

4.41 — optymalizacja konstrukcji

S. Jendo, W. Marks

OPTYMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA
KONSTRUKCJI

12/1983

WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 września 1982 r.



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark.wyd. 2,25. Ark.druk.3,25
Oddano do drukarni w marcu 1983 r.
Nr zamówienia 247/0/83 M-10 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Stefan Jendo
Wojciech Marks
Pracownia Pól Odkształceń

OPTIMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA KONSTRUKCJI

1. Zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej

1.1. Wprowadzenie

Pierwszą wzmiankę o optymalizacji wielokryterialnej znajdujemy w publikacji Pareto z roku 1896 [22]. Następnie dopiero po upływie ponad pół wieku zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej podjęto w pracach Kuhna i Tuckera [15] oraz Debreu [6]. W pracy von Neumana i Morgensterna [20], a następnie w pracy Kaplina [13] znajdujemy rozważania dotyczące wyboru rozwiązań w przypadku występowania kilku przeciwstawnych kryteriów optymalizacji. W roku 1963 Zadeh [33] przedstawił zagadnienie projektowania optymalnych systemów przy rozważaniu kilku kryteriów optymalizacji. Pomimo, że praca ta nie zawiera ogólnego rozwiązania zagadnienia, to stanowi ona bardziej głębokie, nowoczesne sformułowanie zagadnienia optymalizacji wektorowej. Kontynuację tego sformułowania znajdujemy następnie w pracy [14], w której na przykładzie programowania liniowego przedstawiono optymalizację układu przy wielu funkcjach celu. Próbę optymalizacji dynamicznej wielokryterialnej podjęto w pracy [19] korzystając z metody hierarchicznej. Waltz w pracy [31] podał metodę optymalizacji wielokryterialnej opartą na zasadzie hierarchiczności kryteriów. Salukvadze w pracy [25] przedstawił zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej w teorii sterowania. Opracowanie to zawiera także przegląd prac dotyczących zarówno rozwoju metod matematycznych optymalizacji wielokryterialnej, jak również ich zastosowań w rozwiązywaniu zagadnień sterowania lotem samolotów i innych

pojazdów powietrznych.

Zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej występują nie tylko w ekonomice, technice sterowania pojazdami czy procesami technologicznymi, ale także w teorii konstrukcji.

Eschenauer w pracach [7,8] rozpatruje zagadnienie optymalizacji struktur przestrzennych stanowiących konstrukcję nośną radioteleskopów, przyjmując jako kryteria: minimum ciężaru oraz minimum odchyień powierzchni odkształconej od powierzchni początkowej w różnych stanach obciążenia. Saikler w pracy [26] przedstawił przegląd metod optymalizacji wielokryterialnej oraz ich zastosowanie do optymalizacji konstrukcji złożonej z belki i kratownicy. Jako kryteria optymalizacji przyjmuje minimum ciężaru konstrukcji kratowej oraz minimum przemieszczeń powierzchni belki w różnych stanach obciążenia. Koski w pracach [15,16,17] formułuje zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej konstrukcji prętowych przyjmując za funkcje celu minimum ciężaru oraz minimum przemieszczeń wybranych węzłów konstrukcji. Stadler w pracach [27,28,29,30] przyjmuje w optymalizacji dwa kryteria: minimum masy i minimum energii sprężystej, a kształty wyznaczone w ten sposób nazywa kształtami naturalnymi. Baier w pracach [2,3] przedstawia ogólne sformułowanie zagadnienia wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji przyjmując jako kryteria optymalizacji ciężar konstrukcji oraz energię nagromadzoną w różnych stanach obciążenia. Carmichael [5] rozwiązuje zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej za pomocą metody ograniczonych funkcji celu. Zagadnienia optymalizacji konstrukcji mechanicznych przy wielu funkcjach celu rozważają również Osyczka [21] oraz Rao [24] .

Celem optymalizacji jest wybór najlepszego rozwiązania z szeregu możliwych wariantów lub wybór działania, które zapewni uzyskanie maksymalnego efektu w określonych warunkach.

W pewnych przypadkach możliwa jest ocena tego efektu za pomocą jednego kryterium. Wówczas sformułowanie zagadnienia optymalizacji jest następujące.

Znaleźć n -wymiarowy wektor zmiennych decyzyjnych x ,

który spełnia ograniczenia

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

i zapewnia minimum /maksimum/ jednej funkcji celu $f(x)$.

W innych przypadkach jakości rozwiązania nie można ocenić za pomocą jednego kryterium, lecz za pomocą wielu niezależnych kryteriów. Wówczas mamy do czynienia z zagadnieniem optymalizacji wielokryterialnej, którego sformułowanie jest następujące.

Znaleźć n -wymiarowy wektor zmiennych decyzyjnych x , który spełnia ograniczenia

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

i zapewnia minimum /maksimum/ wielu funkcji celu $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$.

Ze względu na to, że zwykle poszczególne kryteria są ze sobą sprzeczne powstaje zagadnienie wyboru rozwiązania kompromisowego.

Zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej rozwiązywane są zwykle w dwóch następujących etapach:

- wyznaczenie zbioru kompromisów,
- wybór odpowiedniego rozwiązania kompromisowego.

Istnieje wiele metod optymalizacji wielokryterialnej. Różnią się one przede wszystkim wymaganiami co do informacji o preferencjach dotyczących poszczególnych funkcji celu. Rodzaj informacji o preferencjach oraz czas, w którym informacje te są dostarczone odgrywają tu rolę zasadniczą.

W pracy [11] podano systematykę metod optymalizacji wielokryterialnej w zależności od etapu, w którym dana jest informacja o preferencjach i rodzaju tej informacji.

W zagadnieniach optymalizacji konstrukcji istotne znaczenie mają metody nie wymagające informacji o preferencjach oraz metody, w których te informacje dane są apriori.

1.2. Pojęcia podstawowe

Przy formułowaniu zagadnień optymalizacji wielokryterialnej podstawowymi pojęciami są: zmienne decyzyjne, ograniczenia oraz

kryteria lub funkcje celu.

Zmienne decyzyjne są wielkościami opisującymi konstrukcję i podlegającymi wariacjom w procesie optymalizacji. Zmiennymi decyzyjnymi mogą być wymiary geometryczne poszczególnych elementów, wielkości opisujące konfigurację konstrukcji, wielkości mechaniczne lub fizyczne opisujące właściwości materiału z którego wykonana jest konstrukcja, jak również inne wielkości charakteryzujące daną konstrukcję. Przykładowo zmiennymi decyzyjnymi mogą być: pola przekrojów poprzecznych prętów ramownicy, wymiary przekroju dwuteowego, współrzędne węzłów kratownicy, wielkości sił sprężających poszczególne przęsła belki ciągłej, itp.

Zmienne decyzyjne mogą mieć charakter ciągły lub dyskretny. W projektowaniu zwykle występują zmienne dyskretne, np. wymiary kształtowników, grubości blach itp. Jednakże często skoki w wymiarach są na tyle małe, że zmienne dyskretne można traktować jako ciągłe, a w wyniku rozwiązania przyjąć możliwie najbliższe zmienne dyskretne.

Zmienne decyzyjne mają postać wektora $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ w przestrzeni n wymiarowej zwanej przestrzenią zmiennych decyzyjnych. Każdemu punktowi tej przestrzeni odpowiada konstrukcja o n zmiennych decyzyjnych \mathbf{x} .

Obszar rozwiązań dopuszczalnych Ω stanowi zwykle część n -wymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Granicę obszaru dopuszczalnego wyznaczają ograniczenia nałożone na zmienne decyzyjne. Ograniczenia występują w postaci równości lub nierówności opisujących pewne warunki stawiane konstrukcji, nałożone bezpośrednio na zmienne decyzyjne lub pośrednio poprzez ograniczenie pewnych wielkości, które zależą od zmiennych decyzyjnych. Ograniczenia mają postać równości lub nierówności

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, s$$

W przypadku ograniczeń w postaci równości można próbować zredukować wymiar rozważanej przestrzeni przez rozwiązanie tych równości, jednak nie zawsze jest to możliwe.

Wśród ograniczeń rozróżniamy ograniczenia brzegowe i zachowawcze. Ograniczenia brzegowe występują w postaci jawnej i są

nakładane na poszczególne zmienne decyzyjne, np. na wymiary geometryczne poszczególnych elementów. Ograniczenia zachowawcze mają postać warunków nałożonych na naprężenia lub przemieszczenia, mogą także dotyczyć częstotliwości drgań swobodnych konstrukcji lub też sił krytycznych przy wyboczeniu elementów. Ograniczenia zachowawcze występują w postaci uwikłanej, to znaczy w postaci ograniczeń nałożonych na pewne zależności, a nie bezpośrednio na poszczególne zmienne decyzyjne.

W n -wymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych ograniczenia przedstawiają hiperpowierzchnię zawierającą punkty spełniające te ograniczenia w postaci równości. Hiperpowierzchnia jest ciągła, gdy zmienne decyzyjne mają charakter ciągły.

Funkcja celu w optymalizacji konstrukcji przyjęto nazywać wyrażenie matematyczne opisujące pewną własność konstrukcji, stanowiącą podstawę oceny czy też kryterium oceny rozpatrywanej konstrukcji. Rozpatrywana własność konstrukcji może być opisana w postaci funkcji lub funkcjonau w zależności od sposobu formułowania zagadnienia optymalizacji. Oszacowanie wartości funkcji celu jest podstawą wyboru tej czy innej konstrukcji z wielu możliwych. Jeżeli funkcja celu jest liniowa to przedstawia hiperpłaszczyznę w przestrzeni n -wymiarowej. Natomiast nieliniowa funkcja celu przedstawia hiperpowierzchnię w tejże przestrzeni.

Polioptrymalizacja jest to optymalizacja pewnego zbioru kryteriów, czyli zbioru funkcji celu f_1, f_2, \dots, f_k . Zagadnienie polioptymalizacji może być traktowane jako zagadnienie optymalizacji wektorowej funkcji celu w odróżnieniu od optymalizacji jedno-kryterialnej, którą można uważać za optymalizację skalarnej funkcji celu.

Przeźrenie celu jest przestrzenią k -wymiarową, w której wartości wszystkich funkcji celu f_1, f_2, \dots, f_k są przedstawione w postaci punktów. Obszar celu $f(\Omega)$ jest taką częścią przestrzeni celu, w której muszą leżeć wartości wszystkich funkcji celu odpowiadające dopuszczalnym zmiennym decyzyjnym. Obszar ten może być spójny lub składać się z punktów dyskretnych.

Zależności funkcji celu od zmiennych decyzyjnych opisują pewne odwzorowanie przestrzeni zmiennych decyzyjnych w przestrzeń celu. Każdemu punktowi obszaru celu odpowiada jeden lub więcej

punktów obszaru rozwiązań dopuszczalnych. Jeżeli funkcje celu są ciągłymi funkcjami zmiennych decyzyjnych, to - w ogólności - punkty brzegowe obszaru rozwiązań dopuszczalnych zostają odwzorowane na punkty brzegowe obszaru celu, a punkty wewnętrzne obszaru rozwiązań dopuszczalnych - na punkty wewnętrzne obszaru celu. W pewnych przypadkach punkty brzegowe obszaru celu mogą jednak odpowiadać także punktom wewnętrznym obszaru rozwiązań dopuszczalnych i odwrotnie [23] .

Podobnie jak w przypadku optymalizacji z uwagi na jedno kryterium odróżniamy polioptymalizację statyczną i dynamiczną. W statycznym problemie polioptymalizacji poszukujemy wartości zmiennych decyzyjnych x_1, x_2, \dots, x_n , które ekstremalizują zbiór kryteriów $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, k$. W dynamicznym problemie polioptymalizacji poszukujemy przebiegów zmiennych decyzyjnych $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, które ekstremalizują zbiór kryteriów $f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $i = 1, 2, \dots, k$ zależnych tych przebiegów.

Rozwiązaniem idealnym zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej nazywamy takie rozwiązanie, które ekstremalizuje jednocześnie każdą funkcję celu. A więc x^{id} jest rozwiązaniem idealnym zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej /w przypadku poszukiwania minimum $f(x)$ /, jeżeli

$$x^{id} \in \Omega$$
$$i \quad f(x^{id}) \leq f(x) \quad \text{dla każdego } x \in \Omega.$$

Ponieważ funkcje celu są naogół konfliktowe, rozwiązanie idealne najczęściej nie istnieje.

Rozwiązaniem niezdominowanym nazywamy rozwiązanie, w którym żadna funkcja celu nie może być polepszona bez jednoczesnego pogorszenia przynajmniej jednej z pozostałych funkcji celu.

A więc x^* jest rozwiązaniem niezdominowanym jeżeli nie istnieje $x \in \Omega$ takie, że $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ dla $i \in K = \{1, 2, \dots, k\}$ oraz $f_i(x) < f_i(x^*)$ dla przynajmniej jednego $i \in K$.

Poszukiwanie rozwiązań niezdominowanych jest nazywane optymalizacją w sensie Pareto.

Najczęściej liczba rozwiązań niezdominowanych jest bardzo duża. Zbiór rozwiązań niezdominowanych nazywamy jest zbiorem

kompromisów.

Ze względu na dużą liczbę rozwiązań niezdominowanych trzeba dokonać wyboru rozwiązania "najlepszego" na podstawie dodatkowego kryterium. To rozwiązanie jest nazywane rozwiązaniem preferowanym.

