W. J. Prosnak, M. E. Klonowska

O DWU ODMIANACH METODY POHLHAUSENA I ICH ZASTOSOWANIU DO PRZEPŁYWU W SĄSIEDZTWIE PUNKTU SPIĘTRZENIA

6/1968

WARSZAWA

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN

Nakład 120 egz. Ark. wyd.3,8. Ark. druk.4,25.
Oddano do drukarni w marcu 1968 r.
Wydrukowano w kwietniu 1968 r. Nr.zam. 223/0/68

Warszawska Drukarnia Naukowa , Warszawa ,
ul.Śniadeckich 8

Spis treści

W.J.Prosnak, M.E.Klonowska

O DWU ODMIANACH METODY POHLHAUSENA I ICH ZASTOSOWANIU DO PRZEPŁYWU W SĄSIEDZTWIE PUNKTU SPIĘTRZENIA

Praca zawiera opis dwu odmian metody Pohlhausena i wyniki ich zastosowania do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia, położonego na ruchomej ściance. Obie odmiany różnią się warunkiem "zgodności", który jest wnioskiem z równań warstwy przyściennej, a dotyczy pochodnej prędkości cieczy na ściance. Wykazano, że wielomiany aproksymujące rozkład prędkości w warstwie, spełniające warunek zgodności, na ogół g o r z e j opisują warstwę przyścienną w badanym przypadku, niż wielomiany, nie spełniające warunku zgodności. Wynik ten podważa wnioski, zawarte w pracy Hugelmana [1], przy czym nie zależy on od stopnia N wielomianu aproksymującego. W każdym razie - pozostaje on w mocy dla N = 4; 6; 8.

1. DWIE ODMIANY METODY POHLHAUSENA

1.1. Warunek zgodności

Rozpatrzmy płaską, stacjonarną warstwę przyścienną, zakładając, że ciecz ma stałą gęstość ρ i stałą lepkość dynamiczną μ. Jej lepkość kinematyczna ν ma zatem również wartość stałą.

Załóżmy, że ścianka, przy której formuje się warstwa przyścienna, jest prostoliniowa, i wprowadźmy prostokątny układ odniesienia x, y, taki, że oś x pokrywa się ze ścianką, a oś y jest normalna do ścianki i zwrócona w stronę warstwy przyściennej.

Oznaczmy symbolami $u(x,y)$, $v(x,y)$ składowe prędkości cieczy w warstwie przyściennej względem tego układu odniesienia, a symbolem $U(x)$ - prędkość przepływu potencjalnego na granicy warstwy. Wprowadźmy symbol $\delta(x)$ na oznaczenie grubości warstwy przyściennej.

Załóżmy ponad to, że ścianka również porusza się względem przyjętego układu odniesienia - w swej płaszczyźnie. Prędkość ścianki oznaczmy symbolem $u_w(x)$.

Układ równań, złożony z równania Prandtla i równania ciągłości, opisujący pole prędkości cieczy w warstwie przyściennej, można zapisać wówczas w następującej formie:

$$u\,u_x + v\,u_y = U\,U' + \nu\,u_{yy}\,, \tag{1.1}$$

$$u_x + v_y = 0\,, \tag{1.2}$$

przy czym dolne wskaźniki oznaczają pochodne cząstkowe, a prim - pochodną zupełną względem x.

Warunki brzegowe dla tego układu dotyczą składowych prędkości na ściance $y = 0$ i na granicy warstwy $(y = \delta)$, i mają one znaną postać:

$$\left\{\begin{array}{ll} u(x,0) = u_w(x)\,; & v(x,0) = 0\,; \\ u(x,\delta) = U(x)\,. & \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu równania (1.1) względem y i uwzględnieniu równania ciągłości (1.2) otrzymuje się:

$$u\,u_{xy} + v\,u_{yy} = \nu\,u_{yyy}\,, \tag{1.4}$$

a po uwzględnieniu warunków brzegowych (1.3) na ściance - ostatecznie:

$$u_w \cdot u_{xy}\Big|_{y=0} = \nu\, u_{yyy}\Big|_{y=0} . \tag{1.5}$$

Powyższy warunek, będący wnioskiem z układu równań (1.1), (1.2) i warunków brzegowych (1.3), będziemy nazywali w dalszym ciągu w a r u n k i e m z g o d n o ś c i . Nazwa ta stanowi przekład słów "compatibility condition", i została zapożyczona z pracy Hugelmana [1] .

O ile nam wiadomo, warunek zgodności został zaproponowany i zastosowany po raz pierwszy w pracy Schlichtinga i Ulricha [2] w 1942 r. Hugelman i Haworth zaproponowali go ponownie w późniejszej o lat dwadzieścia trzy pracy [3] , dotyczącej warstwy przyściennej magnetohydrodynamicznej, przy czym - jak się wydaje - cytowana praca Schlichtinga i Ulricha [2] nie była im znana.

1.2. Odmiany: klasyczna i zmodyfikowana metody Pohlhausena

Wprowadźmy symbole δ_* , ϑ , τ_0 na oznaczenie - odpowiednio - miary liniowej straty wydatku, miary liniowej straty pędu i naprężenia stycznego na ściance.

Oto znane wzory, definiujące wymienione symbole:

$$\delta_* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \; ; \tag{1.6}$$

$$\vartheta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \; ; \tag{1.7}$$

$$\tau_0 = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} . \tag{1.8}$$

Przy ich pomocy można zapisać znany wzór całkowy

Kármána, stanowiący całkę równania Prandtla (1.1), w następującej postaci:

$$U^2 \frac{d\vartheta}{dx} + \left(2\vartheta + \delta_*\right) U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho} . \tag{1.9}$$

Zaproponowana przez Pohlhausena [4] metoda wyznaczania warstwy przyściennej w sposób przybliżony, opiera się na aproksymacji rozkładu prędkości w warstwie wielomianem potęgowym, spełniającym wzór całkowy Kármána (1.9) oraz pewne warunki na ściance i na granicy warstwy.

W zależności od postaci tych warunków wyróżniać będziemy w ramach niniejszej pracy "odmianę klasyczną" i "odmianę zmodyfikowaną" metody Pohlhausena. Odpowiednio - mówić będziemy o "wielomianie klasycznym" i "wielomianie zmodyfikowanym".

Przechodzimy do określenia wprowadzonych nazw.

Wprowadźmy bezwymiarową zmienną:

$$\eta = \frac{y}{\delta} \tag{1.10}$$

oraz wielomian potęgowy N-tego stopnia względem η, aproksymujący rozkład prędkości w warstwie przyściennej:

$$\frac{u}{U} = \sum_{n=0}^{N} a_n \eta^n . \tag{1.11}$$

Współczynniki wielomianu są na ogół funkcjami zmiennej x, przy czym współczynnik:

$$a_0 = \frac{u_w(x)}{U(x)} = c_1(x) \tag{1.12}$$

będziemy uważali w dalszym ciągu za funkcję znaną. Wyznaczenie warstwy przyściennej metodą Pohlhausena sprowadza się do wyznaczenia pozostałych współczynników.

Zważywszy, że

$$
(1.13)\quad \begin{cases} \left(\frac{u}{U}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \eta^n\right)^2 \\ \quad = \sum_{n=0}^{N} \left(a_n \eta^n\right)^2 + 2a_0 \cdot \sum_{n=1}^{N} a_n \eta^n + \\ \quad + 2a_1 \sum_{n=1}^{N} a_n \eta^{n+1} + \ldots + 2a_{N-1} \sum_{n=N}^{N} a_n \eta^{n+N-1} \end{cases}
$$

możemy łatwo obliczyć dwie następujące sumy:

$$
(1.14)\quad S_1 = \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right) d\eta = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{a_n}{n+1}\right) ;
$$

$$
(1.15)\quad \begin{cases} S_2 = \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 d\eta = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n^2}{2n+1} + 2a_0 \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n+1} + \\ \quad + 2a_1 \sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{n+2} + \ldots + 2a_{N-1} \sum_{n=N}^{N} \frac{a_n}{n+N} = \\ \quad = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n^2}{2n+1} + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(a_k \sum_{n=k+1}^{n=N} \frac{a_n}{n+k+1}\right). \end{cases}
$$

Zwracamy uwagę na fakt, że sumy S_1 i S_2 zależą wyłącznie od współczynników wielomianu (1.11).

Zgodnie z wzorami (1.6) i (1.7) wielkości δ_* i ϑ wyrażają się poprzez S_1 i S_2 ; mianowicie:

$$
(1.16)\quad \frac{\delta_*}{\delta} = 1 - S_1 ;
$$

$$
(1.17)\quad \frac{\vartheta}{\delta} = S_1 - S_2 ,
$$

przy czym grubość warstwy przyściennej δ jest nieznaną funkcją zmiennej x.

Naprężenie styczne (1.8) wyraża się pochodną wielomianu (1.11) w punkcie $\eta = 0$ i wynosi:

$$\tau_o = \frac{\mu U a_1}{\delta} . \tag{1.18}$$

Wielomian aproksymacyjny musi czynić zadość wzorowi całkowemu Kármána (1.9) . Podstawiając (1.16) , (1.17) , (1.18) do (1.9) uzyskujemy zatem pierwsze równanie na współczynniki $a_1, a_2, \dots a_N$ oraz grubość warstwy δ . Tę ostatnią funkcję niewiadomą zastąpimy dla wygody pohlhausenowskim parametrem kształtu:

$$\Lambda = \frac{\delta^2 U'}{\nu} . \tag{1.19}$$

Ponieważ liczba niewiadomych współczynników wielomianu wynosi N , układ równań służących do wyznaczenia Λ , a_1 , a_2 , ... a_N będzie składać się z (1.9) oraz N dalszych równań.

Brakujące równania tworzymy w oparciu o następujące warunki, r ó ż n i ą c e się nieco w przypadku "odmiany klasycznej" i "odmiany zmodyfikowanej" metody Pohlhausena:

1/ żądamy, aby wielomian (1.11) spełniał równanie Prandtla (1.1) na ściance:

$$u_w \cdot u_x \Big|_{y=o} = U U' + \nu u_{yy} \Big|_{y=o} ; \tag{1.20}$$

2/ żądamy, aby wielomian (1.11) spełniał pierwszy i trzeci spośród warunków brzegowych (1.3):

$$\frac{u}{U} \Big|_{y=o} = c_1 (x) ; \tag{1.21}$$

$$\frac{u}{U} \Big|_{y=\delta} = 1 . \tag{1.22}$$

3/ w przypadku wielomianu "klasycznego" żądamy, aby na brzegu warstwy znikały pochodne wielomianu (1.11) rzędu od pierwszego do rzędu (N - 2) włącznie:

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{u}{U}\right)\bigg|_{y=\delta} = 0\ ; \qquad k = 1,\ 2, .. (N-2),$$

4/ w przypadku wielomianu "zmodyfikowanego", żądamy, aby na brzegu warstwy znikały pochodne wielomianu (1.11) rzędu od pierwszego do rzędu (N - 3) włącznie:

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{u}{U}\right)\bigg|_{y=\delta} = 0\ ; \qquad k = 1,\ 2, .. (N-3),$$

oraz - aby na ściance był spełniony "warunek zgodności" (1.5) :

$$(1.23) \qquad u_w \cdot u_{xy}\Big|_{y=o} = \nu\, u_{yyy}\Big|_{y=o} .$$

Podane wyżej warunki stanowią definicje pojęć: "wielomian klasyczny" i "wielomian zmodyfikowany" oraz "odmiana klasyczna", bądź też "odmiana zmodyfikowana" metody Pohlhausena, stosowanych w ramach niniejszej pracy.

Zauważmy, że najniższy stopień wielomianu, przy którym rozróżnianie odmiany klasycznej metody Pohlhausena od odmiany zmodyfikowanej ma jeszcze sens, wynosi trzy. Istotnie, po to by wielomian mógł spełnić równocześnie wspólne obu odmianom trzy warunki (1.20) , (1.21) , (1.22) stopień jego musi wynosić dwa. Po to by wielomian mógł spełnić dodatkowy jedyny warunek, odróżniający obie odmiany, stopień jego musi być o jedność wyższy od dwóch.

W niniejszej pracy ograniczono się do wielomianów parzystego stopnia, a więc N = 4 jest najniższym stopniem rozpatrywanych wielomianów.

1.3. Bezwymiarowe naprężenie styczne

Czysto formalne przekształcenia zależności (1.18) prowadzą do następującego wyniku:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} \cdot \frac{U}{\sqrt{\nu U'}} = \frac{a_1}{\sqrt{\Lambda}} \quad . \tag{1.24}$$

Łatwo stwierdzić, że pierwszy czynnik lewej strony reprezentuje bezwymiarowe naprężenie styczne c_{xt} ; drugi - pierwiastek kwadratowy lokalnej liczby Reynoldsa Re_x . Iloczyn tych dwu wielkości oznaczać będziemy w niniejszej pracy symbolem c_2:

$$\begin{cases} c_2 = c_{xt} \sqrt{Re_x} \\ \quad = \dfrac{a_1}{\sqrt{\Lambda}} \end{cases} \tag{1.25}$$

W analogii do oznaczenia, stosowanego w naszych wcześniejszych pracach [5, 6].

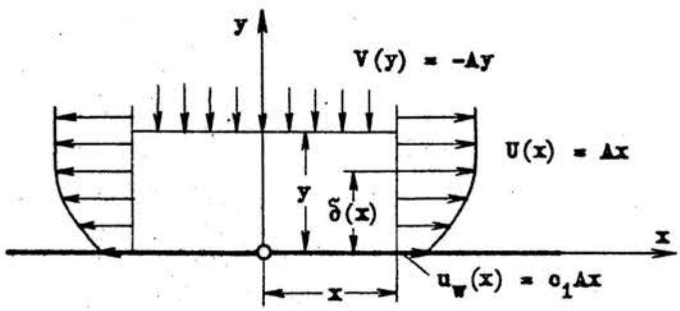
2. CEL I ZAKRES PRACY

W dalszym ciągu niniejszej pracy zajmiemy się zastosowaniem dwu opisanych odmian metody Pohlhausena do przepływu cieczy lepkiej w otoczeniu punktu spiętrzenia, położonego na prostoliniowej ściance, która porusza się z prędkością u_w proporcjonalną do odległości x od punktu spiętrzenia /rys.1/:

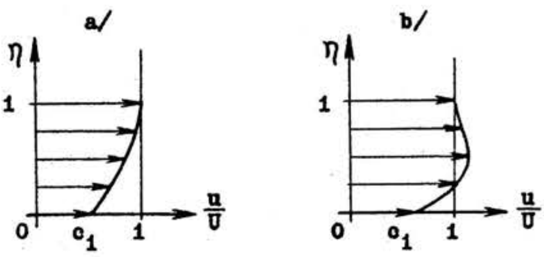
$$u_w \sim x \quad . \tag{2.1}$$

Zagadnienie wyznaczenia takiego przepływu było już rozwiązane przez nas w dwu poprzednich pracach [5 ; 6], fakt ponownego podjęcia badań nad nim wymaga więc pewnego uzasadnienia.

W tym celu przede wszystkim zrelacjonujemy wyn-



Rys.1. Schemat przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia położonego na ruchomej ściance.



Rys.2. Monotoniczny i niemonotoniczny rozkład prędkości w warstwie przyściennej.

naszej własnej pracy [6] oraz pracy Hugelmana [1] ; obie z nich stanowiły punkt wyjścia niniejszych badań i obie dotyczą zastosowania metody Pohlhausena do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia, położonego na ruchomej ściance.

W pracy [6] zastosowano wielomian czwartego stopnia, "klasyczny" w rozumieniu rozdziału 1, tzn. spełniający takie warunki na ściance i na granicy warstwy przyściennej, jakie zaproponował Pohlhausen w swej klasycznej pracy /[4] , str. 260/. Niewielkie zmiany polegały tylko na uwzględnieniu ruchu ścianki.

Wnioski uzyskane przez nas /[6], Erratum/ można streścić w następujący sposób:

1/ zastosowane przybliżenie wielomianem klasycznym 4.stopnia nie daje rozwiązania w pełnym zakresie prędkości ścianki; mianowicie w zakresie

$$0{,}4 < c_1 < 1 \tag{2.2}$$

brak rozwiązania;

2/ przebieg rozwiązania przybliżonego w zakresie

$$c_1 \geqslant 1 \tag{2.3}$$

różni się znacznie od rozwiązania ścisłego.

Mówiąc "rozwiązanie" mamy na myśli funkcje:

$$\Lambda = \Lambda(c_1) ;$$
$$c_2 = c_2(c_1) ,$$

z których pierwsza określa grubość warstwy przyściennej, druga - bezwymiarowe naprężenie styczne na ściance, które stanowi element najistotniejszy z punktu widzenia pewnych zastosowań /patrz np. [5] /.

