, że inwariantami grupy $\mathcal{P}_r$ będą wyrażenia postaci

/4.20/ $$\Pi = (y^1)^{\alpha_1}(y^2)^{\alpha_2}\cdots(y^{N-1})^{\alpha_{N-1}}(y^N)^{\alpha_N}$$

przy czym stałe $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ są związane wykładnikami podobieństwa następująco

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{r+1} m_{1,r+1} + \dots + \alpha_N m_{1,N} = 0$$

/4.21/ $\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\alpha_r + \alpha_{r+1} m_{r,r+1} + \dots + \alpha_N m_{r,N} = 0$$

Wyznaczenie inwariantów sprowadza się więc do prostego zadania algebraicznego. Rozwiązanie istnieje i rozpina przestrzeń $N-r$ wymiarową. Tyle jest więc inwariantów w pełnym ich układzie dla $\mathcal{P}_r$.

Grupę $\mathcal{P}_N$ można traktować jako grupę zmian skal wielkości $y^1, \dots, y^N$. Wyznaczenie podgrupy $\mathcal{P}_r$ prowadzi więc do tego, że skale wielkości $y^1, \dots, y^N$ zmieniają się według związków postaci /4.18/. W analizie wymiarowej powiedzielibyśmy, że wielkości $y^1, \dots, y^r$ są pierwotne,

1/ Po odpowiedniej zmianie nazw i kolejności zmiennych x, u.

a $y^{r+1}, \ldots, y^{N}$ wtórne wymiarowo. Inwarianty $\Pi_1, \ldots, \Pi_{N-r}$ przy tym ujęciu są to funkcje bezwymiarowe.

Jak widzimy istnieją ścisłe związki między analizą wymiarową układu (S) a wyznaczaniem podgrupy dopuszczalnych podobieństw układu (S). Dopiero jednak w nawiązaniu do zasadniczego twierdzenia /punkt 4.2/ jasnym się staje, dlaczego rozwiązania szukane w postaci odpowiednich kombinacji bezwymiarowych /kryteriów podobieństwa/ wyznaczają się z układów o zredukowanej liczbie zmiennych niezależnych. Metoda takiej redukcji układów jest powszechnie stosowana w mechanice, a zwłaszcza w hydrodynamice [36], [1] a odpowiednie rozwiązania szczególne noszą nazwę samopodobnych.

4.7 Klasyfikacja pełnego zbioru rozwiązań. Konstrukcja układu automorficznego i rozwiązującego. Jeżeli układ (S) dopuszcza grupę $\mathcal{G}$ to pełny zbiór rozwiązań (S) można rozbić na klasy rownoważnosci, przy czym dwa rozwiązania (S) należą do jednej i tej samej klasy /przystają względem grupy $\mathcal{G}$/ jeżeli można przejść od jednego do drugiego rozwiązania za pomocą pewnego przekształcenia grupy $\mathcal{G}$. Np wzory /3.26/ podają klasę rozwiązań układu /3.21/, które przystają do rozwiązania $u_0(x,y,t)$, $v_0(x,y,t)$ względem grupy $\mathcal{H}$. Rozbicie rozwiązań na klasy rozwiązań przystających, klasy równoważności, sprowadza jednocześnie problem całkowania układu (S) do dwóch zagadnień pomocniczych

a. Do wyznaczenia wszystkich klas rozwiązań

b. Do znalezienia jednego rozwiązania wewnątrz klasy. Wszystkie inne jej rozwiązania powstają ze znalezionego rozwiązania pod działaniem przekształceń grupy $\mathcal{G}$.

Zadanie to nie jest oczywiście nowe. Zajmowali się nim Lie i Vessiot [51]. Punktem wyjścia w pracach Vessiot były jednak równania definicyjne przekształceń skończonych $(D)_{fin}$ grupy $\mathcal{G}$. Skomplikowany charakter tych równań nie daje możliwości praktycznego stosowania tej klasyfikacji. W pracy [15] zagadnienie zostało rozwiązane na podstawie znajomości algebry $\mathcal{g}$ grupy $\mathcal{G}$ 1/. Rozpatrzymy przykład równań fal krótkich i rozbijemy zbiór rozwiązań na klasy przystawania względem grupy

$\mathcal{H} : \mathcal{Z}(f, g, \lambda)$ /2.36/.

