

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

**Ewolucja anizotropii plastycznej  
silnie deformowanych metali**

Katarzyna Kowalczyk

Rozprawa doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Wiktor Gambin

WARSZAWA 2000

<http://rcin.org.pl>

## Streszczenie

Przedstawiono rozwój anizotropii plastycznej w elementach metalowych, które podlegają dużym deformacjom plastycznym. Ewolucja anizotropii związana jest z powstawaniem tekstury krystalograficznej w agregacie ziaren tworzących reprezentatywny element objętości. Do opisu tego zjawiska wykorzystano sztywno-plastyczny model pojedynczego ziarna. Jako kryterium uplastycznienia przyjęto regularyzowane prawo Schmidta zaproponowane przez Gambina w 1991 roku. Do opisu ewolucji tekstury w agregacie ziaren przyjęto założenie Taylora o jednakowym tensorze prędkości plastycznej deformacji w każdym ziarnie.

Omówiono dwa opisy plastycznego płynięcia polikryształów metali: fenomenologiczny i fizyczny. W ramach opisu fenomenologicznego przedyskutowano własności powierzchni plastyczności opisanych funkcjami dowolnego stopnia dla materiałów ortotropowych znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. Przeanalizowano fenomenologiczne kryteria uplastycznienia Hilla z 1990 roku i Barlata z 1989 roku dla płaskiego stanu naprężenia. Sformułowano ich postaci niezmiennicze oraz stowarzyszone z nimi prawa płynięcia. Następnie omówiono model fizyczny polikryształu z globalną powierzchnią plastyczności Taylora-Bishopa-Hilla.

W dalszej części pracy zaproponowano klasę powierzchni plastyczności dla polikryształu łączących zalety podejścia fenomenologicznego i fizycznego. W proponowanym modelu anizotropia opisywanego materiału wynika z pojawienia się i ewolucji tekstury krystalograficznej. Pokazano, że powierzchnia ta zdolna jest opisać szereg zjawisk występujących podczas procesu plastycznego płynięcia, których nie są w stanie opisać powierzchnie fenomenologiczne.

Przy wykorzystaniu przyjętego modelu rozwoju tekstury krystalograficznej i proponowanej powierzchni plastyczności wyznaczono ewolucję anizotropii plastycznej elementów metalowych. Elementy te poddane były przeciąganiu, walcowaniu i czystemu ścinaniu. Własności formowanej blachy opisywane przez przyjętą powierzchnię plastyczności porównano z własnościami opisywanymi przez warunki fenomenologiczne.

*Za pomoc i życzliwość okazaną  
w trakcie powstawania tej pracy  
dziękuję panu prof. **Wiktorowi Gambinowi.***

*Za podtrzymywanie mnie na duchu oraz wyrozumiałość  
wdzięczna jestem wszystkim moim bliskim -  
**Rodzinie i Przyjaciółom.***

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>7</b>
1.1	Cel i zakres pracy . . . . .	7
1.2	Przegląd literatury . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Model pojedynczego ziarna</b>	<b>19</b>
2.1	Uwagi wstępne . . . . .	19
2.2	Opis kinematyki pojedynczego ziarna . . . . .	21
2.2.1	Pole gradientu deformacji . . . . .	23
2.2.2	Stosowane miary odkształcenia . . . . .	24
2.2.3	Pochodna materialna i pole tensora gradientu prędkości . . . . .	25
2.2.4	Przypadek małych odkształceń sprężystych . . . . .	28
2.2.5	Opis ruchu sieci kryształu . . . . .	28
2.3	Miary naprężenia . . . . .	30
2.4	Zasady zachowania . . . . .	32
2.5	Równania konstytutywne . . . . .	33
2.5.1	Uwagi wstępne. Równanie konstytutywne kryształu sprężystego . . . . .	33
2.5.2	Równanie konstytutywne kryształu sprężysto-plastycznego . . . . .	35
2.5.3	Równanie konstytutywne opisujące spin plastyczny . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Model obliczeniowy polikryształu</b>	<b>39</b>
3.1	Pojęcia podstawowe . . . . .	39
3.2	Wybrane fenomenologiczne kryteria uplastycznienia metali . . . . .	42
3.2.1	Własności funkcji płynięcia . . . . .	42
3.2.2	Warunek Hilla z roku 1990 . . . . .	46
3.2.3	Warunek Barlata i Liana z roku 1989 . . . . .	49
3.3	Model fizyczny polikryształu . . . . .	51
3.3.1	Figury biegunowe i tekstury metali . . . . .	51
3.3.2	Powierzchnia Bishopa-Hilla z roku 1951 . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Proponowane powierzchnie plastyczności</b>	<b>61</b>
4.1	Podstawowe założenia . . . . .	61
4.2	Definicja proponowanych powierzchni plastyczności . . . . .	67
4.2.1	Powierzchnia $F^{(1)}$ . . . . .	67

4.2.2	Powierzchnia $\bar{F}^{(2)}$ . . . . .	70
4.2.3	Powierzchnia $\bar{F}^{(3)}$ . . . . .	71
4.3	Wpływ kształtu powierzchni plastyczności na proces plastycznego płynięcia . . . . .	82
4.3.1	Anizotropia plastycznego płynięcia . . . . .	82
4.3.2	Lokalizacja odkształceń plastycznych . . . . .	84
4.4	Porównanie powierzchni plastyczności $\bar{F}^{(1)}$ , $\bar{F}^{(2)}$ i $\bar{F}^{(3)}$ z powierzchniami fenomenologicznymi . . . . .	88
4.4.1	Blachy izotropowe . . . . .	88
4.4.2	Blachy o anizotropii normalnej . . . . .	96
4.4.3	Blachy ortotropowe . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Ewolucja tekstury i proponowanych powierzchni plastyczności</b> . . . . .	<b>136</b>
5.1	Tekstury przeciągania . . . . .	136
5.2	Tekstury walcowania . . . . .	147
5.3	Tekstury czystego ścinania . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Podsumowanie</b> . . . . .	<b>173</b>

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

### 1.1 Cel i zakres pracy

Procesy kształtowania elementów metalowych są procesami, w których dominują duże odkształcenia plastyczne. Powodują one powstawanie i rozwój anizotropii plastycznej kształtowanych elementów. Dla materiałów polikrystalicznych, jakimi są metale, anizotropia ta może być wynikiem zmiany kształtu i ułożenia ziaren, lub reorientacji sieci krystalograficznej. W pierwszym przypadku mówimy o powstaniu tekstury morfologicznej, w drugim o teksturze krystalograficznej. Anizotropia plastyczna wywołana przez reorientację sieci poszczególnych ziaren dominuje w zakresie średnio-dużych odkształceń [68]. Aby opisać rozwój anizotropii polikryształu w procesie deformacji, należy uwzględnić zmianę tekstury w odpowiednich równaniach konstytutywnych. Jest to istotne ze względu na to, że rozwój anizotropii może powodować zarówno szereg zjawisk korzystnych, jak i niekorzystnych z punktu widzenia cech kształtowanego elementu. Do zjawisk niekorzystnych należy np. „earing” pojawiający się podczas tłoczenia blach, do korzystnych - zwiększenie odporności na korozję łopatek turbin gazowych, czy wytrzymałości zmęczeniowej sprężyn stosowanych w urządzeniach precyzyjnych.

Wymienione powyżej zjawiska są związane przede wszystkim z procesem plastycznego płynięcia materiału. Właściwe określenie kierunków głównych tensora plastycznej deformacji dla danego stanu naprężenia pozwala na przewidywanie i zabezpieczenie się przed zjawiskami niekorzystnymi. Możliwe jest również pełniejsze wykorzystanie zjawisk korzystnych. Anizotropia materiału wpływa w sposób zasadniczy na proces plastycznego płynięcia elementu. Elementy metalowe o pewnej teksturze wykazują lepszą ciągliwość oraz podatność na formowanie dając wyższe wartości odkształceń granicznych. Z drugiej strony anizotropia plastyczna wpływa również na zjawisko lokalizacji odkształceń, które ogranicza procesy kształtowania elementów metalowych.

Modele zachowania się metali w procesie plastycznego płynięcia można podzielić na modele fenomenologiczne i modele fizyczne. W obu przypadkach zasadniczą rolę odgrywa powierzchnia plastyczności. Stanowi ona zwykle powierzchnię potencjalną dla tensora prędkości plastycznej deformacji, która definiuje kierunki główne plastycznego płynięcia

materiału. Omówimy pokrótce obie grupy modeli procesu plastycznego płynięcia metali.

W modelach fizycznych przyjmuje się, że element materialny polikryształu składa się z dużej liczby przylegających do siebie ziaren. Modele te opisują zachowanie się materiału polikrystalicznego jako wypadkowej zachowania się pojedynczych ziaren. Uwzględniając fizyczną naturę deformacji plastycznej w metalach podejście to pozwala określić w sposób bezpośredni obrót sieci krystalograficznej w pojedynczych ziarnach, a co za tym idzie rozwój anizotropii plastycznej. Powierzchnia plastyczności materiału polikrystalicznego jest wtedy zdefiniowana jako obwiednia powierzchni plastyczności pojedynczych ziaren. Wyniki otrzymane przy użyciu tych modeli zwykle dobrze odpowiadają wynikom badań doświadczalnych. Wadą tych modeli jest skomplikowany proces obliczeń, a sposób zdefiniowania powierzchni plastyczności praktycznie uniemożliwia zastosowanie jej w kodzie numerycznym metody elementów skończonych (MES) powszechnie używanej do obliczeń związanych z kształtowaniem elementów metalowych.

Modele fenomenologiczne bazują na klasycznej teorii plastyczności. Powierzchnia plastyczności zadana jest w nich za pomocą anizotropowej funkcji płynięcia zależnej od tensora naprężenia. Stopień anizotropii oraz właściwości danego materiału zależą tu od skończonej liczby parametrów doświadczalnych, a powierzchnia plastyczności nie zależy bezpośrednio od mikrostruktury materiału i nie zawiera informacji o teksturze krystalograficznej. Opis ewolucja anizotropii plastycznej próbki wymaga określenia kilku krzywych opisujących zmianę parametrów materiałowych w zależności od stopnia zaawansowania procesu. Do modeli fenomenologicznych w sposób standardowy można stosować metodę elementów skończonych wykorzystując procedury numeryczne nieliniowej mechaniki kontinuum. Jest to niewątpliwą zaletą tych modeli. Z drugiej strony, przyjęta definicja funkcji płynięcia oraz liczba parametrów materiałowych ograniczają zakres możliwych do opisanego zjawisk, jakie mają miejsce podczas procesów plastycznego płynięcia. Zjawiska, które odbiegają od tych, jakie można opisać za pomocą najczęściej wykorzystywanych modeli fenomenologicznych, bywają nazywane „anomalnymi”. Mają one swoje fizyczne podstawy w mikrostrukturze materiału. Aby je opisać można zwiększyć liczbę parametrów opisujących dany materiał, rodzi to jednak problemy związane z identyfikacją tych parametrów w doświadczeniach.

Właściwym wydaje się być poszukiwanie rozwiązań, które łączyłyby zalety obu podejść, to znaczy wykorzystywany model zawierałby w sobie informację o mikrostrukturze materiału, jednocześnie zaś podlegałby w sposób standardowy implementacji do MES.

*Celem niniejszej pracy jest przedstawienie modelu zachowania się metali, który opisując ich uplastycznienie wykorzystuje podstawową informację o mikrostrukturze materiału, a którego formalizm odpowiada modelowi fenomenologicznemu z analityczną powierzchnią plastyczności. Podstawową rolę odgrywa w nim powierzchnia plastyczności zadana za pomocą jednej analitycznej funkcji tensora naprężenia. W proponowanym modelu anizotropia materiału zależy od tekstury krystalograficznej. Ewolucja tej anizotropii zostanie opisana przez rozwój tekstury krystalograficznej w elemencie materialnym złożonym ze skończonej liczby ziaren i poddanym dużym deformacjom plastycznym. Rozwój tekstury determinuje zmianę kształtu proponowanej powierzchni plastyczności.*

W dalszej części tego rozdziału dokonamy przeglądu literatury dotyczącej zachowania się polikryształów metali w zakresie dużych deformacji plastycznych.

Aby opisać obroty sieci krystalograficznej należy zejść do poziomu pojedynczego ziarna. Wykorzystywany model konstytutywny przedstawimy w rozdziale drugim. Podamy w nim opis kinematyki pojedynczego ziarna, zasady zachowania i równania konstytutywne. W opisie rozwoju tekstury zasadniczą rolę odgrywać będzie dodatkowe równanie konstytutywne wiążące spin plastyczny ze stanem naprężenia oraz równania ewolucji kątów Eulera orientujących sieć krystalograficzną ziarna względem „laboratorium”.

Proponowaną powierzchnię plastyczności porównamy ze wspomnianymi powyżej dwiema grupami modeli plastycznego płynięcia metali. Modele te zaprezentowane będą w rozdziale drugim. Skoncentrujemy się w nim na dwóch fenomenologicznych powierzchniach plastyczności  $m$ -tego stopnia dla blach, a mianowicie powierzchni Barlata z roku 1989 [14] i powierzchnią Hilla z roku 1990 [53]. Obecnie są one najczęściej wykorzystywane do analizy procesów plastycznego formowania metali. Poddamy je dokładnej analizie, ze szczególnym uwzględnieniem stowarzyszonych z nimi praw plastycznego płynięcia. Wyprowadzimy ich postaci niezmiennicze. Spośród modeli fizycznych dokładnie omówimy powierzchnię Bishopa-Hilla [17], [18] analizując jej kształt dla polikryształów o różnych teksturach.

Rozdział czwarty jest poświęcony prezentacji proponowanego modelu łączącego zalety omówionych wcześniej sformułowań. Podamy w nim definicję zależnej od tekstury powierzchni plastyczności. Rozważając przykłady metali o określonej teksturze wykazemy zdolność proponowanego modelu do opisu szerokiego spektrum zjawisk występujących w procesie plastycznego płynięcia oraz dobrą zgodność tego opisu z wynikami otrzymywanymi przy użyciu modelu Bishopa-Hilla. Pokażemy również jak tekstura krystalograficzna wpływa na zdolność danego materiału do jego formowania przy określonym stanie naprężenia. Rozważymy również możliwe typy lokalizacji odkształceń przy danym typie anizotropii i stanie naprężenia w elemencie.

Opisany model rozwoju tekstury zostanie wykorzystany do wyznaczenia reorientacji sieci w ziarnach składających się na element materialny polikryształu. Element ten będzie miał początkowo równomierny rozkład orientacji i będzie izotropowy. Zadany typ deformacji będzie odpowiadał procesowi przeciągania, walcowania oraz czystego ścinania. W rozdziale piątym wykorzystując otrzymane wyniki zaprezentujemy rozwój anizotropii elementów metalowych poddanych tego typu obróbce plastycznej. Rozwój anizotropii przeanalizujemy wykorzystując proponowaną powierzchnię plastyczności oraz omawiane w rozdziale trzecim warunki fenomenologiczne.

W rozdziale ostatnim dokonamy podsumowania otrzymanych wyników oraz podamy płynące z nich wnioski. Wnioski te będą dotyczyły związku procesu formowania elementów metalowych z ich teksturą krystalograficzną oraz jej ewolucją.



## 1.2 Przegląd literatury

### Podstawy doświadczalne i płynące z nich wnioski

Opis pierwszych doświadczeń z rozciąganiem monokryształami metali, w których na powierzchni próbki pojawiły się linie poślizgu podał Andrade w swojej pracy z 1914 roku [1]. Kolejne prace dotyczące badań doświadczalnych wykonywanych na monokryształach i polikryształach metali pojawiły się w latach 20-tych. Badania eksperymentalne metali o kubicznej sieci krystalograficznej w zakresie dużych odkształceń plastycznych prowadził wtedy Taylor. W doświadczeniach nad kryształami o sieci typu A1 i A2 wykorzystywał on promienie X. Pozwoliło mu to wyznaczyć reorientację sieci krystalograficznej podczas deformacji. Eksperymenty, które wykonał razem z Elamem [105], były przeprowadzane przy zapewnieniu jednorodnego stanu deformacji w próbce. Badania o podobnym znaczeniu jak badania Taylora i Elama dla kryształów i polikryształów o sieci typu A1 przeprowadzili dla kryształów heksagonalnych (typ sieci A3) Mark, Polanyi i Schmid [80]. Otrzymane wyniki stały się podstawą opracowań dotyczących plastyczności kryształów i polikryształów, a przedstawionych przez Karnopa i Sachsa [66], Taylora [106] oraz Schmid a Boasa [104]. Szeroka skala przeprowadzonych badań pozwoliła sformułować badaczom dwa wnioski o podstawowym znaczeniu (patrz [106], [46]):

1. Podczas rozciągania próbki pojedynczego kryształu deformacja plastyczna pojawia się w wyniku prostego ścinania (poślizgu) na określonych płaszczyznach krystalograficznych w określonych kierunkach krystalograficznych leżących na tych płaszczyznach. Para wektorów określających kierunek normalny do płaszczyzny poślizgu i kierunek poślizgu została nazwana systemem poślizgu. Zbiór możliwych dla danego kryształu systemów poślizgu zależy od typu jego sieci krystalograficznej.
2. Spośród możliwych systemów poślizgu wybierany jest ten dla którego rzut naprężenia na płaszczyznę ścinania i kierunek ścinania zwany efektywnym naprężeniem ścinającym jest największy.