Innymi słowy, metoda Pohlhausena - w opisanej formie i w zastosowaniu do omawianego przypadku przepływu - zawiodła. W ramach pracy [6 , Erratum] poprzestaliśmy na stwierdzeniu tego faktu, wiedząc, że z a w o d n o ś ć m e t o d y P o h l h a u s e n a, jest w ogóle faktem znanym.[x/] Natomiast podejmując pracę niniejszą, pragnęliśmy zbadać tę sprawę nieco dokładniej, niż to uczyniliśmy w pracy cytowanej / [6] , Erratum/. Ogólnie biorąc pragnęliśmy stwierdzić, czy metoda Pohlhausena zawiedzie - w odniesieniu do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia - również przy zastosowaniu wielomianu stopnia wyższego niż cztery.

Kwestia ta stanowiła podstawowy cel pracy, interesujący przede wszystkim dlatego, że p r z y c z y n a z a w o d n o ś c i metody Pohlhausena nie była dotychczas, o ile wiemy, przedmiotem zadawalających badań.

Wydaje się ona wynikać z faktu, iż przybliżenie rozkładu prędkości w warstwie wielomianem potęgowym, którego współczynniki określa się z warunków, dotyczących wyłącznie brzegów warstwy i który spełnia uśrednione, nie zaś ścisłe równania warstwy przyściennej - po prostu nie jest przybliżeniem wystarczająco dokładnym, zwłaszcza, że niektóre warunki, nakładane na ten wielomian nie mają właściwie uzasadnienia fizycznego. Mamy tu na uwadze warunki "uzupełniające", które postulują znikanie pochodnych wielomianu na granicy warstwy i przepływu potencjalnego i to pochodnych

---

[x/] Na przykład Schlichting i Ulrich /[2] , str. I 12 , Bild 5 / wspominają o niemożliwości obliczenia warstwy przyściennej w punkcie spiętrzenia i jego bezpośrednim sąsiedztwie - metodą Pohlhausena, opartą na wielomianie 6.stopnia "zmodyfikowanym" w rozumieniu rozdz.1. Stwierdzają, że pochodna grubości warstwy przyściennej jest w tym punkcie nieskończenie wielka.

tak wysokiego rzędu - w zależności od stopnia wielomianu - by uzupełnić liczbę równań służących do wyznaczenia współczynników /por.par. 1.2/. Nic więc dziwnego, że w pewnych konkretnych przypadkach przepływu przybliżenie rozkładu prędkości w warstwie wielomianem potęgowym może okazać się wystarczająco dokładne; w innych natomiast - tak dalece niedokładne, że w ogóle nie prowadzące do rozwiązania. Nieco inaczej widzi Hugelman [1] przyczynę niepowodzenia metody Pohlhausena przy zastosowaniu jej do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia. Według Hugelmana - "... przyczyna niepowodzenia tkwi w pominięciu niezbędnego warunku zgodności", wynikającego z równań warstwy przyściennej, przy czym"... dołączenie tego warunku zapewnia metodzie Pohlhausena możliwość dostarczenia poprawnych rezultatów w całym zakresie prędkości u_w ścianki". Cytowane urywki są swobodnym przekładem czwartego i piątego zdania pracy Hugelmana [1]. Na poparcie tez, zawartych w obu tych zdaniach /a sprzecznych - nawiasem mówiąc - z cytowaną pracą Schlichtinga i Ulricha [2] / przytacza Hugelman wyniki, uzyskane przy pomocy "zmodyfikowanego" wielomianu 8.stopnia, a obejmujące zakres:

$$0 \leq c_1 \leq 1,5 \ . \tag{2.4}$$

Drugim celem niniejszej pracy była zatem chęć zbadania prawdziwości twierdzeń, zawartych w dwu cytowanych zdaniach Hugelmana.

Mianowicie, ponieważ Hugelman zastosował wielomian zmodyfikowany 8.stopnia, a my [6] - wielomian klasyczny 4.stopnia, zachodziła wątpliwość, czy na poprawienie wyników wpływa na pewno "rodzaj" wielomianu, a nie jego stopień. Zdecydowaliśmy zatem wykonać obliczenia zarówno odmianą klasyczną, jak i zmodyfikowaną dla $N = 4; 6; 8$ w celu rozstrzygnięcia tej wątpliwości.

Trzeci cel pracy stanowiła kontrola wyników liczbowych Hugelmana. Otóż - Hugelman uzyskał swe wyniki [1], całkując numerycznie pewien układ równań różniczkowych, co jest niepotrzebne, bowiem w przypadku przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia można obliczyć wszystkie niewiadome współczynniki wielomianu, jak również pohlhausenowski parametr kształtu /por. par. 1.3/ z układu równań algebraicznych. Chcieliśmy więc porównać wyniki uzyskane dwoma niezależnymi sposobami.

3. PRZEPŁYW W SĄSIEDZTWIE PUNKTU SPIĘTRZENIA

3.1. Wzór całkowy Kármána

Jeżeli zarówno prędkość ścianki u_w jak i prędkość przepływu na granicy warstwy są proporcjonalne do odległości x od punktu spiętrzenia, tzn. /rys.1/:

$$u\left(x,0\right) = u_w \sim x \ ;$$
$$u\left(x,\delta\right) = U \sim x \ ,$$

warstwa jest samopodobna i wzór całkowy Kármána $\left(1.9\right)$ redukuje się do równania algebraicznego.

Samopodobieństwo wynika łatwo z powyższych założeń i warunku $\left(1.20\right)$ na ściance. Otrzymujemy mianowicie:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} \sim x \ ,$$

skąd wynika:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \sim x \ ,$$

a na tej podstawie i przy uwzględnieniu wzoru $\left(1.8\right)$ wnioskujemy, iż

$$\tau_0 \sim x \ .$$

Wprowadzając

$$U = A\,x \ ;$$

$$\tau_0 = B\,x$$

do wzoru całkowego Kármána (1.9), dostrzegamy natychmiast, na podstawie analizy wymiarów, że ani ϑ , ani δ_* nie mogą zależeć od x: są stałymi. Wobec tego - bezwymiarowy rozkład prędkości w warstwie występujący we wzorach (1.6) i (1.7) też nie może zależeć od x , tzn.:

$$\frac{d\vartheta}{dx}\left(\frac{u\,(x,y)}{U}\right) = 0 \ ,$$

co właśnie określa "samopodobieństwo" warstwy. Współczynniki wielomianu (1.11) są więc s t a ł y m i - w rozważanym przypadku.

Z powyższych rozważań wynika, iż pochodna $\frac{d\vartheta}{dx}$, występująca we wzorze Kármána, jest równa zeru, i można nadać wzorowi postać

$$(3.1) \qquad 2\left(\frac{\vartheta}{\delta} + \frac{\delta_*}{\delta}\right) U\,U' = \frac{\tau_0}{\rho\delta} \ ,$$

zawierającą już tylko pochodne znanej funkcji U.

3.2. Współczynniki wielomianu klasycznego i zmodyfikowanego

Podstawiając wyrażenia (1.16) - (1.19) do wzoru całkowego Kármána (3.1) , uzyskujemy pierwsze równanie na współczynniki wielomianu (1.11):

$$(3.2) \qquad \left(1 + S_1 - 2\,S_2\right)\Lambda \quad - a_1 = 0 \ .$$

Dalsze równania tworzymy w oparciu o rozważania paragrafu (1.2). W szczególności - podstawiając (1.3) i (1.11) do (1.20), wyrażającego równanie Prandtla "na ściance", otrzymujemy:

$$a_2 = \frac{1}{2} \Lambda \left(c_1^2 - 1 \right) ;$$

analogiczne podstawienie do wzoru (1.23), wyrażającego warunek zgodności, dostarcza równania:

$$6\, a_3 = c_1\, a_1 \Lambda .$$

Pochodna k-tego rzędu względem y wielomianu (1.11) ma postać:

$$\frac{\delta^k}{U} \frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \sum_{n=k}^{N} n(n-1)(n-2) \ldots [n-(k-1)]\, a_n\, \eta^{\,n-k} .$$

Ostatecznie zatem, można zestawić równania, służące do obliczenia Λ, a_1, a_2, ... a_N w przypadku "klasycznym" i "zmodyfikowanym", w formie następujących dwu układów, różniących się tylko jednym równaniem:

I. Równania dotyczące zarówno wielomianu klasycznego jak i zmodyfikowanego:

$$(3.3) \qquad \left(1 + S_1 - 2\, S_2\right)\Lambda - a_1 = 0 ;$$

$$(3.4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Lambda \left(c_1^2 - 1\right) - a_2 = 0 ; \\ 1 - c_1 - \sum_{n=1}^{N} a_n = 0 ; \\ \sum_{n=1}^{N} n\, a_n = 0 ; \\ \sum_{n=1}^{N} n(n-1)\, a_n = 0 ; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{n=N-3}^{N} n(n-1)(n-2) \ldots [n-(N-4)]\, a_n = 0 ; \end{array} \right.$$

układ ten obejmuje łącznie N równań;

II. Równania dotyczące - alternatywnie - wielomianu klasycznego lub zmodyfikowanego;

(3.5) $$\sum_{n=N-2}^{N} n(n-1)(n-2)\ldots[n-(N-3)]\, a_n = 0$$ - /wielomian klasyczny/;

(3.6) $$c_1 a_1 \Lambda - 6 a_3 = 0$$ - /wielomian zmodyfikowany/.

W obu przypadkach otrzymujemy zatem układ $(N+1)$ równań z $(N+1)$ niewiadomymi, którymi są: Λ, a_1, a_2, ... a_N. Układ ten jest nieliniowy, bowiem suma S_2, występująca w równaniu (3.3), wyraża się nieliniowo poprzez współczynniki a_1,.. a_N - zgodnie z wzorem (1.15).

3.3. Przypadek szczególny: wielomian 4.stopnia

Jeżeli stopień wielomianu jest dostatecznie niski, można sprowadzić układ równań (3.3), (3.4), (3.5), jak również układ (3.3), (3.4), (3.6) do jednego równania algebraicznego z jedną niewiadomą. Jeżeli stopień wielomianu jest zbyt wysoki, redukcja taka, w zasadzie zawsze możliwa, jest tak pracochłonna i nastręcza tyle możliwości popełnienia omyłek, że nie warto jej dokonywać i lepiej uciec się do wyznaczenia współczynników wielomianu oraz parametru Λ czysto numerycznymi metodami wprost z wymienionych układów równań.

W przypadku wielomianu 4.stopnia redukcja układu do jednego równania z jedną niewiadomą Λ udaje się przeprowadzić niezbyt wielkim nakładem pracy zarówno w przypadku klasycznym, jak i - w zmodyfikowanym.

W obu tych przypadkach równanie (3.3), wynikające ze wzoru całkowego Kármána, przybiera - po obliczeniu S_1 i S_2 - postać następującą:

$$
(3.7)\left\{\begin{aligned}
&\Lambda\Big[(1+c_1)+(1-4c_1)\Big(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{4}+\frac{a_4}{5}\Big)-2\Big(c_1^2+\frac{a_1^2}{3}+\\
&+\frac{a_2^2}{5}+\frac{a_3^2}{7}+\frac{a_4^2}{9}\Big)-4a_1\Big(\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{5}+\frac{a_4}{6}\Big)-4a_2\Big(\frac{a_3}{6}+\\
&+\frac{a_4}{7}\Big)-\frac{a_3\,a_4}{2}\Big]=a_1\,.
\end{aligned}\right.
$$

Z układu (3.4), uzupełnionego równaniem (3.5), albo też (3.6), możemy wyznaczyć współczynniki a_1, a_2, a_3, a_4 jako funkcje Λ : w obu przypadkach odpowiedni układ jest liniowy względem tych współczynników.

Otrzymujemy wówczas w przypadku klasycznym:

$$
(3.8)\left\{\begin{aligned}
a_1 &= (1-c_1)\Big[2+\frac{1}{6}\Lambda(1+c_1)\Big]\,;\\
a_2 &= -\frac{1}{2}(1-c_1^2)\Lambda\,;\\
a_3 &= (1-c_1)\Big[-2+\frac{1}{2}\Lambda(1+c_1)\Big]\,;\\
a_4 &= (1-c_1)\Big[1-\frac{1}{6}\Lambda(1+c_1)\Big]\,;
\end{aligned}\right.
$$

a w przypadku zmodyfikowanym:

$$
(3.9)\left\{\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(1-c_1)\big[4+(1+c_1)\Lambda\big]}{3+\frac{1}{6}c_1\Lambda}\,;\\
a_2 &= -\frac{1}{2}(1-c_1^2)\Lambda\,;\\
a_3 &= \frac{1}{6}(1-c_1)c_1\Lambda\,\frac{4+(1+c_1)\Lambda}{3+\frac{1}{6}c_1\Lambda}\,;\\
a_4 &= (1-c_1)\Big[1+\frac{1}{2}(1+c_1)\Lambda+\\
&\quad-\frac{4+(1+c_1)\Lambda}{3+\frac{1}{6}c_1\Lambda}\Big(1+\frac{1}{6}c_1\Lambda\Big)\Big]\,.
\end{aligned}\right.
$$

Podstawiając (3.8) do (3.7) otrzymujemy równanie:

$$(3.10)\qquad \frac{\Lambda^3}{4536}\left(1+c_1\right)\left(1-c_1^2\right)+\frac{\Lambda^2}{7560}\left(79+189\,c_1+110\,c_1^2\right)+$$
$$-\Lambda\left(\frac{116}{315}+\frac{25\,c_1}{126}\right)+2=0\,,$$

podane już w naszej wcześniejszej pracy [6, Erratum].

Powtarzamy, że dotyczy ono przypadku klasycznego.

Podstawiając natomiast (3.9) do (3.7) otrzymujemy równanie:*/

$$(3.11)\quad \begin{cases} \Lambda^5\,\dfrac{c_1^2\left(1+c_1\right)^2\left(1-c_1\right)}{1008}+\Lambda^4\,\dfrac{c_1\left(1+c_1\right)}{336}\left(4c_1^2-3\,c_1-22\right)+ \\ +\Lambda^3\,\dfrac{1-c_1}{168}\left(130\,c_1^2+319\,c_1+204\right)+ \\ +\Lambda^2\,\dfrac{1}{14}\left(27\,c_1^2+161\,c_1+211\right)-\Lambda\left(43c_1+143\right)+ \\ +540=0\,, \end{cases}$$

dotyczące przypadku zmodyfikowanego.

Wyznaczenie warstwy przyściennej i charakteryzujących ją funkcji $\Lambda(c_1)$ oraz $c_2\left(c_1\right)$ odbywa się - przy wykorzystaniu uzyskanych równań - w następujący sposób.

Po rozwiązaniu równania (3.10), bądź też (3.11) względem Λ przy zadanej c_1, albo odwrotnie - względem c_1 przy zadanej Λ, oblicza się a_1 odpowiednio z równania (3.8) lub (3.9), a potem - oblicza bezwymiarowe naprężenie styczne c_2 z wzoru (1.25), odpowiadające parze liczb Λ, c_1.

W opisany sposób możemy w z a s a d z i e otrzymać wartości funkcji:

$$(3.12)\quad \begin{cases} \Lambda=\Lambda\left(c_1\right)\,; \\ c_2=c_2\left(c_1\right)\,, \end{cases}$$

---

*/ Autorzy wyrażają podziękowanie Pani mgr Joli Breiter za kontrolę rachunków, prowadzących do tego równania.

w wybranym przedziale c_1 , a ściślej - dla dyskretnych, dowolnie wybranych wartości c_1 , traktowanej w tym przypadku jako zmienna niezależna.

Powiedzieliśmy: "w zasadzie", bowiem rozwiązanie (3.12) może nie istnieć w wybranym przedziale, lub jego części.

Wyniki odpowiednich obliczeń, dotyczące przypadku klasycznego, a więc oparte na równaniu (3.10) , są zamieszczone w naszej wcześniejszej pracy [6 , Erratum].

3.4. Zasada wyznaczania $\Lambda(c_1)$ w przypadku wielomianu N-tego stopnia.

Skoncentrujemy się w niniejszym paragrafie na wyznaczaniu Λ dla zadanej wartości c_1 w przypadku wielomianu N-tego stopnia. Zgodnie z uwagami par. 1.2. obowiązuje przy tym zastrzeżenie:

$$N \geqslant 3 . \tag{3.13}$$

Opiszemy metodę numeryczną rozwiązania tego zagadnienia, która niezawodnie prowadzi do zamierzonego celu: przy jej pomocy uzyskano wszystkie wyniki liczbowe zamieszczone w niniejszej pracy. Metoda ta jest metodą kolejnych przybliżeń. Przy jej zastosowaniu wykorzystuje się spostrzeżenie, iż układy równań (3.4) , (3.5) oraz (3.4), (3.6) są liniowe względem współczynników $a_1, \ldots a_N$.