Rozwiązanie preferowane jest rozwiązaniem niezdominowanym wybranym na podstawie dodatkowych kryteriów. Leży ono w obszarze celu i jest uważane za rozwiązanie najlepsze.

Rozwiązanie zadawalające jest rozwiązaniem leżącym w obszarze celu i zapewniającym osiągnięcie przez każdą funkcję celu wielkości nie większej niż z góry założona. Rozwiązanie zadawalające nie musi być rozwiązaniem niezdominowanym.

2. Wyznaczanie zbioru kompromisów

2.1. Sformułowanie zagadnienia

Sformułowanie zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej jest następujące.

Znaleźć wektor zmiennych decyzyjnych

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega,$$

który minimalizuje każdą funkcję celu f_i będącą składową wektora celu

$$(2.1) \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k).$$

Zmienne decyzyjne muszą spełniać ograniczenia

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{x}) &= 0 & i &= 1, 2, \dots, r, \\ g_j(\mathbf{x}) &\leq 0 & j &= 1, 2, \dots, s, \end{aligned}$$

tzn. muszą należeć do obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

Jest oczywiste, że ze względu na konfliktowość poszczególnych składowych wektora celu f_i znalezienie rozwiązania \mathbf{x}^{id} , przy którym każda $f_i(\mathbf{x}^{id}) = f_{imin}$ na ogół nie jest możliwe. Dlatego poszukujemy rozwiązań niezdominowanych czyli rozwiązań w sensie Pareto.

Wektor \mathbf{x}^* jest rozwiązaniem zadania optymalizacji w

sensie Pareto, jeżeli odpowiadający mu wektor funkcji celu $f^*(x^*)$ jest wektorem najmniejszym w sensie częściowego uporządkowania, to znaczy

$$f_i^* \leq f_i \quad \text{dla wszystkich } i \in K = \{1, 2, \dots, k\}$$

oraz

$$f_i^* < f_i \quad \text{dla co najmniej jednego } i \in K.$$

Przyjęto tu, że wszystkie funkcje celu f_i powinny być zminimalizowane. Jeżeli w zdaniu polioptymalizacji jedną lub więcej funkcji celu należy zmaksymalizować, np. f_m , to zadanie takie można sprowadzić do zadania minimalizacji rozpatrując odpowiednie kryterium ze znakiem ujemnym, a więc np.

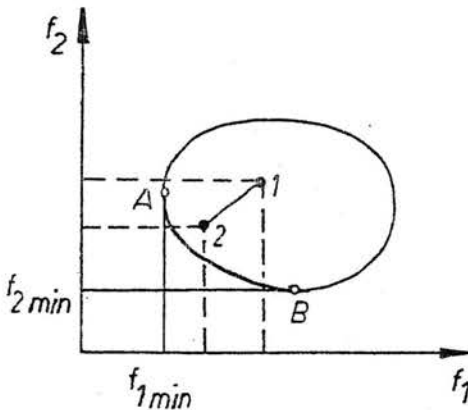
$$\max f_m = - \min (-f_m)$$

Rozwiązanie w sensie Pareto nie jest na ogół jednoznaczne. Zwykle istnieje wiele wektorów x^* , którym odpowiada wektor funkcji celu f^* - najmniejszy w sensie częściowego uporządkowania.

Wektor f^* stanowi zbiór kompromisów.

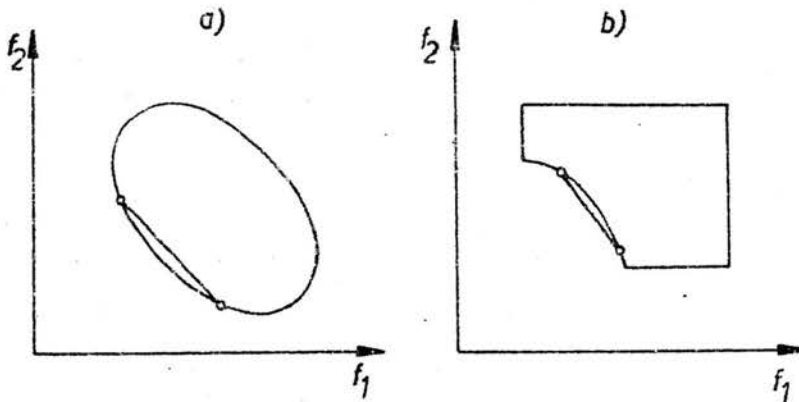
2.2. Właściwości zbioru kompromisów [23]

Obszar celu stanowi pewną część przestrzeni celu. W przypadku dwóch funkcji jest on pewnym obszarem na płaszczyźnie f_1, f_2 /rys. 2.1/. W tym obszarze leżą wszystkie dopuszczalne wartości



Rys. 2.1

funkcji celu i z nich musimy wybrać ekstremalne. Jeżeli zadanie polega na minimalizacji funkcji f_1 i f_2 , to widzimy, że rozwiązanie 2 jest z punktu widzenia obydwu kryteriów lepsze od rozwiązania 1. Z prostego rozumowania wynika, że wszystkie punkty leżące wewnątrz obszaru celu są gorsze od punktów leżących na brzegu tego obszaru. W ten sposób powstaje pewien zbiór rozwiązań /odcinek łuku AB na rys.2.1/, które są lepsze



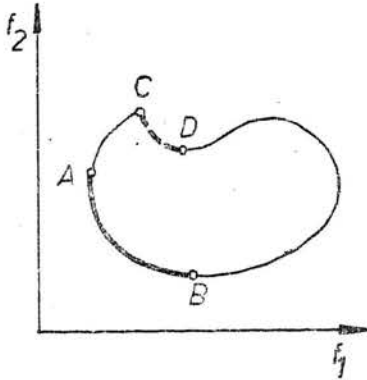
Rys. 2.2

od pozostałych, a samo już nie są porównywalne w sensie obydwu kryteriów. Ten zbiór rozwiązań jest właśnie zbiorem kompromisów, lub rozwiązaniem zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej w sensie Pareto. Poruszając się wzdłuż linii kompromisowej z punktu A do B widzimy, że zmniejszeniu wartości kryterium f_2 towarzyszy jednocześnie powiększenie wartości kryterium f_1 .

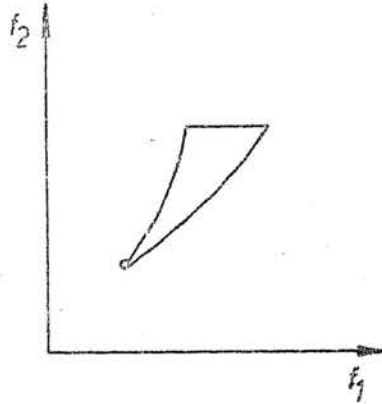
Zbiór kompromisów jest wypukły jeżeli odcinek łączący każde jego dwa punkty leży całkowicie w obszarze celu /rys. 2.2a/. Przy wklęsłych zbiorach kompromisów odcinki te leżą całkowicie poza obszarem celu /rys.2.2b/.

Warunkiem koniecznym przynależności jakiegoś punktu brzegowego do zbioru kompromisów przy $f_1 = f_1 \min$ i $f_2 = f_2 \min$, jest aby styczna w tym punkcie miała ujemne nachylenie. Nie jest to jednak warunek wystarczający, gdyż w przypadku niewypukłych obszarów celu całe odcinki brzegu mogą być równomiernie poprawione przez inne /rys.2.3/.

W przypadku szczególnym zbiór kompromisów może się reduko-



Rys. 2.3



Rys. 2.4

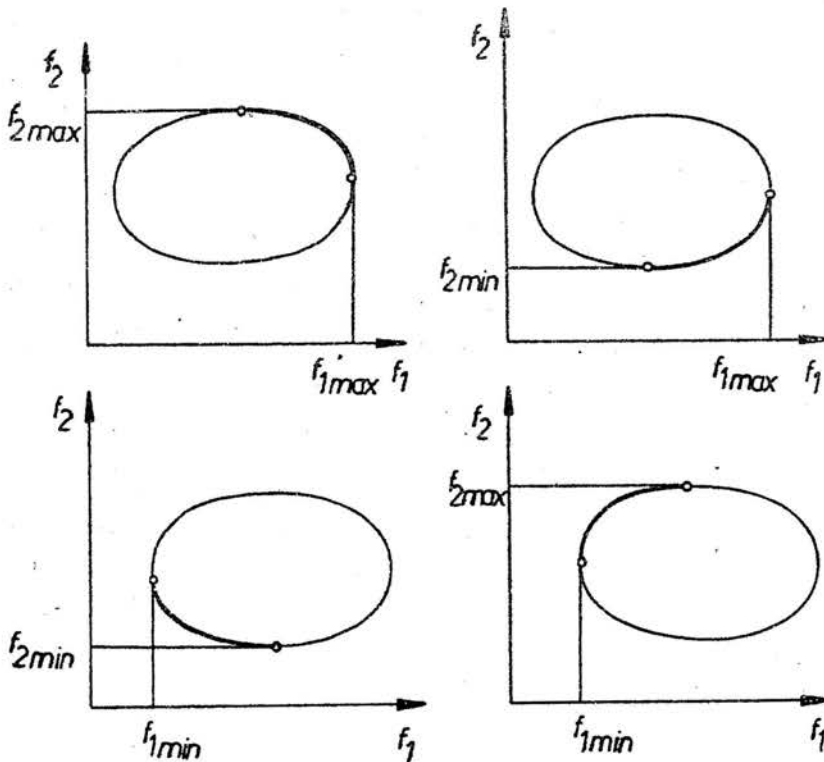
wać do jednego punktu /rys.2.4/. Oznacza to, że obydwa kryteria mogą jednocześnie osiągnąć swoje wartości minimalne. Takie kryteria nazywane są kooperacyjnymi, a rozwiązanie nazywane rozwiązaniem idealnym.

Na rys. 2.5 pokazano zbiory kompromisów w przypadku maksymalizacji i minimalizacji dwóch funkcji celu.

W przypadku ciągłych funkcji celu przestrzeń celu jest k -wymiarowa, a stąd także i obszar celu ma wymiar k /lub mniejszy w przypadku degeneracji/. Ponieważ zbiór kompromisów stanowi pewną część powierzchni obszaru celu, jest on więc tworem geometrycznym o wymiarze $k-1$ /lub mniejszym przy degeneracji/. Wymiar zbioru kompromisów nie może być również większy niż n , czyli niż wymiar wektora zmiennych decyzyjnych.

Poszczególne punkty zbioru kompromisów mogą być otrzymywane kolejno. Do zbioru tego należą punkty odpowiadające maksymalnym lub minimalnym wartościom poszczególnych funkcji celu. Są one ponadto punktami "narożnymi", na których jest rozpięty zbiór kompromisów. Po określeniu w sposób indywidualny punktów optymalnych z punktu widzenia każdego kryterium możemy przebadać kompromisy dwóch kryteriów bez względu na wszystkie pozostałe. W ten sposób, przez badanie kompromisów każdego dwóch kryteriów, dochodzi się do odcinków łuków należących do zbioru kompromisów i ograniczających go w przypadku wypukłym. Cały zbiór kompro-

misów zostaje w pewien sposób rozpięty na tych odcinkach łuków.



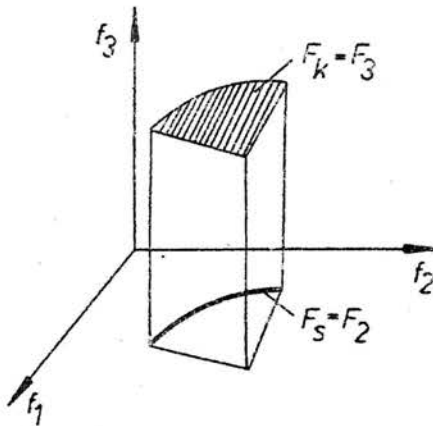
Rys. 2.5

Przy większej liczbie kryteriów metodę tę można prowadzić dalej, badając następne kompromisy trzech funkcji celu.

Matematycznie oznacza to, że zbiór zmiennych decyzyjnych x ma właściwość monotoniczności z uwagi na uwzględnianie kolejnych funkcji celu. Inaczej właściwość monotoniczności celów można wyrazić w sposób następujący.

Niech F_k będzie zbiorem kompromisów zadania k -wymiarowego. Przez wybranie dowolnego ciągu s składowych ($s \leq k$) można sformułować analogiczne zadanie polioptymalizacji w przestrzeni

s-wymiarowej. Odpowiednim zbiorem kompromisów jest F_s . Związek między obydwoimi zbiorami polega na tym, że przy rzutowaniu F_k na przestrzeń s-wymiarową zbiór F_s jest zbiorem kompromisów rzutowanego zbioru F_k o większej wymiarowości. Na rys. 2.6 zilustrowano to w przypadku $k = 3$ i $s = 2$.



Rys. 2.6

Monotoniczność celów ma podstawowe znaczenie przy układach o hierarchicznej strukturze kryteriów.

Bardzo istotną właściwością zbioru kompromisów jest monotoniczność zmiennych decyzyjnych.

Ustalmy wszystkie zmienne decyzyjne $x_i = x_i^{(0)}$ ($i \neq 1$) oprócz x_1 i wyznaczmy zbiór kompromisów ze względu na zmienną x_1 należącą do obszaru rozwiązań dopuszczalnych. Dodajmy teraz drugą zmienną decyzyjną x_2 , która może przybierać dowolne wartości z obszaru rozwiązań dopuszczalnych. Przy określaniu zbioru kompromisów nowego, rozszerzonego zadania mogą wystąpić następujące przypadki:

- zbiór kompromisów odpowiadający zmiennym decyzyjnym x_1 i x_2 polepsza zbiór kompromisów wyznaczony przy zmiennej x_1 ,
- poprzednio wyznaczony zbiór kompromisów nie ulega zmianie na skutek dodania zmiennej decyzyjnej x_2 /ta zmienna nie ma wpływu na rozwiązanie/.