Wnioski te do dziś są podstawą wielu modeli obliczeniowych dla kryształów i polikryształów. Przeprowadzone badania pozwoliły też ustalić, że poślizg na danym systemie poślizgu rozpoczyna się dopiero po osiągnięciu przez efektywne naprężenie ścinające pewnej wartości krytycznej. Wartość tę można uznać za fizyczną własność systemu poślizgu danego kryształu. Krytyczne efektywne naprężenie ścinające leży u podstaw warunku uplastycznienia Schmid a z 1924 roku [104]. Zgodnie z nim kryształ ulega uplastycznieniu, gdy na jednym z systemów poślizgu efektywne naprężenie ścinające osiągnie wartość krytyczną.

### Modele konstytutywne dla polikryształów

Modele konstytutywne dla polikryształów metali poddanych deformacjom plastycznym można podzielić na dwie grupy: modele bazujące na klasycznej, fenomenologicznej teorii

plastyczności oraz modele bazujące na teorii plastyczności kryształów. Pierwsze z nich traktują materiał polikrystaliczny jako jednorodny w skali makro. Równania konstytutywne sformułowane są wtedy tylko na poziomie makroskopowym. Druga grupa modeli uwzględnia niejednorodną mikrostrukturę polikryształu i na jej podstawie opisuje zachowanie się metalu w skali makro. Makroskopowe miary naprężenia i odkształcenia dla agregatu ziaren mają wtedy charakter wielkości uśrednionych. Drugie podejście wymaga sformułowania konstytutywnego modelu obliczeniowego dla pojedynczego kryształu. W przypadku modeli pierwszego rodzaju anizotropia materiału oraz jej rozwój mogą być opisane za pomocą stałych i praw fizycznych ustalonych podczas testów doświadczalnych na próbkach makroskopowych. W modelach bazujących na mikrostrukturze materiału można w równaniach uwzględnić obroty sieci krystalograficznej w pojedynczych ziarnach i śledzić w ten sposób rozwój tekstury będącej źródłem anizotropii w skali makro.

#### *Modele obliczeniowe dla polikryształów uwzględniające mikrostrukturę*

Do tej grupy modeli można zaliczyć model Taylora [106] i model Sachsa [102], model Bishopa - Hilla z 1951 roku [17], [18], model wewnętrznie zgodny („*self - consistent*”) Krönera [71], Budiansky'ego i Wu [11] oraz modele uproszczone „*rate-dependent*” i „*rate-independent*”. Pod pojęciem agregatu ziaren rozumiany jest zwykle zespół ziaren o identycznych własnościach sprężysto - plastycznych a różniących się jedynie orientacją sieci krystalograficznej. W ogólności różna orientacja krystalograficzna ziaren w agregacie prowadzi do niejednorodności pól naprężeń i odkształceń. W omawianych modelach wykorzystywane jest również pojęcie reprezentatywnego elementu objętości do którego odnoszą się wielkości uśrednione opisujące zachowanie się polikryształu w skali makro.

Model Sachsa z 1928 roku [102] opisuje początkowe plastyczne płynięcie agregatu ziaren. Zakłada on, że stan dewiatora naprężeń jest jednorodny w reprezentatywnym elemencie objętości agregatu. Dla każdego ziarna spełnione jest równanie równowagi i prawo Schmid'a, natomiast nie są spełnione warunki kinematycznej zgodności na brzegach ziaren. Podczas rozciągania próbki polikrystalicznej początkowo uruchamia się tylko jeden, poddany największym naprężeniom ścinającym, system poślizgu. W 1941 Kochendörfer uzupełnił model Sachsa o dodatkowe założenie o jednakowym wydłużeniu wszystkich ziaren w kierunku rozciągania (porównaj [8]).

W swojej pracy z roku 1938 Taylor [106] podsumowując dotychczasowe badania zaproponował model agregatu polikrystalicznego, który zakładał, że każde ziarno tworzące element reprezentatywny polikryształu podlega tej samej makroskopowej deformacji plastycznej. Założenie to sprawia, iż przeciwnie do modelu Sachsa, automatycznie spełnione są warunki kinematycznej zgodności na granicy ziaren, natomiast zostaje naruszone tam równanie równowagi. Według założeń modelu Taylora średnice ziaren w elemencie są takie same, grubość brzegu ziaren jest zerowa, a rozkład ich orientacji w elemencie jest losowy. Model przyjmuje za obowiązujące prawo Schmid'a, w każdym ziarnie krytyczne naprężenie ścinające jest takie same, a liczba potencjalnie aktywnych systemów poślizgu jest nie większa od pięciu. Zaniedbywane są odkształcenia sprężyste. Taylor postawił hipotezę, że

w procesie uplastycznienia każdego ziarna uaktywniają się te systemy dla których suma bezwzględnych wartości prędkości poślizgów jest najmniejsza. Na podstawie przyjętych założeń Taylor wyznaczył globalne naprężenie uplastyczniające przy rozciąganiu polikryształu. W zmodyfikowanym modelu Taylora (*Relaxed Taylor Model*) przyjmuje się, że tylko część składowych deformacji plastycznej w ziarnie jest równa składowym makroskopowej deformacji plastycznej.

Przyjmując założenia modelu Taylora, Bishop i Hill w swoich pracach z roku 1951 ([17], [18]) poszukiwali globalnej powierzchni plastyczności polikryształu. Na poziomie pojedynczego ziarna przyjęli oni opis Taylora. W swej pracy stwierdzili, że w pojedynczym ziarnie uaktywniają się te systemy poślizgu dla których łączna praca wykonana podczas poślizgu jest najmniejsza. Jest to kryterium równoważne hipotezie Taylora. Konstrukcja globalnej powierzchni plastyczności wykorzystywała również warunek wypukłości lokalnej powierzchni plastyczności dla każdego ziarna oraz warunek zgodności Hilla dla lokalnych i globalnych pól naprężeń i odkształceń. Warunek zgodności Hilla stwierdza, że globalny przyrost pracy plastycznej wyrażony przez uśrednione wielkości naprężenia i prędkości deformacji równy jest średniej z przyrostów pracy plastycznej w każdym ziarnie reprezentatywnego elementu objętości wyrażonych przez lokalne naprężenie i lokalny tensor prędkości deformacji. Przypomnijmy, że zgodnie z założenia Taylora lokalny tensor prędkości deformacji jest równy uśrednionemu. Równocześnie globalny przyrost pracy plastycznej można wyrazić jako iloczyn efektywnego odkształcenia i efektywnego naprężenia będącego miarą wyężenia materiału w momencie uplastycznienia. Graficzną interpretacją efektywnego naprężenia jest odległość między środkiem powierzchni plastyczności a punktem leżącym na płaszczyźnie prostopadłej do kierunku prędkości deformacji. Powierzchnia plastyczności będzie zatem obwiednią płaszczyzn dla których odległość od środka jest równa efektywnemu naprężeniu. Powierzchnia ta zostanie opisana szerzej w rozdziale trzecim.

Ponieważ model Bishopa-Hilla przyjmuje założenia Taylora, nadal pozostają nie spełnione równania równowagi na granicach ziaren. Pierwszy model wewnętrznie zgodny (*self-consistent*), t. zn. taki który spełnia zarówno warunki kinematycznej zgodności jak i równania równowagi na granicach ziaren, to model Krönera (1961) [71] uzupełniony przez Budianskiego i Wu [11] w 1962 roku. Model ten wykorzystuje rozwiązanie zadania Eshelby'ego [33] dla sferycznej inkluzji. Inkluzją jest tutaj sferyczne ziarno kryształu ulegające uplastycznieniu przez poślizg zgodnie z modelem Taylora, umieszczone w polikrystalicznej sprężystej matrycy podlegającej jednorodnemu stanowi naprężenia. Sformułowanie to umożliwia wyznaczenie zależności między lokalnymi naprężeniami i odkształczeniami w ziarnie a naprężeniem i odkształceniem globalnymi w elemencie polikryształu, czyli t.zw. macierzy wpływu. W modelu tym przyjęto założenia o losowym rozkładzie orientacji ziaren w polikryształe, który obciążony jest w sposób jednorodny, a wszystkie ziarna mają te same izotropowe właściwości sprężyste i te same krytyczne naprężenia ścinające. Z założeń przyjętych w modelu wynika, że w stanie sprężystym w każdym ziarnie panuje identyczny jednorodny stan naprężenia, choć ze względu na różnicę w orientacjach efektywne naprężenia ścinające na systemach są inne. Uplastycznieniu ulega ziarno dla którego wartość tego naprężenia jako pierwsza osiągnie wartość krytyczną. Odległości pomiędzy uplastycznionymi ziarnami są duże, a zatem zmieniony stan naprężenia w ziarnie uplastycznionym nie

wpływa na stan naprężenia w innym uplastycznionym ziarnie. W modelu pomijana jest reorientacja ziaren zachodząca podczas procesu deformacji.

Model wewnętrznie zgodny obejmujący szerszą klasę materiałów polikrystalicznych podał w roku 1965 Hill [49], wyprowadzając ogólną postać równania konstytutywnego dla polikryształu w zakresie sprężysto - plastycznym i stosując podobną metodykę. Element polikrystaliczny opisywany przez proponowane równanie składa się z ziaren o różnej wielkości i kształcie elipsoidalnym, ale o odpowiednich osiach równoległych. Orientacja sieci krystalograficznej ziaren nie musi być losowa i w zakresie sprężystym nie zakłada się izotropii materiału.

Ogólne rozważania na temat struktury równań konstytutywnych dla modeli wewnętrznie zgodnych dla polikryształu i innych materiałów o niejednorodnej strukturze przeprowadził Hill w swojej pracy z 1966 roku [50]. Wyprowadzone przez niego równania są prawdziwe niezależnie od stopnia niejednorodności opisywanego elementu polikrystalicznego. Hill pokazał w tej pracy, między innymi, w jaki sposób dekompozycja przyrostu odkształcenia na część plastyczną i sprężystą na poziomie lokalnym odnosi się do takiej dekompozycji przyrostu odkształcenia globalnego oraz do zależności na przyrost pracy plastycznej wyrażony przez wielkości lokalne oraz globalne. Globalna powierzchnia plastyczności została zdefiniowana jako granica zbioru wszystkich naprężeń powodujących wyłącznie te globalne odkształcenia sprężyste, które mogą być osiągnięte z zadanego poziomu naprężenia. Hill wykazał, że jeżeli lokalne powierzchnie plastyczności są wypukłe, to również wypukła będzie powierzchnia globalna. Będzie ona również gładka oprócz skończonej liczby możliwych naroży. Z ortogonalności plastycznej części przyrostu odkształcenia do powierzchni plastyczności na poziomie lokalnym wynika taka sama własność dla wielkości globalnych. Jeżeli na poziomie lokalnym spełnione są w procesie plastycznego płynięcia postulaty Drukera o stabilności materiału, to spełnione są one również na poziomie globalnym. Jeżeli na poziomie lokalnym przyjmujemy założenie o istnieniu potencjału sprężystego, który jest skalarną wypukłą funkcją jednorodną stopnia dwa zarówno względem tensora prędkości lokalnego naprężenia jak i odkształcenia, to jego wartość średnia będzie potencjałem na poziomie globalnym.

Ogólna teoria równań konstytutywnych sprężysto - plastycznych dla polikryształów metali rozwijana była dalej w pracach Rice'a z 1970 roku [98] oraz Hilla i Rice'a z roku 1972 [54]. Praca Rice'a dotyczyła modelu deformacji lepkoplastycznych (*time-dependent*) w zakresie małych odkształceń i obrotów oraz dla makroskopowo jednorodnych pól naprężeń i odkształceń. Wykorzystał on w niej termodynamiczną teorię plastyczności z parametrami wewnętrznymi. Rice wyprowadził kinematyczną relację między makroskopowym przyrostem odkształceń niesprężystych a przemieszczeniami na mikrostrukturalnych poślizgach. Wykazał, że z warunku, iż prędkość ścinania na danym systemie poślizgu zależy od naprężeń wyłącznie poprzez efektywne naprężenie ścinające w zadanym kierunku poślizgu wynika istnienie potencjału lepkoplastycznego  $\Omega$  dla aktualnej makroskopowej prędkości odkształceń plastycznych. Potencjał ten jest skalarną funkcją makroskopowego tensora naprężenia i historii deformacji. Postać tej funkcji może zostać ustalona na podstawie makroskopowych eksperymentów lub też wyprowadzona przy wykorzystaniu modeli obliczeniowych dla polikryształów omawianych powyżej jako zależna od lepkoplastycznych

potencjałów lokalnych dla każdego systemu poślizgu. Można pokazać, że powierzchnie  $\Omega = const$  w przestrzeni naprężeń są wypukłe. Zależność  $\Omega$  od historii deformacji może przejawiać się np. przez efekt Bauschingera. Praca Hilla z Rice'em z roku 1972 dotyczyła struktury równań konstytutywnych dla dowolnego materiału sprężysto - plastycznego, dla którego prawdziwe jest założenie o istnieniu energetycznego potencjału sprężystego (odpowiedź sprężysta materiału jest typu Greena). Została sformułowana relacja konstytutywna pomiędzy sprzężonymi miarami naprężenia i odkształcenia. Z punktu widzenia termodynamiki potencjał ten jest energią swobodną. Autorzy stwierdzili, że funkcja określająca potencjał zależy nie tylko od aktualnego odkształcenia, ale również od historii deformacji niesprężystej  $\mathcal{H}$ . Historię tę można zadać za pomocą zbioru termodynamicznych parametrów wewnętrznych. Równania konstytutywne będą różne (lepkoplastyczne lub plastyczne) w zależności od relacji opisujących ewolucję tych parametrów. Wariacja funkcji potencjalnej względem historii deformacji niesprężystej może być traktowana jako potencjał dla przyrostu deformacji plastycznej. Autorzy przedyskutowali proponowane podejście dla agregatu polikrystalicznego. Założyli, że w pojedynczych elementach tworzących agregat relacje konstytutywne wyglądają w powyżej omówiony sposób. Wykazali, że implikują one istnienie identycznego formalizmu na poziomie makroskopowym z energetycznym potencjałem globalnym.

Wykorzystywanie w powyższych modelach prawa uplastycznienia Schmid'a powoduje występowanie niejednoznaczności związanych z wyborem aktywnych systemów poślizgu. Trudność ta może zostać pokonana przy zastosowaniu modelu lepkoplastycznego płynięcia na poziomie pojedynczego ziarna (modele „rate-dependent”) lub zamianę warunku uplastycznienia Schmid'a na warunek, w którym kierunek plastycznego płynięcia jest określony jednoznacznie (modele „rate-independent”). Szczegółowo modele obliczeniowe plastycznego płynięcia pojedynczego kryształu zostaną omówione w dalszej części pracy.

### *Fenomenologiczne modele obliczeniowe dla polikryształów*

W fenomenologicznych teoriach plastyczności polikryształów anizotropię plastyczną materiału opisuje się proponując anizotropowe kryteria uplastycznienia. Kryteria te są zwykle skalarnymi funkcjami zależnymi od tensora naprężenia, tensora odkształcenia bądź jego części plastycznej oraz od pochodnych materialnych tych tensorów, a także od parametrów opisujących anizotropię materiału. W większości teorii przyjmuje się, że funkcje te zależą tylko od tensora naprężenia i parametrów materiałowych. Funkcja definiująca kryterium uplastycznienia opisuje w przestrzeni naprężeń powierzchnię ograniczającą zbiór stanów naprężenia dla których polikryształ deformuje się wyłącznie sprężysto. Powierzchnię tę nazywa się powierzchnią plastyczności. Aby opisać zmianę powierzchni plastyczności podczas procesu deformacji plastycznej wspomniana wyżej funkcja musi zależeć również od tensora deformacji. Jeżeli zostaną od niego uzależnione również parametry materiałowe, możliwe będzie opisanie ewolucji anizotropii plastycznej. W myśl ogólnej teorii równań konstytutywnych powierzchnia ta jest wypukła i stanowi zwykle potencjał dla tensora prędkości deformacji przy zastosowaniu teorii dużych odkształceń lub tensora przyrostu

odkształcenia w teorii małych odkształceń. Mówimy wtedy o stowarzyszonym prawie płynięcia.

Jednym z pierwszych anizotropowych kryteriów uplastycznienia dla materiałów o dowolnej anizotropii jest kryterium Misesa z 1928 roku [85]. Funkcja określająca je jest kwadratową funkcją składowych stanu naprężenia. Szczególnym przypadkiem tej funkcji jest powszechnie stosowany warunek Hilla z roku 1948 [47], [48]. Powierzchnia plastyczności Hilla opisuje materiał ortotropowy, w którym dowolnie duży hydrostatyczny stan naprężenia nie powoduje jego uplastycznienia i który nie jest wrażliwy na znak stanu naprężenia.