Zasada wyznaczania Λ dla zadanej c_1 przedstawia się następująco:

1/ obiera się dowolną wartość Λ ;

2/ rozwiązuje się liniowy układ równań (3.4) , (3.5) , albo też (3.4) , (3.6) względem współczynników a_1 , a_2 , ... a_N ;

3/ oblicza się wartości sum S_1 i S_2 według wzorów (1.14) oraz (1.15) ;

4/ sprawdza się, czy równanie (3.3) jest spełnione z zadaną dokładnością.

Obliczenia powtarza się cyklicznie według tego schematu dopóty, dopóki kolejna wartość Λ nie spełni równania (3.3) z zadaną dokładnością. Przechodzi się wówczas do obliczenia c_2 według wzoru (1.25) ; przypominamy przy tym, że odpowiednia wartość współczynnika a_1 jest wyznaczana automatycznie w procesie rachunku dla aktualnej wartości Λ , stanowiąc rozwiązanie układu równań (3.4) , (3.5), albo też (3.4) , (3.6).

3.5. Rozkład prędkości w warstwie jako kryterium jednoznaczności rozwiązania.

Metoda Pohlhausena nie zawsze prowadzi do jednoznacznego opisu warstwy przyściennej. W odniesieniu do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia wieloznaczność opisu warstwy wyraża się faktem, iż układ równań (3.3) , (3.4), (3.5), albo też (3.3) , (3.4) , (3.6)ma - dla zadanej wartości c_1 - więcej niż jeden pierwiastek dodatni Λ .

W przypadku $c_1 = 0$ fakt ten istotnie ma miejsce, co można łatwo stwierdzić, badając trójmian trzeciego stopnia zamieszczony w pracy Pohlhausena [4] . Nawiasem mówiąc, Pohlhausen nie podaje wyników takich badań i nie wspomina o istnieniu kilku pierwiastków. O istnieniu - w tym przypadku - dwu dodatnich pierwiastków i jednego ujemnego pisze natomiast Goldstein [7] .

W przypadku $c_1 \neq 0$ świadczą o istnieniu kilku pierwiastków wyniki, zamieszczone w naszej wcześniejszej pracy [6 , Erratum].

W związku z pojawianiem się wieloznacznego rozwiązania występuje potrzeba ustalenia k r y t e r i ó w , które p o z w o l i ł y b y u j e d n o z n a c z n i ć r o z w i ą z a n i e. Otóż przypominamy, że nasze wcześniejsze badania doprowadziły do wniosku, iż rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, odpowiadające różnym wartościom pierwiastka Λ , różnią się od siebie jakościowo: jedne z nich są monotoniczne /rys.2a/, inne - nie /rys.2b/.

Fakt istnienia różnych jakościowo rozkładów prędkości był chyba znany już Pohlhausenowi, który wspomina /[4], str.260/ że ".. rozkład prędkości ... musi zachować kształt dopuszczalny z fizykalnego punktu widzenia, tak aby m.in. nie występował wzrost prędkości powyżej $U(x)$". Pohlhausen nie uzasadnił zresztą wcale dlaczego taki rozkład prędkości miałby być niedopuszczalny, i nie wyjaśnił, czy na tej właśnie podstawie wybrał - dla przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia - mniejszy z dwu dodatnich pierwiastków, tzn. $\Lambda = 7{,}052$.

Goldstein [7] natomiast, uzasadniając wybór tego właśnie pierwiastka pewnymi względami analitycznymi /wykluczenie punktu osobliwego, leżącego poza punktem spiętrzenia/, pominął całkowicie milczeniem kwestię rozkładu prędkości w warstwie, przynależnemu poszczególnym wartościom Λ .

W sposób ogólny, nie nawiązujący w ogóle do metody Pohlhausena, zbadał Nickel [8] rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, "fizycznie możliwe" w sensie zgodności z równaniem Prandtla. Stosując rezultaty tych badań / [8], str.28 oraz Abb. 11 / do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia na n i e r u c h o m e j ściance, można łatwo stwierdzić, że niemonotoniczny rozkład prędkości nie jest możliwy, nie spełnia bowiem nierówności / [8] , str.21/:

$$u(x,\ y) \leq U(x) + e \qquad \text{dla} \quad U(x_0) < U(x)\ ,$$

będącej wnioskiem z równania Prandtla.

Zgodnie z wynikami Nickela obieramy monotoniczność rozkładu prędkości jako kryterium jednoznaczności rozwiązania, jeśli chodzi o punkt spiętrzenia na n i e r u c h o m e j ściance.

Do przypadku r u c h o m e j ścianki wyniki Nickela wprawdzie nie stosują się bezpośrednio, można jednak rozszerzyć je również na ten przypadek, uogólniając tym samym wspomniane kryterium jednoznaczności.

Jak wynika z powyższych rozważań, w konkretnych rachunkach może wystąpić potrzeba kontroli rozkładu prędkości. W niniejszej pracy dokonywano takiej kontroli, obliczając wartości wielomianu (1.11) i jego pierwszej pochodnej względem η - w przedziale:

$$0 \leq \eta \leq 1\ ,$$

a ściślej - w dostatecznie gęsto rozmieszczonych punktach tego przedziału.

3.6. Wyniki obliczeń

Wyniki obliczeń są reprezentowane na wykresach /rys.3 - rys. 17 /, i dotyczą one wielomianów aproksymacyjnych klasycznych i zmodyfikowanych, o stopniach parzystych

$$N = 4;\ 6;\ 8.$$

Niekompletne obliczenia przeprowadzono również dla wielomianów stopnia nieparzystego:

$$N = 5;\ 7.$$

Wyniki tych obliczeń wystarczały do stwierdzenia, iż n i e p a r z y s t o ś ć w i e l o m i a n u n i e m a w p ł y w u j a k o ś c i o w e g o n a r o z w i ą z a n i e. Z tego względu uznaliśmy za niecelowe zarówno zamieszczanie w niniejszej pracy niekompletnych wyników dotyczących wielomianów nieparzystych, jak i uzupełnianie tych wyników w oparciu o dalsze obliczenia.

Niektóre wyniki zamieszczone w niniejszej pracy, mianowicie - odnoszące się do wielomianu klasycznego stopnia N = 4, były już częściowo opublikowane /[6], Erratum/. W celu umożliwienia porównań przytaczamy je jednak ponownie, zresztą - po pewnych uzupełnieniach. Przedstawimy w pierwszym rzędzie wyniki obliczeń dotyczących odmiany klasycznej.

Pewne wstępne wskazówki co do zakresu tych obliczeń zaczerpnęliśmy z wyników uprzednio uzyskanych /[6], Erratum/ dla wielomianu N = 4, reprezentowanych na rys.3.

Jak widać, funkcja $\Lambda(c_1)$ ma w tym przypadku dwie gałęzie: jedną - w przedziale

$$c_1 \leqslant 0,4\ ; \tag{3.14}$$

drugą - w przedziale

$$c_1 > 1\ . \tag{3.15}$$

Ponad to - w przedziale (3.14) funkcja ta jest dwuwartościowa.

Dla wybranych pięciu punktów zaznaczonych kółkami na rys.3, zbadano rozkłady prędkości w warstwie przyściennej. Wyniki tych badań zestawiono na rys.4. Pozwalają one - w połączeniu z kryterium jednoznaczności rozwiązania, przyjętym w par. poprzednim - wyodrębnić te części krzywych na rys.3., które spełniają to kryterium. Łatwo zauważyć, że kryterium jednoznaczności jest spełnione tylko na "dolnej" gałęzi w przedziale (3.14), oznaczonej ciągłą linią. Na "górnej" gałęzi w tym przedziale, jak również na całej krzywej w przedziale (3.15) , kryterium jednoznaczności nie jest spełnione, bowiem rozkłady prędkości, odpowiadające punktom na tych liniach, nie są monotoniczne /symbol NM na odpowiednich wykresach rys.4/.

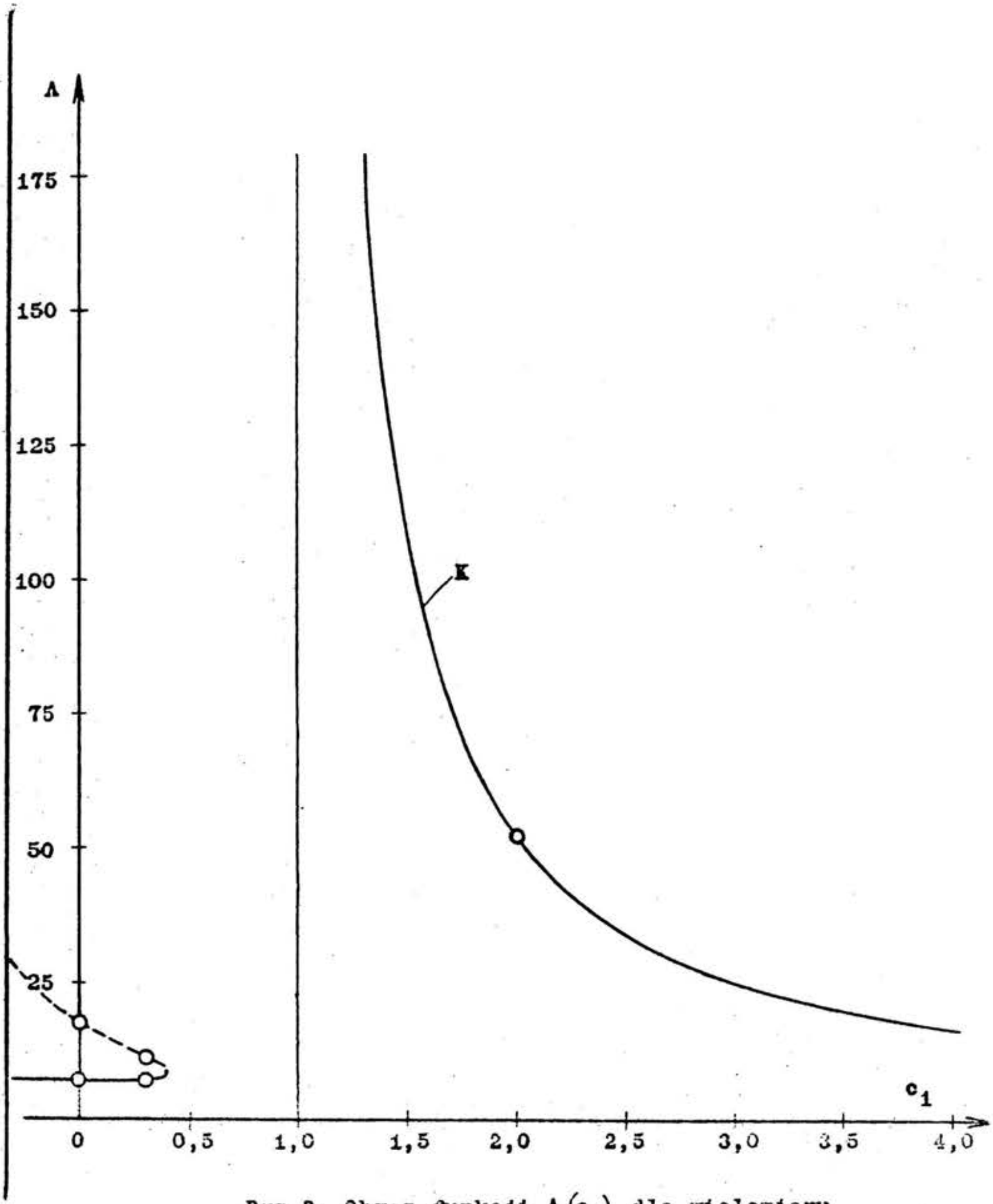
Opierając się na tych wynikach, ograniczyliśmy zakres obliczeń do wyznaczenia w przypadku N = 6 oraz N = 8 krzywych, przechodzących przez punkty o odciętej $c_1 = 0$ i nie badaliśmy nawet w tych dwu przypadkach istnienia gałęzi, analogicznej do krzywej K na rys.3.

Wyniki obliczeń funkcji $\Lambda(c_1)$ dla N = 6 oraz N = 8 są zestawione na rys.5, przy czym - dla porównania - wrysowano także wyniki dla N = 4. Jak już wspominano, niekompletne wyniki uzyskane dla N = 5 oraz N = 7 pozwalają stwierdzić, że odpowiednie linie $\Lambda(c_1)$ mają w tych dwu przypadkach taki sam kształt, jak linie przedstawione na rys.5 i leżą - odpowiednio - między liniami dla N = 4 i N = 6, bądź też - między liniami dla N = 6 i N = 8.

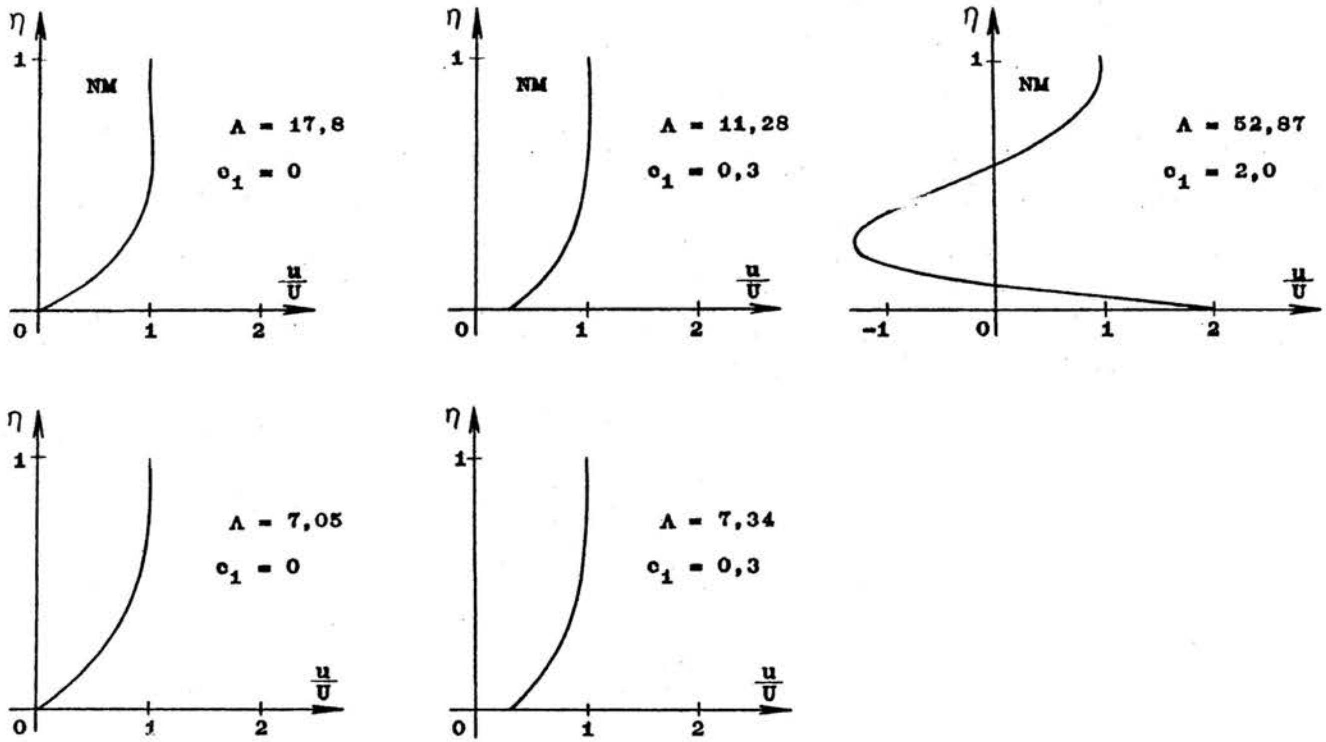
Kreskowane części krzywych na rys.5 odpowiadają niemonotonicznym rozkładom prędkości w warstwie, co można stwierdzić, rozpatrując wykresy prędkości przedstawione na rys.6 i 7.

Na niektórych wykresach rys.6 i 7 niemonotoniczność jest słabo widoczna, niemniej jednak wyniki liczbowe pozwoliły stwierdzić jej istnienie lub brak w sposób jednoznaczny, i na ich podstawie - odpowiednio - wniesiono na wykresach symbol NM , lub nie.