Aby dokonać rozbicia na klasy przystawania należy najpierw znaleźć kryteria przystawania. Dla dwóch rozwiązań przystających w odpowiadających sobie punktach będą równe wartości wszystkich inwariantów, w ciągach i seriach omawianych w punkcie 2.4. W naszym przypadku posłużymy się ciągiem powstałym przy przedłużeniu na pochodne względem współrzędnych wleczonych. Ponieważ t jest inwariantem $\mathcal{H}$ obieramy jako współrzędne wleczone σ_1, σ_2, t i piszemy rozmaitość $\mathcal{M}_3$ w postaci

$$
/4.22/ \quad \begin{aligned} x &= x(\sigma_1, \sigma_2, t), \\ y &= y(\sigma_1, \sigma_2, t), \\ t &= t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &= u(\sigma_1, \sigma_2, t) \\ v &= v(\sigma_1, \sigma_2, t) \end{aligned}
$$

Przedłużamy $\tilde{\mathcal{Z}}(f, g, \lambda)$ na pochodne $\mathcal{M}_3$ względem σ_1, σ_2, t

Inwarianty różniczkowe powinny spełniać równanie $\tilde{\mathcal{Z}}(f, g, \lambda)\mathcal{F}^{(1)} = 0$ przy dowolnych f, g, λ. Wobec tego równanie to rozszczepia się na układ równań

$$
/4.23/ \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial u'} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x'} = 0,
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} - k\frac{\partial}{\partial v'}\right)F = 0, \left[2\left(y_1\frac{\partial}{\partial u_1} + y_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial v'}\right]F = 0,
$$

$$
\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2} + y'\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y'} + v_1\frac{\partial}{\partial u_1} + v_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right)F = 0,
$$

$$
\left(x_1\frac{\partial}{\partial u_1} + x_2\frac{\partial}{\partial u_2} - y_1\frac{\partial}{\partial v_1} - y_2\frac{\partial}{\partial v_2} - y'\frac{\partial}{\partial v'}\right)F = 0
$$

1/ Ponieważ jak się dalej okaże rzecz polega na wyznaczaniu odpowiedniego zupełnego układu inwariantów, można w ujęciu infinitezymalnym wprost posłużyć się $(D)_{inf}$ /p.2.5/

Indeksy oznaczają odpowiednio pochodną względem σ_1 i σ_2 a prim pochodną cząstkową względem t.

Układ /4.23/ jest układem zupełnym jako konsekwencja zamkniętości rodziny operatorów $Z(f,g,\lambda)$ względem iloczynu Liego. /por. końcowe uwagi punktu 2.5/. Nie jest to wprawdzie układ Jacobiego, ale daje się całkować metodą Jacobiego. W dalszym ciągu będziemy korzystali z następujących rozwiązań układu /4.23/

/4.24/
$$
\begin{aligned}
&M_\alpha = y_\alpha, \qquad \alpha = 1,2\\
&b_\beta = x_\beta + y' y_\beta, \quad \beta = 1,2\\
&\Omega = v - x - x' - \tfrac{1}{2}(y')^2,\\
&J_{\alpha\beta} = (u_\alpha + y' v_\alpha) y_\beta + (x_\alpha + y' y_\alpha) v_\beta -\\
&\qquad - 2 y_\alpha y_\beta (kv + v'),\\
&\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & v_1 \\ y_2 & v_2 \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
I = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_2 \end{vmatrix} + y' \begin{vmatrix} x_1 & v_1 \\ x_2 & v_2 \end{vmatrix} + y' \begin{vmatrix} y_1 & u_1 \\ y_2 & u_2 \end{vmatrix} + y'^2 \begin{vmatrix} y_1 & v_1 \\ y_2 & v_2 \end{vmatrix} - 2(kv + v') \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.
$$

Zachodzą też związki następujące

/4.25/
$$
\begin{aligned}
&M_1 J_{22} - M_2 J_{21} = \Delta \cdot b_2\\
&M_2 J_{11} - M_1 J_{12} = -\Delta \cdot b_1\\
&\Delta \cdot b_1 b_2 - I \cdot M_1 M_2 = M_1 b_2 J_{12} - M_2 b_1 J_{21}.
\end{aligned}
$$

ponieważ układ /4.23/ ma tylko osiem inwariantów pierwszego rzędu funkcyjnie niezależnych.