Kwadratowe warunki plastyczności dla materiałów anizotropowych o energetycznej interpretacji były również podane przez Olszaka i innych [89], [90] oraz przez Rychlewskiego [99], [100]. Rozszerzenie warunku Hilla z roku 1948 na szerszą klasę symetrii materiału podano w pracy [27].

Ponieważ stwierdzono na podstawie badań doświadczalnych, że warunek drugiego stopnia jest niewystarczający do opisu wielu zjawisk, poszukiwano warunków wyższego rzędu. Wśród tych prób można wymienić powierzchnię 4-ego stopnia zaproponowaną przez Gotoha w roku 1977 [45]. Powierzchnia ta została sformułowana dla płaskiego stanu naprężenia. Opisywany materiał również nie był wrażliwy na znak stanu naprężenia. Jako kolejną należy podać propozycję Hilla z roku 1979 [51]. Kryterium to zostało sformułowane w przestrzeni naprężeń głównych. W 1990 roku Hill podał warunek  $m$ -tego stopnia dla płaskiego stanu naprężenia [53]. Innym szeroko stosowanym obecnie warunkiem dla materiałów ortotropowych jest warunek Barlata i Liana. Został on sformułowany w roku 1989 dla płaskiego stanu naprężenia [14], a w roku 1991 został uogólniony dla dowolnego stanu naprężenia [15]. Szczegółowy opis warunku Hilla z 1990 roku oraz warunku Barlata i Liana zostanie przedstawiony w rozdziale trzecim.

Oprócz sformułowania początkowego warunku plastyczności w naprężeniach możliwe jest również podejście dualne - sformułowanie funkcji płynięcia za pomocą tensora prędkości deformacji lub tensora odkształceń. Kryterium 4-tego stopnia wyrażone przez dewiator tensora prędkości deformacji dla materiałów ortotropowych rozważali Arminjon i inni [4]. Dużą liczbę parametrów materiałowych występujących w warunku proponowali oni wyznaczyć na podstawie informacji o teksturze próbki. Podejście dualne do opisu plastyczności polikryształów można znaleźć również w pracach Van Houtte'a [57] oraz Barlata i jego współpracowników [13], [23].

W niektórych teoriach fenomenologicznych próbowano uwzględnić deformowanie się pojedynczego kryształu przez poślizg. Do tej grupy modeli należy m. in. teoria poślizgu Batdorfa - Budianskiego z roku 1949 [9], [10], która zamiast agregatu ziaren o skończonej liczbie systemów poślizgu rozważa jednorodny element, w którym każda płaszczyzna może być płaszczyzną poślizgu, a każdy kierunek leżący na tej płaszczyźnie systemem poślizgu. Przyrost odkształcenia plastycznego pojawia się, gdy naprężenie ścinające osiągnie pewną krytyczną wartość. Konsekwencją w ten sposób przyjętego prawa płynięcia jest naroże plastyczne powierzchni plastyczności. Modyfikacją tej teorii jest teoria lokalizacji odkształceń Malmeystera z 1965 r, w której odkształcenie plastyczne nie zależy od liczby kierunków poślizgu na płaszczyźnie  $W$ . Do grupy tej można zaliczyć również teorię naroża plastycznego

Christffersona-Hutchinsona z 1979 roku.

Ewolucję powierzchni plastyczności w procesie deformacji plastycznej opisuje się zwykle poprzez wzmocnienie izotropowe, wzmocnienie kinematyczne lub mieszane. Opis tego typu zmian powierzchni plastyczności można znaleźć w pracach Mroza ([87], [88]). W pracach Duszek-Perzyny i Perzyny ([30] i prace tam cytowane) wykorzystuje się potencjał lepkoplastyczny zależny od historii deformacji poprzez zbiór parametrów wewnętrznych do opisu zjawisk dotyczących powstawania pasm ścinania, lokalizacji odkształceń plastycznych oraz rozwoju mikrouszkodzeń w procesie dużych deformacji plastycznych. Teoria ta uwzględnia anizotropię plastyczną poprzez kinematyczne wzmocnienie. Występuje w niej dodatkowe równanie konstytutywne na spin plastyczny powiązane z efektem kinematycznego wzmocnienia. Termodynamiczny model materiału sztywno-plastycznego z uwzględnieniem spinu plastycznego był również dyskutowany w pracy [97].

### Modele obliczeniowe pojedynczego kryształu

Obok rozwoju ogólnej teorii równań konstytutywnych dla anizotropowych materiałów sprężysto-plastycznych poszukiwano matematycznej teorii opisującej sprężysto-plastyczne zachowanie się pojedynczego kryształu w zakresie dużych deformacji. Mandel w roku 1965 [77] wykazał, że kompletna analiza materiału anizotropowego poddanego dużym deformacjom plastycznym wymaga sformułowania dodatkowego równania konstytutywnego opisującego spin plastyczny elementu materialnego. W teoriach matematycznych opisujących duże deformacje pojedynczego kryształu wykorzystywano również założenie Lee [73] o multiplikatywnym rozkładzie tensora gradientu deformacji na część sprężystą i plastyczną, które w zakresie dużych odkształceń zastępuje założenie o addytywnym rozkładzie tensora odkształcenia przyjmowane w teorii małych odkształceń.

Podstawy termodynamicznej teorii plastyczności kryształów dała praca Hilla i Rice'a z roku 1972 [54]. Wykorzystali w niej pojęcie termodynamicznych parametrów wewnętrznych. Parametrami tymi są prędkości poślizgów na odpowiednich systemach. Zaproponowano dla nich prawa wzmocnienia. Odpowiednio dobrane prawa wzmocnienia tych parametrów zastąpiły dodatkowe równanie konstytutywne na spin plastyczny oraz zapewniały jednoznaczność postaci deformacji, jeżeli tylko odpowiednia macierz wzmocnienia była dodatnio określona. Stwierdzono, że w zakresie sprężystym ruch sieci jest identyczny z ruchem materiału, natomiast w zakresie plastycznym materiał przepływa przez sieć, która pozostaje nieruchoma. Teoria plastyczności pojedynczego kryształu była następnie wykorzystywana i rozwijana w pracach Asaro i Rice'a [5], Asaro [6], [7] z 1983 roku oraz Asaro i Needelmana z 1985 [8]. Aby uniknąć niejednoznaczności w wyborze systemu poślizgu stosowano modele lepkoplastyczne. Uzależniano w nich prędkość poślizgu na danym systemie od efektywnego naprężenia ścinającego na tym systemie poprzez prawo potęgowe. Propozycję takiego prawa podali Hutchinson [59] oraz Pan i Rice [92].

Dyskusję dotyczącą różnego rodzaju praw wzmocnienia dla krytycznych naprężeń ścinających przeprowadzono np. w pracach Asaro [6] oraz Asaro i Needelmana [8]. W niektórych modelach wzmocnienia ewolucja wartości naprężenia krytycznego zależy wyłącznie

od wielkości poślizgu na tym systemie. W innych przyjmowano istnienie t. zw. wzmocnienia utajonego dla nieaktywnych systemów poślizgu. Problem jednoznaczności postaci deformacji związany z odpowiednim doбором modułów wzmocnienia był też dyskutowany w pracach Petryka [93], [94].

Problemu nieoznaczności w prawie konstytutywnym można uniknąć stosując inne prawo uplastycznienia kryształu. W roku 1991 Gambin [36], [37] oraz niezależnie Arminjon [3] podali propozycję regularyzowanego prawa Schmid'a. Powierzchnia plastyczności nie jest w nim zadawana za pomocą wielu funkcji granicznych określających warunek płynięcia na danym systemie, ale za pomocą jednej funkcji  $n$ -tego stopnia. W modelu tym plastyczne płynięcie może zachodzić na wszystkich systemach jednocześnie. Mówimy wtedy o sprzężonych systemach poślizgu. Podobną propozycję w roku 1996 wysunęli Darrieulat i Piot [28]. Szczegółowe omówienie tego modelu konstytutywnego znajduje się w rozdziale drugim.

### Opis tekstury oraz jej ewolucji w procesie deformacji

Różne sposoby opisu tekstury zostały podane w pracy Bunge'go z 1982 roku [21]. Wprowadzono pojęcie funkcji rozkładu orientacji w makroskopowym elemencie polikrystalicznym opisującej prawdopodobieństwo znalezienia w nim ziarna o orientacji krystalograficznej zadanej przez 3 kąty Eulera. Wartość funkcji rozkładu orientacji może zależeć również od zmiennej przestrzennej opisującej położenie środka ciężkości mikroskopowego elementu polikryształu wyciętego z makroskopowej próbki. W tej pracy przyjmujemy, że rozkład orientacji ziaren jest identyczny w całej próbce i wartość funkcji rozkładu orientacji nie zależy od zmiennej przestrzennej.

Zjawisko powstawania i rozwoju tekstury jest związane z faktem, na który zwrócił uwagę Kröner [71], mianowicie że kierunki krystalograficzne nie są kierunkami materialnymi. Podczas procesu plastycznego płynięcia kryształu włókna materialne przenikają przez kierunki krystalograficzne. Ruch sieci opisywany jest wyłącznie poprzez sprężystą część gradientu deformacji. Równania opisujące ewolucję kątów Eulera określających orientację sieci podał Clement w 1982 roku [24]. Wyznaczył on również ewolucję funkcji rozkładu orientacji, gdy była ona jedynie funkcją kątów Eulera. Uogólnienie tego wzoru w przypadku, gdy funkcja ta zależy również od zmiennej przestrzennej podał Gambin w 1993 roku [39].

### Modele numeryczne

Większość modeli konstytutywnych dla polikryształów i kryształów metali została zapisana w kodach numerycznych metody elementów skończonych (MES). Wykorzystują one metody rozwiązywania aplikowane do nieliniowych zagadnień związanych z dużymi deformacjami sprężysto-plastycznymi [67].

Podstawy sformułowania MES dla tych zagadnień można znaleźć w pracy McMeekinga i Rice'a z 1975 [82], w której jako punkt wyjścia do wyprowadzenia podstawowego układu



równań przyjęto całkową zasadę mocy wirtualnej. Zasada ta została zapisana w konfiguracji odniesienia przy użyciu pierwszego tensora Pioli-Kirchhoffa i wektora naprężenia nominalnego. W ramach tego opisu proces rozwiązywania zagadnień sprężysto-plastycznych jest przyrostowy - znając wartości odpowiednich pól w chwili  $t$  poszukujemy ich wartości w chwili  $t + \Delta t$ . Jako konfigurację odniesienia przyjmujemy konfigurację aktualną w chwili  $t$ . Wektor niewiadomych uogólnionych stanowią tutaj składowe wektora prędkości w węzłach powstałych w wyniku podziału konfiguracji aktualnej na elementy skończone. W niektórych sformułowaniach zamiast zasady mocy wirtualnej jako podstawę przyjmuje się zasadę pracy wirtualnej i wtedy niewiadomymi są składowe wektora przemieszczenia w węzłach. Korzystając z modelu pojedynczego ziarna wyznaczane są postaci odpowiednich macierzy sztywności w poszczególnych punktach Gaussa.

Zastosowanie MES do symulacji zachowania się pojedynczych kryształów można znaleźć w pracach Cuitino i Ortiza [25], Merica i Cailletauda [83], [84]. Wykorzystano w nich model pojedynczego kryształu deformującego się plastycznie przez poślizg, w którym wielkość deformacji na danym poślizgu opisywana jest przez różne prawa wzmocnienia. Symulację zachowania się multikryształów przy dużych deformacjach sprężysto-plastycznych przeprowadzili Teodosiu i in. [107].

Model Taylora zachowania się polikryształu uzupełniony o różne modele wzmocnienia był wykorzystany w pracy Mathura i Dawsona [81]. W pracy tej wyznaczano na podstawie symulacji komputerowych rozwój tekstury podczas procesów formowania elementów metalowych.

Fenomenologiczny kwadratowy warunek plastyczności Hilla z 1948, wraz z zasadą mocy wirtualnej zaproponowaną przez McMeekinga i Rice'a, został zastosowany w algorytmie MES do opisu dużych deformacji plastycznych w pracy Cao i Teodosiu w 1992 [22]. Osie anizotropii materiału podlegały tu obrotowi zgodnie z globalną deformacją ciała. Opracowany w ten sposób algorytm posłużył do symulacji procesu głębokiego tłoczenia.

Algorytm metody elementów skończonych wykorzystujący regularyzowane prawo Schmid'a do obliczeń zachowania się polikryształów i rozwoju tekstury w procesie plastycznej deformacji podano w pracy [40].

# Rozdział 2

## Model pojedynczego ziarna

### 2.1 Uwagi wstępne

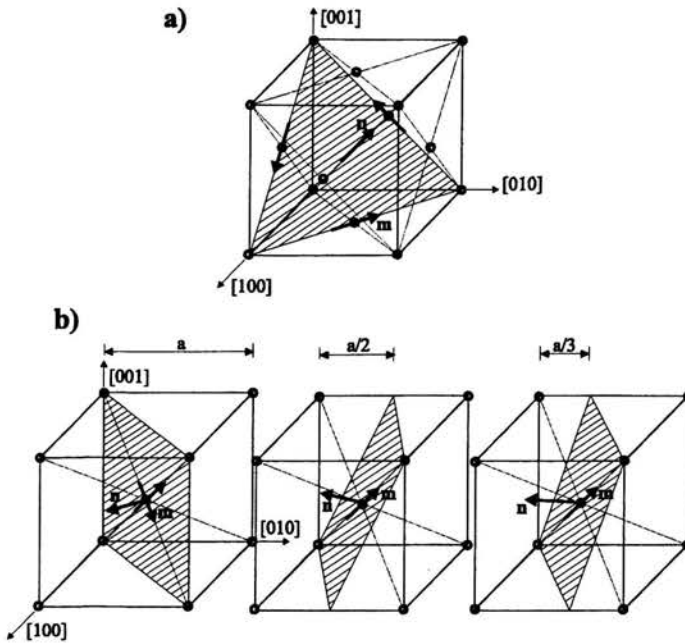
Przedstawiony poniżej model konstytutywny pojedynczego ziarna oparty jest na pracach Hilla i Rice'a [54], [55], Asaro [6], [7] oraz Gambina [36], [37], [38]. Zastosowany on został w programie obliczeniowym symulującym zmianę orientacji pojedynczych ziaren w procesie jednorodnej deformacji plastycznej.

W poniższym opisie traktujemy pojedynczy kryształ jako kontinuum materialne. Na kontinuum to nałożona jest regularna sieć punktów zwana siecią krystaliczną. Ruch węzłów sieci w ogólności nie pokrywa się z ruchem cząstek materialnych. Przyjmujemy, że mikroskopowy element kryształu, który możemy traktować jako cząstkę materialną ma fizyczny wymiar  $10^{-3}mm$  [46]. Jest to wymiar większy niż  $10^4$  odległości między atomami w sieci a jednocześnie przynajmniej o rząd wielkości mniejszy od typowego wymiaru ziarna w polikryształe ( $10^{-2} - 10^{-1}mm$ ).

Jak już opisano w rozdziale pierwszym deformacja pojedynczego kryształu w zakresie plastycznym zachodzi poprzez poślizg na określonych płaszczyznach sieciowych i w określonych kierunkach sieciowych, które zależą od typu sieci krystalicznej. Większość ważnych w przemysłowych zastosowaniach metali zbudowana jest z trzech typów sieci: A1 (sieć regularna ściennie centrowana), A2 (sieć regularna przestrzennie centrowana) lub A3 (sieć heksagonalna). Na rysunku 2.1 zaprezentowano sieci krystalograficzne typu A1 (miedź, aluminium, srebro, złoto, nikiel) oraz typu A2 (żelazo- $\alpha$ , wolfram, molibden) wraz zaznaczonymi bazowymi płaszczyznami poślizgu i leżącymi na nich kierunkami poślizgu [96].

Obserwując pod mikroskopem ślady poślizgu powstające na powierzchni pojedynczego kryształu można zauważyć, że stanowią one wąskie pasma oddzielone szeregiem blisko siebie położonych linii. Pasma te nazywamy pasmami poślizgu, a linie liniami poślizgu. Poślizg na liniach poślizgu tłumaczony jest jako przesuwanie się dyslokacji o wektorze Burgersa równoległym do kierunku poślizgu. Opis deformacji kryształu jako ruchu dyslokacji nie jest przedmiotem niniejszej pracy.