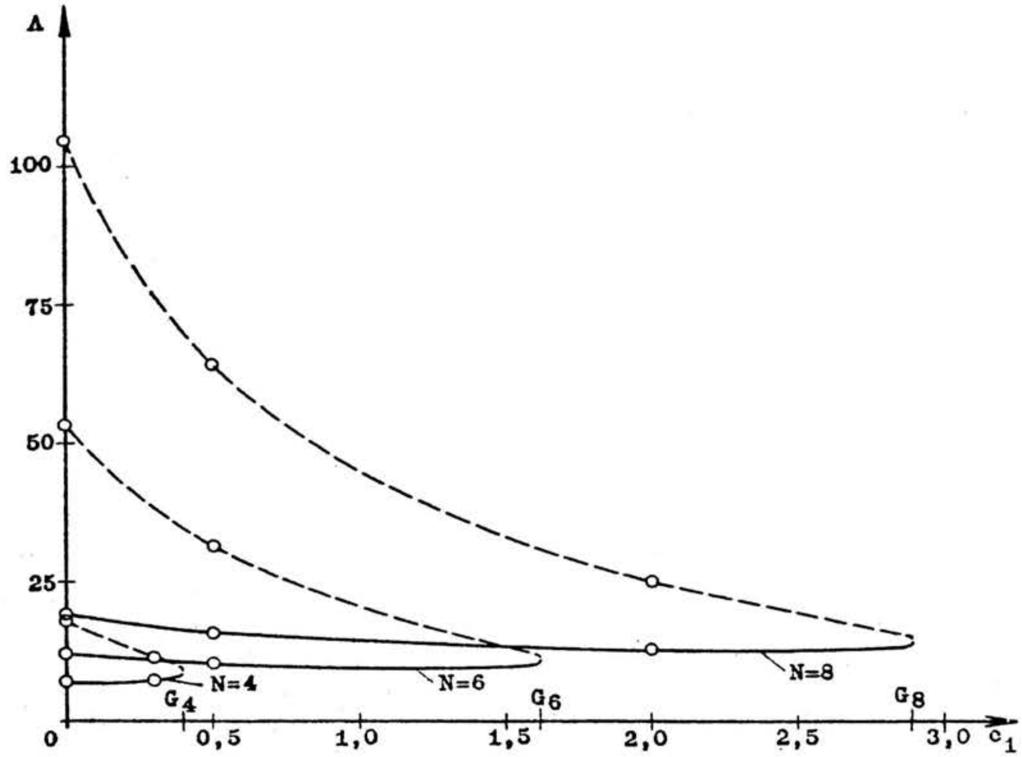
Punkty na rys.5., którym odpowiadają rozkłady prędkości na rys.4., 6. i 7., są oznaczone kółkami.



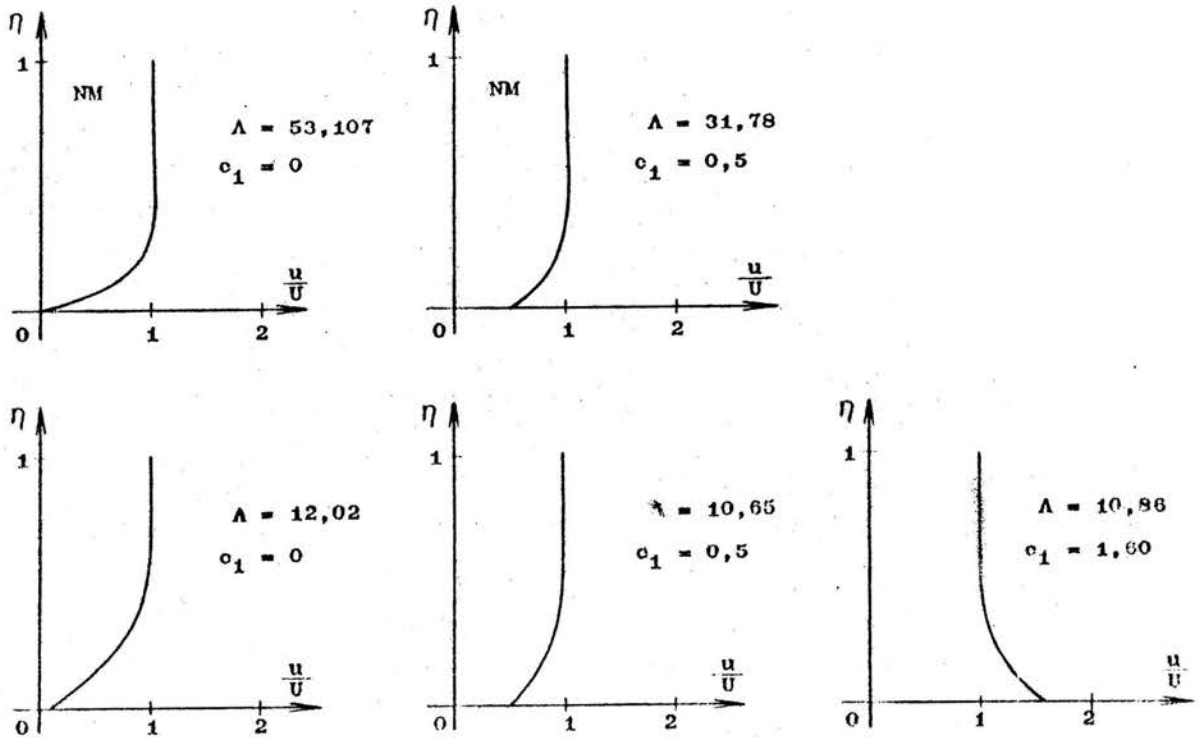
Rys.3. Obraz funkcji $\Lambda(c_1)$ dla wielomianu klasycznego 4. stopnia.



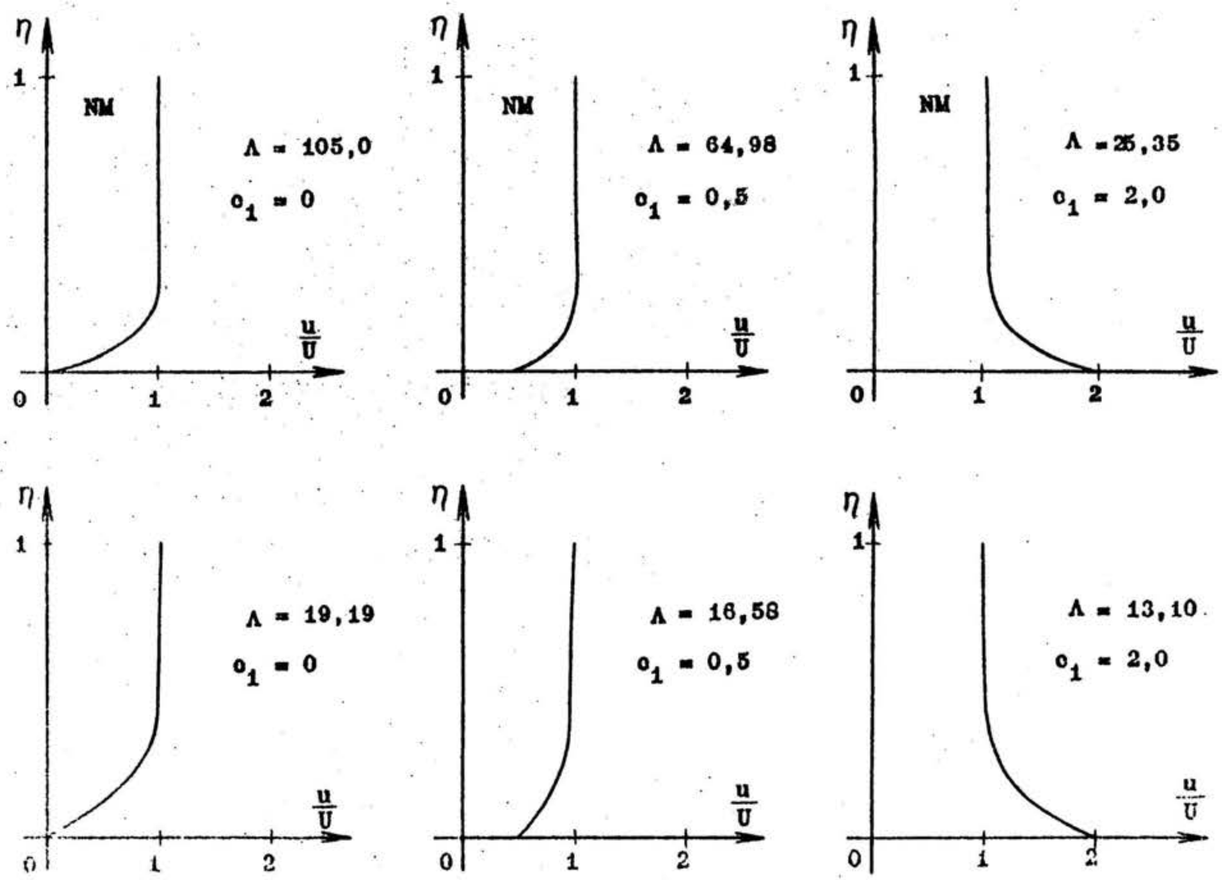
Rys.4. Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, określone wielomianami klasycznymi 4. stopnia.



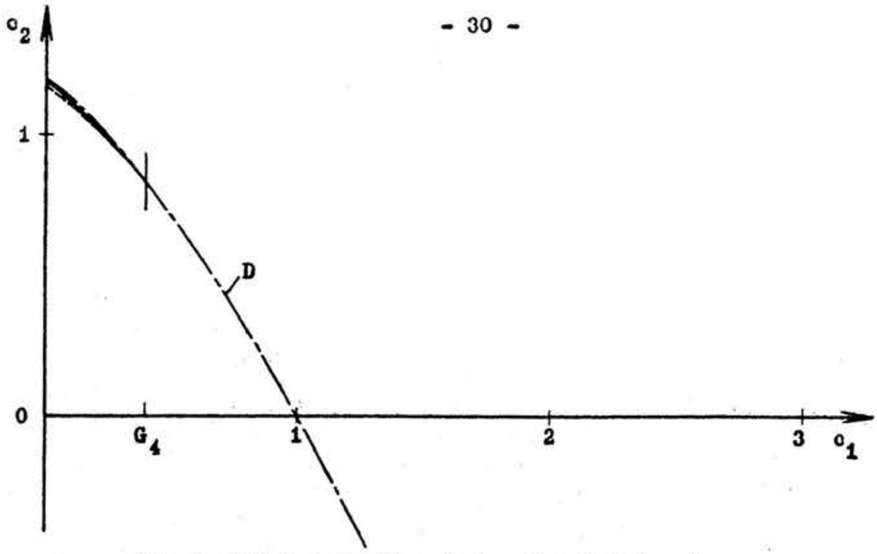
Rys.5. Obraz funkcji $A(c_1)$, dla wielomianu klasycznego 4., 6. i 8. stopnia.



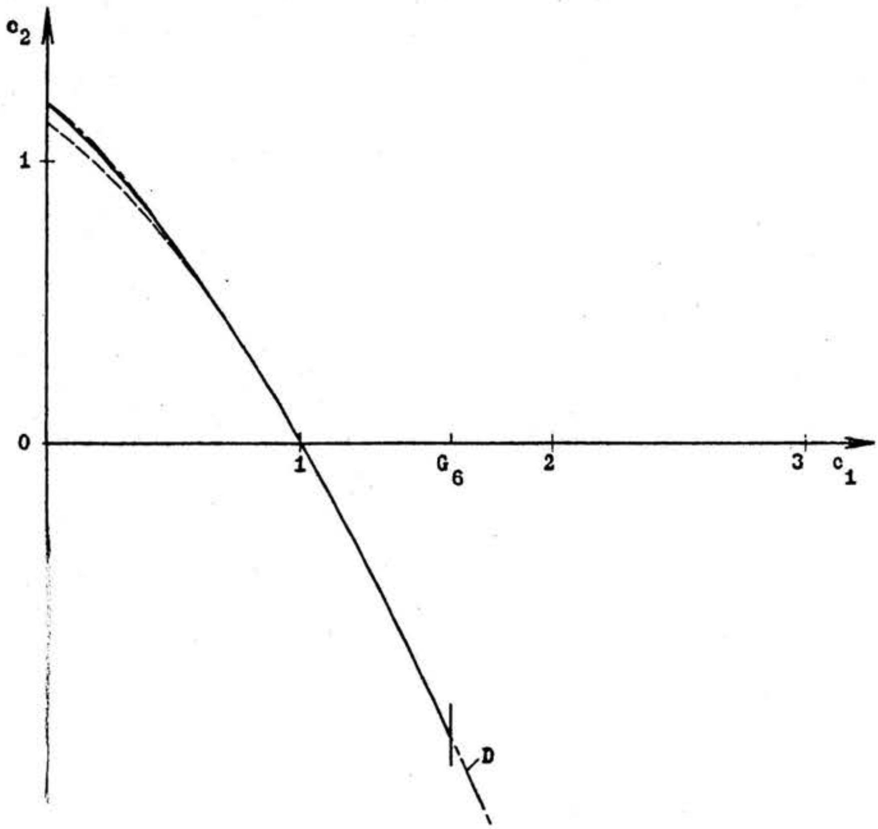
Rys.6. Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, określone wielomianami klasycznymi 6. stopnia.



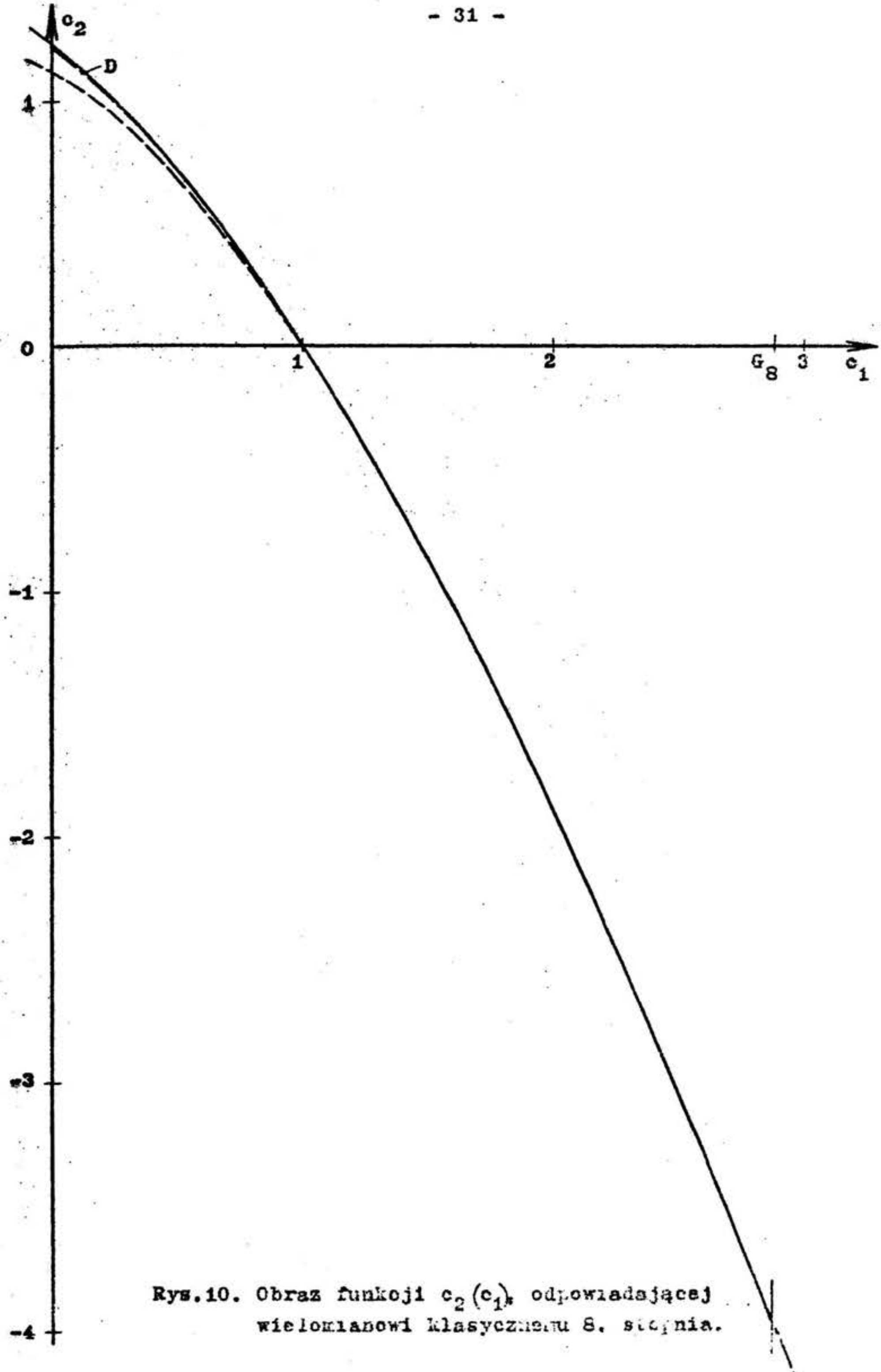
Rys.7. Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej określone wielomianami klasycznymi 8. stopnia.