Zauważmy jeszcze, że zachodzi różniczkowa zależność pomiędzy inwariantami

/4.26/
$$
\Delta = \begin{vmatrix} M_1 & Q_1 \\ M_2 & Q_2 \end{vmatrix}, \qquad
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_1} + b_1 + \frac{\partial}{\partial t} b_1,\\
Q_2 &= \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_2} + b_2 + \frac{\partial}{\partial t} b_2.
\end{aligned}
$$

Wobec czego, jeśli rozmaitość $\mathcal{M}_3$ jest zadaną, to wystarczy obliczyć na niej inwarianty $M_\alpha, \mathcal{L}_\beta, \Omega$ i dwa spośród inwariantów $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ aby otrzymać wartości wszystkich inwariantów dla całej rodziny równoważnych rozmaitości $\bar{\mathcal{M}}_3 = T(f,g,h)\mathcal{M}_3(\sigma_1,\sigma_2,t)$. Okazuje się, że ten warunek konieczny jest również dostatecznym. W rzeczy samej, rozpatrzmy układ równań cząstkowych

$$
\begin{aligned}
&(A): \quad y_\alpha = M_\alpha \\
/4.27/ \quad & x_\beta + y' y_\beta = \mathcal{L}_\beta \\
& v - x - x' - \tfrac{1}{2}(y')^2 = \Omega \\
& (u_1 + y' v_1) y_2 - (x_1 + y' y_1) v_2 - 2 y_1 y_2 (kv + v') = \mathcal{J}_{12}, \\
& (u_2 + y' v_2) y_1 + (x_2 + y' y_2) v_1 - 2 y_1 y_2 (kv + v') = \mathcal{J}_{21},
\end{aligned}
$$

w którym prawe strony traktujemy jako dane funkcje σ_1, σ_2, t. Jeśli układ ten jest całkowalny, to jak łatwo sprawdzić przez rozpatrzenie różnicy dwóch rozwiązań, będą one związane pewnym skończonym przekształceniem grupy $\mathfrak{M}$ /3.24/. Układ /4.27/ jest układem automorficznym względem grupy $\mathfrak{M}$, co oznacza że rozwiązanie ogólne ma taki sam stopień swobody jaki jest właściwy przekształceniom skończonym grupy $\mathfrak{M}$ oraz że każde dwa rozwiązania są związane za pomocą przekształcenia do grupy tej należącego.

Funkcje $M_\alpha, \mathcal{L}_\beta, \Omega, \mathcal{J}_{12}, \mathcal{J}_{21}$ nie mogą być oczywiście zupełnie dowolnymi. Muszą one spełniać warunki całkowania układu /4.27/, które wyrażają się za pomocą samych inwariantów grupy $\mathfrak{M}$ i mają postać

$$(C) \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma_1} M_2 - \frac{\partial}{\partial\sigma_2} M_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_2} b_1 - \frac{\partial}{\partial\sigma_1} b_2 - M_1 \frac{\partial}{\partial t} M_2 + M_2 \frac{\partial}{\partial t} M_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\left(\frac{J_{12}}{M_2}\right) - \frac{\partial}{\partial\sigma_2}\left(\frac{J_{21}}{M_1}\right) +$$

$$+ b_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} M_2 + M_2\right) - b_2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} M_1 + M_1\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\sigma_1}\left(\frac{b_2 Q_1}{M_1}\right) - \frac{\partial}{\partial\sigma_2}\left(\frac{b_1 Q_2}{M_2}\right) +$$

$$+ 2\left[M_1\left(kQ_2 + \frac{\partial}{\partial t} Q_2\right) - M_2\left(kQ_1 + \frac{\partial}{\partial t} Q_1\right)\right] +$$

$$+ Q_2 \frac{\partial}{\partial t} M_1 - Q_1 \frac{\partial}{\partial t} M_2 = 0.$$