Do opisu kierunków i płaszczyzn sieciowych będziemy wykorzystywali wskaźniki Millera. Wskaźnikami Millera nazywamy trzy liczby całkowite, względem siebie pierwsze,

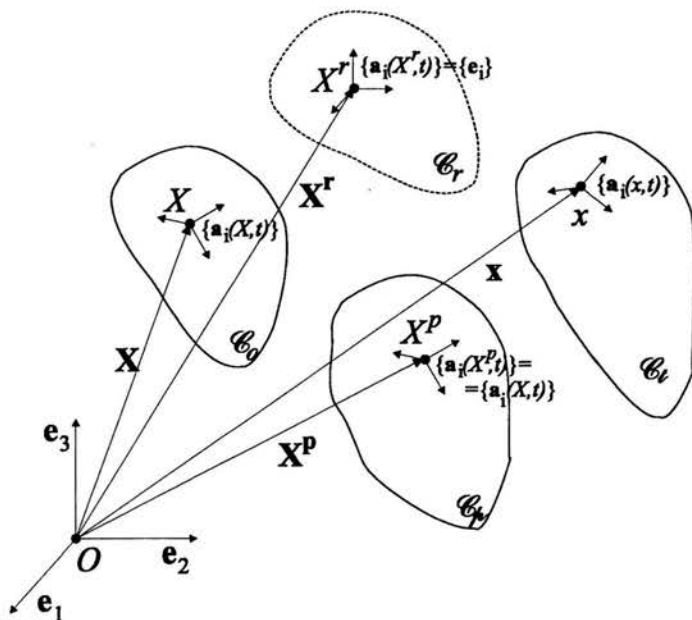


Rysunek 2.1: Typy sieci krystalicznej wraz z odpowiadającymi im bazowymi płaszczyznami poślizgu i leżącymi na nich kierunkami poślizgu: a) typ A1, b) typ A2.

określające kierunek prostej na której leży dany kierunek sieciowy lub wektor normalny do danej płaszczyzny sieciowej. Wartość ujemną wskaźnika zaznaczamy nadkreślając daną liczbę. Jeżeli chcemy opisać jeden kierunek sieciowy, to umieszczamy te trzy liczby w nawiasie kwadratowym:  $[uvw]$ , natomiast jeżeli chcemy opisać zbiór kierunków które są sobie równoważne ze względu na symetrię kryształu, to umieszczamy je w nawiasie trójkątnym:  $\langle uvw \rangle$ . W przypadku opisu płaszczyzny sieciowej wykorzystujemy odpowiednio nawias okrągły:  $(hkl)$  i nawias klamrowy  $\{hkl\}$ . Dla przykładu płaszczyznę poślizgu zaznaczoną na rysunku 2.1a zapiszemy wykorzystując wskaźniki Millera następująco:  $(111)$ , natomiast zbiór wszystkich płaszczyzn jej równoważnych:  $\{111\} = (111), (\bar{1}11), (1\bar{1}1), (11\bar{1})$ . Kierunki poślizgu zaznaczone na rysunku 2.1a zapiszemy jako:  $[\bar{1}10], [0\bar{1}1], [10\bar{1}]$ , natomiast zbiór kierunków im równoważnych to  $\langle 110 \rangle$ .

## 2.2 Opis kinematyki pojedynczego ziarna

Zgodnie z mechaniką ośrodków ciągłych [91], w każdej chwili czasu  $t$ , ciało materialne  $\mathcal{C}$  znajdujące się w przestrzeni fizycznej zajmuje pewien regularny i ograniczony obszar  $\mathcal{C}_t$  w przestrzeni euklidesowej punktowej  $\mathcal{E}_3$ . Konfiguracją ciała  $\mathcal{C}$  nazywamy jedno-jednoznaczne odwzorowanie  $\chi$  tego ciała na obszar  $\mathcal{C}_t \in \mathcal{E}_3$ . Ruchem ciała nazywamy jednoparametrową rodzinę konfiguracji  $\chi_t$  ciała, gdzie parametrem jest czas.



Rysunek 2.2: Wyróżnione konfiguracje ciała o strukturze pojedynczego kryształu.

Chcąc opisać ruch ciała poprzez ruch jego cząstek wprowadza się pojęcie konfiguracji odniesienia służącej do ich „ponumerowania”. Konfiguracją odniesienia  $\mathcal{K}$  nazywamy dowolną ustaloną konfigurację ciała  $\mathcal{C}$  w pewnej chwili  $\tau$  możliwego ruchu tego ciała, niekoniecznie należąca do rodziny konfiguracji  $\chi_t$ :

$$\mathcal{K} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_\tau \quad (2.1)$$

Konfiguracja  $\mathcal{K}$  spełnia warunek:

$$\bigwedge_{P \in \mathcal{C}} \bigvee_{X^r \in \mathcal{C}_r} X^r = \mathcal{K}(P, \tau) \quad (2.2)$$

Wprowadzając konfigurację  $\mathcal{K}$  utożsamiamy cząstkę  $P \in \mathcal{C}$  z punktem  $X^r \in \mathcal{C}_r$ . Możemy zatem rozpatrywać ruch ciała jako jednoparametrową rodzinę odwzorowań  $\chi_t^r$  obszaru  $\mathcal{C}_r$  na obszar  $\mathcal{C}_t$ :

$$\chi_t^r : \mathcal{C}_r \rightarrow \mathcal{C}_t \quad (2.3)$$

takich, że

$$\bigwedge_{X^r \in \mathcal{C}_r} \bigvee_{x \in \mathcal{C}_t} x = \chi_r(X^r, t). \quad (2.4)$$

Istnieje zatem odwzorowanie odwrotne:

$$X^r = \chi_r^{-1}(x, t) \quad (2.5)$$

Od tego miejsca konfigurację ciała oznaczać będziemy poprzez obszar zajmowany przez ciało w tej konfiguracji.

Wprowadźmy w przestrzeni euklidesowej punktowej  $\mathcal{E}_3$  układ współrzędnych prostokątnych  $(O, \{\mathbf{e}_i\})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gdzie  $O$  jest wybranym punktem w tej przestrzeni, a baza ortonormalna  $\{\mathbf{e}_i\}$  należy do przestrzeni wektorowej  $E_3$  sprzężonej z  $\mathcal{E}_3$  (porównaj rysunek 2.2). Przyjmijmy, że układ ten jest taki sam dla każdego obszaru  $\mathcal{C}_t$  otrzymanego przez odwzorowanie należące do rodziny  $\chi_t^r$ . Każdemu punktowi  $X^r \in \mathcal{C}_r$  możemy przyporządkować wektor  $\mathbf{X}^r = \overline{OX^r}$ , który jest wektorem położenia cząstki  $X^r$  w konfiguracji  $\mathcal{K}$  oznaczanej dalej według przyjętej powyżej konwencji jako  $\mathcal{C}_r$ . Podobnie wektorem położenia punktu  $x \in \mathcal{C}_t$  będzie wektor  $\mathbf{x} = \overline{Ox}$ . Równania ruchu (2.4) i (2.5) przyjmą postać równań wektorowych:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \chi_r(\mathbf{X}^r, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}^r, t) \\ \mathbf{X}^r &= \chi_r^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}^r(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Opisując ruch ciała kryształu należy uwzględnić oprócz ruchu cząstek materialnych, na ogół różny od niego ruch sieci krystalograficznej. Przyjmijmy, że orientacja sieci krystalograficznej w punkcie  $x \in \mathcal{C}_t$  dana jest przez reper trzech wyróżnionych kierunków krystalograficznych  $\{\mathbf{a}_i(x, t)\}$ .

W opisie deformacji sprężysto-plastycznej pojedynczego ziarna wyróżnimy następujące konfiguracje ciała (porównaj rysunek 2.2): konfigurację początkową  $\mathcal{C}_0$ , konfigurację pośrednią  $\mathcal{C}_p$ , konfigurację odniesienia  $\mathcal{C}_r$  oraz konfigurację aktualną  $\mathcal{C}_t$ , przy czym konfiguracja odniesienia jest konfiguracją dla której reper kierunków krystalograficznych  $\{\mathbf{a}_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  pokrywa się z globalnym układem odniesienia  $\{\mathbf{e}_i\}$  w każdym punkcie  $X^r \in \mathcal{C}_r$ . Ponadto ruch ciała z konfiguracji odniesienia do konfiguracji początkowej jest ruchem sztywnym:

$$\mathbf{X} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{Q}_0^T \mathbf{X}^r, \quad (2.7)$$

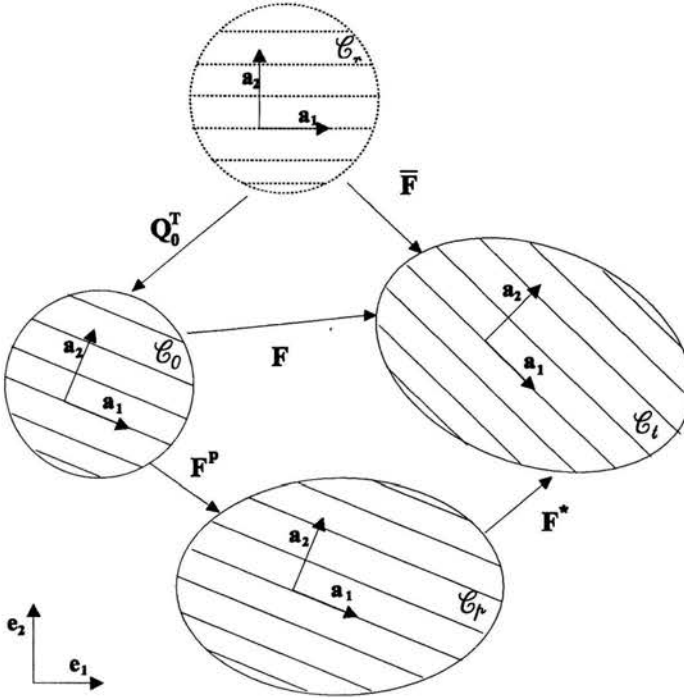
gdzie  $\mathbf{X}$  jest wektorem położenia cząstki  $X^r$  w konfiguracji początkowej  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathbf{c}_0$  jest wektorem translacji a  $\mathbf{Q}_0$  jest tensorem ortogonalnym opisującym orientację sieci ziarna w stosunku do bazy  $\{\mathbf{e}_i\}$  w chwili  $t = 0$ . Obie te wielkości nie zależą od czasu i położenia. Ruch sieci jest tu zgodny z ruchem materialnym. Konfiguracja pośrednia jest konfiguracją wynikającą ze sprężysto-plastycznej natury deformacji kryształu. Sposób wyboru tej konfiguracji wynika z założenia o multiplikatywnym rozkładzie pola gradientu deformacji na część plastyczną i sprężystą [73].

### 2.2.1 Pole gradientu deformacji

Rozpatrzmy infinytezymalne włókno materialne  $d\mathbf{X}^r$  w punkcie określonym przez wektor położenia  $\mathbf{X}^r$  w obszarze  $\mathcal{C}_r$  (rysunek 2.3). W wyniku ruchu ciała włókno to transformuje się w wektory  $d\mathbf{X}$ ,  $dx^p$  i  $dx$  odpowiednio w konfiguracjach  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_p$  i  $\mathcal{C}_t$ . Zakładamy, że transformacja ta jest liniowa, a zatem istnieją tensory drugiego rzędu  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^p$ ,  $\mathbf{F}^*$  takie, że:

$$dx = \bar{\mathbf{F}}d\mathbf{X}^r, \quad dx = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad dx = \mathbf{F}^*dx^p, \quad dx^p = \mathbf{F}^pd\mathbf{X}. \quad (2.8)$$

Tensory te są nieosobliwe i istnieją do nich tensory odwrotne.



Rysunek 2.3: *Dekompozycja gradientu deformacji  $\mathbf{F}$  kryształu sprężysto-plastycznego.*

Całkowity gradient deformacji  $\mathbf{F}$  opisuje deformację włókna od konfiguracji początkowej do konfiguracji aktualnej. Prawdziwa jest następująca zależność opisująca multiplikatywny rozkład tensora:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^*\mathbf{F}^p, \quad (2.9)$$

gdzie  $\mathbf{F}^*$  jest sprężystą częścią deformacji i jego pole zadane jest na konfiguracji  $\mathcal{C}_p$ , a  $\mathbf{F}^p$  plastyczną częścią deformacji i zadany jest na konfiguracji  $\mathcal{C}_0$ . Gradient deformacji

opisujący odwzorowanie konfiguracji odniesienia  $C_r$  na konfigurację początkową  $C_0$  dany jest poprzez tensor obrotu w następujący sposób (porównaj wzór (2.7)):

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{Q}_0^T, \quad (2.10)$$

gdzie  $\mathbf{Q}_0$  opisuje jednocześnie początkową orientację sieci ziarna względem globalnego układu odniesienia związanego z próbką. Odwzorowanie włókna z konfiguracji odniesienia na konfigurację aktualną opisane jest zatem poniższym gradientem deformacji

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_0^T. \quad (2.11)$$

Wszystkie wprowadzone powyżej tensory deformacji są funkcjami czasu i wektora położenia w odpowiednim obszarze z wyjątkiem tensora  $\mathbf{Q}_0$ .

Wykorzystując dekompozycję gradientu deformacji na część sprężystą i plastyczną możemy zdefiniować konfigurację pośrednią  $C_p$  jako izokliniczną konfigurację odciążoną. Jest to konfiguracja kryształu odciążonego, w którym przywrócono początkową orientację repery kierunków krystalograficznych względem globalnej bazy  $\{\mathbf{e}_i\}$ . W rzeczywistym procesie po zdjęciu obciążeń sieć krystalograficzna pozostaje oczywiście obrócona względem orientacji początkowej.

Zwyczajowo w opisie kinematyki pojedynczego ziarna układ odniesienia przyjmuje się w ten sposób, aby wyróżnione przez nas konfiguracje  $C_0$  i  $C_r$  pokrywały się (porównaj [6] i [7]). W przypadku opisu rozwoju tekstury w agregacie ziaren, o różnych początkowych orientacjach sieci właściwe jest jednak przyjęcie układu odniesienia związanego z próbką polikrystaliczną i dlatego konieczne jest odróżnienie tych dwu konfiguracji. Podobny sposób opisu zastosowano w pracy [107].

Zastosujemy teraz twierdzenie o rozkładzie polarnym tensora drugiego rzędu dla tensorów  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^*$  i  $\mathbf{F}^P$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{R}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{V}^*\mathbf{R}^*, \quad \mathbf{F}^P = \mathbf{R}^P\mathbf{U}^P = \mathbf{V}^P\mathbf{R}^P. \quad (2.12)$$

Tensory  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^*$  oraz  $\mathbf{R}^P$  są tensorami sztywnego obrotu. Tensory  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}^*$ ,  $\mathbf{U}^P$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}^*$  i  $\mathbf{V}^P$  są symetryczne i dodatnio określone. Tensory  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}^*$ ,  $\mathbf{U}^P$  nazywane są prawymi tensorami rozciągnięcia, a tensory  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}^*$ ,  $\mathbf{V}^P$  lewymi tensorami rozciągnięcia.

### 2.2.2 Stosowane miary odkształcenia

Oprócz tensorów wprowadzonych w poprzednim paragrafie i opisujących deformację pojedynczego ziarna stosuje się również tensory będące miarami odkształcenia ciała. Tensory te zerują się w przypadku ruchów sztywnych.

Hill [91] wprowadził następujące klasy miar odkształcenia:

$$\mathbf{E}^{(\eta)} = \frac{1}{\eta} (\mathbf{U}^\eta - \mathbf{I}) \quad \text{dla } \eta \neq 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{E}^{(0)} = \ln \mathbf{U}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{e}^{(\eta)} = \frac{1}{\eta} (\mathbf{V}^\eta - \mathbf{I}) \quad \text{dla } \eta \neq 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{e}^{(0)} = \ln \mathbf{V}, \quad (2.14)$$

gdzie  $\eta$  jest liczbą całkowitą. Najczęściej stosowanymi miarami spośród określonej powyżej klasy są:  $\mathbf{E}^{(2)} \equiv \mathbf{E}$  zwany tensorem odkształcenia Lagrange'a lub Greena,  $\mathbf{e}^{(-2)} \equiv \mathbf{e}$  zwany tensorem odkształcenia Eulera lub Almansiego, oraz tensory odkształceń logarytmicznych  $\mathbf{E}^{(0)}$  i  $\mathbf{e}^{(0)}$ . Pola tensorów  $\mathbf{E}^{(n)}$  zadane jest na konfiguracji początkowej, a pola tensorów  $\mathbf{e}^{(n)}$  na konfiguracji aktualnej.