Rys.8. Obraz funkcji $c_2(c_1)$, odpowiadającej wielomianowi klasycznemu 4. stopnia.



Rys.9. Obraz funkcji $c_2(c_1)$, odpowiadającej wielomianowi klasycznemu 6. stopnia.



Rys.10. Obraz funkcji $c_2(c_1)$, odpowiadającej wielomianowi klasycznemu 8. stopnia.

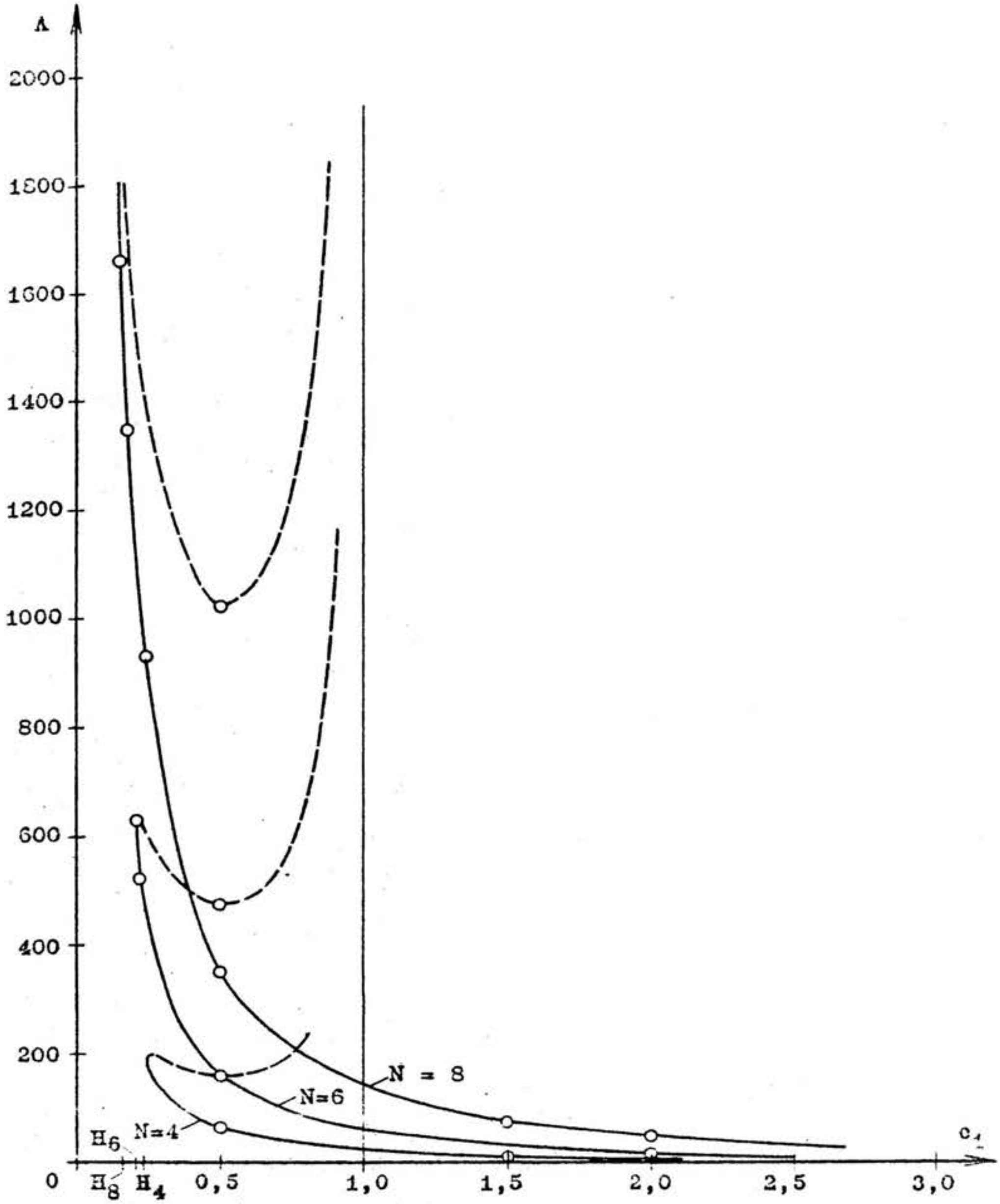
Ostatni fragment wyników dotyczących wielomianu klasycznego, stanowią funkcje $c_2(c_1)$, reprezentujące bezwymiarowe naprężenie styczne i przedstawione na rys.8., 9. i 10. Kreskowane i ciągłe linie na tych rysunkach odpowiadają kreskowanym i ciągłym odcinkom linii na rys.5.

Linie D /kreska - kropka/ na rys.8., 9., 10 określają rozwiązanie "ścisłe", zaczerpnięte z naszej pracy [5]. Pionowe kreski oznaczają koniec przedziału, w którym istnieje sensowne fizycznie rozwiązanie /w rozumieniu przyjętego kryterium jednoznaczności/.
Jeżeli rozwiązanie przybliżone istnieje dla $c_1 > 1$, jak ma to miejsce w przypadku $N = 6$ oraz $N = 8$, ciągłe i kreskowane linie niemal pokrywają się ze sobą w tym zakresie, jak również z krzywą "dokładną". Różnice między nimi leżą w granicach grubości linii na rys.9. i 10.

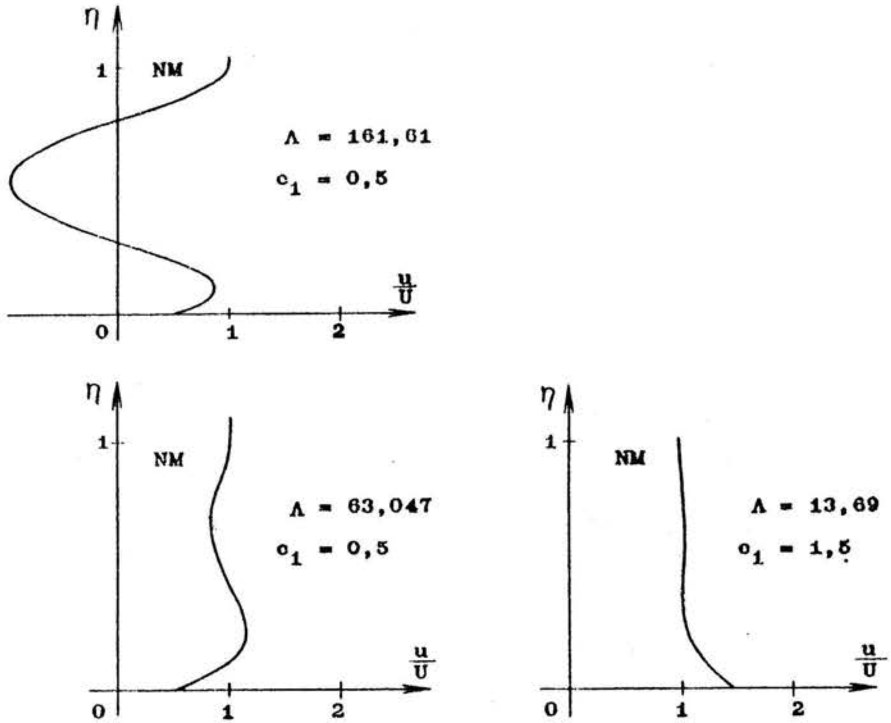
Wyniki dotyczące odmiany zmodyfikowanej są reprezentowane na rysunkach od 11. do 17. włącznie.

Podstawowy wynik stanowi - jak poprzednio - funkcja $\Lambda(c_1)$, przedstawiona na rys.11 dla wielomianów stopnia $N = 4.$, 6., 8. Porównanie z wynikami, podanymi na rys.5, pozwala stwierdzić istotne różnice jakościowe, polegające przede wszystkim na tym, że obszar istnienia rozwiązania jest ograniczony w przypadku odmiany klasycznej od strony dużych wartości c_1; w przypadku odmiany zmodyfikowanej - od strony małych wartości c_1.

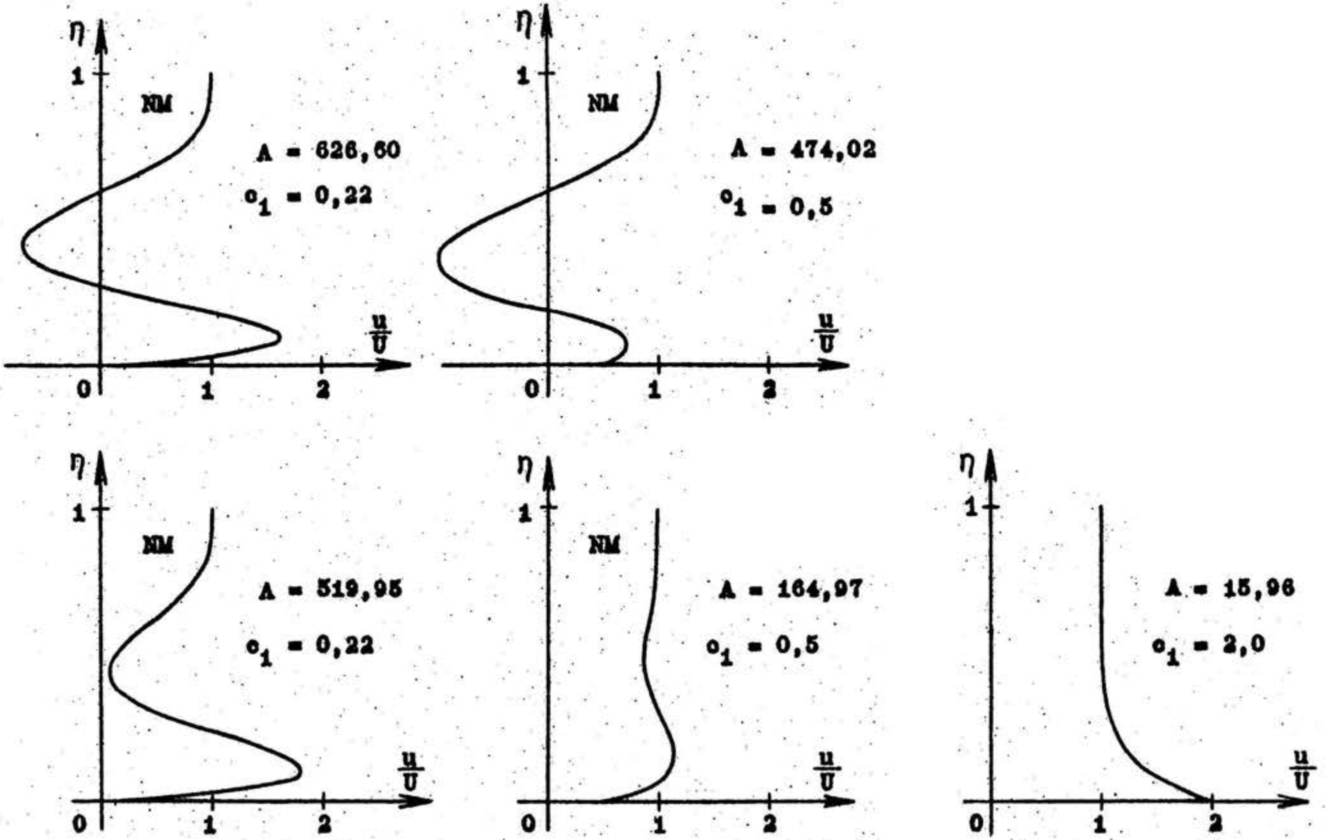
W pewnym zakresie wartości c_1 istnieją - jak poprzednio - dwa pierwiastki dodatnie Λ. Gałęzie odpowiadające większym wartościom Λ oznaczono liniami kreskowanymi na rys.11. Rozkłady prędkości, odpowiadające punktom linii kreskowanych, są niemonotoniczne, o czym można przekonać się rozpatrując wykresy na rysunkach 12., 13. i 14. Podobnie



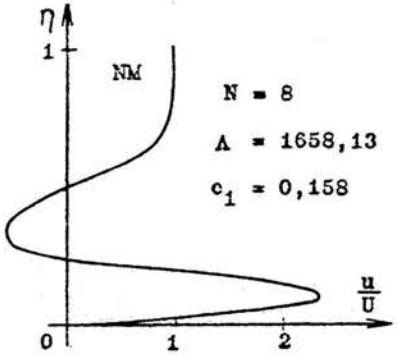
Rys.11. Obraz funkcji $\Lambda(c_1)$, dla wielomianów zmodyfikowanych 4., 6. i 8. stopnia

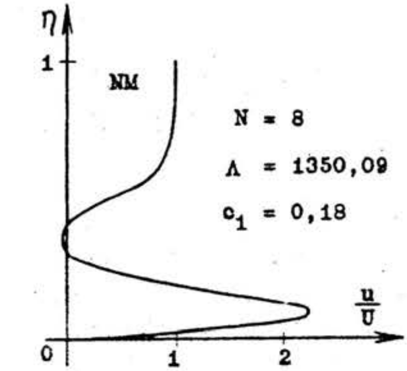


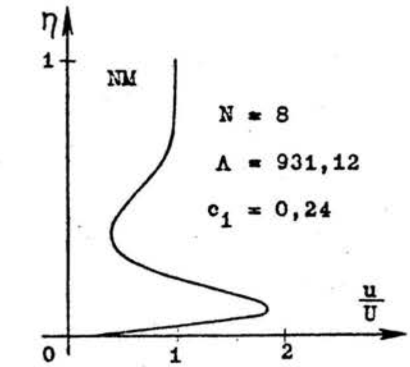
Rys.12. Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, określone wielomianami zmodyfikowanymi 4. stopnia.



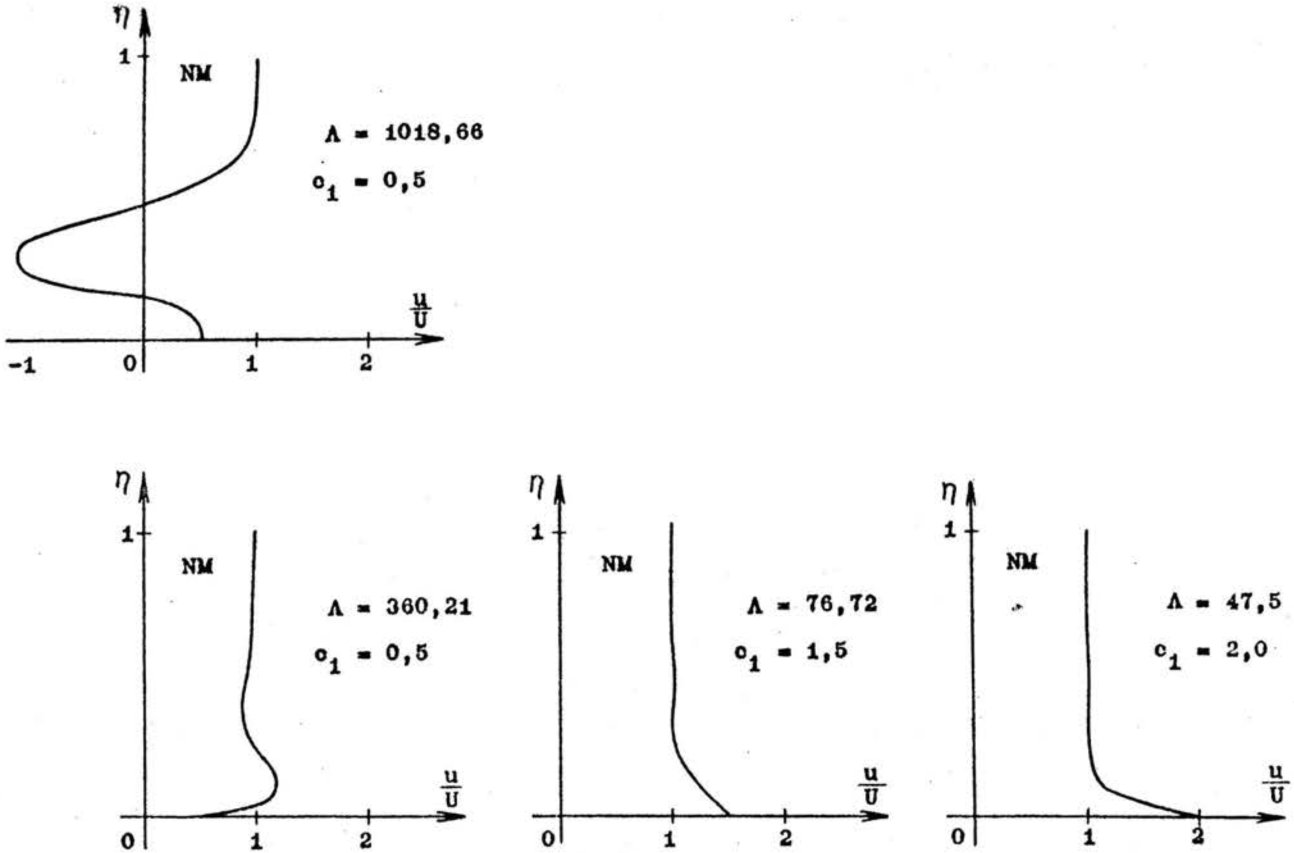
Rys.13. Rozkład prędkości w warstwie przyściennej, określone wielomianami zmodyfikowanymi 6. stepnia.