W dalszych krokach można dołączać następne zmienne decyzyjne i badać jak przekształca się zbiór kompromisów. Może przy

tym występować tylko polepszenie w sensie polioptymalizacji, a w żadnym przypadku pogorszenie, nawet przejściowe.

W przypadku ogólnym z r zmiennymi decyzyjnymi x_1, x_2, \dots, x_r można w ten sposób uwzględniać jedną zmienną po drugiej, o ile to możliwe, w kolejności ważności poszczególnych zmiennych. Dzięki monotoniczności jest przy tym zapewnione, że aktualny zbiór kompromisów może się w kolejnych krokach jedynie poprawić.

2.3. Warunki konieczne przynależności punktu obszaru celu do zbioru kompromisów

Zakładamy, że funkcje celu są jednoznaczными, ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami zmiennych decyzyjnych. Założenia te w zagadnieniach wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji są zwykle spełnione.

Z warunku częściowego uporządkowania wektorów wynika wniosek, że przy rozpatrywaniu zadań z ograniczeniami, zbiór kompromisów może leżeć tylko na brzegu obszaru celu.

Warunki konieczne pozwalające na wyznaczenie punktów należących do zbioru kompromisów sformułowane są w następującym twierdzeniu [23,25] .

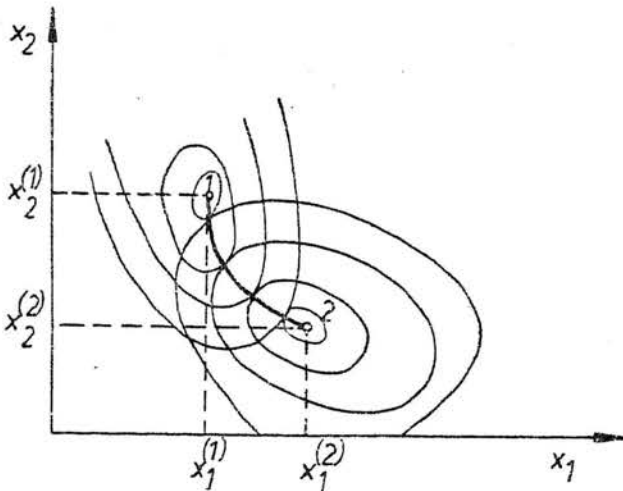
Rozwiązanie zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej /2.1/ x^* istnieje tylko wtedy, gdy można dobrać wektor parametrów $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, $w_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ taki że

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^k w_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

W przypadku, gdy obszar zmiennych decyzyjnych jest wypukły, a funkcje celu wklęsłe warunek ten jest również warunkiem dostatecznym.

Interpretację geometryczną tych warunków w przypadku dwóch funkcji celu f_1 i f_2 zależnych od dwóch zmiennych decyzyjnych x_1 i x_2 przedstawiono na rys.2.7. Wartości funkcji celu można przedstawić w przestrzeni zmiennych decyzyjnych za pomocą poziomicy. Funkcje f_1 i f_2 osiągają minima w punktach 1 i 2 o współrzędnych $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ i $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$. Jeżeli zbiór kompromisów

w przestrzeni celu jest spójny, a kryteria są ciągłymi funkcjami zmiennych decyzyjnych, to zmienne decyzyjne, którym odpowiadają punkty należące do zbioru kompromisów, muszą leżeć na ciągłej krzywej między punktami 1 i 2, zwanej efektywną krzywą zmiennych decyzyjnych. Gradient funkcji jest prostopadły do poziomicy, a równoległość gradientów oznacza, że kierunek stycznych do poziomicy obydwu funkcji celu na efektywnej krzywej zmiennych decyzyjnych jest zgodny. Efektywna krzywa zmiennych decyzyjnych jest



Rys. 2.7

więc miejscem geometrycznym punktów styczności poziomicy obu funkcji celu. Ponieważ warunek równoległości gradientów jest równoważny zerowaniu się wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0$$

więc na efektywnej krzywej zmiennych decyzyjnych spełniony jest warunek (2.2).

2.4. Metody wyznaczania zbioru kompromisów

Metoda współczynników wagowych

Zagadnienie optymalizacji wielokryteriainej może być rozwiązywane za pomocą następującego kryterium zastępczego

$$(2.3) \quad F = \sum_{i=1}^k w_i f_i = F_{\min} \quad w_i > 0,$$

przy czym

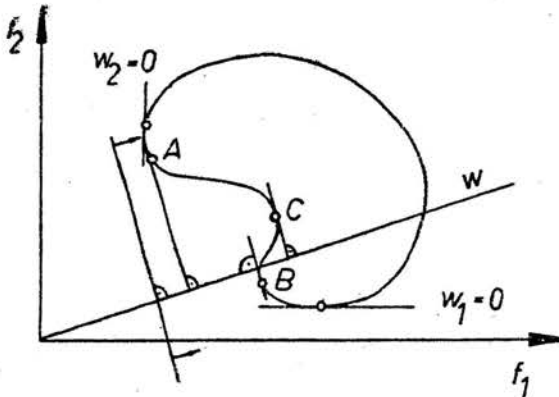
$$\sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Jak wynika z twierdzenia podanego w punkcie 2.3 do zbioru kompromisów może należeć tylko taki punkt, który spełnia warunek (2.2), czyli jest rozwiązaniem zadania (2.3) odpowiadającym pewnemu zbiorowi współczynników w_i .

Zmieniając dodatnie współczynniki w_i przy zachowaniu warunku normalności możemy na podstawie zależności

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^k w_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$
$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

znajdować punkty należące do zbioru kompromisów.

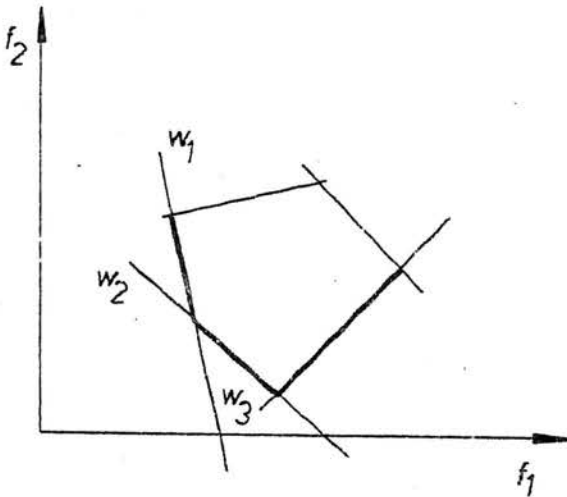


Rys. 2.8

Należy jednak pamiętać, że warunki (2.4) są tylko warunkami koniecznymi minimum i na ich podstawie możemy znaleźć punkty nie tylko odpowiadające minimum funkcji f (punkt A na rys. 2.8), ale również punkty, które można równomiernie poprawić (punkt C). Po wyznaczeniu tą metodą punktów stacjonarnych funkcji f należy zatem zbadać, które z nich należą do zbioru kompromisów.

W przypadku liniowego zadania polioptymalizacji zbiór kompromisów jest wypukły i ograniczony kawałkami przez hiperpłaszczyzny. W tym przypadku zbiór kompromisów można scharakteryzować przez skończoną liczbę parametrów w_i (rys. 2.9).

W przypadku ograniczeń nałożonych na zmienne decyzyjne warunki ograniczające należy uwzględnić w równaniu (2.3) za pomocą metody mnożników Lagrange'a.



Rys. 2.9

Metoda oparta na teorii gier [23]

Metoda ta oparta jest na stwierdzeniu, że każdy punkt f^* zbioru kompromisów można opisać przez pewien wektor parametrów $\{w_i\}$ tak, że jest spełniony warunek

$$f^* = \min_x \min_i (w_i f_i).$$

Inaczej mówiąc, zastępcza funkcja celu

$$f^* = \min_i (w_i f_i)$$

określona z minimum wielkości $w_i f_i$, osiąga jako funkcja wektor zmiennych decyzyjnych swoje minimum właśnie w pewnym punkcie zbioru kompromisów przy zmiennych decyzyjnych x^* .

To stwierdzenie wynika z następującego rozumowania. Dla punktu celu $f^* = f_1(x^*)$ wybieramy $w_1 = 1/f_1^*$. Dla wszystkich innych punktów, które zgodnie z definicją zbioru kompromisów są równomiernie gorsze, zachodzi przynajmniej dla jednego i_0 nierówność $f_{i_0} > f_{i_0}^*$, czyli $w_{i_0} \cdot f_{i_0} > w_{i_0} \cdot f_{i_0}^* = 1$.

Z tego wynika, że nierówność $\min (w_i f_i) > 1$ podczas gdy $\min (w_i f_i^*) = 1$. To dowodzi, że można znaleźć punkt zbioru kompromisów odpowiadający minimalnej wartości minimum z $w_i f_i$.

Wewnętrznych punktów obszaru celu nie można w ten sposób osiągnąć. Przy niewypukłych zbiorach kompromisów w ten sposób mogą być wyznaczone jednak również punkty nie należące do zbioru kompromisów.

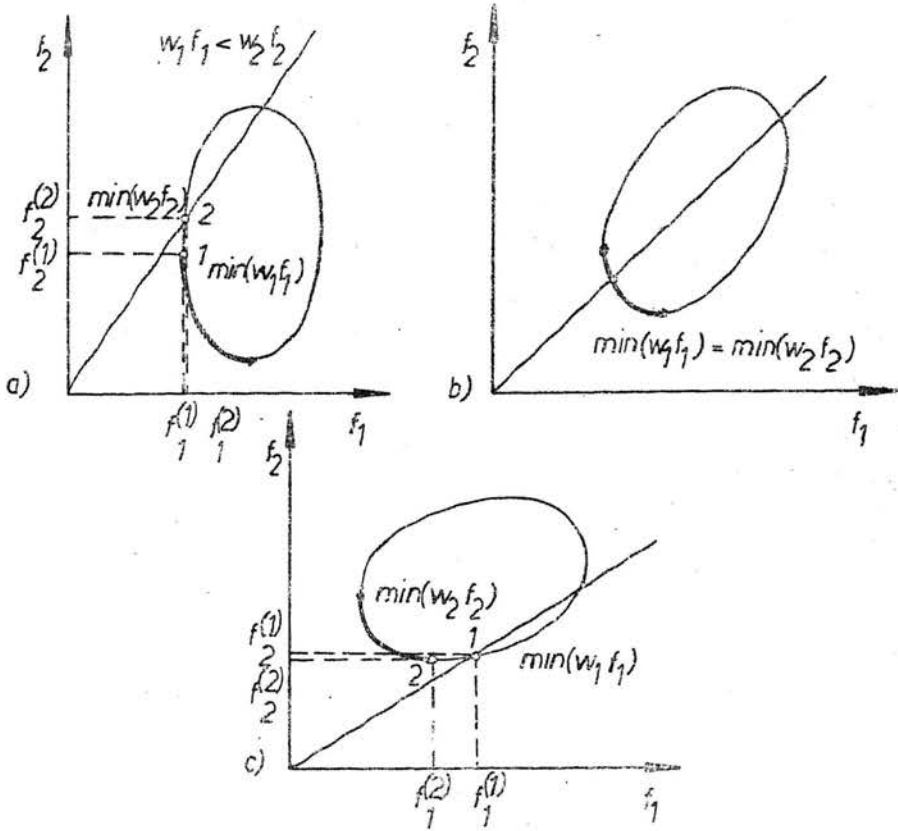
Zilustrujemy tę metodę w przypadku dwóch funkcji celu. Pr $w_1, w_2 > 0$ kryterium zastępcze ma postać $f = \min(w_1 f_1, w_2 f_2)$. Cały obszar celu dzielimy przy tym na dwie części $w_1 f_1 < w_2 f_2$ $w_1 f_1 > w_2 f_2$. W pierwszej z nich poszukujemy $\min(w_1 f_1)$, a w drugiej $\min(w_2 f_2)$. Linia podziału między obiema częściami jest prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Możliwe są trzy przypadki pokazane na rys. 2.10.

a/ Linia podziału leży "na lewo" od obszaru kompromisów. Oba podzadania dają punkty 1 i 2. Z warunku $\min(w_2 f_2) > \min(w_1 f_1)$ otrzymuje się jako rozwiązanie punkt 1/najbliższy leżący punkt narażony zbioru kompromisów/.

b/ Linia podziału przecina brzeg obszaru celu w pewnym punkcie zbioru kompromisów. W tym przypadku oba rozwiązania częściowe są zgodne w punkcie kompromisowym.

c/ Linia podziału leży "na prawo" od obszaru kompromisów. Rozumowanie analogiczne do a/ prowadzi do rozwiązania w punkcie 2.

W opisany sposób można znaleźć wszystkie punkty zbioru kompromisów.



Rys. 2.10

Metody numeryczne

W wielu przypadkach nie można wyznaczyć zbioru kompromisów metodami analitycznymi. Może to być spowodowane trudnościami przy rozwiązywaniu nieliniowych układów równań lub też wynikać z numerycznych zależności między zmiennymi decyzyjnymi, a funkcjami celu. W takich przypadkach stosowane są metody numeryczne oparte na metodach programowania nieliniowego.

Do metod tych należą [23] :

- metoda gradientu,
- metoda celów cząstkowych,
- metoda gradientów równoległych.