### 2.2.3 Pochodna materialna i pole tensora gradientu prędkości

Pochodną materialną pewnej wielkości fizycznej  $\Phi^r(\mathbf{X}^r, t)$  określonej na konfiguracji odniesienia nazywamy wyrażenie:

$$\dot{\Phi}^r = \left. \frac{\partial \Phi^r}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}^r = \text{const}} \quad (2.15)$$

Prędkością cząstki  $\mathbf{X}^r$  nazywać będziemy prędkość zmiany jej położenia w przestrzeni fizycznej:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}^r, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}^r = \text{const}} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}^r, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.16)$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć pochodną materialną pola  $\phi(\mathbf{x}, t) = \Phi^r(\mathbf{X}^r(\mathbf{x}, t))$  określonego na konfiguracji aktualnej, stosujemy zależność:

$$\dot{\phi} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x} = \text{const}} + \text{grad} \phi : \mathbf{v} \quad (2.17)$$

Wykorzystując powyższą zależność oraz równanie (2.7) można zauważyć, że

$$\left. \frac{\partial \Phi^r}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}^r = \text{const}} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{X} = \text{const}}, \quad \text{gdzie } \Phi(\mathbf{X}, t) = \Phi^r(\mathbf{X}(\mathbf{X}^r), t). \quad (2.18)$$

Wprowadzimy teraz tensor gradientu prędkości  $\mathbf{L}$ . Dany jest on zależnością:

$$\mathbf{L} = \text{grad}(\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}\bar{\mathbf{F}}^{-1}. \quad (2.19)$$

Podstawiając równanie (2.9) do równania (2.19) otrzymamy:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{F}^*)^{-1} + \mathbf{F}^*\dot{\mathbf{F}}^p(\mathbf{F}^p)^{-1}(\mathbf{F}^*)^{-1}. \quad (2.20)$$

Równanie (2.20) wskazuje na addytywny rozkład gradientu prędkości  $\mathbf{L}$  na część sprężystą i część plastyczną:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{L}^p, \quad (2.21)$$

gdzie

$$\mathbf{L}^* = \dot{\mathbf{F}}^*(\mathbf{F}^*)^{-1}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^*\dot{\mathbf{F}}^p(\mathbf{F}^p)^{-1}(\mathbf{F}^*)^{-1} = \mathbf{F}^*\dot{\mathbf{L}}^p(\mathbf{F}^*)^{-1}. \quad (2.23)$$

W ostatniej zależności wprowadzono gradient prędkości  $\dot{\mathbf{L}}^p$  odpowiadający deformacji ciała od konfiguracji  $\mathcal{C}_0$  do konfiguracji  $\mathcal{C}_p$ .



Wyznamy teraz część symetryczną i antysymetryczną tensorów  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}^*$ ,  $\mathbf{L}^P$ . Mianowicie:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}, \quad (2.24)$$

gdzie tensor  $\mathbf{D}$  jest symetryczną częścią  $\mathbf{L}$  i nazywany jest gradientem prędkości deformacji, natomiast tensor  $\mathbf{\Omega}$  jest częścią antysymetryczną i nazywany jest tensorem spinu. Tensory  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{\Omega}$  można w następujący sposób podzielić na część sprężystą i część plastyczną:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* + \mathbf{D}^P, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}^* + \mathbf{\Omega}^P. \quad (2.26)$$

W powyższych wzorach przez  $\mathbf{D}^*$  i  $\mathbf{\Omega}^*$  oznaczyliśmy odpowiednio symetryczną i antysymetryczną część tensora  $\mathbf{L}^*$ , a przez  $\mathbf{D}^P$  i  $\mathbf{\Omega}^P$  część symetryczną i antysymetryczną tensora  $\mathbf{L}^P$ .

Wykorzystając rozkład polarny (2.12) tensora  $\mathbf{F}$  w równaniu (2.19<sub>2</sub>) otrzymamy poniższą zależność na tensor gradientu prędkości  $\mathbf{L}$  oraz jego część symetryczną i antysymetryczną:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T. \quad (2.29)$$

Obliczmy pochodne materialne miar odkształcenia wprowadzonych w paragrafie 2.2.2. Wszystkie tensory należące do klasy opisanej wzorami (2.13) są współosiowe z prawym tensorem rozciągnięcia  $\mathbf{U}$ . Oznaczmy przez  $U_I, I = 1, 2, 3$  wartości własne tensora  $\mathbf{U}$  a przez  $\mathbf{w}_I$  kierunki własne tego tensora. Wykorzystując rozkład spektralny dla tensorów tego typu otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{E}}^{(\eta)} = \sum_{I=1}^3 \dot{E}_I^{(\eta)} \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \omega \mathbf{E}^{(\eta)} - \mathbf{E}^{(\eta)} \omega, \quad (2.30)$$

gdzie

$$\dot{\mathbf{w}}_I = \omega \mathbf{w}_I \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} E_I^{(\eta)} = \frac{1}{2}(U_I^\eta - 1), & \eta \neq 0 \\ E_I^{(0)} = \ln U_I \end{cases}. \quad (2.31)$$

Tensor  $\omega$  jest tensorem antysymetrycznym.

Zgodnie ze wzorem (2.30) pochodną materialną tensora odkształcenia Greena  $\mathbf{E}$  można zapisać w postaci:

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{I=1}^3 \dot{U}_I U_I \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \frac{1}{2}(\omega \mathbf{U}^2 - \mathbf{U}^2 \omega), \quad (2.32)$$

co implikuje równanie

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}). \quad (2.33)$$

Zależność (2.33) można oczywiście otrzymać w prosty sposób z równania (2.13) różniczkując je po czasie. Trudności następcza wyznaczenie w taki sposób pochodnej miary logarytmicznej. Zagadnieniu temu poświęcone są między innymi prace [26],[72] i [103]. Po wykorzystaniu równań (2.30) i (2.31) wyraża się ona następująco:

$$(\ln \mathbf{U})^* = \sum_{I=1}^3 \dot{U}_I U_I^{-1} \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \boldsymbol{\omega} \ln \mathbf{U} - \ln \mathbf{U} \boldsymbol{\omega}. \quad (2.34)$$

Wykorzystując współosiowość tensorów  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{U}^{-1}$  oraz równania (2.28) i (2.29) otrzymamy poniższe zależności pomiędzy pochodną materialną miary logarytmicznej i tensorem deformacji:

$$(\ln \mathbf{U})^* = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \ln \mathbf{U} - \ln \mathbf{U} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} (\mathbf{U} \boldsymbol{\omega} \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{U}), \quad (2.35)$$

$$\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} (\mathbf{U} \boldsymbol{\omega} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\omega} \mathbf{U}) = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} - \mathbf{R}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}. \quad (2.36)$$

Jeżeli będzie możliwe wyznaczenie tensora  $\boldsymbol{\omega}$  z równania (2.36), to możemy wyznaczyć składowe tensora  $(\ln \mathbf{U})^*$  nie koniecznie w układzie związanym z osiami głównymi prawego tensora rozciągnięcia  $\mathbf{U}$ . Zauważmy ponadto, że o ile kierunki główne  $\mathbf{U}$  nie zależą od czasu, to znaczy tensor  $\mathbf{U}$  jest współosiowy z tensorem  $\dot{\mathbf{U}}$ , równanie (2.35) redukuje się do postaci:

$$(\ln \mathbf{U})^* = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}. \quad (2.37)$$

Jak już wspomniano powszechnie przyjmuje się, że deformacja plastyczna pojedynczego ziarna zachodzi wyłącznie przez poślizg na określonej płaszczyźnie krystalograficznej związanej zwaną płaszczyzną poślizgu w określonym kierunku krystalograficznym zwanym kierunkiem poślizgu, a które wspólnie stanowią  $r$ -ty system poślizgu. Para wektorów ortogonalnych  $\{\mathbf{m}^r, \mathbf{n}^r\}$ , gdzie  $\mathbf{n}^r$  jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny poślizgu, a  $\mathbf{m}^r$  wskazuje kierunek poślizgu, opisuje  $r$ -ty system poślizgu w konfiguracji aktualnej. W zależności od typu kryształu całkowita liczba możliwych systemów poślizgu  $M$  jest inna np. dla kryształu typu A1 jest ich 12, a dla kryształów typu A2 - 24. Rodzaj sieci krystalograficznej dla tych kryształów oraz odpowiadające im systemy poślizgu zaprezentowane na rysunku 2.1. W przykładach rozważanych w tej pracy mamy do czynienia z kryształami typu A1.

Część plastyczną  $\mathbf{L}^P$  gradientu prędkości możemy zdefiniować jako sumę prostych ścinań na wszystkich systemach poślizgu. Jeżeli propagują się one z prędkościami  $\dot{\gamma}^r$  dla  $r = 1, 2, \dots, M$ , to otrzymamy:

$$\mathbf{L}^P = \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^r \mathbf{m}^r \otimes \mathbf{n}^r. \quad (2.38)$$

Podział  $\mathbf{L}^P$  na część symetryczną i antysymetryczną wygląda następująco:

$$\mathbf{L}^P = \mathbf{D}^P + \boldsymbol{\Omega}^P = \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^r \mathbf{P}^r + \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^r \mathbf{W}^r, \quad (2.39)$$

gdzie tensory  $\mathbf{P}^r$  i  $\mathbf{W}^r$  stanowią odpowiednio część symetryczną i antysymetryczną diady  $\mathbf{m}^r \otimes \mathbf{n}^r$ . Warto zauważyć, że ze względu na ortogonalność wektorów  $\mathbf{m}^r$  i  $\mathbf{n}^r$  tensor  $\mathbf{D}^P$  jest dewiatorem.

### 2.2.4 Przypadek małych odkształceń sprężystych

Przy założeniu małych odkształceń sprężystych prawy tensor rozciągnięcia  $\mathbf{U}^*$  można zapisać:

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad \text{gdzie} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^*\| = \varepsilon^* \quad \text{i} \quad \varepsilon^* \ll 1. \quad (2.40)$$

Dla pochodnej materialnej miary logarytmicznej zachodzi wtedy:

$$(\ln \mathbf{U}^*)^* = \mathbf{R}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{R}^* + \mathcal{O}(\varepsilon^*). \quad (2.41)$$

Jeżeli ograniczymy się do modelu kryształu sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem, to sprężysty prawy tensor rozciągnięcia  $\mathbf{U}^*$  jest równy tensorowi jednostkowemu (porównaj wzór (2.40)). Dla małych odkształceń sprężystych, a dużych plastycznych jest to racjonalne założenie. Deformację materiału opisuje wtedy wyrażenie:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{R}^* \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p \mathbf{Q}_0^T, \quad (2.42)$$

gdzie  $\mathbf{Q}_0^T$  definiuje początkową orientację sieci kryształu (2.3).

Gradient prędkości  $\mathbf{L}$  dzieli się na część związaną ze sztywnym obrotem  $\mathbf{L}^*$  i część plastyczną  $\mathbf{L}^p$  w sposób następujący:

$$\mathbf{L}^* = \boldsymbol{\Omega}^*, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{L}^p = \mathbf{D}^p + \boldsymbol{\Omega}^p = \frac{1}{2} \mathbf{R}^* \hat{\mathbf{D}}^p (\mathbf{R}^*)^T + \frac{1}{2} \mathbf{R}^* \hat{\boldsymbol{\Omega}}^p (\mathbf{R}^*)^T, \quad (2.44)$$

gdzie przez  $\hat{\mathbf{D}}^p$  i  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}^p$  oznaczyliśmy odpowiednio symetryczną i antysymetryczną część tensora  $\hat{\mathbf{L}}^p$  (wzór (2.23)).

### 2.2.5 Opis ruchu sieci kryształu

Jak już zaznaczyliśmy, opisując ruch pojedynczego kryształu należy uwzględnić oprócz ruchu cząstek materialnych, ruch jego sieci opisanej przez reper kierunków krystalograficznych  $\{\mathbf{a}_i(x, t)\}$  (porównaj [34]). W zakresie sprężystym sieć krystaliczna deformuje się wraz z materiałem, natomiast w zakresie plastycznym materiał „przepływa” przez sieć, która pozostaje nieruchoma (porównaj rysunek 2.3). Zatem deformację sieci z konfiguracji odniesienia do konfiguracji aktualnej możemy opisać następująco:

$$\mathbf{F}^L = \mathbf{F}^* \mathbf{Q}_0^T. \quad (2.45)$$

Gradient prędkości sieci jest równy części sprężystej  $\mathbf{L}^*$  gradientu prędkości  $\mathbf{L}$  (porównaj wzory (2.45) i (2.20)):

$$\mathbf{L}^L = \dot{\mathbf{F}}^L (\mathbf{F}^L)^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^* (\mathbf{F}^*)^{-1} = \mathbf{L}^*. \quad (2.46)$$

Podobnie część symetryczna gradientu prędkości sieci jest równa gradientowi prędkości deformacji sprężystej  $\mathbf{D}^*$  a część antysymetryczna tensorowi spinu sprężystego  $\boldsymbol{\Omega}^*$ .

Wektory  $\mathbf{m}^r$  i  $\mathbf{n}^r$  określają kierunek sieciowy i płaszczyznę sieciową, zatem ich ruch jest zgodny z ruchem sieci. Jeżeli przez  $\hat{\mathbf{m}}^r$  i  $\hat{\mathbf{n}}^r$  oznaczymy wektory tworzące  $r$ -ty system

poślizgu w konfiguracji odniesienia  $\mathcal{C}_r$ , to ze względu na wyłącznie sprężystą deformację sieci prawdziwe są zależności:

$$\mathbf{m}^r = \mathbf{F}^L \hat{\mathbf{m}}^r, \quad \mathbf{n}^r = \hat{\mathbf{n}}^r (\mathbf{F}^L)^{-1}. \quad (2.47)$$

Tensory  $\mathbf{P}^r$  i  $\mathbf{W}^r$  występujące we wzorze (2.38) ulegają zmianie w procesie deformacji kryształu zgodnie ze zmianą orientacji sieci kryształu, a tym samym kierunków  $\mathbf{m}^r$  i  $\mathbf{n}^r$ . Ewolucję tych ostatnich można opisać wzorami:

$$\dot{\mathbf{m}}^r = \mathbf{L}^* \mathbf{m}^r, \quad \dot{\mathbf{n}}^r = -\mathbf{n}^r \mathbf{L}^*. \quad (2.48)$$

Wyznamy również pochodne materialne tensorów  $\mathbf{P}^r$  i  $\mathbf{W}^r$ . Wykorzystując równania (2.48) otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{P}}^r = \mathbf{D}^* \mathbf{W}^r - \mathbf{W}^r \mathbf{D}^* + \Omega^* \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^r \Omega^*, \quad (2.49)$$

$$\dot{\mathbf{W}}^r = \mathbf{D}^* \mathbf{P}^r - \mathbf{P}^r \mathbf{D}^* + \Omega^* \mathbf{W}^r - \mathbf{W}^r \Omega^*. \quad (2.50)$$

Jeżeli odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu z plastycznymi, to możemy założyć, że deformacja sieci zachodzi wyłącznie przez sztywne obrót:

$$\mathbf{Q}^L = \mathbf{R}^* \mathbf{Q}_0^T. \quad (2.51)$$

Równania (2.48) określające ewolucję kierunków krystalograficznych opisujących  $r$ -ty system poślizgu możemy zapisać następująco:

$$\dot{\mathbf{m}}^r = \Omega^L \mathbf{m}^r, \quad \dot{\mathbf{n}}^r = \Omega^L \mathbf{n}^r, \quad \text{gdzie } \Omega^L = \dot{\mathbf{Q}}^L (\mathbf{Q}^L)^T. \quad (2.52)$$

Orientacji reperu kierunków krystalograficznych  $\{\mathbf{a}_i(x, t)\}$  względem globalnego układu odniesienia dana jest zwykle za pomocą trzech kątów Eulera  $\{\varphi_i\}$  poprzez które wyrażamy tensor obrotu  $\mathbf{Q}^L$ . W obliczeniach poszukuje się orientacji sieci pojedynczego ziarna w chwili  $t + \Delta t$  mając jej orientację w chwili  $t$ . Zmianę kątów Eulera można wyznaczyć ze wzoru:

$$\varphi_i^{t+\Delta t} = \varphi_i^t + \dot{\varphi}_i \Delta t, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.53)$$

Do obliczenia występujących w powyższym równaniu przyrostów kątów Eulera  $\dot{\varphi}_i \Delta t$  zastosowaliśmy wzór podany przez Clementa [24] wykorzystujący równanie (2.52<sub>3</sub>) przekształcone do postaci:

$$\dot{\mathbf{Q}}^L = \Omega^L \mathbf{Q}^L. \quad (2.54)$$

Wyrażając tensor obrotu  $\mathbf{Q}^L$  przez kąty Eulera  $\varphi_i^t$  otrzymujemy równania opisujące ich ewolucję:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{12}^L - \frac{1}{\tan \varphi_2^t} (\sin \varphi_1^t \omega_{23}^L - \cos \varphi_1^t \omega_{13}^L), \quad (2.55)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \sin \varphi_1^t \omega_{13}^L + \cos \varphi_1^t \omega_{23}^L, \quad (2.56)$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\frac{\cos \varphi_1^t}{\sin \varphi_2^t} \omega_{12}^L + \frac{\sin \varphi_1^t}{\sin \varphi_2^t} \omega_{23}^L, \quad (2.57)$$

gdzie wyrazy  $\omega_{ij}^L$  oznaczają składowe tensora  $\Omega^L$ . Równania te są poprawne w sytuacji, gdy  $\varphi_2^t \neq 0$ . W przeciwnym przypadku należy zastosować zależności:

$$\dot{\psi} = \omega_{12}^L, \quad \text{gdzie } \psi = \varphi_1^t + \varphi_3^t, \quad (2.58)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \begin{cases} \frac{\omega_{23}^L}{\cos \tilde{\varphi}_1} & \text{gdzie } \tilde{\varphi}_1 = \arctan \frac{\omega_{13}^L}{\omega_{23}^L} \quad \text{dla } \omega_{23}^L \neq 0 \\ \omega_{13}^L & \text{gdzie } \tilde{\varphi}_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } \omega_{23}^L = 0 \end{cases}. \quad (2.59)$$

Wartości kątów Eulera w chwili  $t + \Delta t$  obliczymy wtedy następująco:

$$\varphi_1^{t+\Delta t} = \tilde{\varphi}_1 + \dot{\psi} \Delta t, \quad (2.60)$$

$$\varphi_2^{t+\Delta t} = \dot{\varphi}_2 \Delta t, \quad (2.61)$$

$$\varphi_3^{t+\Delta t} = \tilde{\varphi}_3, \quad \text{gdzie } \tilde{\varphi}_3 = \psi - \tilde{\varphi}_1. \quad (2.62)$$

Ze względu na to, że odkształcenia sprężyste są małe, występujący w równaniach spin sieci możemy utożsamić ze spinem sprężystym, mianowicie  $\Omega^L \approx \Omega^*$ . Obliczamy go zatem jako różnicę między spinem całkowitym  $\Omega$  a spinem plastycznym  $\Omega^p$ . Przyjmując, że spin całkowity dany jest przez warunki brzegowe zadania, pozostaje do wyznaczenia tensor spinu plastycznego. Aby go wyznaczyć należy wprowadzić dodatkowe równania konstytutywne.