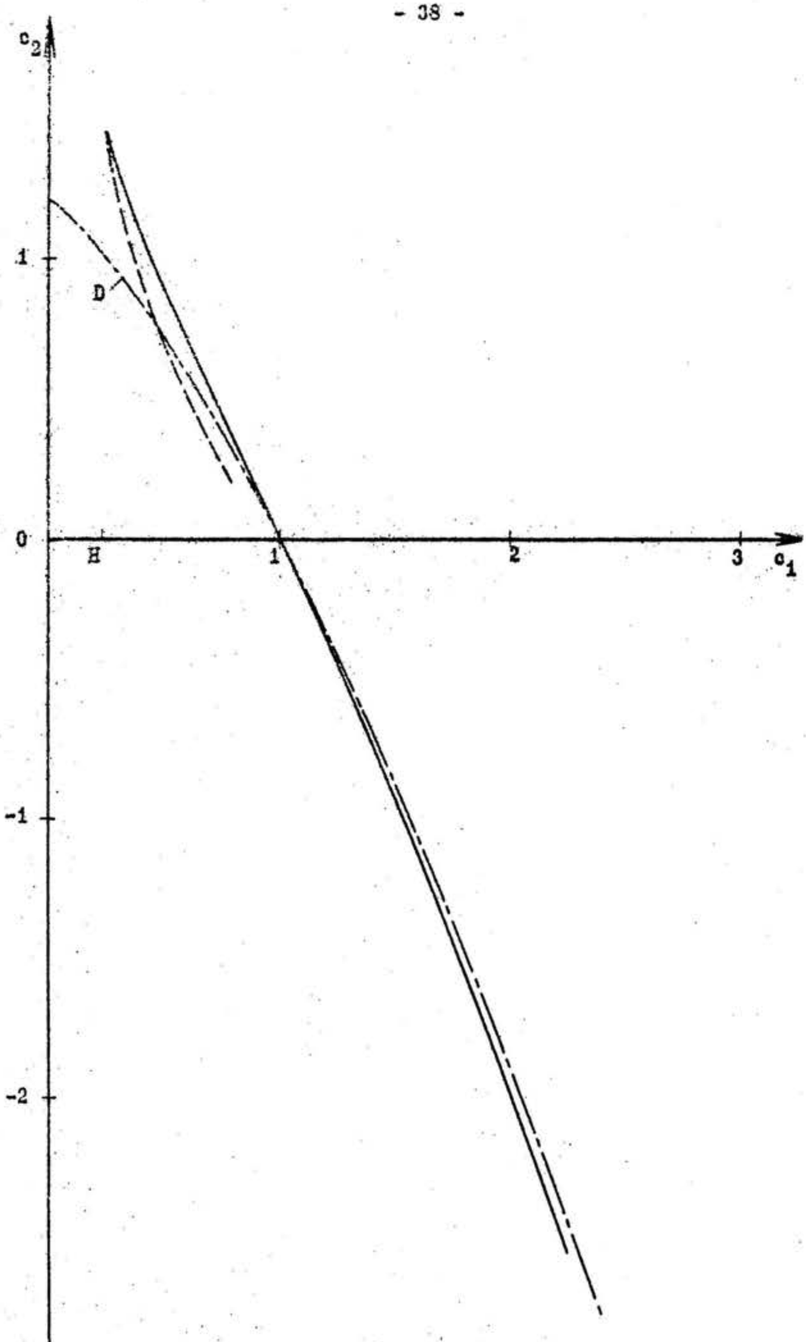




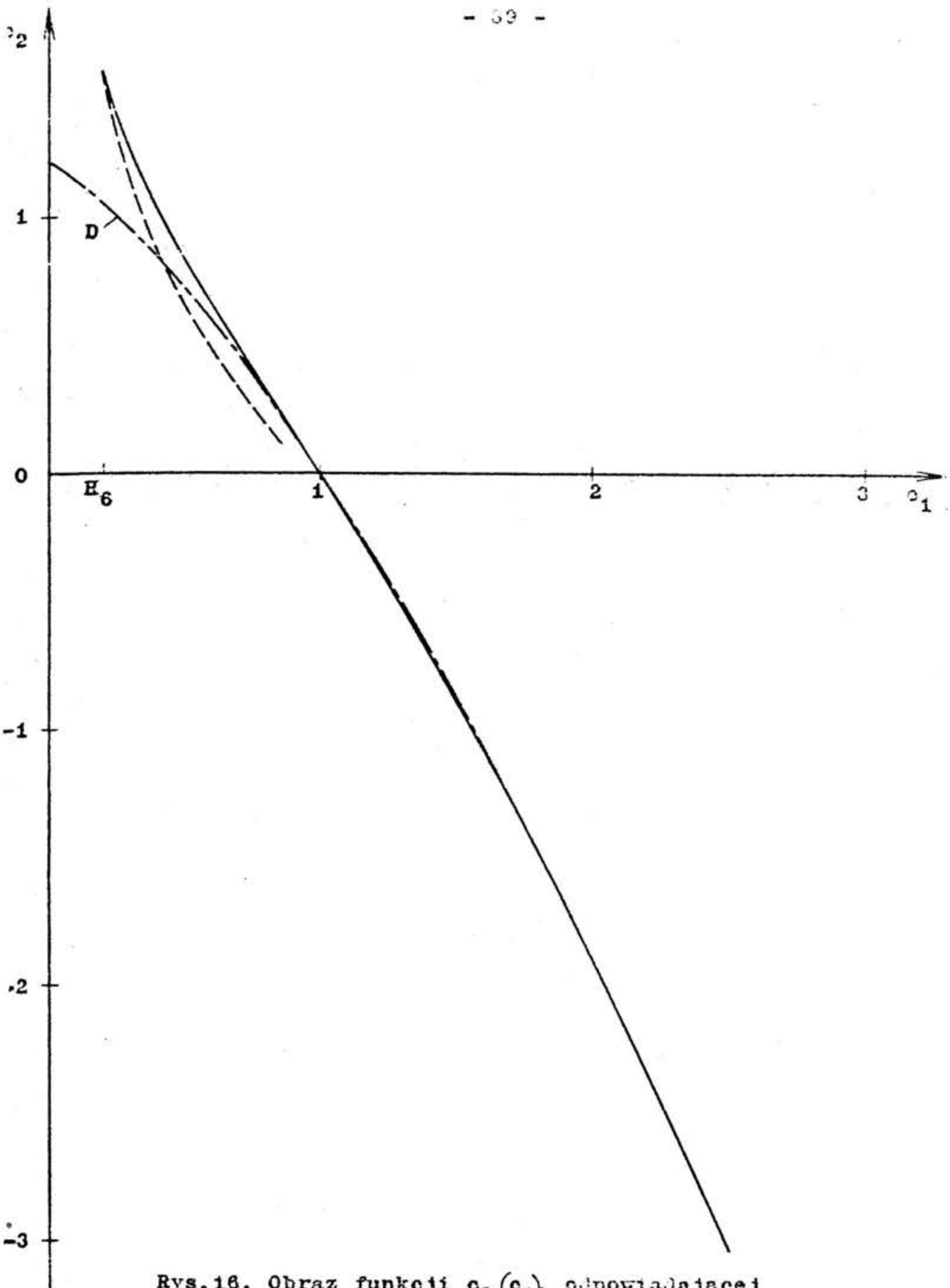
Rys.14a. Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej określone wielomianami zmodyfikowanymi 8. stopnia.



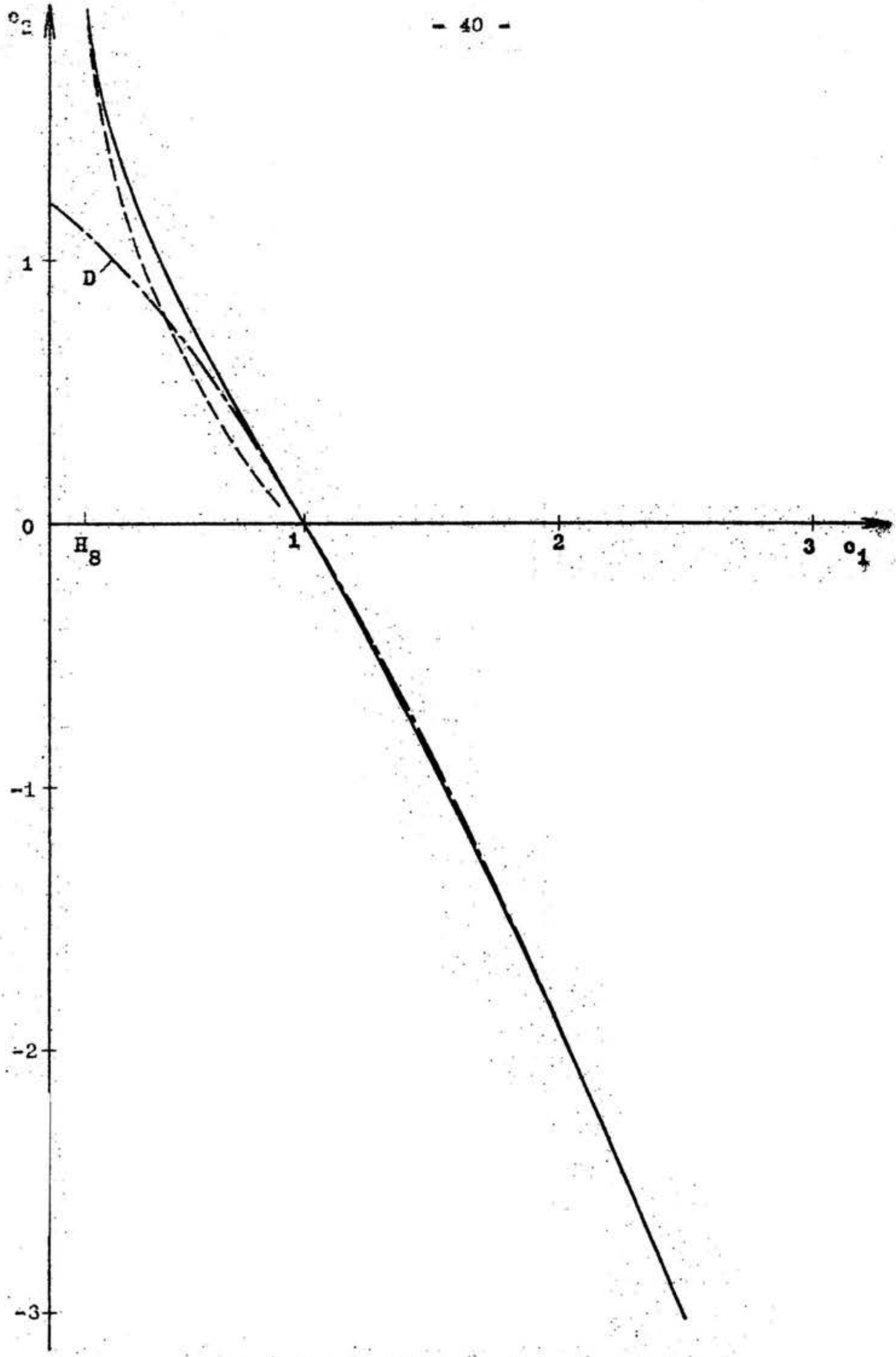
Rys.14b. Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej, określone wielomianami zmodyfikowanymi 8. stopnia.



Rys.15. Obraz funkcji $c_2(c_1)$, odpowiadającej wielomianowi zmodyfikowanemu 4. stopnia.



Rys.16. Obraz funkcji $c_2(c_1)$, odpowiadającej wielomianowi zmodyfikowanemu 6. stopnia.



Rys. 17. Obraz funkcji $c_2(c_1)$, odpowiadającej wielomianowi zmodyfikowanemu 8. stopnia.

jak poprzednio, oznaczono kółeczkami na rys.11 punkty, którym odpowiadają podane rozkłady prędkości.

Zauważmy, że - przeciwnie niż w przypadku odmiany klasycznej - rozkłady prędkości odpowiadające liniom ciągłym na rys.11., są na ogół również nie monotoniczne. Niemonotoniczność zaznacza się przy tym w stopniu tym większym, nim większa jest wartość Λ, a mniejsza - wartość c_1.

W jednym jedynym przypadku, mianowicie dla

$$N = 6; \quad \Lambda = 15{,}96; \quad c_1 = 2{,}0$$

rozkład prędkości jest monotoniczny /rys.13/. Przypuszczamy, że nie jest to przypadek odosobniony, i że dla odpowiednio dużych c_1 występują rozkłady monotoniczne. Przypuszczenie to wydaje się potwierdzać fakt, że dla

$$c_1 = 1{,}5$$

niemonotoniczność rozkładów prędkości jest bardzo mała - dla wielomianów stopnia $N = 4; 8$.

Wyniki dotyczące naprężenia stycznego są przedstawione na rys.15., 16. i 17. - wraz z linią D /kreska - kropka/, reprezentującą "dokładną" funkcję $c_2(c_1)$, o której już była mowa. W zakresie

$$c_1 > 1$$

obserwuje się dobrą zgodność wyników przybliżonych z dokładnymi - niemal niezależnie od stopnia wielomianu. W zakresie

$$0 < c_1 < 1$$

zgodność ta jest znacznie gorsza, przy czym - co podkreślamy, przypominając zarazem wyniki Schlichtinga i Ulricha [2] - w sąsiedztwie punktu

$$c_1 = 0$$

rozwiązanie przybliżone w ogóle nie istnieje,

Linie kreskowane i ciągłe na rysunku 11 oraz na rysunkach 15., 16., 17 odpowiadają sobie wzajemnie.

4. WNIOSKI

Analiza wyników, uzyskanych w ramach poprzedniego rozdziału, prowadzi do następujących wniosków, stanowiących odpowiedzi na pytania sformułowane w rozdziale 2.

1. Odmiana klasyczna metody Pohlhausena, zastosowana do przepływu w sąsiedztwie punktu spiętrzenia, położonego na prostoliniowej, ruchomej ściance, pozwala na uzyskanie jednoznacznego rozwiązania, poprawnego w sensie monotoniczności rozkładu prędkości Rozwiązanie to, reprezentowane ciągłymi liniami na rys.5., istnieje w obszarze

$$0 \leq c_1 \leq G_N , \tag{4.1}$$

   przy czym G_N jest liczbą tym większą, im większy jest stopień N wielomianu aproksymującego rozkład prędkości w warstwie /por.rys.5./.

   Wyniki dotyczące funkcji $c_2 (c_1)$, reprezentującej naprężenie styczne na ściance, okazują bardzo dobrą zgodność z rozwiązaniem ścisłym, w całym obszarze (4.1) istnienia rozwiązania przybliżonego.

2. Odmiana zmodyfikowana metody Pohlhausena, zastosowana do tego samego przepływu, pozwala również na uzyskanie rozwiązania, które istnieje w obszarze

$$0 < H_N \leq c_1 , \tag{4.2}$$

   przy czym H_N jest liczbą tym mniejszą, im wyższy jest stopień N wielomianu aproksymującego rozkład prędkości /por. rys.11/. Jednak rozwiązanie to, reprezentowane ciągłymi liniami na rys.11., a będące jednoznaczną funkcją $\Lambda(c_1)$, nie jest poprawne w całym obszarze istnienia (4.2) - w sensie monotoniczności rozkładu prędkości. W zakresie

(4.3) $$H_N \leqslant c_1 < 1$$

rozwiązanie jest w ogóle nie do przyjęcia, jak o tym świadczą rozkłady prędkości na rys.11., 12., 13. i 14. Jak się wydaje, dopiero w zakresie wartości c_1, dostatecznie większych od jedności, rozkłady prędkości stają się monotoniczne, czego dowodzą wyniki, przedstawione na rys.13.

Tezy zawarte w dwu zdaniach Hugelmana [1], zacytowanych w rozdziale 2., okazują się zatem f a ł s z y w e - w świetle naszych wyników.