3. Sposoby wyboru rozwiązań preferowanych

3.1. Metoda kryterium globalnego

Metodą kryterium globalnego możemy rozwiązać zagadnienie następujące: znaleźć minimum wektorowej funkcji celu

$$f_j(x) = f_j \min \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Rozwiązując to zagadnienie znajdujemy najpierw rozwiązanie idealne, czyli wektor $f_j(x^{id})$ $j = 1, 2, \dots, k$ spełniający warunek minimum każdej funkcji celu $f_j(x)$ rozpatrywanej niezależnie od pozostałych.

Następnie formułujemy kryterium globalne żądając minimum "odległości" pomiędzy punktami- optymalnym i idealnym

$$(3.1) \quad F(p) = \left[\sum_{j=1}^k |f_j(x^*) - f_j(x^{id})|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty$$

przy zachowaniu ograniczeń

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

W przypadku:

$$p = 1 \quad F(1) = \sum_{j=1}^k |f_j(x^*) - f_j(x^{id})|,$$

$$p = 2 \quad F(2) = \left[\sum_{j=1}^k (f_j(x^*) - f_j(x^{id}))^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$p \rightarrow \infty \quad F^{(\infty)} = \max_{j=1, \dots, k} |f_j(x^*) - f_j(x^{id})|.$$

Wektor optymalny jest wektorem, który minimalizuje kryterium globalne. Rozwiązanie optymalne zależy w sposób istotny od parametru p . Na przykład Boychuk i Ovchinnikov [4] sugerują przyjmowanie $p=1$, natomiast Salukvadze [25] - $p = 2$.

Jeżeli poszczególne funkcje $f_j(\mathbf{x})$ mają różne wymiary mnożymy je przez współczynniki M_j równe jedności, a mające taki wymiar, aby wyrażenia $M_j f_j(\mathbf{x})$ były bezwymiarowe.

W wielu pracach, np. [11, 25], przyjmowane jest kryterium globalne w postaci

$$(3.2) \quad F(p) = \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{f_j(\mathbf{x}^*) - f_j(\mathbf{x}^{id})}{f_j(\mathbf{x}^{id})} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Należy jednak zwrócić uwagę na to, że w przypadku kryterium (3.1) i $p = 2$ odległość między punktami określonymi w przestrzeni celu przez wektory $f_j(\mathbf{x}^*)$ i $f_j(\mathbf{x}^{id})$ jest minimalna, czyli $f_j(\mathbf{x}^*)$ oznacza najbliższy rozwiązania idealnego punkt należący do zbioru kompromisów. W przypadku kryterium (3.2) i $p = 2$ rozwiązanie $f_j(\mathbf{x}^*)$ nie jest punktem najbliższym rozwiązania idealnego. W przypadku kryterium (3.1) rozwiązanie preferowane zależne jest jednak od jednostek funkcji $f_j(\mathbf{x})$.

Rozwiązanie optymalne ma następujące własności [1].

1. Jeżeli zbiór kompromisów jest zbiorem zwartym, to rozwiązanie istnieje dla każdego $p \geq 1$.
2. Łączne odchylenie od rozwiązania idealnego reprezentowane liczbą $F(p)$ jest minimalne.
3. Dla $1 \leq p < \infty$, zbiór $F(p)$ jest podzbiorem zbioru kompromisów.
4. Jeżeli zbiór kompromisów jest wypukły, to rozwiązanie jest jednoznaczne.
5. Gdyby interpretować $F(p)$ jako ocenę rozwiązania \mathbf{x}^* z punktu widzenia n -tego kryterium to można pokazać [32], że przy małych p silniej uwzględnione są wszystkie kryteria $f_j(\mathbf{x})$, natomiast przy dużych p w większym stopniu minimalizowane są największe odchylenia od rozwiązania idealnego.

3.2. Metody charakteryzujące się informacjami a priori o preferencjach

Metoda funkcji użytkowych

Przy zastosowaniu tej metody zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej formułowane jest w sposób następujący: znaleźć minimum funkcji

$$U(f_1, f_2, \dots, f_k) = U_{\min}$$

przy spełnieniu warunków ograniczających

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Funkcja $U(f_1, f_2, \dots, f_k)$ nazywana jest funkcją użyteczności wielokryterialnej. Musi być ona określona na podstawie analizy celów, którym ma służyć rozwiązanie zagadnienia optymalizacji. Określenie tej funkcji może być w wielu przypadkach trudne. Zagadnieniem tym zajmowali się między innymi: Farguher [9], Fishburn [10] i Huber [12].

Rozwiązaniem zagadnienia jest punkt styczności zbioru kompromisów i krzywych równej użyteczności /warstwicy funkcji $U/$.

Funkcja użyteczności $U(f_1, f_2, \dots, f_k)$ może mieć różną postać. Najczęściej cechuje ją addytywność i rozdzielnosc względem funkcji celów [10], czyli

$$U(f_1, f_2, \dots, f_k) = U_1(f_1) + U_2(f_2) + \dots + U_k(f_k).$$

W szczególnym przypadku mogą być określone współczynniki wskazujące hierarchię ważności poszczególnych funkcji celu, wówczas

$$U(f_1, f_2, \dots, f_k) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x).$$

Mogą również występować inne postacie funkcji użyteczności, np.

$$U(f_1, f_2, \dots, f_k) = \prod_{i=1}^k U_i(f_i).$$

Zaletą tej metody jest jej prostota i sprowadzenie zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej do optymalizacji z jedną funkcją celu. Podstawową trudność stanowi natomiast określenie funkcji użyteczności.

Metoda ograniczonych funkcji celu

Metoda ta może być zastosowana, gdy możliwe jest określenie maksymalnych wartości, jakie muszą być osiągnięte przez poszczególne funkcje celu. Gdy jest to możliwe, zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej może być sformułowane w sposób następujący: znaleźć

$$\min f_r(x),$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

oraz

$$f_j(x) \leq u_j \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad j \neq r.$$

Inną odmianą tej metody jest podanie ograniczeń funkcji celu od dołu i od góry czyli dodanie jeszcze warunków

$$f_j(x) \geq l_j \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad j \neq r.$$

Zasadniczą trudnością przy stosowaniu tej metody jest określenie takich ograniczeń l_j i u_j , które zapewniłyby zarówno zadawalające spełnienie poszczególnych celów jak i istnienie nie pustego obszaru celu. Ponadto konieczna jest decyzja, którą z funkcji celu wybrać przy rozwiązywaniu zadania jako kryterium.

Metoda leksykograficzna

Metoda ta wymaga uszeregowania składowych wektora funkcji celu według ważności. Rozwiązaniem preferowanym w tej metodzie jest rozwiązanie, które minimalizuje funkcje celu poczyniając od najważniejszej do coraz to mniej ważnych.

Jeżeli wskaźniki od 1 do k wskazują hierarchiczną ważność, to zagadnienie optymalizacji można sformułować następująco: znaleźć

$$\min f_1(x)$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

rozwiązaniem tego zagadnienia jest \hat{x} i $\hat{f}(\hat{x})$.

Jeżeli rozwiązanie to jest jednoznaczne, to \hat{x} jest uważane jako rozwiązanie preferowane zagadnienia pierwotnego. W przeciwnym razie może być rozwiązane drugie: znaleźć

$$\min f_2(x)$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

i

$$f_1(x) = \hat{f}_1;$$

rozwiązaniem tego zagadnienia jest \hat{x}' i $\hat{f}(\hat{x}')$.

Jeżeli rozwiązanie to jest jednoznaczne, to \hat{x}' jest rozwiązaniem preferowanym zagadnienia pierwotnego. W przeciwnym razie postępujemy analogicznie jak wyżej i znajdujemy

$$\min f_j(x)$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$i \quad f_l(x) = \hat{f}_l \quad l = 1, 2, \dots, j-1.$$

Procedura kończy się z chwilą otrzymania rozwiązania jednoznacznego. Funkcje celu o niższej ważności są pomijane.

Metoda programowania celów

Przy stosowaniu tej metody niezbędne jest określenie wartości jakie powinny osiągać poszczególne funkcje celu. Rozwiąza-

niem preferowanym jest to rozwiązanie, które minimalizuje odchyłki od przyjętych wartości funkcji celu, czyli poszukujemy

$$\min \left[\sum_{j=1}^k (d_j^- + d_j^+) \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, & i &= 1, 2, \dots, m, \\ f_j(\mathbf{x}) + d_j^- - d_j^+ &= b_j, & j &= 1, 2, \dots, k, \\ d_j^-, d_j^+ &\geq 0, \\ d_j^-, d_j^+ &= 0, \end{aligned}$$

przy czym b_j , $j = 1, 2, \dots, k$ są ustalonymi żadanymi wartościami funkcji celów, a d_j^- i d_j^+ są odchyłkami ujemnymi i dodatnimi od tych wartości.

Najczęściej w tej metodzie oprócz ustalenia wartości b_j , określana jest również hierarchia funkcji celu. W tym przypadku sformułowanie zagadnienia ma postać :

$$\min [w_1 h_1(d^-, d^+), w_2 h_2(d^-, d^+), \dots, w_k h_k(d^-, d^+)]$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, & i &= 1, 2, \dots, m, \\ f_j(\mathbf{x}) + d_j^- - d_j^+ &= b_j, & j &= 1, 2, \dots, k, \\ d_j^-, d_j^+ &\geq 0, \\ d_j^-, d_j^+ &= 0. \end{aligned}$$

Funkcje $h_j(d^-, d^+)$, $j = 1, 2, \dots, k$ są liniowymi funkcjami odchyłek i są nazywane funkcjami osiągu; w_j są współczynnikami określającymi hierarchię celów, przy czym $w_j \gg w_{j+1}$. Oznacza to, że nie można dobrać takiej liczby λ , aby

$$\lambda w_{j+1} > w_j.$$

Rozwiązywanie rozpoczynamy od minimalizacji $h_1(d^-, d^+)$ i znajdujemy $\hat{h}_1 = \min h_1$. Następnie minimalizujemy $h_2(d^-, d^+)$, przy czym w żadnym przypadku nie może być $h_1 > \hat{h}_1$. Ten sposób postępowania jest kontynuowany, aż do osiągnięcia minimum

$h_k (d^-, d^+)$.

Metoda ta jest podobna do metody leksykograficznej z tym, że konieczne jest dodatkowo ustalenie pożądanych wartości funkcji celu.

Bardziej szczegółowo przedstawimy jeszcze to zagadnienie w przypadku, gdy wszystkie funkcje celu i ograniczenia są liniowe.

Sformułowanie pierwotne zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej jest następujące:

znaleźć

$$\min [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$\begin{aligned} g_i(x) &\leq c_i, & i &= 1, 2, \dots, m, \\ x_j &\geq 0 & j &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

przy czym

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \sum_{j=1}^n c_{tj} x_j, & t &= 1, 2, \dots, k, \\ g_i(x) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, & i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Sformułowanie tego zagadnienia dostosowane do rozwiązywania metodą programowania celów jest następujące:

znaleźć

$$\min [w_1 a_1(d^-, d^+), w_2 a_2(d^-, d^+), \dots, w_k a_k(d^-, d^+)]$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$\begin{aligned} g_i(x) + d_i^- - d_i^+ &= c_i, & i &= 1, 2, \dots, m, \\ f_t(x) + d_t^- - d_t^+ &= b_t, & t &= 1, 2, \dots, k, \\ d_i^-, d_i^+ &\geq 0, \\ d_i^-, d_i^+ &= 0, \end{aligned}$$

przez $g_i(x) + d_i^- - d_i^+ = c_i$ oznaczono ograniczenia absolutne,

a przez $f_t(x) + d_t^- - d_t^+ = b_t$ - ograniczenia celów.

Rozwiązywanie rozpoczynamy od minimalizacji funkcji

$a_1(d^-, d^+)$ i znalezienia $\hat{a}_1 = \min a_1$. Następnie jest minimalizowane $a_2(d^-, d^+)$, lecz w żadnym przypadku nie może być $a_1 > \hat{a}_1$. A więc funkcja osiągu występująca na dalszym miejscu w hierarchii nie może być poprawiona kosztem funkcji osiągu będącej wyżej w tej hierarchii. Proces jest kontynuowany, aż do zminimalizowania funkcji $a_k(d^-, d^+)$. Zagadnienie może być rozwiązywane za pomocą metody simpleks.

Można również zastosować sposób iteracyjny pozwalający na zdekomponowanie zadania na k następujących zadań pojedynczych /etapów/

E t a p 1.

Znaleźć $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

minimalizujący

$$a_1(d^-, d^+)$$

przy spełnieniu ograniczeń

$$g_i(x) + d_i^- - d_i^+ = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$d_i^-, d_i^+ \geq 0,$$

$$d_i^-, d_i^+ = 0.$$

Rozwiązywanie pierwszego zagadnienia związane jest ze spełnieniem ograniczeń absolutnych. Dlatego zwykle $\hat{a}_1 = \min a_1(d^-, d^+) = 0$. Jeżeli $\hat{a}_1 \neq 0$, to zagadnienie nie ma rozwiązania, gdyż obszar dopuszczalny wyznaczony przez ograniczenia $g_i(x)$ jest pusty. Jeżeli $\hat{a}_1 = 0$, to rozwiązanie etapu 1 istnieje i można przejść do etapu 2.

E t a p 2.