## 2.3 Miary naprężenia

Niech  $ds$  będzie infitezymalnym materialnym elementem powierzchni w punkcie  $x \in C_t$  (porównaj rysunek 2.4). Przez  $\mathbf{n}$  oznaczmy wektor normalny do tej powierzchni. Na element  $ds$  działa siła elementarna  $dt$ . Wielkości te związane są zależnością:

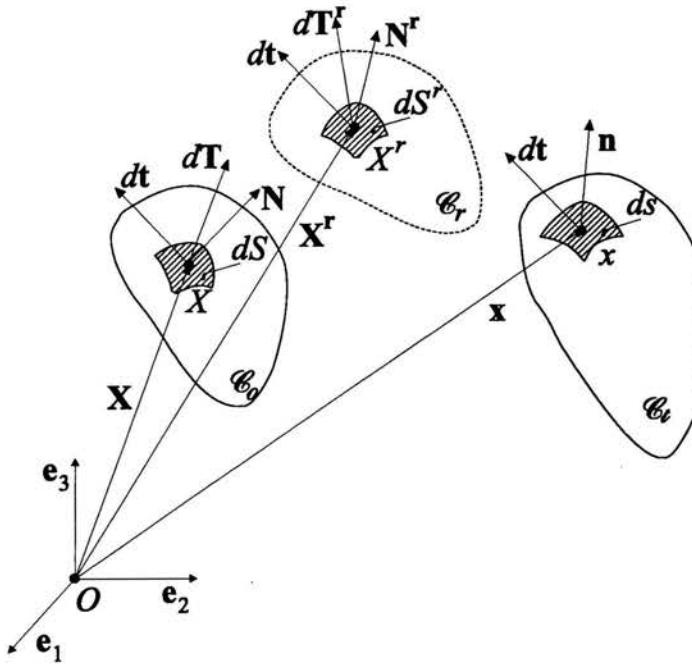
$$dt = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} ds = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} ds, \quad (2.63)$$

gdzie  $\boldsymbol{\sigma}$  nazywamy tensorem naprężenia Cauchy'ego. Pole tensora naprężenia Cauche'ego określone jest zatem na obszarze  $C_t$ .

Materialnemu elementowi powierzchni  $ds$  o normalnej  $\mathbf{n}$  odpowiada w konfiguracji początkowej element  $dS$  o normalnej  $\mathbf{N}$ , a w konfiguracji odniesienia element  $dS^r$  o normalnej  $\mathbf{N}^r$ . Przenieśmy równoległe siłę  $dt$  odpowiednio do punktu  $X$  i  $X^r$ . Możemy zdefiniować wtedy następujące tensory:

$$dt = \mathbf{N} \mathbf{T} dS, \quad dt = \mathbf{N}^r \mathbf{T}^r dS^r, \quad (2.64)$$

gdzie  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{T}^r$  nazywamy I tensorami Pioli-Kirchhoffa określonymi odpowiednio na konfiguracji początkowej i konfiguracji odniesienia.



Rysunek 2.4: Wektory naprężenia w poszczególnych konfiguracjach ciała.

Jeżeli wektor  $dt$  przetransformujemy do obszaru  $C_0$  i  $C_r$  w sposób następujący:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}dt, \quad d\mathbf{T}^r = \bar{\mathbf{F}}^{-1}dt, \quad (2.65)$$

to możemy zdefiniować kolejne dwa tensory:

$$d\mathbf{T} = \mathbf{N}\mathbf{S}dS, \quad d\mathbf{T}^r = \mathbf{N}^r\mathbf{S}^rdS^r. \quad (2.66)$$

Wielkości  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{S}^r$  nazywamy II tensorami Pioli-Kirchhoffa określonymi odpowiednio na konfiguracji początkowej i konfiguracji odniesienia.

Wprowadzone miary naprężenia można związać ze sobą w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, & \mathbf{T}^r &= J(\bar{\mathbf{F}})^{-1}\boldsymbol{\sigma}, \\ \mathbf{S} &= J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^T)^{-1}, & \mathbf{S}^r &= J\bar{\mathbf{F}}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{F}}^T)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

gdzie

$$J = \det\mathbf{F} = \det\bar{\mathbf{F}}. \quad (2.68)$$

W modelu sprężysto-plastycznym pojedynczego ziarna stosuje się również tensor naprężenia Kirchhoffa:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}\mathbf{T}. \quad (2.69)$$

Zauważmy, że I tensor Pioli-Kirchhoffa w ogólnym przypadku nie jest tensorem symetrycznym. Pozostałe tensory są symetryczne, jeżeli symetryczny jest tensor naprężenia Cauchy'ego.

## 2.4 Zasady zachowania

Zachowanie się pojedynczego ziarna kryształu poddanego oddziaływaniom zewnętrznym musi spełniać podstawowe prawa fizyczne, które nazywamy zasadami zachowania. Jako pierwszą wymieńmy zasadę zachowania masy, która w cząstce znajdującej się w punkcie  $x \in \mathcal{C}_t$  przyjmie postać:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0, \quad (2.70)$$

a w punkcie  $X \in \mathcal{C}_0$ :

$$\rho_0 = J \rho, \quad (2.71)$$

gdzie przez  $\rho$  i  $\rho_0$  oznaczyliśmy odpowiednio gęstość masy w punkcie o wektorze położenia  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{X}$ . Zauważmy, że o ile ośrodek jest nieściśliwy, to  $\dot{\rho} = 0$  i z równania (2.70) otrzymujemy:

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 0. \quad (2.72)$$

Odpowiednikiem II zasady dynamiki Newtona w przypadku ciał odkształcalnych jest zasada zachowania pędu. W przypadku braku sił inercyjnych staje się ona równaniem równowagi sił. Przy wykorzystaniu (2.70) otrzymujemy poniższą lokalną postać tego równania dla cząstki  $P$  znajdującej się w chwili  $t$  w punkcie  $x \in \mathcal{C}_t$ :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad (2.73)$$

gdzie przez  $\mathbf{f}$  oznaczono intensywność wypadkowej siły masowej w punkcie o wektorze położenia  $\mathbf{x}$ . W powyższym równaniu wykorzystano już kolejną zasadę zachowania, a mianowicie zasadę zachowania momentu pędu, z której w przypadku braku momentów masowych wynika symetria tensora naprężenia Cauchy'ego  $\boldsymbol{\sigma}$ . Równanie (2.73) w obszarze zajmowanym przez ciało w konfiguracji początkowej przyjmie postać:

$$\operatorname{Div} \mathbf{T}^T + \rho_0 \mathbf{f}_0 = 0, \quad (2.74)$$

gdzie przez  $\mathbf{f}_0$  oznaczono intensywność siły masowej na jednostkę masy w konfiguracji początkowej.

Jeżeli przyjmiemy, że proces sprężysto-plastyczny jest powolnym procesem adiabatycznym, to I i II zasadę termodynamiki możemy zapisać w sposób następujący:

$$\rho \dot{\Phi} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}) - \delta, \quad (2.75)$$

$$\delta \geq 0, \quad (2.76)$$

gdzie przez  $\Phi$  oznaczyliśmy energię swobodną Hemholtza, a przez  $\delta$  dysypację energii. Jeżeli przez  $e, T, \eta$  oznaczymy odpowiednio gęstość energii wewnętrznej, temperaturę bezwzględną i intensywność entropii w punkcie  $x \in \mathcal{C}_t$ , to energię swobodną zdefiniujemy jako:

$$\Phi \equiv e - T\eta. \quad (2.77)$$

Dla procesów odwracalnych dysypacja jest równa zeru. W adiabatycznym procesie odkształceń sprężysto-plastycznych dysypację możemy określić następująco:

$$\delta = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}^p) > 0. \quad (2.78)$$

Wprowadźmy jeszcze definicję sprzężonych miar odkształcenia i naprężenia. Według Hilla miara naprężenia  $s$  jest sprzężona z miarą odkształcenia  $\epsilon$ , jeżeli prędkość energii deformacji  $\dot{W}$  na jednostkę objętości w konfiguracji odniesienia wyrażona jest wzorem:

$$\dot{W} = \text{tr}(s\dot{\epsilon}). \quad (2.79)$$

Ponieważ prędkość energii deformacji  $\dot{W}$  możemy obliczyć jako pełne nasunięcie poniższych tensorów:

$$\dot{W} = \text{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{E}}) = \text{tr}(\mathbf{T}\dot{\mathbf{F}}) = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{D}), \quad (2.80)$$

to według Hilla sprzężone są następujące pary miar naprężeń i odkształceń  $\{\mathbf{S}, \mathbf{E}\}$  i  $\{\mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R} + \mathcal{O}(e^2), \mathbf{E}^{(0)}\}$  (porównaj wzory 2.33 i 2.67 oraz 2.35 i 2.69).

Z drugiej strony ponieważ prędkość energii deformacji  $\dot{W}_t$  na jednostkę objętości w konfiguracji aktualnej wyraża się wzorem:

$$\dot{W}_t = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}) \quad (2.81)$$

i nie jest równa prędkości deformacji  $\dot{W}$  na jednostkę objętości w konfiguracji odniesienia, to wielkości  $\boldsymbol{\sigma}$  i  $\mathbf{D}$  nie stanowią miar sprzężonych.

## 2.5 Równania konstytutywne

### 2.5.1 Uwagi wstępne. Równanie konstytutywne kryształu sprężystego

Aby wyznaczyć wszystkie wielkości opisujące zachowanie się pojedynczego ziarna w modelu sprężysto-plastycznym potrzebujemy równań wiążących daną miarę naprężenia ze sprzężoną z nią miarą odkształcenia. Równania te nazywamy równaniami konstytutywnymi. W przypadku teorii plastyczności mamy do czynienia z postacią przyrostową tych równań.



Równania konstytutywne muszą spełniać zasadę materialnej obiektywności, która stwierdza, że zachowanie materiału jest niezależne od obserwatora. Równania te są więc niezmiennicze ze względu na zmianę układu odniesienia.

Pola skalarne  $\alpha(\mathbf{x}, t)$ , wektorowe  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  i tensorowe  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  dane na konfiguracji aktualnej ciała nazywamy obiektywnymi, jeżeli przy zmianie układu odniesienia podlegają następującym prawom transformacji:

$$\alpha'(\mathbf{x}', t') = \alpha(\mathbf{x}, t), \quad (2.82)$$

$$\mathbf{a}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{Q}(t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad (2.83)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t), \quad (2.84)$$

gdzie w jednym układzie odniesienia opisywanemu przez te pola zjawisku zostaje przyporządkowana para  $\{\mathbf{x}, t\}$ , a w drugim  $\{\mathbf{x}', t'\}$ , oraz zachodzi związek:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t), \quad t' = t - a. \quad (2.85)$$

Tensor  $\mathbf{Q}(t)$  jest tensorem obrotu,  $\mathbf{c}(t)$  dowolnym wektorem i  $a \in \mathbb{R}$  jest wielkością stałą. Wielkościami obiektywnymi są np.: odległość, siła, tensor prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ , a nie-obiektywnymi: położenie, prędkość, tensor gradientu prędkości  $\mathbf{L}$ , pochodna materialna wielkości obiektywnej. Pochodną obiektywną Zaremby-Jaumana obiektywnego pola tensorowego  $\mathbf{A}$  nazywamy wielkość

$$\mathbf{A}^J = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}. \quad (2.86)$$

Pochodna Zaremby-Jaumana ma poniższą własność:

$$(\mathbf{A} : \mathbf{B})^J = \mathbf{A}^J : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{B}^J = \dot{\mathbf{A}} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \dot{\mathbf{B}}. \quad (2.87)$$

Prawo konstytutywne dla pojedynczego ziarna będzie wiązać ze sobą tensor prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  i pochodną Zaremby-Jaumana tensora naprężenia Kirchhoffa  $\boldsymbol{\tau}$ .

Założmy, że w zakresie sprężystym obowiązuje przyrostowe prawo Hooke'a o postaci

$$\boldsymbol{\tau}^{J*} = \boldsymbol{\mathcal{L}} : \mathbf{D}^*, \quad (2.88)$$

gdzie  $\boldsymbol{\mathcal{L}}$  jest tensorem IV-ego rzędu stałych modułów sprężystych i

$$\boldsymbol{\tau}^{J*} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}^* \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega}^* = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}^L \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega}^L. \quad (2.89)$$

Wielkość  $\boldsymbol{\tau}^{J*}$  opisuje zatem prędkość zmiany naprężenia Kirchhoffa względem układu poruszającego się razem z siecią. Przy założeniu, że odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu z plastycznymi, tensor  $\mathbf{U}^*$  można opisać wzorem (2.40). Wówczas możemy przyjąć, że pojedynczy kryształ jest materiałem hipersprężystym i tensor  $\boldsymbol{\mathcal{L}}$  można wyznaczyć z potencjału, którym jest energia swobodna wyrażona przez logarytmiczną miarę odkształcenia  $\Phi = \Phi(\mathbf{E}^{(0)})$  (porównaj zależności (2.41), (2.75), (2.79) i (2.81)).

### 2.5.2 Równanie konstytutywne kryształu sprężysto-plastycznego

Zauważmy, że w zakresie sprężysto-plastycznym prawdziwa jest zależność wynikająca z równań (2.26) i (2.39<sub>2</sub>)

$$\tau^{J*} - \tau^J = \Omega^P \tau - \tau \Omega^P = \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^r \beta^r, \quad (2.90)$$

w której

$$\beta^r \equiv \mathbf{W}^r \tau - \tau \mathbf{W}^r. \quad (2.91)$$

Wykorzystując równania (2.39<sub>1</sub>) (2.88) i (2.90) możemy zapisać następujące równanie konstytutywne z zakresie sprężysto-plastycznym:

$$\tau^J = \mathcal{L} : \mathbf{D} - \sum_{r=1}^M \dot{\gamma}^r \lambda^r, \quad \text{gdzie} \quad \lambda^r \equiv \mathcal{L} : \mathbf{P}^r + \beta^r. \quad (2.92)$$

Aby otrzymać związek pomiędzy  $\tau^J$  oraz  $\mathbf{D}$ , należy uzależnić prędkości ścinania na  $r$ -tym poślizgu z tensorem prędkości deformacji  $\mathbf{D}$ .

W większości modeli opisujących plastyczne zachowanie się pojedynczego kryształu stosuje się prawo uplastycznienia Schmid'a, które mówi, że plastyczne płynięcie na  $r$ -tym systemie poślizgu rozpoczyna się wtedy, gdy efektywne naprężenie ścinające  $\tau^r$  na tym systemie osiągnie pewną krytyczną wartość  $\tau_c^r$  będącą fizyczną własnością materiału. Zatem:

$$\tau^r = \tau_c^r \implies \dot{\gamma}^r \neq 0. \quad (2.93)$$

Efektywne naprężenie ścinające  $\tau^r$  obliczamy jako rzut naprężenia Kirchhoff'a  $\tau$  na płaszczyznę i kierunek poślizgu:

$$\tau^r = \mathbf{m}^r : \tau : \mathbf{n}^r. \quad (2.94)$$

Spośród  $M$  możliwych systemów poślizgu wybierane są te dla których łączna praca wykonana podczas poślizgu osiąga minimum. W modelach korzystających z prawa Schmid'a występuje problem niejednoznaczności wyboru aktywnych systemów poślizgu.