W szczególności:

a/ przyczyna niepowodzenia odmiany klasycznej wcale n i e t k w i w p o m i n i ę c i u w a r u n k u z g o d n o ś c i, bowiem w obszarze

(4.4) $$0 \leqslant c_1 < 1$$

lepsze wyniki daje właśnie odmiana klasyczna.

b/ dołączenie warunku zgodności nie zapewnia bynajmniej metodzie Pohlhausena możliwości dostarczenia poprawnych tezultatów w c a ł y m z a k r e s i e prędkości u_w ścianki, bowiem - jak to wykazaliśmy, w zakresie

(4.5) $$0 < c_1 < H_N$$

odmiana zmodyfikowana w ogóle rozwiązania nie daje, a w obszarze (4.3) nie daje wyników poprawnych.

3. Uzyskane przez nas wyniki liczbowe, dotyczące funkcji c_2 (c_1) dla zmodyfikowanego wielomianu 8.stopnia, nie są zgodne z analogicznymi wynikami Hugelmana [1] , które przedstawiamy na rys.18. Szczególne zastrzeżenia z naszej strony budzi przy tym fakt, iż Hugelman podał rozwiązanie również w obszarze (4.5).
Naszym zdaniem, rozwiązanie w tym obszarze nie istnieje, a Hugelman uzyskał je chyba w wyniku swoistej ekstrapolacji.

5. PROGRAM OBLICZEŃ

5.1. Opis programu

W oparciu o zasady wyłożone w par.3.4 i 3.5 , przygotowano program obliczeń w języku GIER - Algol. Tekst programu wraz z kompletem procedur znajduje się w paragrafie następnym.

Sens dziewięciu liczb, wprowadzanych jako dane do programu, przedstawia się następująco:

N - stopień wielomianu;

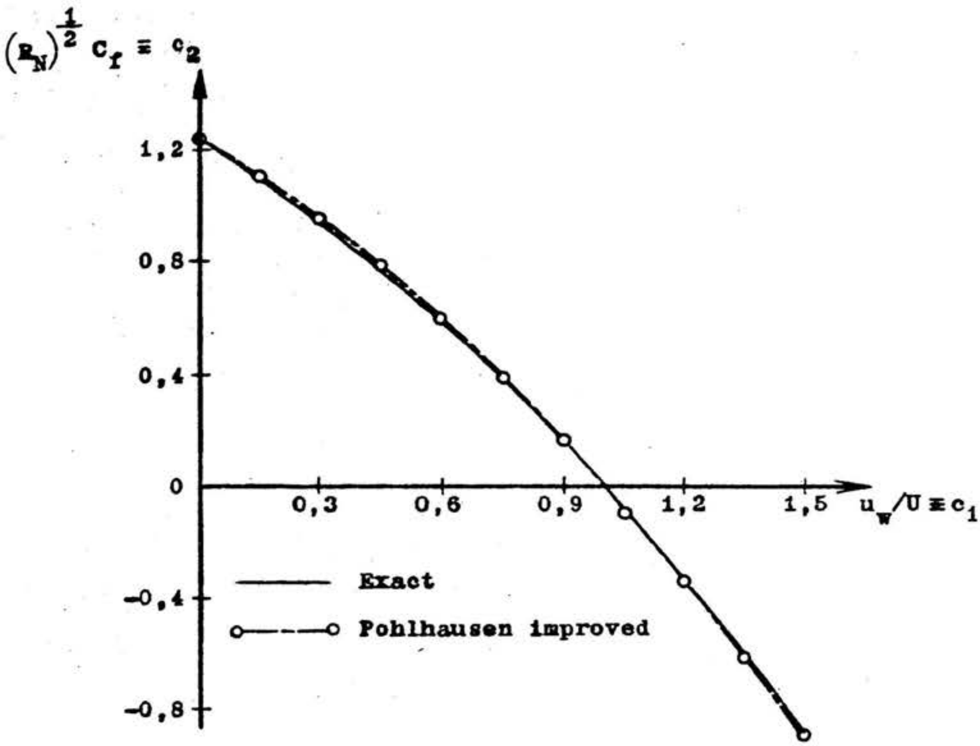
TYP - liczba określająca rodzaj wielomianu:

TYP = 0 - odpowiada wielomianowi klasycznemu;

TYP = 1 - odpowiada wielomianowi zmodyfikowanemu;

K - liczba określająca sposób realizowania rachunku.

Jeżeli K = 0, w rachunku kolejnych przybliżeń nie zmienia się wartość c_1, zmienia natomiast



Rys.18. Obraz funkcji $c_2(c_1)$, podany przez Hugelmana [1].

powiemy, że wspomniane dwie kolejne wartości niewiadomej odpowiadają różnym znakom liczby BLAD .

interv - liczba określająca przyrost zmiennej niezależnej, tzn. c_1 - dla K = 0, bądź też Λ - dla K = 1, po zakończeniu - każdorazowo - rachunku kolejnych przybliżeń.

LICZNIK - liczba określająca ilość dyskretnych wartości zmiennej niezależnej, dla których zostanie wykonany rachunek. Dla przykładu: jeśli zostaną wprowadzone następujące dane:

K = 0; c_1 = 0; interv = 0,1; LICZNIK = 3,

maszyna wykona obliczenia Λ oraz c_2 dla następujących wartości c_1:

$$c_1 = 0; \quad 0{,}1; \quad 0{,}2 \; ,$$

poczem zatrzyma się.

Znajomość sensu omówionych dziewięciu liczb wystarcza do przeprowadzenia obliczeń według programu, załączonego w paragrafie następnym. Trzeba tylko pamiętać, że "Kontrola rozkładu prędkości" jest uruchamiana kluczem: w przypadku wciśniętego klucza /kbon/ maszyna wydrukuje - po zakończeniu rachunku kolejnych przybliżeń - wartość wielomianu (1.11) i jego pierwszej pochodnej względem η , w przedziale

$$0 \leq \eta \leq 1$$

i w odstępach

$$\Delta\eta = 0{,}1 \; .$$

W tekście programu można z łatwością zidentyfikować procedury lub bloki, w których zachodzi np. wyliczenie współczynników a_1, a_3, a_4,... a_N /procedura "współczynniki" i procedura Det Gauss/;[x] wyliczenie sum S_1 i S_2 , wyliczenie błędu BLAD; zmiana niewiadomej /procedura intsp 1/; wreszcie - kontrola rozkładu prędkości.

Tekst programu wydaje się zrozumiały w świetle powyższych komentarzy; w celu dostarczenia dodatkowych objaśnień załączono w par. 5.3. wyrywkowe wyniki obliczeń, uzyskane bezpośrednio z maszyny cyfrowej.

---

[x] Współczynnik a_2 wylicza się wprost z pierwszego równania układu (3.4), zależy on bowiem od Λ oraz c_1 . Spostrzeżenie to pozwala obniżyć o jedność rząd układu, rozwiązywanego procedurą Det Gauss.

5.2. Tekst programu w języku GIER - Algol

```
real procedure Det Gauss(n,m,A,exit);
value n,m;
integer n,m;
array A;
label exit;
comment Det Gauss solves m systems of linear equations with n
        unknowns and computes the determinant of the coeffi-
        cient matrix. The parameters are:

        n    : Number of unknowns.

        m    : Number of right hand sides. m=0 implies that
               only the determinant will be computed (cf. section 2).

        A    : Has the dimension [1:n,1:n+m] and must on entry
               contain the coefficient matrix in A[1:n,1:n] and
               the right hand sides in A[1:n,n+1:n+m]. The solu-
               tion vectors are on exit stored as columns in
               A[1:n,n+1:n+m].

        exit : Label to which Det Gauss goes when the system is
               singular;

begin integer i,j,k,i0,j0;
real factor,max,detfac,twofac;
integer array permute[1:n];
  m := n+m;
  detfac := 1;
  for i := 1 step 1 until n do
    begin
      max := 0;
      for j := 1 step 1 until n do
        max := max + A[i,j]|∧2;
      if max>1 ∨ max<.25 then
        begin
          twofac := 2|∧(-entier(ln(max)/1.3863+1));
          for j := 1 step 1 until m do
            A[i,j] := A[i,j]×twofac;
          detfac := detfac/twofac
        end
    end equilibration;
  for k := 1 step 1 until n do
    begin
      max := 0;
      for i := k step 1 until n do
        for j := k step 1 until n do
          begin
            factor := abs(A[i,j]);
            if max < factor then
              begin
                max := factor;
                i0 := i;
                j0 := j

              end
          end searching for pivotal element;
    if max < ₁₀-8 then go to exit;
    max := A[i0,j0];detfac := detfac×max;
```

```
    if i0≠k then
      begin
        detfac := -detfac;
        for j := k step 1 until m do
          begin
            factor := A[k,j];
            A[k,j] :=A[i0,j];
            A[i0,j] := factor
          end
      end interchange of rows;
    permute[k] := k;
    if j0≠k then
      begin
        detfac := -detfac;
        permute[k] := j0;
        for i := 1 step 1 until n do
          begin
            factor := A[i,k];
            A[i,k] := A[i,j0];
            A[i,j0] := factor
          end
      end interchange of columns;
    for i := k+1 step 1 until n do
      begin
        factor := A[i,k]/max;
        for j := k+1 step 1 until m do
          A[i,j] := A[i,j] - A[k,j]×factor
      end reduction
  end for k;
for k := n+1 step 1 until m do
  for i := n step -1 until 1 do
    begin
      factor := A[i,k];
      for j := i+1 step 1 until n do
        factor := factor - A[i,j]×A[j,k];
      A[i,k] := factor/A[i,i]
    end solving;
if m≠n then
  begin
    for i := n-1 step -1 until 1 do
      begin
        i0 := permute[i];
        if i0≠i then
        for k := n+1 step 1 until m do
          begin
            factor := A[i,k];
            A[i,k] := A[i0,k];
            A[i0,k] := factor
          end
      end
  end interchange of solutions;
Det Gauss := detfac
end Det Gauss;
```

```
        . . . . . .
    begin
        integer T,N,n,k,TYP,K,LICZNIK,L;
        real    c1,c2,lam,del,interv,a1,a2,a3,a4,P,Q,R,S,BLAD,licznik,
                eta,wynik,mianownik,dokl,S1,S2,S3,S4;
        input(N);
        begin
        array   niew,bl,bc[1:2],A[0:N,0:N],B,a,x[0:N];
        integer array i[1:2];
        . . . . . . . . .
    procedure o;
        begin outtext(|<< ,  |>)
        end;
. . . . . . . . . . . . . . .
real procedure intspl(x0,bl,x,b,i,dx);
value dx;
real x0,bl,dx; array x,b; integer array i;
  begin
  integer j; real k;
   if bl>0 then
    begin
  i[1]:=i[1]+1;
    b[1]:= bl;
    x[1]:= x0
   end
   else
    begin
  i[2]:=i[2]+1;
    b[2]:= bl; x[2]:= x0
   end;
   j:= i[1]+i[2];
   if i[1]×i[2]=0 then
  intspl:=x0+(-1)|∧(j+1)×j×(j+1)/2×dx
   else begin
  k:=(1+(-1)|∧(j+1))/4;
    intspl:= x[1]-b[1]×(x[2]-x[1])×(1+k×(abs(b[2]/b[1])-1))/(b[2]-b[1])
    end
    end intspl;
```

```
procedure współczynniki;
  begin
    B[1]:=1-c1-a[2];
    B[2]:=B[3]:=-2×a[2];
    A[1,1]:=A[2,1]:=1;
    for k:=3 step 1 until N-1 do
    A[k,1]:=B[k+1]:=0;
    for k:=2 step 1 until N-1 do
    begin
     A[1,k]:=1;
     A[2,k]:=k+1;
    end;
    for k:=3 step 1 until N-1 do
    begin
      for T:=2 step 1 until N-1 do
      begin
       A[k,T]:=A[k-1,T]×(T-k+3);
       if A[k,T]<0 then A[k,T]:=0
      end
    end;
    if TYP=1 then
    begin
     A[N-1,1]:=c1×lam;
     A[N-1,2]:=-6;
      for T:=3 step 1 until N-1 do
      A[N-1,T]:=0;
    end;
   if c1=0 ∧ TYP=1 then
   begin
    for k:=1 step 1 until N-2 do
    begin
      for T:=2 step 1 until N-2 do
     A[k,T]:=A[k,T+1];
    end
  end
end współczynniki;
```

```
begin
input(TYP,K,c1,lam,del,dokl,interv,LICZNIK);
   outcr; outtext(|<< TYP,K,c1,lam,del,dokl,interv,LICZNIK,N,|>);
   outcr; output(|<-n.ddd|>,TYP,o,K,o,c1,o,lam,o,del,o,dokl,o,interv,o,LICZNIK,o,N);
   L:=0; outcr;
   if TYP=0 then outtext(|<<
            POHLHAUSEN KLASYCZNY|>);
   outcr;outcr;
   if TYP=1 then outtext(|<<
            POHLHAUSEN ZMODYFIKOWANY|>);
   outcr;outcr;
   outtext(|<<
     c1              c2              lambda              a1              a2
            a5              a6              a7        ...... a[N]|>)
   outcr;
PRAPOCZĄTEK:
        i[1]:=i[2]:=0;
POCZ:
   a[2]:=(c1×c1-1)×lam/2;
   współczynniki;
   if c1=0∧TYP=1 then
     begin
       for T:=1 step 1 until N-2 do
         A[T,N-1]:=B[T];
         DetGauss(N-2,1,A,ZAL);
         a[0]:=c1;
         a[1]:=A[1,N-1];
         a[3]:=0;
       for T:=3 step 1 until N-1 do
         a[T+1]:=A[T-1,N-1];
     end else
   begin
   for T:=1 step 1 until N-1 do
   A[T,N]:=B[T];
   DetGauss(N-1,1,A,ZAL);
   a[0]:=c1;
   a[1]:=A[1,N];
   for T:=3 step 1 until N do
   a[T]:=A[T-1,N];
  end;
   S1:=0;
   for n:=0 step 1 until N do
   S1:=S1+a[n]/(n+1);
   S2:=0;
   for n:=0 step 1 until N do
   S2:=S2+a[n]×a[n]/(2×n+1);
   for k:=0 step 1 until N-1 do
   begin
    S3:=0;
    for n:=k+1 step 1 until N do
    S3:=S3+a[n]/(n+k+1);
    S2:=S2+2×a[k]×S3
   end;
   BLAD:=lam×(1+S1-2×S2)-a[1];

   if K=0 then lam:=intspl(lam,BLAD,niew,bl,i,del);
   if K=1 then c1:=intspl(c1,BLAD,niew,bc,i,del);
     if i[1]×i[2]=0∨abs(niew[1]-niew[2])>dokl then goto POCZ;
```

```
 if lam>0 then c2:=a[1]/sqrt(lam);
 if kbon then
  begin
 outtext(|<< Kontrola rozkładu prędkości
  eta                   pochodna        predkość|>);
 outcr;
 eta:=0;

POCZĄTEK: wynik:=a[1];
      for k:=2 step 1 until N do
      wynik:=wynik+k×a[k]×eta↑(k-1);
   output(|<-n.ddddddddd₁₀-dd|>,eta,o,wynik);
   wynik:=c1;
    for k:=1 step 1 until N do
   wynik:=wynik+a[k]×eta↑k;
   output(|<-n.ddddddddd₁₀+dd|>,o,wynik);
   outcr;
   eta:=eta+.1;
   if eta<1.1 then goto POCZĄTEK;
   end;
 output(|<-n.dddddddd₁₀+dd|>,c1;o;c2,o;lam,o);
  for k:=1 step 1 until N do
  begin
 output(|<-n.ddddddddd₁₀+dd|>;a[k],o);
  if k/4 =entier(k/4) then
     begin
      outcr; outsp(3);
     end

  end k;
ZAL:
  if K=0 then c1:=c1+interv;
  if K=1 then lam:=lam+interv;
 L:=L+1;
  if L < LICZNIK then goto PRAPOCZĄTEK;
 outtext(|<< Koniec obliczeń|>);
  end end end end end end;
```

5.3. Przykładowe wyniki obliczeń

TYP,K,c1,lam,del,dokl,interv,LICZNIK,N,
0.000 , 0.000 , 0.500 , 5.000 , 0.010 , 0.001 , 0.050 , 1.000$_{10}$1 , 6.000