Aby rozmaitości danej klasy wszystkie czyniły zadość wyjściowemu równaniu /3.21/ należy na inwarianty narzucić jeszcze związki powstałe z /3.21/ po zapisaniu tych równań za pomocą inwariantów, czyli

$$S_1 \equiv I + 2\Omega \cdot \Delta = 0,$$

$$/4.29/ \qquad S_2 \equiv J_{12} - J_{21} = 0.$$

Układ ten wraz z warunkami zgodności (C) nie dopuszcza już grupy $\mathcal{H}$ /wyraża się przez inwarianty a względem tych zmiennych działanie $\mathcal{H}$ sprowadza się do przekształcenia tożsamościowego/, a ponieważ wyznacza klasy rozwiązań przystających - nosi nazwę układu rozwiązującego (R). Przy znanym rozwiązaniu układu (R) rozwiązanie układu (A), jak łatwo sprawdzić, sprowadza się do kwadratur. Układ (R) można też wykorzystać do konstruowania rozwiązań szczególnych [15], przy czym w odróżnieniu od rozwiązań omawianych dotychczas będą to rozwiązania niezmiennicze różniczkowo.

Przy rozważnym tu zagadnieniu konstrukcji układu automorficznego i rozwiązującego, miejsce szczególne przypada równaniom (S) dopuszczającym taką grupę $\mathcal{G}$, że odpowiedni układ automorficzny pokrywa się z układem wyjściowym. Wtedy badanie wszystkich rozwiązań (S) sprowadza się do znalezienia jednego rozwiązania szczególnego (S) oraz do wyznaczenia przekształceń skończonych grupy $\mathcal{G}$. Istnieją ważne z geometrycznego punktu widzenia, nieliniowe równania, automorficzne względem grupy konforemnej płaszczyzny [12].

4.8. Szkic metody Cartana. Pojęcie grupy przekształceń pojawia się w naturalny sposób przy rozpatrywaniu nakładalności dwóch rozmaitości przy przekształceniach punktowo-punktowych. Jeśli dwie rozmaitości można nałożyć na siebie, to ogólne przekształcenie mające tą własność będzie superpozycją pewnego przekształcenia realizującego nakładalność dwóch rozmaitości i wszystkich przekształceń zachowujących drugą rozmaitość. Powstaje pytanie czy każdą grupę, określoną układem $(D)_{fin}$ można określic w ten sposób? Pozytywna odpowiedź na to pytanie stanowi fundament Cartanowskiej teorii struktury grup, która ujmuje jednym algorytmem grupy o skończonej ilości parametrów jak i o nieskończonej ilości parametrów. Wychodząc z równań $(D)_{fin}$ grupy, Cartan wykazał, że każdą grupę można scharakteryzować jako grupę zachowującą układ form różniczkowych o określonej strukturze. Stosowany przy tym rachunek form różniczkowych zewnętrznych prowadzi jednocześnie do zupełnego układu inwiariantów grupy [2].

Ale postępowanie to jest mało efektywne kiedy wychodzimy od układu (S), a to z uwagi na złożoność $(D)_{fin}$. W tym przypadku stosowana jest metoda reperu ruchomego. SUROWICHIN w serii prac, opierając się na rozwinięciach metody reperu ruchomego wywodzące się od Łaptiewa [22] i Vasiljeva [48], atakował zagadnienie wyznaczania równań strukturalnych grupy podstawowej dla układu dynamiki gazów w jednowymiarowych ruchach nieustalonych, oraz zagadnienie grupowej klasyfikacji tychże równań [39], [40], [41], [42]. Jak się wydaje z dotychczasowych prób w tym kierunku im większa jest liczba zmiennych i funkcji, tym bardziej zagadnienie wikła się w żmudne rachunki. Z tego względu zastosowania grup, zwłaszcza do poszukiwania rozwiązań szczególnych (S), będą się raczej rozwijały na podstawie dobrze wykształconego algorytmu infinitezymalnego.