Znaleźć $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

minimalizujący

$$a_2(d^-, d^+)$$

przy ograniczeniach

$$(3.3) \quad g_i(x) + d_i^- - d_i^+ = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$(3.4) \quad a_1(d^-, d^+) \leq \hat{a}_1,$$

$$f_1(x) + d_{m+1}^- - d_{m+1}^+ = b_1,$$

$$d_i^-, d_i^+ \geq 0,$$

$$d_i^-, d_i^+ = 0.$$

Ograniczenia (3.3) i (3.4) gwarantują, że w czasie rozwiązywania etapu 2 zostaną zachowane wyniki uzyskane w etapie 1. W etapie 2 znajdujemy $\hat{a}_2 = \min a_2(d^-, d^+)$ i przechodzimy do etapu następnego. Wreszcie w etapie (j+1) dążymy do osiągnięcia celu j.

E t a p (j+1) .

Znaleźć $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

minimalizujący

$$a_{j+1}(d^-, d^+)$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x) + d_i^- - d_i^+ = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$a_i(d^-, d^+) \leq \hat{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

$$f_i(x) + d_{m+1}^- - d_{m+1}^+ = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

$$d_i^-, d_i^+ \geq 0,$$

$$d_i^-, d_i^+ = 0.$$

4. Zastosowanie optymalizacji wielokryterialnej w teorii konstrukcji.

4.1. Uwagi ogólne

W optymalizacji konstrukcji inżynierskich - budowlanych i maszynowych stosowana do tej pory optymalizacja skalarna /jednokryterialna/ nie zadawała w pełni inżynierów projektantów, gdyż zwykle przy podejmowaniu decyzji odnośnie wyboru rodzaju konstrukcji, a także przy jej projektowaniu i realizacji należy brać pod uwagę szereg kryteriów i warunków, których spełnienie

świadczy dopiero o pełnej przydatności konstrukcji. Co prawda przy optymalizacji skalarnej istnieje możliwość spełnienia niektórych kryteriów poprzez włączenie ich do zbioru ograniczeń, jednakże wtedy należy z góry ustalić poziom realizacji tych kryteriów, co czasami sprawia znaczne trudności.

Optymalizacja wielokryterialna pozwala na uwzględnienie wielu kryteriów, które często są konfliktowe. Optymalizacja wektorowa umożliwia znalezienie rozwiązania kompromisowego, w którym co prawda żadne kryterium nie osiąga pełnego ekstremum, ale które zapewnia spełnienie wszystkich wymagań w sposób możliwie najlepszy.

W optymalizacji konstrukcji obieramy zwykle kryteria minimum objętości, ciężaru lub kosztu. Kryterium minimum kosztów stanowi pewną integrację wielu wymagań stawianych konstrukcjom. Koszty mogą obejmować nie tylko koszty materiałowe, ale także koszty wykonania oraz użytkowania konstrukcji. Czasami można także włączyć koszty rozbiórki konstrukcji.

W optymalizacji konstrukcji istotne jest także kryterium minimum przemieszczeń w określonym punkcie, czy też określonym podobszarze konstrukcji. Kryterium minimum przemieszczeń może być zastąpione przez kryterium maksimum sztywności konstrukcji.

Ważnym kryterium w optymalizacji konstrukcji jest również niezawodność, czy też bezpieczeństwo konstrukcji.

Poniżej przedstawiono kilka przykładów optymalizacji wielokryterialnej przekrojów poprzecznych elementów zginanych i ściskanych.

4.2. Przykłady

P r z y k ł a d 1

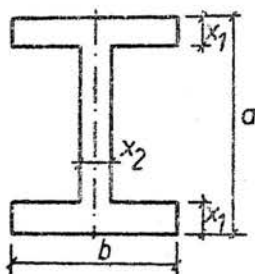
Sformułowanie zagadnienia. Zadanie polega na takim dobraniu wymiarów symetrycznego przekroju dwuteowego, aby stosunek pola przekroju do pola prostokąta o wymiarach ab (rys.4.1) był minimalny, a stosunek momentu bezwładności do momentu bezwładności tego prostokąta był maksymalny.

Jako zmienne decyzyjne przyjęto:

- grubość półki x_1 ,

- grubość środnika x_2 .

Wysokość przekroju a i szerokość półki b przyjęto jako dane.



Rys. 4.1.

Zmienne decyzyjne muszą spełniać następujące ograniczenia wynikające z przesłanek konstrukcyjnych

$$\xi_1 \leq x_1 \leq \frac{a}{2},$$

$$\xi_2 \leq x_2 \leq b.$$

Kryteria optymalizacji konstrukcji są następujące:

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{A}{ab} = 2 \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} (1 - 2 \frac{x_1}{a}) = \Phi_{1 \min},$$

$$\bar{\Phi}_2 = \frac{I_2}{a^3 b} = 1 - \frac{1}{12} (1 - \frac{x_2}{b}) (1 - 2 \frac{x_1}{a})^3.$$

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne decyzyjne $\xi_1 = \frac{x_1}{a}$ i $\xi_2 = \frac{x_2}{b}$ otrzymujemy następujące sformułowanie zadania.

Znaleźć

$$(4.1) \quad \bar{\Phi}_1 = 2 \xi_1 + \xi_2 (1 - 2 \xi_1) = \Phi_{1 \min}$$

oraz

$$(4.2) \quad \bar{\Phi}_2 = 1 - \frac{1}{12} (1 - \xi_2) (1 - 2 \xi_1)^3 = \Phi_{2 \max},$$

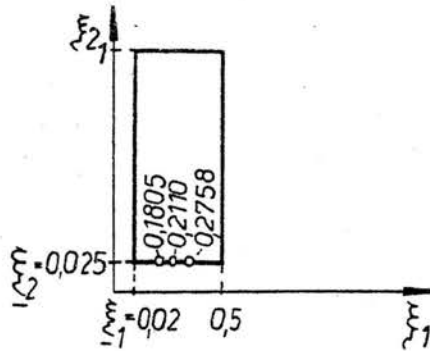
przy czym zmienne decyzyjne ξ_1 i ξ_2 muszą spełniać następujące warunki ograniczające

$$\frac{1}{2} \leq \xi_1 \leq \frac{1}{2}$$

oraz

$$\xi_2 \leq \xi_2 \leq 1.$$

Obszar rozwiązań dopuszczalnych jest prostokątem przedstawionym na rys. 4.2.



Rys. 4.2.

Wyznaczenie zbioru kompromisów. Funkcje celu Φ_1 i Φ_2 przekształcają obszar rozwiązań dopuszczalnych w obszar celu. Obszar ten znajdujemy w sposób następujący. Wyznaczając ξ_2 z równania (4.1) i podstawiając do (4.2) otrzymujemy zależność

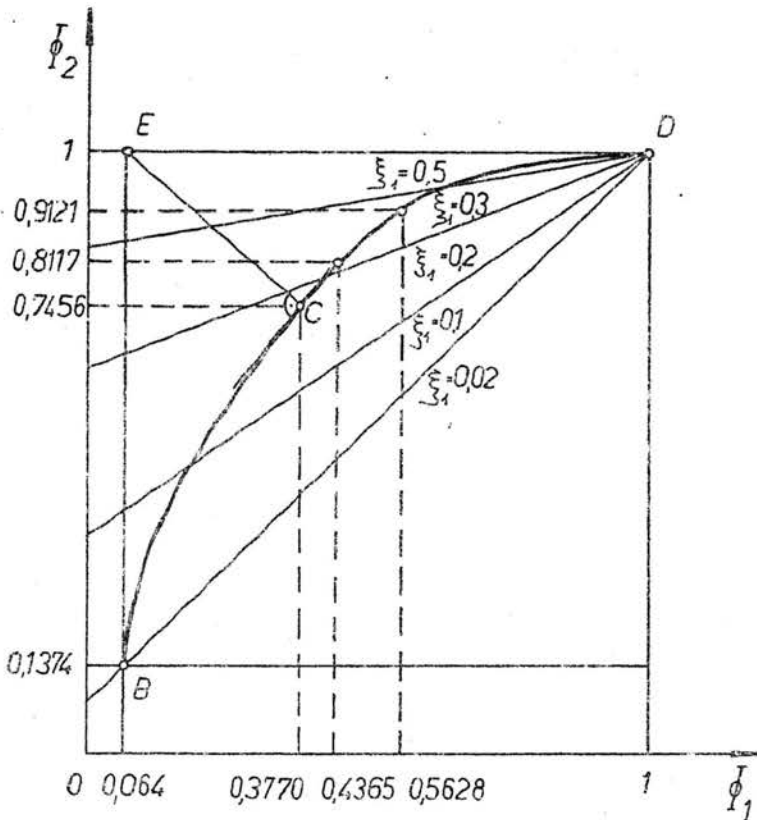
$$\Phi_2 = 1 - (1 - 2\xi_1)^2 (1 - \Phi_1),$$

wiążącą Φ_1 z Φ_2 , przy czym zmienną ξ_1 możemy traktować jako parametr. Na rys. 4.3 przedstawiono proste $\Phi_2(\Phi_1)$ przy różnych wartościach ξ_1 .

Prosta BD odpowiadająca $\xi_1 = \underline{\xi}_1$ wyznacza jeden z brzegów obszaru celu. Analogicznie, eliminując ξ_1 z układu równań (4.1), (4.2) otrzymujemy zależność

$$\bar{\Phi}_2 = 1 - \frac{(1 - \bar{\Phi}_1)^3}{(1 - \bar{\Phi}_2)^2}$$

Podstawiając $\bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_2$ otrzymujemy krzywą BCD (rys. 4.3) wyznaczającą inny odcinek brzegu obszaru celu. Na rys. 4.3 widzimy, że krzywa BCD stanowi zbiór kompromisów. W punkcie B minimum osiąga funkcja $\bar{\Phi}_1$, natomiast w punkcie D maksimum osiąga funkcja $\bar{\Phi}_2$.



Rys. 4.3

Wybór rozwiązania preferowanego. Rozwiązania preferowane określony kilkoma sposobami przedstawionymi w rozdziale 3.

Korzystając z metody kryterium globalnego przy $p = 1$ otrzymano

$$(4.3) \quad F^{(1)} = |\bar{\Phi}_1^* - \bar{\Phi}_1^{id}| + |\bar{\Phi}_2^* - \bar{\Phi}_2^{id}|.$$

Rozwiązanie idealnie jest równe

$$\bar{\Phi}_1^{id} = 2 \underline{\xi}_1 + \underline{\xi}_2 (1 - 2 \underline{\xi}_1)$$

oraz

$$\bar{\Phi}_2^{id} = 1.$$

Należy znaleźć minimum funkcji $F^{(1)}$ przy zachowaniu warunku

$$(4.4) \quad \bar{\Phi}_2^* = 1 - \frac{(1 - \bar{\Phi}_1^*)^3}{(1 - \underline{\xi}_2)^2}.$$

Podstawiając wyrażenie (4.4) do zależności (4.3) oraz uwzględniając to, że $\bar{\Phi}_2^{id} = 1$ mamy

$$F^{(1)} = \bar{\Phi}_1^* - \bar{\Phi}_1^{id} - \frac{(1 - \bar{\Phi}_1^*)^3}{(1 - \underline{\xi}_2)^2}.$$

Wypisując warunek konieczny minimum funkcji $F^{(1)}$ otrzymujemy

$$\frac{dF^{(1)}}{d\bar{\xi}_1} = 1 - \frac{3(1 - \bar{\Phi}_1^*)^2}{(1 - \underline{\xi}_2)^2} = 0.$$

Stąd

$$\bar{\Phi}_1^{(1)} = 1 - \frac{1 - \underline{\xi}_2}{\sqrt{3}}.$$

oraz

$$\bar{\Phi}_2^{(1)} = 1 - \frac{1 - \underline{\xi}_2}{3\sqrt{3}}.$$

Odpowiadające tym wartościom funkcji celu zmienne decyzyjne

$\bar{\xi}_1^{(1)}$ i $\bar{\xi}_2^{(1)}$ znajdujemy z układu równań

$$2 \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 (1 - 2 \bar{\xi}_1) = \bar{\Phi}_1^{(1)}$$

$$1 - (1 - \bar{\xi}_2)(1 - 2 \bar{\xi}_1)^3 = \bar{\Phi}_2^{(1)}.$$

Postępując analogicznie przy $p = 2$ otrzymujemy kryterium globalne w postaci

$$(4.5) \quad F^{(2)} = \sqrt{(\bar{\Phi}_1^* - \bar{\Phi}_1^{id})^2 + (\bar{\Phi}_2^* - \bar{\Phi}_2^{id})^2}.$$

Podstawiając wyrażenie (4.4) do (4.5) oraz przyjmując $\bar{\Phi}_2^{id} = 1$ mamy

$$(4.6) \quad F^{(2)} = \sqrt{(\bar{\Phi}_1^* - \bar{\Phi}_1^{id})^2 + \frac{(1 - \bar{\Phi}_1^*)^6}{(1 - \underline{\xi}_2)^4}}.$$

Z warunku koniecznego minimum funkcji $F^{(2)}$ otrzymujemy następujące równanie

$$(1 - \bar{\Phi}_1^*)^5 - \frac{1}{3}(1 - \underline{\xi}_2)^4 (\bar{\Phi}_1^* - \bar{\Phi}_1^{id}) = 0,$$

z którego numerycznie wyznaczamy $\bar{\Phi}_1^{(2)}$,

Następnie z zależności (4.4) znajdujemy $\bar{\Phi}_2^{(2)}$ a z układu równań (4.1) i (4.2) odpowiednie wartości zmiennych decyzyjnych $\underline{\xi}_1^{(2)}$ i $\underline{\xi}_2^{(2)}$.