POHLHAUSEN KLASYCZNY

c1	c2	lambda	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7 ...... a[N]
5.00000000 $_{10}$-1	7.04320358 $_{10}$-1	1.06575115 $_{10}$+1	2.299313277	-3.996566638	2.993133582	-4.931337424 $_{10}$-1	-5.034330748 $_{10}$-1	2.006866084 $_{10}$-1	
5.49999999 $_{10}$-1	6.42064739 $_{10}$-1	1.05632057 $_{10}$+1	2.086780116	-3.683900721	2.867801592	-6.178016737 $_{10}$-1	-3.660991304 $_{10}$-1	1.632198221 $_{10}$-1	
5.99999998 $_{10}$-1	5.77902354 $_{10}$-1	1.04753637 $_{10}$+1	1.870419495	-3.352097519	2.704195112	-7.041951772 $_{10}$-1	-2.479023878 $_{10}$-1	1.295804749 $_{10}$-1	
6.49999997 $_{10}$-1	5.11870848 $_{10}$-1	1.03938000 $_{10}$+1	1.650241762	-3.001208909	2.502417937	-7.524180114 $_{10}$-1	-1.487909649 $_{10}$-1	9.975818917 $_{10}$-2	6.99999996 $_{10}$-1
6.99999996 $_{10}$-1	4.44000320 $_{10}$-1	1.03186545 $_{10}$+1	1.426247243	-2.631236114	2.262472175	-7.624721657 $_{10}$-1	-6.876391172 $_{10}$-2	7.375278161 $_{10}$-2	
7.49999994 $_{10}$-1	3.74329426 $_{10}$-1	1.02496489 $_{10}$+1	1.198418386	-2.242091909	1.984183826	-7.341038256 $_{10}$-1	-7.908079773 $_{10}$-3	5.158161500 $_{10}$-2	
7.99999993 $_{10}$-1	3.02888105 $_{10}$-1	1.01868548 $_{10}$+1	9.667234980 $_{10}$-1	-1.833617438	1.667234883	-6.672348883 $_{10}$-1	3.361745272 $_{10}$-2	3.327650833 $_{10}$-2	
8.49999992 $_{10}$-1	2.29707508 $_{10}$-1	1.01302480 $_{10}$+1	7.311142180 $_{10}$-1	-1.405570980	1.311141927	-5.611419268 $_{10}$-1	5.557096843 $_{10}$-2	1.888580562 $_{10}$-2	
8.99999991 $_{10}$-1	1.54814048 $_{10}$-1	1.00801176 $_{10}$+1	4.915222302 $_{10}$-1	-9.576110635 $_{10}$-1	9.152220842 $_{10}$-1	-4.152220674 $_{10}$-1	5.761103146 $_{10}$-2	8.477794065 $_{10}$-3	9.49999990
9.49999990 $_{10}$-1	7.82362034 $_{10}$-2	1.00365864 $_{10}$+1	2.478567669 $_{10}$-1	-4.892836902 $_{10}$-1	4.785673004 $_{10}$-1	-2.285672622 $_{10}$-1	3.928362206 $_{10}$-2	2.143276797 $_{10}$-3	
9.99999989 $_{10}$-1	7.82362034 $_{10}$-2	-6.33319660	1.937219274 $_{10}$-8	7.077711772 $_{10}$-8	-2.533129608 $_{10}$-7	3.091923277 $_{10}$-7	-1.713599755 $_{10}$-7	3.650717018 $_{10}$-8	Koniec obliczen

```
TYP,K,c1,lam,del,dokl,interv,LICZNIK,N,
1.000   ,   0.000  ,   0.400  ,   2.230⏨2  ,   0.100  ,   0.001  ,  -0.020  ,   1.000⏨1  ,   6.000
            POHLHAUSEN ZMODYFIKOWANY

   c1                   c2                  lambda                 a1                 a2              a3                 a4
            a5                    a6                          a7       ...... a[N]
3.99999999 ⏨-1  ,   1.04078317       ,   2.23702862 ⏨+2  ,   1.556668118 ⏨+1  ,  -9.395525742 ⏨+1  ,   2.321542101 ⏨+2  ,  -2.793978996 ⏨+2
   1.639207931 ⏨+2.,  -3.768852711 ⏨+1 ,   3.79
3.79999999 ⏨-1  ,   1.08386008       ,   2.39797839 ⏨+2  ,   1.678401488 ⏨+1  ,  -1.025856693 ⏨+2  ,   2.549025111 ⏨+2  ,  -3.077336741 ⏨+2
   1.809024162 ⏨+2 ,  -4.164959860 ⏨+1 ,
3.59999998 ⏨-1  ,   1.12864061       ,   2.58033007 ⏨+2  ,   1.812981224 ⏨+1  ,  -1.122957430 ⏨+2  ,   2.806848412 ⏨+2  ,  -3.399781857 ⏨+2
   2.002757616 ⏨+2 ,  -4.617648506 ⏨+1 ,
3.39999998 ⏨-1  ,   1.17545769       ,   2.78766373 ⏨+2  ,   1.962579203 ⏨+1  ,  -1.232704425 ⏨+2  ,   3.100238256 ⏨+2  ,  -3.768067474 ⏨+2
   2.224548311 ⏨+2 ,  -5.136725760 ⏨+1 ,
3.19999998 ⏨-1  ,   1.22456613       ,   3.02700397 ⏨+2  ,   2.130535316 ⏨+1  ,  -1.358518400 ⏨+2  ,   3.439538202 ⏨+2  ,  -4.196039524 ⏨+2
   2.483070402 ⏨+2 ,  -5.743042040 ⏨+1 ,
2.99999997 ⏨-1  ,   1.27636152       ,   3.30604791 ⏨+2  ,   2.320749545 ⏨+1  ,  -1.504249759 ⏨+2  ,   3.836249323 ⏨+2  ,  -4.698999004 ⏨+2
   2.787874308 ⏨+2 ,  -6.459498167 ⏨+1 ,
2.79999997 ⏨-1  ,   1.33130615       ,   3.63546559 ⏨+2  ,   2.538387716 ⏨+1  ,  -1.675223250 ⏨+2  ;   4.306504965 ⏨+2  ,  -5.298563251 ⏨+2
   3.152510729 ⏨+2 ,  -7.318679619 ⏨+1 ,
2.59999996 ⏨-1  ,   1.38979601       ,   4.03299193 ⏨+2  ,   2.791031498 ⏨+1  ,  -1.880179544 ⏨+2  ,   4.877686462 ⏨+2  ,  -6.032013645 ⏨+2
   3.600570374 ⏨+2 ,  -8.377667809 ⏨+1 ,
2.39999996 ⏨-1  ,   1.45190031       ,   4.53165535 ⏨+2  ,   3.090759653 ⏨+1  ,  -2.135314965 ⏨+2  ,   5.602500153 ⏨+2  ,  -6.972370243 ⏨+2
   4.178720131 ⏨+2 ,  -9.750110149 ⏨+1 ,   2.1999
2.19999996 ⏨-1  ,   1.51674420       ,   5.19797112 ⏨+2  ,   3.458034122 ⏨+1  ,  -2.473196111 ⏨+2  ,   6.590749588 ⏨+2  ,  -8.274106503 ⏨+2
   4.986531582 ⏨+2 ,  -1.167981958 ⏨+2 ,
1.99999996 ⏨-1  ,   1.51674420       ,  -5.18885052 ⏨+1  ,  -1.011149463 ⏨+1  ,   2.490648282 ⏨+1  ,   1.748901129 ⏨+1  ,  -8.879098535 ⏨+1
   8.084647918 ⏨+1 ,  -2.353949308 ⏨+1 ,
  Koniec obliczen
```

TYP,K,c1,lam,del,dokl,interv,LICZNIK,N,
0.000 , 1.000 , 0.000 , 1.050$_{10}$2 , 0.010 , 0.000 , -5.000 , 1.000$_{10}$1 , 8.000

POHLHAUSEN KLASYCZNY

c1	c2	lambda	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	...... a[N]
1.58128882 $_{10}$-4	1.12221181	1.05000000 $_{10}$+2	1.149924922 $_{10}$+1	-5.249999833 $_{10}$+1	1.295052538 $_{10}$+2	-1.925131383 $_{10}$+2	1.785157661 $_{10}$+2	-1.015105090 $_{10}$+2	3.250375247 $_{10}$+1	-4.500562727
4.41006203 $_{10}$-2	1.09525981	1.00000000 $_{10}$+2	1.095259810 $_{10}$+1	-4.990279078 $_{10}$+1	1.229429810 $_{10}$+2	-1.826004734 $_{10}$+2	1.692177749 $_{10}$+2	-9.617758417 $_{10}$+1	3.078465152 $_{10}$+1	-4.261249065
9.12809379 $_{10}$-2	1.06331578	9.50000000 $_{10}$+1	1.036392021 $_{10}$+1	-4.710400426 $_{10}$+1	1.158685794 $_{10}$+2	-1.719114370 $_{10}$+2	1.591897187 $_{10}$+2	-9.042514229 $_{10}$+1	2.893012118 $_{10}$+1	-4.003060803
1.42414444 $_{10}$-1	1.02548610	9.00000000 $_{10}$+1	9.728615403	-4.408750463 $_{10}$+1	1.082497163 $_{10}$+2	-1.604055285 $_{10}$+2	1.483991280 $_{10}$+2	-8.423691559 $_{10}$+1	2.693550468 $_{10}$+1	-3.725414798
1.99775293 $_{10}$-1	9.79423301 $_{10}$-1	8.50000000 $_{10}$+1	9.029836655	-4.080334544 $_{10}$+1	1.000045326 $_{10}$+2	-1.480029683 $_{10}$+2	1.368002157 $_{10}$+2	-7.759902716 $_{10}$+1	2.479941320 $_{10}$+1	-3.428459421
2.62853041 $_{10}$-1	9.24384946 $_{10}$-1	8.00000000 $_{10}$+1	8.267950296	-3.723599219 $_{10}$+1	9.106832123 $_{10}$+1	-1.345808225 $_{10}$+2	1.242609937 $_{10}$+2	-7.042866373 $_{10}$+1	2.249338007 $_{10}$+1	-3.108035535
3.33345969 $_{10}$-1	8.57746562 $_{10}$-1	7.50000000 $_{10}$+1	7.428303123	-3.333244538 $_{10}$+1	8.133165884 $_{10}$+1	-1.199980321 $_{10}$+2	1.106651919 $_{10}$+2	-6.266597819 $_{10}$+1	1.999981701 $_{10}$+1	-2.761883542
4.11172056 $_{10}$-1	7.78047953 $_{10}$-1	7.00000000 $_{10}$+1	6.509616196	-2.908145213 $_{10}$+1	7.075849438 $_{10}$+1	-1.041926043 $_{10}$+2	9.594967175 $_{10}$+1	-5.427262926 $_{10}$+1	1.730583477 $_{10}$+1	-2.388150431
4.99641085 $_{10}$-1	6.80359501 $_{10}$-1	6.50000000 $_{10}$+1	5.485233665	-2.438661981 $_{10}$+1	5.914984488 $_{10}$+1	-8.690806222 $_{10}$+1	7.990305424 $_{10}$+1	-4.513982868 $_{10}$+1	1.437946570 $_{10}$+1	-1.982729658
5.99987857 $_{10}$-1	5.60661640 $_{10}$-1	6.00000000 $_{10}$+1	4.342866391	-1.920003814 $_{10}$+1	4.640009224 $_{10}$+1	-6.800013590 $_{10}$+1	6.240012491 $_{10}$+1	-3.520007002 $_{10}$+1	1.120002210 $_{10}$+1	-1.542860143
7.14779023 $_{10}$-1	4.12952640 $_{10}$-1	5.50000000 $_{10}$+1	3.062538743	-1.345092529 $_{10}$+1	3.236593080 $_{10}$+1	-4.728751349 $_{10}$+1	4.329409051 $_{10}$+1	-2.437908471 $_{10}$+1	7.746035397	-1.065827228

Koniec obliczen

```
TYP,K,c1,lam,del,dokl,interv,LICZNIK,N,
0.000  ,  0.000  ,  0.300  ,  7.300  ,  0.010  ,  0.001  ,  0.100  ,  1.000  ,  4.000

          POHLHAUSEN KLASYCZNY


   c1                c2                lambda               a1              a2             a3              a4
            a5                     a6                    a7       ...... a[N]
Kontrola rozkładu predkości
  eta                     pochodna          predkosc
0.000000000        ,   2.514485121       ,    2.999999998 ⏨-1
9.999999986 ⏨-2    ,   1.902430769       ,    5.199159607 ⏨-1
1.999999997 ⏨-1    ,   1.397054099       ,    6.840432733 ⏨-1
2.999999989 ⏨-1    ,   9.883604657 ⏨-1   ,    8.025505114 ⏨-1
3.999999985 ⏨-1    ,   6.604712187 ⏨-1   ,    8.846115060 ⏨-1
4.999999981 ⏨-1    ,   4.213787224 ⏨-1   ,    9.384053107 ⏨-1
5.999999978 ⏨-1    ,   2.431553341 ⏨-1   ,    9.711162224 ⏨-1
6.999999974 ⏨-1    ,   1.218534037 ⏨-1   ,    9.889337607 ⏨-1
7.999999970 ⏨-1    ,   4.752530530 ⏨-2   ,    9.970526919 ⏨-1
8.999999966 ⏨-1    ,   1.022336632 ⏨-2   ,    9.996730275 ⏨-1
9.999999963 ⏨-1    ,  -1.490116119 ⏨-8   ,    9.999999888 ⏨-1
1.099999994        ,   6.907477975 ⏨-3   ,    1.000244040
3.00000000 ⏨-1  ,  9.27592020 ⏨-1  ,  7.34825355      ,  2.514485121      ,  -3.545455344  •  ,  1.943455338      ,  -4.144851118 ⏨-1
```

```
'TYP,K,c1,lam,del,dokl,interv,LICZNIK,N,
1.000 ,  0.000 ,  0.500 ,  1.300⏨3 ,  0.100 ,  0.001 ,  0.050 ,  1.000⏨1 ,  8.000

          POHLHAUSEN ZMODYFIKOWANY

   c1              c2              lambda              a1              a2              a3              a4
           a5                a6                a7      ...... a[N]
Kontrola rozkładu predkosci
   eta                  pochodna         predkosc
0.000000000       ,   2.190974158 ⏨1 ,   5.000000000 ⏨-1
9.999999986 ⏨-2   ,  -1.337566349 ⏨1 ,   3.519500988 ⏨-1
1.999999997 ⏨-1   ,  -8.338473946    ,  -8.768527638 ⏨-1
2.999999989 ⏨-1   ,   2.273001596    ,  -1.155400749
3.999999985 ⏨-1   ,   7.329776645    ,  -6.190713961 ⏨-1
4.999999981 ⏨-1   ,   6.773909509    ,   1.202404797 ⏨-1
5.999999978 ⏨-1   ,   3.901785016    ,   6.595088840 ⏨-1
6.999999974 ⏨-1   ,   1.426565647    ,   9.160420299 ⏨-1
7.999999970 ⏨-1   ,   2.670764923 ⏨-1 ,  9.902390242 ⏨-1
8.999999966 ⏨-1   ,   1.113891602 ⏨-2 ,  9.998035431 ⏨-1
9.999999963 ⏨-1   ,  -1.296997070 ⏨-4 ,  9.999885559 ⏨-1
1.099999994       ,  -1.855468750 ⏨-2 ,  9.996395111 ⏨-1
5.00000000 ⏨-1  ,  6.86471196 ⏨-1  ,  1.01866145 ⏨+3  ,  2.190974158 ⏨+1  ,  -3.819979506 ⏨+2  ,  1.859887636 ⏨+3  ,  -4.301[illegible]357 ⏨+
   5.507439484 ⏨+3  ,  -4.029553825 ⏨+3  ,  1.585147980 ⏨+3  ,  -2.610397110 ⏨+2  ,
```

6. PRACE CYTOWANE

[1] R.D.Hugelman - Application of Pohlhausen's Method to Stagnation - Point Flow, AIAA Journal, No.11, Vol.3 /1965/, 2158.

[2] H.Schlichting und A.Ulrich - Zur Berechnung des Umschlages laminar/turbulent, Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung, I 8 - I 35.

[3] R.D.Hugelman and D.R.Haworth - An MHD Boundary Layer Compatibility Condition, AIAA Journal, No.7, Vol.3 /1965/, 1367-1369.

[4] K.Pohlhausen - Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. ZAMM, Heft 4, Bd 1, /1921/, 252-268.

[5] W.J.Prosnak - On the Viscous Flow Near the Stagnation Point on an Interface. AFOSR 1952. Princeton University, Dept.Aero.Eng., Report 563 /1961/.

[6] W.J.Prosnak - A Note on the Application of Pohlhausen's Method to the Stagnation Point Flow. Arch.Bud.Masz., 1, X /1963/, 3-14.
Erratum: Arch.Bud.Masz., 1, XIII /1966/, 153-154.

[7] S.Goldstein - Modern Developements in Fluid Dynamics Oxford at the Clarendon Press, 1950, Vol.I, str.161.

[8] K.Nickel - Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen. Arch. for Rat.Mech. and Analysis, vol.2., No.1 /1958/, 1-31.