Literatura

1. G.BIRKHOFF, Hydrodynamics- a study in logic, fact and similitude, New York, 1950.

2. E.CARTAN, Sur la structure des groupes infinis des transformations, Ann. de l'École Normale Super. 21,3, /1904/, 153-206, /Oevres Complètes, Partie 2, vol. II, 571-624/.

3. C A.COHEN, An introduction to the Lie theory of one-parameter groups with applications to the solution of differential equations, N.York, 1931.

4. L.P.EISENHART, Continuous groups of transformations, Univ. Press, Princeton, 1953.

5. E.ENGLUND, Sur les méthodes d'integration de Lie et les problèmes de la mécanique celeste, Uppsala, 1916.

6. A.G.HANSEN, Similarity analyses of boundary value problems in engineering, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1964.

7. Н.Х.ИБРАГИМОВ, Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного движения газа, Журн.прикл.механики и техн. физики 4,/1966/,19 - 22.

8. E.KAMKE, Differentialgleichungen, II Teil- Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für einegesuchte Funktion, Akad. Verlag, Leipzig, 1956.

9. В.Л.КАТКОВ, Инвариантно-групповые решения уравнений бризов и муссонов, Метеорология и гидрол., 10,/1966/, 11-13.

10. В.Л.КАТКОВ, Один класс точных решений уравнения прогноза геопотенциала, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, I, 10, /1965/, 1088-1090.

11. В.Л.КАТКОВ, Групповая классификация решений уравнения Хопфа, ЖПМТФ, 6,/1965/, 105-106.

12. В.Г.КОСТЕНКО, Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних групповим методом, Видавництво Львівського Университету, 1959.

13. П.КУХАРЧИК, Геометрический метод определения классов решений уравнений газодинамики на основе некоторых групп Ли преобразований пространства и пространства-времени

Arch.Mech.Stosowanej, 14, 3/4, /1962/, 371-390 /A geometric method of classifying solutions of gas dynamics equations using certain space and the time-space transformation groups, Fluid Dynamics Transactions, 1, /1964/, 83 - 100/.

14. P.KUCHARCZYK, Metoda wyznaczania pewnych klas przepływów za pomocą modelowania na grupach Liego, Rozprawy Inżynierskie, 11, 3, /1963/, 509 - 553.

15. P.KUCHARCZYK, Групповые свойства уравнений коротких волн в газовой динамике,
Bull.Acad.Pol.de Sci, Série de Sc.Techn. 12, 5, /1965/, 1- 9.

16. P.KUCHARCZYK, Analiza wymiarowa /rozdział w Poradniku Matematyki, w opracowaniu przez WNT/.

17. Э.В.ЛЕНСКИЙ, О групповых свойствах уравнений движения нелинейной вязко-пластической среды, Вестник Московского Университета, 5,/1966/,116-125.

18. Э.А.ЛЕОНОВА, Групповая классификация и инвариантные решения уравнений течения и теплообмена вязко-пластической среды, ЖПМТФ,4,/1966/,3-18.

19. S.LIE, Theorie der Transformationsgruppen, B.G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1930.

20. S.LIE, Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen, Leipziger Berichte, 34, /1891/, 316-394, /Gesammelte Abğandlungen 6 Band, 539-591/.

21. S.LIE, Über Differentialinvarianten, Math.Annalen, 24, /1884/.

22. Г.Ф.ЛАПТЕВ, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий- Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований, Труды Моск.Матем. Общества, 2,/1953/, 275- 382.

23. P.Medolaghi, Sulla teoria dei gruppi infiniti continui, Annali di Matematica, 25, /1897/, 179-217.

24. P.MEDOLAGHI, Classificazione delle equazioni alle derivate parziale del sécondo ordine, che amettone un gruppo infinito di transformazioni puntuali, Annali di Matematica, ser. III, 1, /1898/, 229-263.

25. E.A.MÜLLER, K. MATSCHAT, Über das Auffinden von Ähnlichkeitslösungen partieller Differentailgleichungsysteme unter Benutzung von Transformationsgruppen, mit Anwendung auf Probleme der Strömungphysik, Miszellaneen der Angewandten Mechanik, Akad.Verlag, Berlin, 1962.

26. Л.В.ОВСЯННИКОВ, Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 118, 3, /1958/, 439-442.