Korzystając z metody funkcji użytkowych wyznaczmy rozwiązanie preferowane przyjmując funkcję użyteczności w postaci

$$(4.7) \quad U(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2) = w_1 \bar{\Phi}_1 + w_2 \bar{\Phi}_2 = \\ = w_1 [2\underline{\xi}_1 + \underline{\xi}_2(1 - 2\underline{\xi}_1)] - w_2 [1 - (1 - \underline{\xi}_2)(1 - 2\underline{\xi}_1)^3].$$

Należy znaleźć minimum funkcji U przy warunkach ograniczających

$$\underline{\xi}_1 \leq \bar{\xi}_1 \leq \frac{1}{2},$$

$$\underline{\xi}_2 \leq \bar{\xi}_2 \leq 1.$$

Ponieważ funkcja użyteczności U jest liniowo zależna od zmiennej decyzyjnej $\underline{\xi}_2$, więc jej minimum występuje wtedy, gdy przyjmuje ona jedną z wartości granicznych, w tym przypadku

$\underline{\xi}_2 = \underline{\bar{\xi}}_2$. Poszukujemy zatem minimum funkcji U względem $\underline{\xi}_1$ przy $\underline{\xi}_2 = \underline{\bar{\xi}}_2$. Wypisując warunek konieczny tego minimum otrzymujemy

$$(4.8) \quad 2w_1(1 - \underline{\bar{\xi}}_2) - 6w_2(1 - \underline{\bar{\xi}}_2)(1 - 2\underline{\xi}_1)^2 = 0.$$

Z równania (4.8) znajdujemy

$$\bar{x}_1^{pr} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{w_1}{3w_2}} \right).$$

Znając zmienne decyzyjne obliczamy odpowiadające im wartości funkcji celu z zależności (4.1) i (4.2).

Przykład liczbowy. Przyjęto następujące wymiary przekroju: wysokość przekroju $a = 1000$ mm, szerokość pólki $b = 400$ mm, minimalną grubość pólki $- \underline{x}_1 = 20$ mm, minimalną grubość środnika $\underline{x}_2 = 10$ mm.

Przy tych wymiarach: $\bar{x}_1 = 0,02$, $\bar{x}_2 = 0,025$; $\bar{\phi}_1 = 0,064$,
 $\bar{\phi}_1 = 1$, $\bar{\phi}_2 = 0,1374$, $\bar{\phi}_2 = 1$.

Rozwiązania preferowane w poszczególnych przypadkach mają następujące wartości liczbowe:

- rozwiązanie wyznaczone metodą kryterium globalnego przy $p=1$
 $\bar{x}_1^{(1)} = 0,2758$, $\bar{x}_2^{(1)} = 0,025$, $\bar{\phi}_1^{(1)} = 0,5628$, $\bar{\phi}_2^{(1)} = 0,9121$;

- rozwiązanie wyznaczone metodą kryterium globalnego przy $p=2$
 $\bar{x}_1^{(2)} = 0,1805$, $\bar{x}_2^{(2)} = 0,025$, $\bar{\phi}_1^{(2)} = 0,3770$, $\bar{\phi}_2^{(2)} = 0,7456$;

- rozwiązanie wyznaczone metodą funkcji użytkowych przy
 $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$

$\bar{x}_1 = 0,2110$, $\bar{x}_2 = 0,025$, $\bar{\phi}_1 = 0,4365$, $\bar{\phi}_2 = 0,8117$.

Powyższe rozwiązania zaznaczono na rys. 4.2 i 4.3.

P r z y k ł a d 2

Sformułowanie zadania. Zadanie polega na takim dobraniu wymiarów przekroju prostokątnego belki aby funkcja $\bar{\phi}_1$ proporcjonalna do objętości belki była minimalna i funkcja $\bar{\phi}_2$ proporcjonalna do energii sprężystej powstającej w belce pod działaniem obciążeń zginających i ściskających też była minimalna.

Jako zmienne decyzyjne przyjęto:

- wysokość belki x_1 ,
- szerokość belki x_2 .

Przyjęto, że zmienne decyzyjne muszą być zawarte w przedziałach:

$$\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1,$$

$$\underline{x}_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2.$$

Kryteria optymalizacji są następujące:

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{V}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 l} = \frac{1}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 l} \int_0^l v dx = \frac{x_1}{\bar{x}_1} \frac{x_2}{\bar{x}_2} = \bar{\Phi}_{1 \min}$$

$$\bar{\Phi}_2 = \frac{2E\bar{x}_1 \bar{x}_2 U}{N^2 l} = \frac{2E\bar{x}_1 \bar{x}_2}{N^2 l} \left(\int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} \right) = \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2}{N^2 l} \left(\frac{12M^2}{N^2} \frac{1}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \frac{1}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \right) = \bar{\Phi}_{2 \min}$$

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne decyzyjne $\xi_1 = \frac{x_1}{\bar{x}_1}$ i $\xi_2 = \frac{x_2}{\bar{x}_2}$ otrzymujemy następujące sformułowanie zadania.

Znaleźć minimum funkcji celu

$$(4.9) \quad \bar{\Phi}_1 = \xi_1 \xi_2 = \bar{\Phi}_{1 \min}$$

i

$$(4.10) \quad \bar{\Phi}_2 = \frac{k}{\xi_1^2 \xi_2} + \frac{1}{\xi_1 \xi_2} = \bar{\Phi}_{2 \min};$$

gdzie $k = \frac{12M^2}{N^2 \bar{x}_1^2}$.

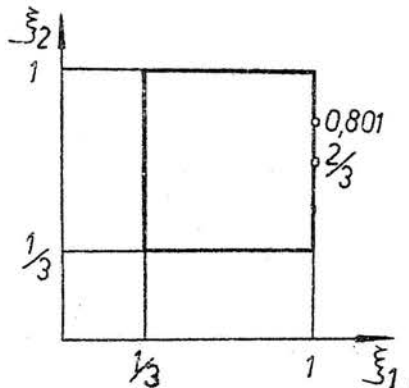
Przy czym zmienne decyzyjne ξ_1 i ξ_2 muszą spełniać następujące warunki ograniczające

$$\xi_1 \leq \xi_1 \leq 1$$

oraz

$$\xi_2 \leq \xi_2 \leq 1.$$

Obszar rozwiązań dopuszczalnych jest prostokątem przedstawionym na rys. 4.4.



Rys. 4.4.

Wyznaczenie zbioru kompromisów. Funkcje celu $\bar{\Phi}_1$ i $\bar{\Phi}_2$ przekształcają obszar rozwiązań dopuszczalnych w obszar celu. Obszar ten znajdujemy w sposób następujący. Wyznaczając $\bar{\Phi}_2$ z równania (4.9) i podstawiając do (4.10) otrzymujemy zależność

$$(4.11) \quad \bar{\Phi}_2 = \left(1 + \frac{k}{\bar{\Phi}_1} \right) \frac{1}{\bar{\Phi}_1}.$$

Przyjmując $\bar{\Phi}_1 = \underline{\bar{\Phi}}_1$ i $\bar{\Phi}_1 = 1$ otrzymujemy na podstawie wzoru (4.11) odcinki brzegu obszaru celu AE i BC (rys. 4.5).

Analogicznie eliminując z układu równań (4.9) i (4.10) $\bar{\Phi}_1$ otrzymujemy zależność

$$(4.12) \quad \bar{\Phi}_2 = \frac{k \bar{\Phi}_2^2}{\bar{\Phi}_1^3} + \frac{1}{\bar{\Phi}_1},$$

z której wyznaczamy dalsze odcinki brzegu obszaru celu AB i EC, przyjmując $\bar{\Phi}_2 = \underline{\bar{\Phi}}_2$ i $\bar{\Phi}_2 = 1$, (rys. 4.5).

Zbiór kompromisów składa się w tym przypadku z dwóch odcinków (rys. 4.5) :

- odcinka AB o równaniu $\bar{\Phi}_2 = \frac{k \bar{\Phi}_2^2}{\bar{\Phi}_1^3} + \frac{1}{\bar{\Phi}_1}$,
- odcinka BC o równaniu $\bar{\Phi}_2 = (1 + k) \frac{1}{\bar{\Phi}_1}$.

Wybór rozwiązania preferowanego. Rozwiązanie preferowane określimy metodą kryterium globalnego przyjmując $p = 2$ oraz metodą funkcji użytkowych.

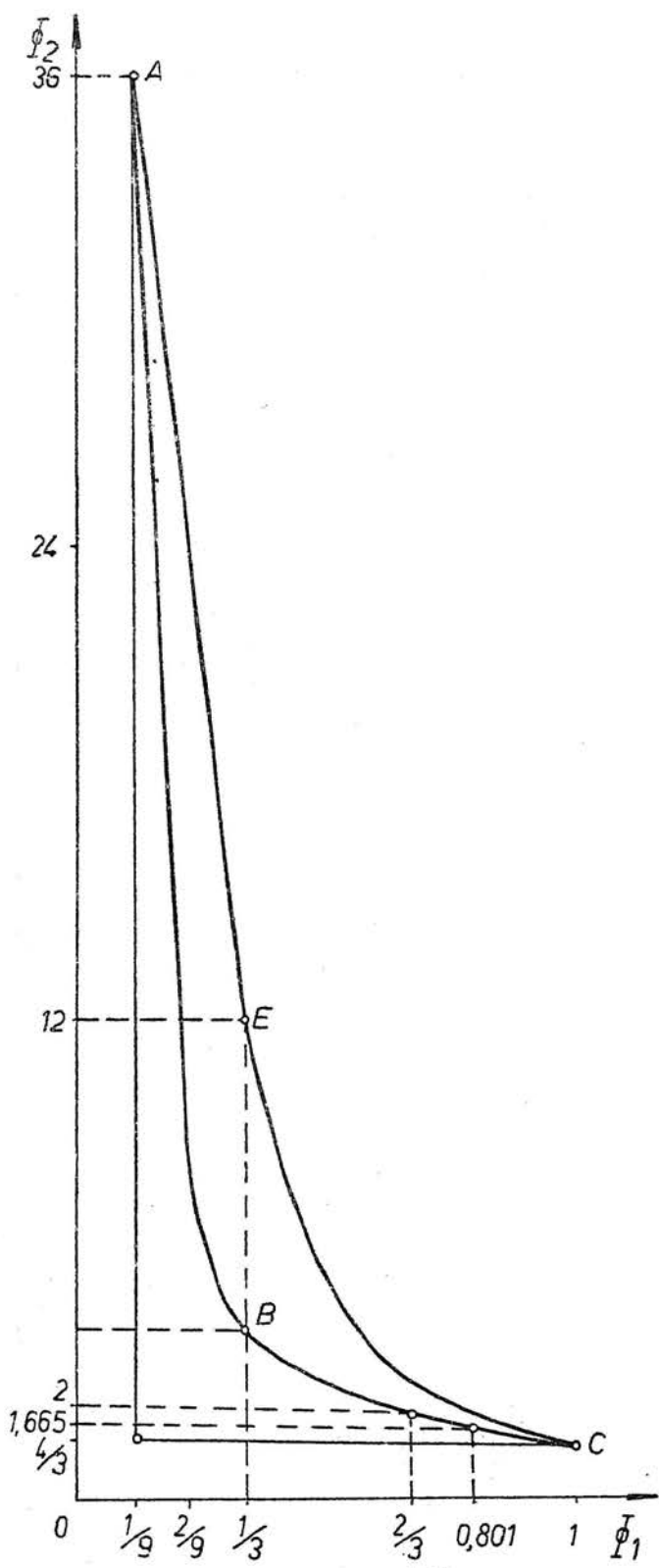
W przypadku pierwszym kryterium globalne ma postać

$$(4.13) \quad F^{(2)} = \sqrt{(\bar{\Phi}_1^* - \bar{\Phi}_1^{id})^2 + (\bar{\Phi}_2^* - \bar{\Phi}_2^{id})^2}$$

Rozwiązanie idealne jest następujące: $\bar{\Phi}_1^{id} = \underline{\bar{\Phi}}_1, \underline{\bar{\Phi}}_2$, $\bar{\Phi}_2^{id} = k + 1$.

Należy znaleźć minimum funkcji $F^{(2)}$ przy zachowaniu warunku

$$(4.14) \quad \bar{\Phi}_2^* = (k + 1) \frac{1}{\bar{\Phi}_1^*}$$



Rys. 4.5

zakładając, że rozwiązanie leży na odcinku BC zbioru kompromisów. Podstawiając wyrażenie (4.14) do równania (4.13) mamy

$$F^{(2)} = \sqrt{\left(\bar{\phi}_1^* - \frac{F_1 F_2}{F_1^* F_2^*}\right)^2 + (1+k)^2 \left(\frac{1}{\bar{\phi}_1^*} - 1\right)^2}.$$

Wypisując warunek konieczny minimum funkcji $F^{(2)}$ otrzymujemy:

$$\bar{\phi}_1^* - \frac{F_1 F_2}{F_1^* F_2^*} - (1+k)^2 \left(\frac{1}{\bar{\phi}_1^*} - 1\right) \frac{1}{\bar{\phi}_1^{*2}} = 0,$$

z którego numerycznie wyznaczamy $\bar{\phi}_1^{(k)}$. Następnie ze wzoru (4.14) obliczamy $\bar{\phi}_2^{(k)}$ oraz z układu równań (4.9) i (4.10) wyznaczamy zmienne decyzyjne $F_1^{(k)}$ i $F_2^{(k)}$.