Aby pokonać tę trudność Gambin [36], [37], [38] zaproponował model współdziałających systemów poślizgu. Prędkość ścinania  $\dot{\gamma}^r$  można związać z efektywnym naprężeniem ścinającym  $\tau^r$  wykorzystując empiryczną zależność między prędkością dyslokacji i efektywnym naprężeniem ścinającym oraz prędkością ścinania i prędkością dyslokacji [58]. Ostatecznie związek ten przyjmuje postać:

$$\dot{\gamma}^r = \lambda \frac{(\tau^r)^{2n-1}}{(\tau_c^r)^{2n}}. \quad (2.95)$$

Współczynnik  $\lambda$  jest identyczny dla wszystkich systemów poślizgu. Poślizgi o różnych prędkościach  $\dot{\gamma}^r$  opisanych wzorem (2.95) pojawiają się na wszystkich systemach jednocześnie. Warto zauważyć, że wraz ze wzrostem wykładnika  $n$  zauważalny poślizg występuje wyłącznie na systemach dla których spełniony jest warunek Schmid'a.

Wykorzystując równanie (2.95) we wzorze (2.39) opisującym  $\mathbf{D}^p$  otrzymamy

$$\mathbf{D}^p = \lambda \sum_{r=1}^M \frac{1}{\tau_c^r} \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n-1} \mathbf{P}^r. \quad (2.96)$$

Powyższe równanie możemy traktować jako prawo płynięcia stowarzyszone z następującym potencjałem plastycznym

$$F(\boldsymbol{\tau}, \varphi_k) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n} - m \right). \quad (2.97)$$

Występujący w równaniu skalar  $m$  jest bezwymiarową stałą. Z potencjałem stowarzyszony jest gładki warunek plastyczności o postaci:

$$f = \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n} - m = 0, \quad (2.98)$$

gdzie wykładnik  $n > 1$  jest pewną bezwymiarową stałą materiałową. Jeżeli stałą  $m$  określmy tak, aby jak najbardziej zbliżyć się do warunku Schmid'a, to otrzymamy:

$$m = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \sum_{r=1}^M \left( 2 \frac{\tau_c^p}{\tau_c^r} \text{tr}(\mathbf{P}^s \mathbf{P}^r) \right)^{2n}. \quad (2.99)$$

Podstawiając (2.95) do równania opisującego zachowanie się sprężysto-plastyczne pojedynczego ziarna otrzymamy:

$$\boldsymbol{\tau}^J = \mathcal{L} : \mathbf{D} - \lambda \mathcal{F}, \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{F} \equiv \sum_{r=1}^M \frac{(\tau^r)^{2n-1}}{(\tau_c^r)^{2n}} \boldsymbol{\chi}^r. \quad (2.100)$$

Zdefiniowana powyżej wielkość  $\mathcal{F}$  jest symetrycznym tensorem II-go rzędu.

Współczynnik  $\lambda$ , podobnie jak w klasycznej teorii plastyczności, wyznaczmy z warunku konsystencji o postaci:

$$\dot{f} = 0 \iff \left( \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n} \right)^{\bullet} - \dot{m} = 0. \quad (2.101)$$

Ze wzoru (2.99) wynika, że stała  $m$  zależy od wartości aktualnego naprężenia krytycznego  $\tau_c$  na danym systemie poślizgu oraz od aktualnej geometrii kryształu. Obliczając pochodną materiałną  $\dot{m}$  założymy, że zmiana wzajemnej orientacji systemów poślizgu wywołana  $\mathbf{U}^*$  jest pomijalnie mała. Wielkość  $\text{tr}(\mathbf{P}^s \mathbf{P}^r)$  nie zależy wtedy od aktualnej orientacji sieci i można ją wyznaczyć w konfiguracji odniesienia. Wartość naprężeń krytycznych  $\tau_c^r$  na poszczególnych systemach poślizgu będzie zmieniać się zgodnie z przyjętym prawem wzmocnienia. Pochodna  $\dot{m}$  przyjmie zatem postać:

$$\dot{m} = 2n \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \sum_{r=1}^M \left( 2 \frac{\tau_c^p}{\tau_c^r} \text{tr}(\mathbf{P}^s \mathbf{P}^r) \right)^{2n} \left( \frac{\dot{\tau}_c^p}{\tau_c^p} - \frac{\dot{\tau}_c^r}{\tau_c^r} \right). \quad (2.102)$$

Obliczmy teraz drugą pochodną materialną występującą we wzorze (2.101):

$$\left( \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n} \right)^{\bullet} = 2n \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n} \left( \frac{\dot{\tau}^r}{\tau^r} - \frac{\dot{\tau}_c^r}{\tau_c^r} \right). \quad (2.103)$$

Wykorzystując własność (2.87) pochodnej obiektywnej Zaremy-Jaumana oraz wzory (2.49), (2.88), (2.92) można zauważyć, że (porównaj [6]):

$$\dot{\tau}^r = (\mathbf{P}^r)^{J^*} : \boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}^r : \boldsymbol{\tau}^{J^*} = \boldsymbol{\lambda}^r : \mathbf{D}^*. \quad (2.104)$$

W obliczeniach zostało przyjęte następujące prawo wzmocnienia [6]:

$$\dot{\tau}_c^r = \sum_{q=1}^M h_{rq} \dot{\gamma}^r. \quad (2.105)$$

Współczynniki  $h_{rq}$  są składowymi macierzy wzmocnienia  $H$ , w której:

$$h_{rq} = \begin{cases} h_1 & \text{dla } r = q \\ h_2 > h_1 & \text{dla } r \neq q \end{cases}. \quad (2.106)$$

Występuje tu zatem wzmocnienie utajone ( $h_2 > h_1$ ) dla nieaktywnych systemów poślizgu na których  $\tau^r < \tau_c^r$ .

Zdefiniujmy symetryczny tensor II-go rzędu o postaci:

$$\mathcal{G} \equiv \sum_{r=1}^M \frac{(\tau^r)^{2n-1}}{(\tau_c^r)^{2n}} \mathbf{P}^r \quad (2.107)$$

oraz stałą  $h_0$ :

$$\begin{aligned} h_0 \equiv & \sum_{r=1}^M \sum_{q=1}^M \frac{h_{rq}}{\tau_c^r \tau_c^q} \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n} \left( \frac{|\tau^q|}{\tau_c^q} \right)^{2n-1} + \\ & + \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M \sum_{r=1}^M \sum_{q=1}^M \left( 2 \frac{\tau_c^p}{\tau_c^r} \text{tr}(\mathbf{P}^s \mathbf{P}^r) \right)^{2n} \left( \frac{h_{pq}}{\tau_c^p \tau_c^q} - \frac{h_{rq}}{\tau_c^r \tau_c^q} \right) \left( \frac{|\tau^q|}{\tau_c^q} \right)^{2n-1}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Podstawiając wzory (2.104) i (2.105) oraz powyższe definicje do zależności (2.102) i (2.103), z warunku (2.101) otrzymujemy:

$$\lambda = \frac{\mathcal{F} : \mathbf{D}}{\mathcal{F} : \mathcal{G} + h_0} = \frac{1}{\tilde{h}} \mathcal{F} : \mathbf{D} \quad (2.109)$$

Przyrostowe równanie konstytutywne sprężysto-plastyczności (2.100) można zatem zapisać:

$$\boldsymbol{\tau}^J = \left( \mathcal{L} - \frac{1}{\tilde{h}} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \right) : \mathbf{D} = \mathcal{L}^{ep} : \mathbf{D}. \quad (2.110)$$

Należy zauważyć, że tensor IV-ego rzędu  $\mathcal{L}^{ep}$  zależy od aktualnego stanu naprężenia  $\tau$  oraz aktualnej orientacji sieci. Symetrie tego tensora są identyczne z symetriami tensora sprężystości Hooke'a  $\mathcal{L}$ .

Jeżeli będziemy mieli do czynienia z modelem sprężysto-idealnie plastycznym pojedynczego ziarna, to wtedy występująca w równaniu (2.109) stała  $\hat{h}$  będzie się wyrażać wzorami:

$$\hat{h} = \mathcal{F} : \mathcal{G}, \quad \text{ponieważ } h_0 = 0. \quad (2.111)$$

Jeżeli pominiemy w opisie pojedynczego ziarna odkształcenia sprężyste, to kinematykę będziemy opisywali równaniami (2.42)-(2.44), a jedynymi niezbędnymi zależnościami konstytutywnymi będą: stowarzyszone prawo płynięcia (2.96), prawo wzmocnienia (2.106) oraz dodatkowe równanie konstytutywne na spin plastyczny  $\Omega^p$ . Na ich podstawie wyznaczmy przy znanym  $\mathbf{L}$  odpowiadający mu tensor naprężenia  $\tau$ . Współczynnik  $\lambda$  wyznaczmy z warunku plastyczności (2.98).

### 2.5.3 Równanie konstytutywne opisujące spin plastyczny

Wykorzystując zależność (2.95) w równaniu (2.39) otrzymamy:

$$\Omega^p = \lambda \sum_{r=1}^M \frac{1}{\tau_c^r} \left( \frac{\tau^r}{\tau_c^r} \right)^{2n-1} \mathbf{W}^r. \quad (2.112)$$

Powyższe równanie jest prawem spinu plastycznego stowarzyszonym z potencjałem zdefiniowanym wzorem (2.97), a współczynnik  $\lambda$  wyraża się wzorem (2.109). Dodatkowe równanie konstytutywne (2.112) na spin plastyczny  $\Omega^p$  służący do wyznaczenia spinu sieci  $\Omega^L$ , a tym samym ewolucji kątów Eulera, przyjmie zatem postać:

$$\Omega^p = \lambda \mathcal{H} = \frac{1}{\hat{h}} (\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}) : \mathbf{D}, \quad (2.113)$$

gdzie przez  $\mathcal{H}$  oznaczono poniższy antysymetryczny tensor II-go rzędu:

$$\mathcal{H} \equiv \sum_{r=1}^M \frac{(\tau^r)^{2n-1}}{(\tau_c^r)^{2n}} \mathbf{W}^r. \quad (2.114)$$

Własności tensorów IV-ego rzędu o symetriach wewnętrznych identycznych z tensorem postaci  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$  w przypadku  $n = 1$  (tensory  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{F}$  nie zależą wtedy od aktualnego stanu naprężenia) były dyskutowane w pracy autorki [43]. Stwierdzono, że dla materiałów o symetrii kubicznej tensor takiej postaci jest tensorem zerowym. W przypadku symetrycznego całkowitego gradientu prędkości sugeruje to brak spinu sieci, a tym samym brak jej obrotu. Zachowanie takie nie jest zgodne z doświadczeniem. Możemy na tej podstawie wnioskować o konieczności przyjmowania wykładnika  $n > 1$ .

Przedstawiony w niniejszej pracy opis rozwoju tekstury plastycznie płynącego agregatu ziaren korzysta z powyższego modelu konstytutywnego dla pojedynczego ziarna. Na jego podstawie został skonstruowany program numeryczny wyznaczający ewolucję tekstury w agregacie ziaren.

# Rozdział 3

## Model obliczeniowy polikryształu

### 3.1 Pojęcia podstawowe

Modele obliczeniowe dla polikryształów metali można podzielić na: fenomenologiczne, które bazują na klasycznej teorii plastyczności, oraz fizyczne wykorzystujące wiedzę o mikrostrukturze polikryształów. Pierwsze proponowane są przy założeniu, że materiał polikrystaliczny jest jednorodny w skali makro, a powierzchnia plastyczności zależy od makroskopowych miar naprężenia, odkształcenia lub jego prędkości. Drugie wykorzystują informację o uplastycznieniu pojedynczych ziaren składających się na agregat polikrystaliczny.

W rozdziale tym wprowadzimy podstawowe pojęcia dotyczące teorii opisujących zachowanie polikryształu, takie jak: reprezentatywny element objętości, wielkość globalna, wielkość uśredniona, wielkość lokalna oraz wzajemne zależności między tymi wielkościami. Następnie dokonamy omówienia fenomenologicznych i fizycznych modeli polikryształów ze szczególnym uwzględnieniem proponowanych warunków plastycznego płynięcia. Warunki te mają zasadniczy wpływ na opis anizotropii plastycznej materiału. W rozdziale tym pokażemy niezmiennicze postaci analizowanych warunków fenomenologicznych. Wyznamy również warunki lokalizacji odkształceń wynikające z tych warunków dla polikryształów znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. W dalszym ciągu omówimy model fizyczny uplastycznienia polikryształu podany przez Bishopa i Hilla w pracach [17] i [18]. Zaprezentujemy postać tej powierzchni dla różnych tekstur krystalograficznych, jakie mogą występować w elemencie reprezentatywnym polikryształu. Wykresy zaczerpnemy z prac [14], [2], [74], [75].

Element polikrystaliczny w skali mikro (lub bardziej adekwatnie mezo) jest niejednorodny. Składa się z wielu ziaren o różnych orientacjach sieci krystalograficznej, a często z ziaren metali o różnych własnościach. W klasycznej mechanice ośrodków ciągłych przyjmujemy natomiast, że ciało składa się z nieprzeliczalnej liczby cząstek materialnych tworzących kontinuum. Infinitesimalne otoczenie każdej z cząstek tworzy jednorodny element materialny, który odkształca się w sposób jednorodny. Aby można było stosować aparat mechaniki ośrodków ciągłych dla ciał o niejednorodnej strukturze, wprowadza się pojęcie

reprezentatywnego elementu objętości (RVE) takiego ciała w skali mikro. Element ten możemy traktować jako element materialny w skali makro odnosząc do niego makroskopowe miary deformacji i naprężenia. Wielkości te mają wtedy sens wielkości uśrednionych po RVE.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że reprezentatywny element objętości  $V_0$  opisywanego przez nas materiału polikrystalicznego w konfiguracji odniesienia stanowi agregat ziaren o jednakowym kształcie i własnościach fizycznych, różniących się wyłącznie orientacją sieci krystalograficznej względem globalnego układu odniesienia. Zwykle przyjmuje się, że w tak określonym nieskończenie małym otoczeniu punktu na poziomie makro znajduje się ok. 1000 ziaren, których średnica wynosi ok.  $100\mu m$  (porównaj [46]). RVE stanowi wtedy sześcian o boku 1 mm (porównaj [17]). W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że konfigurację odniesienia stanowi konfiguracja początkowa.

Uzależnimy teraz wielkości występujące w skali mikro, które będziemy nazywać lokalnymi, od wielkości makroskopowych nazywanych dalej globalnymi. Wprowadzimy w tym celu procedurę uśredniania po RVE. Oznaczmy przez  $\mathbf{A}$  pewną wielkość lokalną, a przez  $\langle \mathbf{A} \rangle$  wielkość jej uśrednienie. Wielkość  $\bar{\mathbf{A}}$  będzie oznaczać odpowiadającą wielkości  $\mathbf{A}$  wielkość globalną. Wielkości globalne powinny być zdefiniowane przez wielkości zadane na powierzchni reprezentatywnego elementu objętości  $\partial V_0$ . Przyjęto następującą procedurę uśredniania [52], [46], [95]:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{A} dV_0. \quad (3.1)$$

Jeżeli RVE składa się z  $N$  grup ziaren o różnych orientacjach i w ziarnach o orientacji  $g$  wielkość  $\mathbf{A}$  przyjmuje stałą wartość  $\mathbf{A}^g$ , to procedura uśredniania (3.1) przyjmie wtedy postać:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \sum_{g=1}^N \gamma^g \mathbf{A}^g, \quad \text{gdzie } \gamma^g = \frac{V_0^g}{V_0}. \quad (3.2)$$

Wielkość  $V_0^g$  oznacza objętość zajmowaną przez ziarna o orientacji  $g$ , a  $V_0$  całkowitą objętość RVE w konfiguracji początkowej.

Zakładamy, że w RVE pole I tensora naprężenia Kirchhoffa  $\mathbf{T}$  oraz jego pochodnej materialnej  $\dot{\mathbf{T}}$  jest zrównoważone (pomijamy siły masowe i przyjmujemy, że opisywany proces jest quasistatyczny) to znaczy:

$$\text{Div} \mathbf{T}^T = 0, \quad \text{Div} \dot{\mathbf{T}}^T = 0 \quad (3.3)$$

oraz nakładamy następujące warunki brzegowe:

$$\mathbf{N}_0 \mathbf{T} = \mathbf{t}_N, \quad \mathbf{N}_0 \dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{t}}_N, \quad (3.4)$$

gdzie przez  $\mathbf{N}_0$  oznaczyliśmy wersor normalny do powierzchni  $\partial V_0$  w konfiguracji początkowej.