27. Л.В.ОВСЯННИКОВ, Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, ДАН СССР, 125, 3, /1959/, 492-495.

28. Л.В.ОВСЯННИКОВ, Об отыскании группы линейного дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 132, I, /1960/,

29. Л.В.ОВСЯННИКОВ, Групповые свойства уравнения С.А.Чаплыгина, ЖПМТФ, 3, /1960/, 126-145.

30. Л.В.ОВСЯННИКОВ, Групповые свойства дифференциальных уравнений, Изд. СО АН СССР, Новосибирск 1962.

31. Л.В.ОВСЯННИКОВ, Инвариантно-групповые решения уравнений гидродинамики, Труды II-го Всесоюзного Съезда Механики, т.2, 302-304, Москва, 1965.

32. L.V.OVSJANNIKOV, Group properties of the hydrodynamic equatiotions, Atti del Simposic Lagrangiano, Accademia della Scienze di Torine, 1965.

33. Л.В.ОВСЯННИКОВ, О линеаризации уравнения с частными производными второго порядка, ДАН СССР, 102, 2, /1955/, 219-221.

34. Ю.Н.ПАВЛОВСКИЙ, Исследование некоторых решений уравнений пограничного слоя, Журн.Вычисл.Матем. и Матем.Физики, I, 2, /1961/, 280-294.

35. В.В.ПУХНАЧЕВ, Групповые свойства уравнений Навье-Стокса в плоском случае, ЖПМТФ, I, /1961/, 83-90.

36. Л.И.СЕДОВ, Методы подобия и размерности в механике, Москва 1954.

37. R.SAINT-GUILHEM, Les principes de l'analyse dimensionnelle-Invariance des relations vectorielles dans certaines groupes d'affinités, Mémorial des Sciences Mathématiques, nr 152, Paris, 1962.

38. К.П.СУРОВИХИН, Групповая классификация уравнений, описывающих одномерные нестационарные течения газа, ДАН СССР, 156, 3, /1964/, 533-536.

39. К.П.СУРОВИХИН, Инвариантный смысл инвариантов Римана, ДАН СССР, 163, 2, /1965/, 319-322.

40. К.П.СУРОВИХИН, Внешние формы Картана и отыскание основной группы, допускаемой данной системой уравнений, Вестник Московского Университета, 6, /1965/, 70-81.

41. К.П.СУРОВИХИН, О групповой классификации методом Картана уравнений одномерного течения газа, ДАН СССР, 171, 1, /1966/, 55-58.

42. К.П.СУРОВИХИН, Интегральные инварианты в плоских вихревых течениях газа, ЖПМТФ, 5, /1965/, 138-142.

43. В.А.СЫРОВОЙ, Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц, ЖПМТФ, 3, 4, /1962/.

44. В.А.СЫРОВОЙ, О некоторых новых решениях, получаемых при помощи инвариантных преобразований, ЖПМТФ, 3, /1965/.

45. В.А.СЫРОВОЙ, Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного пучка заряженных частиц, ЖПМТФ, 3, /1963/.

46. В.А.СЫРОВОЙ, О некоторых точных решениях уравнений стационарного моноэнергетического пучка заряженных частиц, ЖПМТФ, 5, /1965/.

47. A.TRESSE, Sur les invariantes differentielles des groupes continus de transformations, Acta Mathematica, 18, /1894/, 1 - 88.

48. А.В.ВАСИЛЬЕВ, Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных /локальная теория /, Матем. Сборник, 70 /122/, 4, /1966/, 457-480.

49. E.VESSIOT, Sur la thérie des groupes continus, Annales de l'École Normale Superieure, 20, /1903/, 411-451.

50. E.VESSIOT, Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations, ibid. 21, /1904/, 9-85.

51. E.VESSIOT, Sur l'intérgration des systèmes differentiells qui admettent des groupes continus de transformations, Acta Mathematica, 28, /1904/, 307-349.

52. K.YANO, The theory of Lie derivatives and its applications, North-Holland Publ.Co., Amsterdam, 1955.

P. KUCHARCZYK Teoria grup Liego w zastosowaniu do równań różniczkowych cząstkowych