W przypadku drugim przyjęto funkcję użyteczności w postaci

$$(4.15) \quad U(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2) = w_1 \bar{\phi}_1 + w_2 \bar{\phi}_2 = w_1 \frac{F_1}{F_1^*} + w_2 \left(\frac{k}{F_1^* F_2^*} + \frac{1}{F_1^* F_2^*} \right).$$

Należy znaleźć minimum funkcji U przy warunkach ograniczających

$$\begin{aligned} \underline{F}_1 &\leq F_1 \leq 1, \\ \underline{F}_2 &\leq F_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Ponieważ spodziewamy się, że rozwiązanie leży na odcinku BC zbioru kompromisów przeto przyjmujemy $F_1 = 1$ i poszukujemy minimum funkcji U względem F_2 .

Warunek konieczny tego minimum jest następujący:

$$w_1 - w_2 \left(\frac{k}{F_2^*} + \frac{1}{F_2^*} \right) = 0.$$

Stąd

$$F_2^* = \sqrt{\frac{(k+1)w_2}{w_1}}.$$

Znając zmienne decyzyjne obliczamy odpowiadające im wartości funkcji celu z zależności (4.9) i (4.10).

Przykład liczbowy. Przyjęto następujące dane liczbowe: moment zginający $M = 30$ kNm, siłę ściskającą $N = 300$ kN, maksymalną wysokość przekroju $\bar{x}_1 = 0,60$ m, minimalną wysokość przekroju $\underline{x}_1 = 0,20$ m, maksymalną szerokość przekroju $\bar{x}_2 = 0,30$ m,

minimalną szerokość przekroju $x_2 = 0,10$ m.

Przy tych danych : $k = \frac{1}{3}$; $\bar{x}_1 = \frac{1}{3}$; $\bar{x}_2 = \frac{1}{3}$, $\bar{\phi}_1 = \frac{1}{9}$,
 $\bar{\phi}_2 = \frac{4}{3}$, $\bar{\phi}_1 = 1$, $\bar{\phi}_2 = 36$.

Rozwiązania preferowane w poszczególnych przypadkach mają następujące wartości liczbowe:

- rozwiązanie wyznaczone metodą kryterium globalnego

$$\bar{x}_1^{(g)} = 1, \quad \bar{x}_2^{(g)} = 0,801, \quad \bar{\phi}_1^{(g)} = 0,801, \quad \bar{\phi}_2^{(g)} = 1,665 ;$$

- rozwiązanie wyznaczone metodą funkcji użytkowych przy $w_1 = \frac{3}{4}$

$$\text{i } w_2 = \frac{1}{4}$$

$$\bar{x}_1 = 1, \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3}, \quad \bar{\phi}_1 = \frac{2}{3}, \quad \bar{\phi}_2 = 2.$$

Powyższe rozwiązania zaznaczone na rys. 4.4 i 4.5.

P r z y k ł a d 3

Sformułowanie zadania. Celem optymalizacji jest dobranie takiej szerokości belki prostokątnej z betonu sprężystego i takiej wielkości siły sprężającej, aby objętość betonu i stali sprężającej były minimalne. Rozpatrywane są dwa skrajne stany obciążenia belki wywołujące momenty zginające M_1 i M_2 .

Jako zmienne decyzyjne przyjęto:

- szerokość belki b ,
- wielkość siły sprężającej P ,

Wysokość przekroju h przyjęto jakb daną.

Zmienne decyzyjne muszą spełniać:

- warunki wytrzymałościowe w dwóch stanach obciążenia

$$\frac{P}{bh^2} + \frac{6(M_1 - Pe)}{bh^2} \leq \bar{\sigma},$$

$$(4.16) \quad \frac{P}{bh} - \frac{6(M_1 - Pe)}{bh^2} \geq \bar{\sigma},$$

$$\frac{P}{bh} + \frac{6(M_2 - Pe)}{bh^2} \geq \bar{\sigma},$$

$$\frac{P}{bh} - \frac{6(M_2 - Pe)}{bh^2} \leq \bar{\sigma};$$

- warunki konstrukcyjne

$$b \geq \underline{b},$$

$$P \geq 0.$$

Przyjęto mimosród siły sprężającej $e = \frac{h}{2} - d$, gdzie d oznacza minimalną odległość środka ciężkości kabli sprężających od spodu belki.

Kryteria optymalizacji są następujące:

$$(4.17) \quad A = hb = A_{\min} ,$$

$$(4.18) \quad P = P_{\min} .$$

Układ nierówności (4.16) przedstawimy w postaci następującej :

$$(4.19) \quad \bar{\sigma} h^2 b + 2 (h - 3d) P - 6M_1 \geq 0 ,$$

$$(4.20) \quad \underline{\sigma} h^2 b - 2 (2h - 3d) P + 6M_1 \leq 0 ,$$

$$(4.21) \quad \underline{\sigma} h^2 b + 2 (h - 3d) P - 6M_2 \leq 0 ,$$

$$(4.22) \quad \bar{\sigma} h^2 b - 2 (2h - 3d) P + 6M_2 \geq 0 .$$

Ten układ nierówności jest liniowy względem zmiennych decyzyjnych i wyznacza w płaszczyźnie b, P czworokąt BCDE stanowiący obszar rozwiązań dopuszczalnych (rys.4.6) . Współrzędne poszczególnych wierzchołków leżące na przecięciu ograniczeń (4.19) ÷ (4.22) są następujące .

Punkt B, na przecięciu ograniczeń (4.19) i (4.20)

$$b_B = \frac{6M_1}{\bar{\sigma} h^2 + (\bar{\sigma} + \underline{\sigma}) h (h - 3d)} ,$$
$$P_B = \frac{3M_1 (\bar{\sigma} + \underline{\sigma})}{\bar{\sigma} h + (\bar{\sigma} + \underline{\sigma}) (h - 3d)} .$$

Punkt C, na przecięciu ograniczeń (4.19) i (4.22)

$$b_C = \frac{2 (2M_1 - M_2)}{\bar{\sigma} h (h - 2d)} - \frac{6d (M_1 - M_2)}{\bar{\sigma} h^2 (h - 2d)} ,$$
$$P_C = \frac{M_1 + M_2}{h - 2d} .$$

Punkt D, na przecięciu ograniczeń (4.21) i (4.22)

$$h_D = \frac{6M_2}{\underline{\epsilon} h^2 + (\bar{\epsilon} + \underline{\epsilon}) h (h - 3d)}$$

$$P_D = \frac{3M_2 (\bar{\epsilon} + \underline{\epsilon})}{\underline{\epsilon} h + (\bar{\epsilon} + \underline{\epsilon})(h - 3d)}$$

Punkt E, na przecięciu ograniczeń (4.20) i (4.21)

$$h_E = \frac{2(2M_2 - M_1)}{\underline{\epsilon} h (h - 2d)} + \frac{6d(M_1 - M_2)}{\underline{\epsilon} h^2 (h - 2d)}$$

$$P_E = \frac{M_1 + M_2}{h - 2d}$$

W pewnych przypadkach ograniczenia konstrukcyjne mogą być aktywne i wówczas część czworokąta BCDE nie należy do obszaru rozwiązań dopuszczalnych.

Wyznaczenie zbioru kompromisów. Funkcje celu (4.17) i

(4.18) są liniowe i przekształcają czworokąt BCDE w czworokąt B'C'D'E' (rys. 4.7) o współrzędnych:

- punkt B' ($A_{B'} = hb_B, P_B$) ,
- punkt C' ($A_{C'} = hb_C, P_C$) ,
- punkt D' ($A_{D'} = hb_D, P_D$) ,
- punkt E' ($A_{E'} = hb_E, P_E$) .

Zbiorem kompromisów jest odcinek B'C' (rys. 4.7) .

Wybór rozwiązania preferowanego. Rozwiązanie preferowane określimy kilkoma sposobami przedstawionymi w rozdziale 3.

Korzystając z metody kryterium globalnego przy $p = 1$ otrzymano:

$$(4.23) \quad F^{(1)} = |A^* - A^{id}| + \mu |P^* - P^{id}|, \quad \mu = 1 \text{ m}^2/\text{kN}.$$

Rozwiązanie idealne jest równe:

$$A = A_{B'} = \frac{6M_1}{\bar{\sigma}h + (\bar{\sigma} + \underline{\sigma})(h - 3d)}$$

$$P = P_{C'} = \frac{M_1 + M_2}{h - 2d}$$

Należy znaleźć minimum funkcji celu $F^{(1)}$ leżące na odcinku $B'C'$ (rys.4.7). Funkcja $F^{(1)}$ jest liniowa, zatem jej minimum leży w punkcie B' lub C' , albo w przypadku szczególnym prosta (4.23) może być równoległą do odcinka $B'C'$ i wówczas każdemu punktowi tego odcinka odpowiada jednakowa minimalna wartość $F^{(1)}$.

Przy $p = 2$ otrzymujemy kryterium globalne w postaci

$$(4.24) \quad F^{(2)} = \sqrt{(A^* - A^{id})^2 + h^2(P^* - P^{id})^2}$$

Należy znaleźć minimum funkcji $F^{(2)}$ leżące na prostej $B'C'$ o równaniu

$$(4.25) \quad P - P_{B'} = \frac{P_{C'} - P_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}} (A - A_{B'})$$

Podstawiając wyrażenie (4.25) do (4.24) mamy

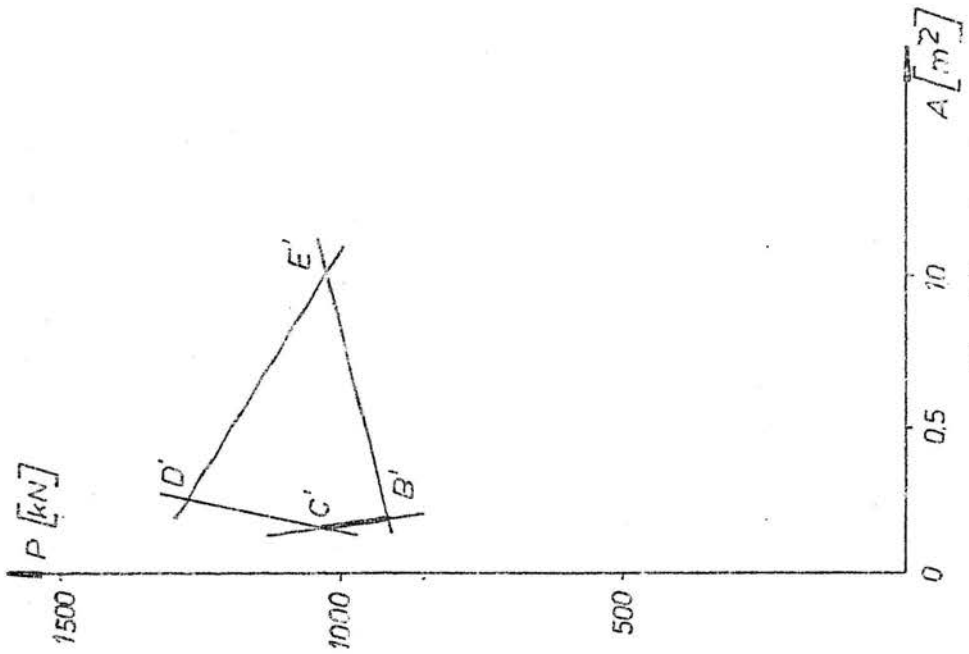
$$F^{(2)} = \sqrt{(A - A_{B'})^2 + h^2(P_{B'} - P_{C'})^2 \left(1 - \frac{A - A_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}}\right)^2}$$

Wypisując warunek konieczny minimum funkcji $F^{(2)}$ otrzymujemy równanie

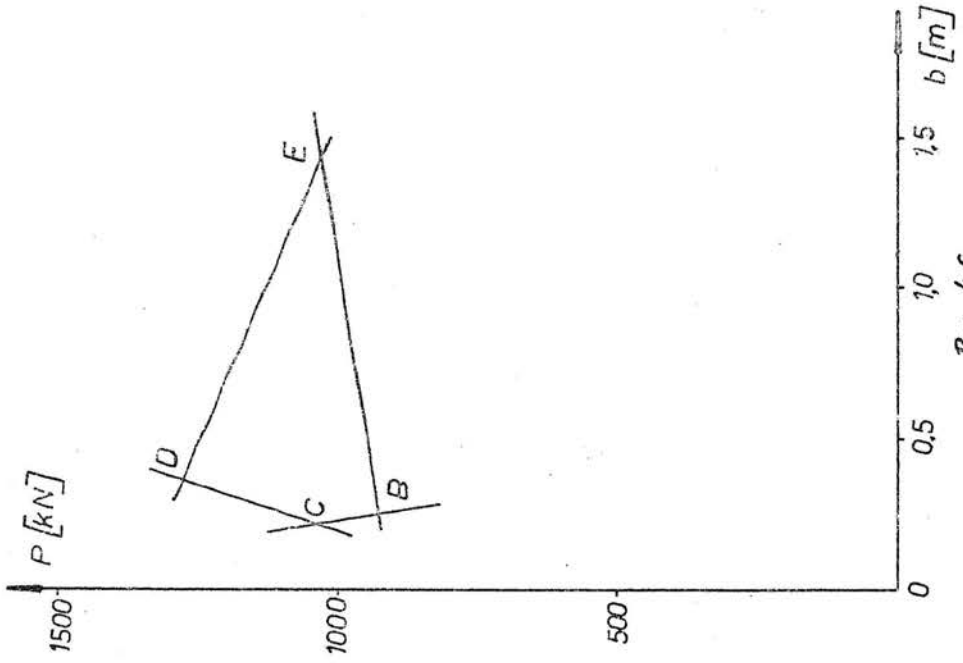
$$A - A_{B'} - h^2 \left(1 - \frac{A - A_{B'}}{A_{C'} - A_{B'}}\right) \frac{(P_{B'} - P_{C'})^2}{A_{C'} - A_{B'}} = 0,$$

z którego znajdujemy

$$A^{(2)} = A_{B'} + \frac{h^2(P_{B'} - P_{C'})^2 (A_{C'} - A_{B'})}{h^2(P_{B'} - P_{C'})^2 + (A_{C'} - A_{B'})^2}$$



Rys. 4.5



Rys. 4.6

Następnie z równania (4 25) wyznaczamy

$$P(2) = P_{B'} - \frac{M^2 (P_{B'} - P_{C'})^3}{M^2 (P_{B'} - P_{C'})^2 + (z_{C'} - A_{B'})^2}$$

Odpowiadając tym wartościom funkcji celu zmienne decyzyjne są równe : $b(2) = \frac{1}{h} A(2)$ i $P(2)$.

Korzystając z metody funkcji użytkowych wyznaczymy rozwiązanie preferowane przyjmując funkcję użyteczności w postaci

$$U(A, P) = A + kP = hb + kP.$$

Należy wyznaczyć minimum funkcji U leżące w obszarze rozwiązań dopuszczalnych (rys.4.6). Funkcja U jest liniowa i jej minimum leży w punkcie B jeżeli współczynnik $k < \frac{h(b_B - b_C)}{P_C - P_B}$ lub w punkcie C jeżeli $k > \frac{h(b_B - b_C)}{P_C - P_B}$. Jeżeli $k = \frac{h(b_E - b_C)}{P_C - P_B}$,

to każdemu punktowi odcinka BC odpowiada jednakowa minimalna wartość funkcji U .

Przykład liczbowy. Przyjęto następujące dane liczbowe: momenty zginające $M_1 = 375$ kNm, $M_2 = 250$ kNm, wysokość belki $h = 0,70$ m, minimalna szerokość belki $b = 0,10$ m, odległość środka ciężkości kabli sprężających od spodu belki $d = 0,05$ m, naprężenia dopuszczalne w betonie $\bar{\sigma} = 10000$ kN/m² i $\bar{\epsilon} = 500$ kN/m².

Przy tych danych współrzędne wierzchołków czworokąta określającego obszar rozwiązań dopuszczalnych są następujące:

- punkt B $b_B = 0,2516$ m, $P_B = 924,7$ kN,
- punkt C $b_C = 0,2252$ m, $P_C = 1041,7$ kN,
- punkt D $b_D = 0,3500$ m, $P_D = 1285,7$ kN,
- punkt E $b_E = 1,4456$ m, $P_E = 1041,7$ kN.

Wierzchołki czworokąta określającego obszar celu mają współrzędne następujące:

- punkt B' $A_{B'} = 0,176 \text{ m}^2$, $P_{B'} = 924,7 \text{ kN}$,
- punkt C' $A_{C'} = 0,158 \text{ m}^2$, $P_C = 1041,7 \text{ kN}$,
- punkt D' $A_{D'} = 0,245 \text{ m}^2$, $P_D = 1285,7 \text{ kN}$,
- punkt E' $A_{E'} = 1,0119 \text{ m}^2$, $P_E = 1041,7 \text{ kN}$.

Rozwiązaniem idealnym jest punkt o współrzędnych: $A^{id} = 0,158 \text{ m}^2$ i $P^{id} = 924,7 \text{ kN}$.

Rozwiązania preferowane w poszczególnych przypadkach mają następujące wartości liczbowe:

- rozwiązanie wyznaczone metodą kryterium globalnego przy $p=1$

$$b^{(1)} = 0,2516 \text{ m}, \quad A^{(1)} = 0,176 \text{ m}^2, \quad P^{(1)} = 924,7 \text{ kN};$$

(punkty B i B' na rys. 4.6 i 4.7),

- rozwiązanie wyznaczone metodą kryterium globalnego przy $p=2$

$$b^{(2)} = 0,2516 \text{ m}, \quad A^{(2)} = 0,176 \text{ m}^2, \quad P^{(2)} = 924,7 \text{ kN};$$

(punkty B i B' na rys. 4.6 i 4.7)

- rozwiązania wyznaczone metodą funkcji użytkowych

$$b = 0,2516 \text{ m}, \quad A = 0,176 \text{ m}^2, \quad P = 924,7 \text{ kN}, \text{ jeżeli}$$

$$k < 0,0001579,$$

(punkty B i B' na rys. 4.6 i 4.7),

$$b = 0,2252 \text{ m}, \quad A = 0,158 \text{ m}^2, \quad P = 1041,7 \text{ kN}, \text{ jeżeli}$$

$$k > 0,0001579,$$

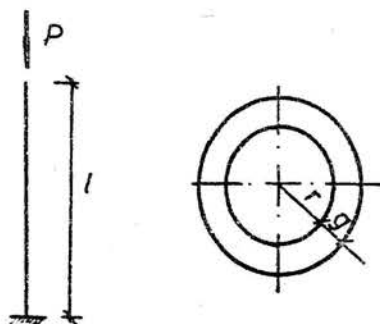
(punkty C i C' na rys. 4.6 i 4.7).

P r z y k ł a d 4

Sformułowanie zadania. Zadanie polega na takim doborze promienia i grubości ścianki przekroju rurowego słupa ściskanego osiowo, aby pole przekroju było minimalne, a siła krytyczna maksymalna.

Jako zmienne decyzyjne przyjęto:

- promień wewnętrzny rury r (rys. 4.8),
- grubość ścianki rury g .



Rys. 4.8

Zmienne decyzyjne muszą spełniać następujące warunki ograniczające:

- grubość ścianki musi być większa od minimalnej, wynikającej z warunków technologicznych

$$(4.26) \quad g \geq \underline{g}$$

- naprężenia ściskające w przekroju słupa muszą być mniejsze od dopuszczalnych

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \bar{\sigma}$$

czyli

$$(4.27) \quad \pi (r + g)^2 - \pi r^2 = \pi g (2r + g) \geq \frac{P}{\bar{\sigma}}$$

Kryterią optymalizacji są następujące:

- pole przekroju słupa

$$(4.28) \quad A = \pi g (2r + g) = A_{\min}$$

- siła krytyczna

$$(4.29) \quad P_{kr} = \frac{\pi^2 E J}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{4 l^2} [(r + g)^4 - r^4] = P_{kr \max}$$

Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy metodą leksykograficzną przyjmując jako ważniejsze kryterium (4.26).

Należy zatem najpierw znaleźć minimum funkcji $A(g, r)$ przy warunkach ograniczających (4.25) i (4.27). Jest oczywiste, że rozwiązaniem tym jest

$$A = \frac{P}{\pi \delta}$$

czyli

$$(4.30) \quad g(2r + g) = \frac{P}{\pi \delta}.$$

Rozwiązanie to nie jest jednoznaczne. Możemy zatem poszukiwać maksimum wyrażenia (4.29) przy warunku (4.30) oraz ograniczeniach (4.25) i (4.27).

Wyznaczając z równania (4.30)

$$r = \frac{\frac{P}{\pi \delta} - g^2}{2g}$$

i wstawiając to wyrażenie do funkcji (4.29), po przekształceniach mamy

$$(4.31) \quad P_{kr} = \frac{\pi^2 E P}{4l^2 \delta} \left[\left(\frac{\frac{P}{\pi \delta} + g^2}{2g} \right)^2 + \left(\frac{\frac{P}{\pi \delta} - g^2}{2g} \right)^2 \right].$$

Badając ekstrema funkcji (4.31) ze względu na zmienną decyzyjną g stwierdzamy, że jej maksimum leży na granicy przedziału zmienności g , czyli

$$g = \underline{g}.$$

Rozwiązanie zatem jest następujące:

$$g = \underline{g},$$
$$r = \frac{\frac{P}{\pi \delta} - \underline{g}^2}{2\underline{g}},$$
$$A_{\min} = \frac{P}{\pi \delta},$$

$$P_{kr \max} = \frac{\pi^2 E P}{4l^2 \delta} \left[\left(\frac{\frac{P}{\pi \delta} + \underline{g}^2}{2\underline{g}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{P}{\pi \delta} - \underline{g}^2}{2\underline{g}} \right)^2 \right].$$

Prace cytowane w tekście

1. AMELJAŃCZYK A.: Elementy optymalizacji wielokryterialnej, WAT, Warszawa 1979.
2. BAIER E.: Über Algorithmen zur Ermittlung und Charakterisierung Pareto-optimaler Lösungen bei Entwurfsaufgaben elastischer Tragwerke, ZAMM, Vol. 57, T318-T320, 1977.
3. BAIER E.: Mathematische Programmierung zur Optimierung von Tragwerken insbesondere bei mehrfachen Zielen, Dissertation D17, Darmstadt, 1978.
4. Boychuk L.M., Ovchinnikov V.O.: Principal Methods for Solution of Multicriterial Optimization Problems /Survey/, Soviet Automatic Control, Vol. 6, No 3, pp 1-4, 1973.
5. Carmichael D.G.: Computation of Pareto Optima in Structural Design, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 15, pp. 925 - 929, 1980.
6. DEBREU G.: Theory of Value, John Wiley, New York 1959.
7. ESCHENAUER H., GATZLAPP H., KIEDROWSKI H.W.: Entwicklung und Optimierung hochgenauer Paneeltragstrukturen, Tech. Mitt. Krupp, Band 38, H. 1, 1980.
8. ESCHENAUER H., RUSEL J.: Parabolantennen als Komponenten von Nachrichten-Obermittlungssystemen, Nachrichten elektronik, H. 11/12, 1981.
9. FARQUHAR P.H.: A Survey of Multiattribute Utility Theory and Applications /in/ Starr M.K., Zeleny M.: Multiple Criteria Decision Making, North Holland, New York 1977, pp. 59 - 90.
10. FISCHBURN P.S.: Lexicographic Orders, Utilities and Decision Rules, A Survey, Management Science, Vol. 20, No 11, pp. 1442 - 1471, 1974.
11. HWANG C.L., MASUD A.S.M.: Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1979.

12. HUBER G.P.: Multi-Attribute Utility Models: A Review of Field and Field-Like Studies, *Management Science*, Vol. 20, No 10, pp. 1393-1402, 1974.
13. KAPLIN S.: Matematičeskiye metody v teorii igr, programirovani i ekonomike, Izdatelstwo "Mir" 1964.
14. KLINGER A.: Vector-valued performance criteria, *IEEE Trans. on Automatic Controls*, Vol. AC-9, No 1, 1964.
15. KOSKI J.: Truss Optimization with Vector Criterion, Tampere University of Technology, Publ. 6, Tampere, Finland 1979.
16. KOSKI J.: Multicriterion optimization in structural design, /in/ *Optimum structural design, Theory and Applications*, Vol. 2, J. Wiley and Sons, London-New York-Sydney-Toronto 1983.
17. KOSKI J., SILVENNOINEN R.: Pareto Optima in Structural Design, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 15, pp. 925-929, 1980.
18. KUHN H.W., TUCKER A.W.: Nonlinear Programming, *Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematic Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, Calif. 1951.
19. NELSON W.L.: On the use of optimization theory for practical control system design, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-9, No 4, 1964.
20. VON NEUMAN D., MORGENSTERN N.O.: Teoria igr i ekonomiceskoje povedeniye, Izdatielstwo "Nauka", 1970.
21. OSYCZKA A.: An Approach to Multicriterion Optimization Problems for Engineering Design, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 15, pp. 309-333, 1978.
22. PARETO V.: *Cours d'Economie Politique*, Lausanne, Rouge, 1886.
23. PESCHEL M., RIEDEL C.: Polioptymalizacja. Metody podejmowania decyzji kompromisowych w zagadnieniach inżyniersko-technicznych, WNT, Warszawa 1979.

24. RAO S.S., HATI S.K.: Game Theory Approach in Multicriteria Optimization of Function Generating Mechanisms, J. Mech. Des. Trans. ASME, Vol. 101, pp. 398-405, 1979.
25. SALUKVADZE M.E.: Zadači vektornoj optimizaciji v teoriji upravljanja, Macniera, Tbilisi 1975.
26. SATTLER H.J.: Ersatzprobleme für Vektoroptimierungsaufgaben und ihre Anwendung in der Strukturmechanik, VDI-Verlag GmbH, Dusseldorf, Reihe 1, Nr. 88, 1982.
27. STADLER W.: Preference Optimality and Applications of Pareto Optimality, in Multicriteria Decision Making /Eds. Leitman G., Marzollo A./, CISM Courses and Lectures No. 211, Springer-Verlag, Wien-New York 1975.
28. STADLER W.: Natural Structural Shapes of Shallow Arches, J. Appl. Mech. Trans. ASME, Vol. 44, No 2, pp. 291-298, 1977.
29. STADLER W.: Natural Structural Shapes /The Static Case/, J. Mech. Appl. Math., Vol. 31, Pt. 2, pp. 169-217, 1978.
30. STADLER W.: Preference Optimality in Multicriteria Control and Programming Problems, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., Vol. 4, No 1, pp. 51-65, 1980.
31. WALTZ F.M.: An engineering approach: hierarchical optimization criteria, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-12, No. 2, 1967.
32. YU P.L.: LEITMAN G.: Compromise Solutions, Domination Structures and Salukwadze's Solution, JOTA, Vol. 13, No 3, 1974.
33. ZADEH L.A.: Optimality and non-scalar-valued performance criteria, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-8, No 1, 1963.