Zdefiniujmy globalny gradient deformacji  $\bar{\mathbf{F}}$  oraz jego pochodną materialną  $\dot{\bar{\mathbf{F}}}$  przez wielkości występujące na brzegu RVE w następujący sposób :

$$\bar{\mathbf{F}} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \mathbf{x} \otimes \mathbf{N}_0 dS_0, \quad \dot{\bar{\mathbf{F}}} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \dot{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{N}_0 dS_0. \quad (3.5)$$

Podobnie, przez wielkości zadane na brzegu możemy zdefiniować globalny I tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa, jego pochodną materialną oraz globalny tensor naprężenia Kirchhoffa.

$$\bar{\mathbf{T}} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \mathbf{X} \otimes \mathbf{t}_N dS_0, \quad \dot{\bar{\mathbf{T}}} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \dot{\mathbf{X}} \otimes \dot{\mathbf{t}}_N dS_0, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \mathbf{x} \otimes \mathbf{t}_N dS_0. \quad (3.6)$$

Wykorzystując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego, przyjęte równania równowagi (3.3), definicje wielkości lokalnych wprowadzone przy opisie modelu pojedynczego ziarna oraz wzór (3.1), możemy udowodnić następujące zależności:

$$\bar{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{F} \rangle, \quad \dot{\bar{\mathbf{F}}} = \langle \dot{\mathbf{F}} \rangle, \quad \bar{\mathbf{T}} = \langle \mathbf{T} \rangle, \quad \dot{\bar{\mathbf{T}}} = \langle \dot{\mathbf{T}} \rangle, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{T}} = \langle \mathbf{F} \mathbf{T} \rangle. \quad (3.7)$$

Aby element objętości można było traktować jako reprezentatywny, muszą być spełnione pewne warunki. Po pierwsze charakterystyczny wymiar tego elementu musi być dużo większy od wymiaru elementów na poziomie mikro (w przypadku polikryształu - ziaren). Po drugie na brzegu powinny być spełnione makrojednorodne warunki brzegowe [52], [95]. Warunki te mają postać:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{X}, \quad \mathbf{t}_N = \mathbf{N}_0 \bar{\mathbf{T}}. \quad (3.8)$$

Jeżeli spełniony jest powyższy warunek, to prawdziwa jest zależność:

$$\langle \mathbf{F} \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{F} \rangle \langle \mathbf{T} \rangle. \quad (3.9)$$

Jeżeli przyjmiemy ponadto podobne warunki na pochodne materialne odpowiednich wielkości na brzegu, to znaczy

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\bar{\mathbf{F}}} \mathbf{X}, \quad \dot{\mathbf{t}}_N = \mathbf{N}_0 \dot{\bar{\mathbf{T}}}, \quad (3.10)$$

to można również wykazać, że:

$$\langle \mathbf{T} : \dot{\mathbf{F}} \rangle = \langle \mathbf{T} \rangle : \langle \dot{\mathbf{F}} \rangle = \bar{\mathbf{T}} : \dot{\bar{\mathbf{F}}}, \quad (3.11)$$

$$\langle \dot{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{F}} \rangle = \langle \dot{\mathbf{T}} \rangle : \langle \dot{\mathbf{F}} \rangle = \dot{\bar{\mathbf{T}}} : \dot{\bar{\mathbf{F}}}. \quad (3.12)$$

Porównując powyższe równania ze wzorem (2.80) na prędkość energii deformacji możemy zauważyć, że:

$$\langle \dot{W} \rangle = \dot{\bar{W}}. \quad (3.13)$$

Ze wzoru (3.13) wynika bezpośrednio, że

$$\langle \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} \rangle = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}}. \quad (3.14)$$

Warunek (3.14) zwany jest często warunkiem konsystencji Hilla.

Omawiane dalej modele fenomenologiczne opisują zachowanie materiału polikrystalicznego poprzez wielkości globalne „zapominając” o ich związku z mikrostrukturą. Proponowane równania konstytutywne wiążą ze sobą wielkości na poziomie makro. W modelach fizycznych opisujących plastyczność polikryształów poszukuje się postaci równań konstytutywnych na poziomie makro, które wynikają ze związków przyjętych na poziomie mikro.



## 3.2 Wybrane fenomenologiczne kryteria uplastycznienia metali

### 3.2.1 Własności funkcji płynięcia

Fenomenologiczne kryteria uplastycznienia zadane są zwykle poprzez skalarną funkcję  $f$  zależną od tensora naprężenia, tensora odkształcenia lub jego części plastycznej, pochodnych materialnych tych tensorów oraz parametrów opisujących anizotropię materiału. W większości teorii przyjmuje się, że funkcja ta zależy tylko od tensora naprężenia i parametrów materiałowych t.zn  $f = f(\sigma)$ , a warunek plastyczności przyjmuje wtedy postać:

$$f(\sigma) = (\sigma_0)^m. \quad (3.15)$$

Równanie (3.15) opisuje w przestrzeni naprężeń powierzchnię ograniczającą zbiór stanów naprężenia  $\sigma$ , dla których polikryształ deformuje się wyłącznie sprężysto, dany przez nierówność:

$$f(\sigma) < (\sigma_0)^m, \quad (3.16)$$

gdzie  $\sigma_0$  i wykładnik  $m$  są pewnymi stałymi materiałowymi. Powierzchnię tą nazywamy powierzchnią plastyczności. W myśl ogólnej teorii równań konstytutywnych (porównaj [54], [55]) powinna to być powierzchnia wypukła. Stanowi ona zwykle powierzchnię potencjalną dla tensora prędkości deformacji plastycznej w teorii dużych odkształceń lub tensora przyrostu odkształcenia plastycznego w teorii małych odkształceń. Ponadto przyjmuje się, że funkcja  $f$  opisująca tę powierzchnię jest funkcją jednorodną. Zachodzą zatem poniższe zależności (porównaj [53]):

- zależność opisująca stowarzyszoną prawo płynięcia

$$D^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.17)$$

słuszna dla pewnego dodatniego składowego  $\lambda$ ,

- zależność opisująca jednorodność stopnia  $m$  funkcji płynięcia

$$f(\mu\sigma) = \mu^m f(\sigma), \quad \sigma : \frac{\partial f}{\partial \sigma} = m f(\sigma) \quad (3.18)$$

słuszna dla dowolnego składowego  $\mu > 0$ .

Formułując funkcję płynięcia dla polikryształów metali przyjmuje się zwykle, że materiały te nie uplastyczniają się przy dowolnym hydrostatycznym stanie naprężenia. Ponadto wartość naprężenia uplastyczniającego jest taka sama dla tensorów naprężenia, które różnią się tylko znakiem. Funkcja płynięcia ma wtedy następujące własności:

$$f(\sigma) = f(S), \quad f(-\sigma) = f(\sigma), \quad (3.19)$$

gdzie przez  $\mathbf{S}$  oznaczono dewiator tensora naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  w przestrzeni trójwymiarowej to znaczy  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}\mathbf{I}$  i  $tr$  oznacza operację śladu tensora. Z własności (3.19) funkcji  $f$  wynika pewna własność opisywanego przez nią materiału, którą wykorzystamy w dalszej części pracy. Oznaczmy przez  $\mathbf{n}$  pewien kierunek w materiale. Wytrzymałość materiału na rozciąganie w tym kierunku będzie dana zależnością:

$$\sigma_n = \sigma_o [f(\mathbf{N})]^{-1/m} = \sigma_o [f(\mathbf{N}^d)]^{-1/m}, \quad \text{gdzie } \mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad \text{ i } \quad \mathbf{N}^d = \mathbf{N} - \frac{1}{3}\mathbf{I}. \quad (3.20)$$

Na mocy własności (3.19<sub>2</sub>) jest ona równa wytrzymałości na ściskanie w tym kierunku. Oznaczmy przez  $\sigma_n^b$  wytrzymałość opisywanego materiału na dwuosiowe rozciąganie w płaszczyźnie o normalnej  $\mathbf{n}$ . Zauważmy, że:

$$\sigma_n^b = \sigma_o [f(\mathbf{I} - \mathbf{N})]^{-1/m} = \sigma_o [f(-\mathbf{N}^d)]^{-1/m} = \sigma_o [f(\mathbf{N}^d)]^{-1/m} = \sigma_n. \quad (3.21)$$

Równość wytrzymałości  $\sigma_n$  i  $\sigma_n^b$  nie zależy zatem od typu symetrii materiału, wystarczy aby funkcja płynięcia miała własność jednorodności stopnia  $m$  oraz spełniała warunki (3.19).

Jak wspomnieliśmy w większości przypadków funkcje opisujące powierzchnię plastyczności zależą od tensora  $\boldsymbol{\sigma}$  i parametrów materiałowych. Opis zmiany powierzchni płynięcia wywołanej dużymi deformacjami plastycznymi wymaga dodatkowo uzależnienia funkcji płynięcia od tensora odkształcenia plastycznego lub tensora prędkości plastycznej deformacji. Można to zrobić na dwa sposoby: uzależniając od tych tensorów bezpośrednio funkcję płynięcia i wtedy  $f = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}^p)$ , lub uzależniając od nich parametry materiałowe występujące w funkcji  $f$ .

Poniżej poddamy bardziej szczegółowej analizie warunków Hilla z roku 1990 oraz warunków Barlata i Liana z roku 1989. Wyniki tej analizy zamieszczono również w pracy [70]. Ponieważ oba te warunki dotyczą płaskiego stanu naprężenia podamy teraz ogólne własności funkcji opisujących kryteria uplastycznienia dla materiałów ortotropowych w przestrzeni dwuwymiarowej.

W obliczeniach przydatna jest taka postać funkcji uplastycznienia, która nie zależy od wyboru układu odniesienia. Można ją znaleźć wykorzystując teorię reprezentacji funkcji anizotropowych zaproponowaną przez Boehlera [19], [20] (porównaj również [61]). Według tej teorii ortotropowa funkcja tensora  $\boldsymbol{\sigma}$  w przestrzeni dwuwymiarowej 2D ma postać:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f_1(tr\boldsymbol{\sigma}, tr\boldsymbol{\sigma}^2, tr\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.22)$$

gdzie  $tr$  oznacza operację śladu dla tensora, tensor  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ , a  $\mathbf{m}$  jest wersorem współosiowym z jednym z głównych kierunków ortotropii. Trzy niezmienniki ortotropowe występujące w równaniu (3.22) można wyrazić przez składowe  $\sigma_{\alpha\beta}$  płaskiego tensora naprężenia w bazie związanej z głównymi kierunkami ortotropii w sposób następujący:

$$tr\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad tr\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{12}^2, \quad tr\mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11}. \quad (3.23)$$

Trzy niezmienniki występujące w równaniu (3.22) mogą zostać zastąpione przez inny zespół niezmienników im równoważnych np.  $\{tr\boldsymbol{\sigma}, trs^2, tr\mathbf{M}s\}$ , gdzie  $s$  jest dewiatorem

płaskiego tensora  $\sigma$ , to znaczy  $\mathbf{s} = \sigma - \frac{1}{2}(\text{tr}\sigma)\mathbf{I}$ , a  $\mathbf{I}$  jest tensorem jednostkowym w przestrzeni  $2D$ . Funkcja  $f$  ma wtedy postać:

$$f(\sigma) = f_2(\text{tr}\sigma, \text{trs}^2, \text{trMs}), \quad (3.24)$$

a występujące w niej niezmienniki dewiatora  $\mathbf{s}$  wyrażają się następująco przez składowe  $\sigma_{\alpha\beta}$ :

$$\text{trs}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2\sigma_{12}^2, \quad \text{trMs} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}). \quad (3.25)$$

Składowe płaskie tensora prędkości deformacji możemy otrzymać wykorzystując w prawie płynięcia (3.17) postać niezmienniczą (3.24) funkcji  $f$  będącej funkcją płynięcia. Równanie (3.17) przyjmie wtedy postać:

$$\mathbf{D}^p = \lambda \left[ g_1(\sigma)\mathbf{I} + 2g_2(\sigma)\mathbf{s} + g_3(\sigma)(\mathbf{M} - \frac{1}{2}\mathbf{I}) \right], \quad (3.26)$$

gdzie funkcje  $g_i(\sigma)$  są skalarnymi ortotropowymi funkcjami tensora naprężenia takimi, że

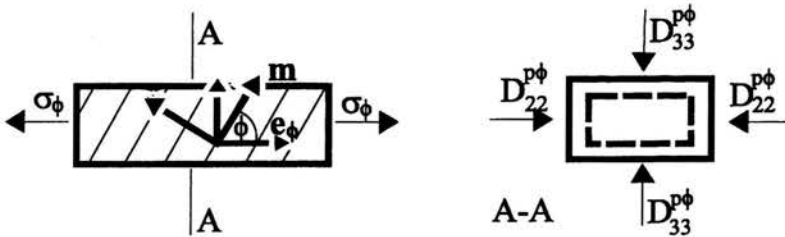
$$g_1 = \frac{\partial f}{\partial \text{tr}\sigma}, \quad g_2 = \frac{\partial f}{\partial \text{trs}^2}, \quad g_3 = \frac{\partial f}{\partial \text{trMs}}. \quad (3.27)$$

Funkcje  $g_1$  i  $g_3$  są funkcjami jednorodnymi stopnia  $m-1$ , a funkcja  $g_2$  funkcją jednorodną stopnia  $m-2$ . Dodatkową niezerową składową tensora  $\mathbf{D}^p$  w przestrzeni  $3D$  otrzymujemy zakładając, że jest on dewiatorem:

$$D_{33}^p = -(D_{11}^p + D_{22}^p). \quad (3.28)$$

Zauważmy, że ze względu na jednorodność stopnia  $m$  funkcji  $f$  spełnione jest poniższe równanie:

$$g_1 \text{tr}\sigma + 2g_2 \text{trs}^2 + g_3 \text{trMs} = m\sigma_o^m. \quad (3.29)$$



Rysunek 3.1: Jednoosiowe rozciąganie próbki wykonanej z materiału ortotropowego.

Przydatna w analizie anizotropii materiału jest zależność opisująca wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie lub ściskanie pod dowolnym kątem  $\phi$  do jednej z głównych osi

ortotropii, np. współosiowej z wektorem  $\mathbf{m}$  (porównaj rysunek 3.1). Tensor naprężenia możemy wtedy zapisać w sposób następujący:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\phi} \mathbf{e}_{\phi} \otimes \mathbf{e}_{\phi} = \sigma_{\phi} \mathbf{W}_{\phi}, \quad (3.30)$$

gdzie  $\mathbf{e}_{\phi}$  jest wektorem określającym kierunek rozciągania. Podstawiając tensor naprężenia do równań (3.22) i (3.24) otrzymamy:

$$f(\sigma_{\phi} \mathbf{W}_{\phi}) = \sigma_{\phi}^m f(\mathbf{W}_{\phi}) = \sigma_{\phi}^m f_1(1, 1, \cos^2 \phi) = \sigma_{\phi}^m f_2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cos 2\phi\right). \quad (3.31)$$

Wraz z warunkiem uplastycznienia (3.15) daje to poniższą zależność:

$$\left(\frac{\sigma_o}{\sigma_{\phi}}\right)^m = f_1(1, 1, \cos^2 \phi) = f_2\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cos 2\phi\right). \quad (3.32)$$

Zjawiskiem ograniczającym plastyczne kształtowanie elementów metalowych jest lokalizacja odkształceń. Podstawową rolę przy opisie lokalizacji odkształceń odgrywa współczynnik Lankforda  $R_{\phi}$ . Wykorzystując równania (3.26) i (3.29) można podać wyrażenie określające współczynnik Lankforda dla materiału ortotropowego rozciąganego pod kątem  $\phi$  do osi o wektorze  $\mathbf{m}$ . Współczynnik ten dany jest przez stosunek składowej tensora prędkości plastycznej deformacji  $D_{22}^{p\phi}$  w kierunku prostopadłym do wektora  $\mathbf{e}_{\phi}$  i składowej  $D_{33}^{p\phi}$  w kierunku normalnym do rozważanej płaszczyzny (porównaj rysunek 3.1):

$$R_{\phi} = \frac{D_{22}^{p\phi}}{D_{33}^{p\phi}} = \frac{m}{2g_1(\mathbf{W}_{\phi})} \left(\frac{\sigma_o}{\sigma_{\phi}}\right)^m - 1. \quad (3.33)$$

Wystąpienie lokalizacji odkształceń sprzyjają stany naprężeń, które prowadzą do zerowych wartości własnych tensora  $\mathbf{D}^p$  w przestrzeni trójwymiarowej  $3D$  (porównaj [12], [53],[76]):

$$D_1^p D_2^p = 0 \quad \text{lub} \quad D_1^p + D_2^p = 0. \quad (3.34)$$

Powyższy warunek wyrażony poprzez niezmienniki tensora  $\mathbf{D}^p$  w przestrzeni  $2D$  można zapisać następująco:

$$D_1^p D_2^p = 0 \iff (\text{tr} \mathbf{D}^p)^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^p)^2 = 0, \quad (3.35)$$

$$D_1^p + D_2^p = 0 \iff \text{tr} \mathbf{D}^p = 0. \quad (3.36)$$

Wykorzystując postać prawa płynięcia (3.26) w równaniach (3.35) i (3.36) wyrazimy je przez niezmienniki płaskiego tensora naprężenia:

$$(\text{tr} \mathbf{D}^p)^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^p)^2 = 0 \iff 2g_1^2 - 4g_2^2 \text{tr} s^2 - g_3(4g_2 \text{tr} \mathbf{M} s + \frac{1}{2} g_3) = 0, \quad (3.37)$$

$$\text{tr} \mathbf{D}^p = 0 \iff g_1 = 0. \quad (3.38)$$

Powyższe równania będziemy wykorzystywali w dalszej części pracy przy badaniu ewolucji anizotropii indukowanej przez rozwój tekstury dla zadanych ścieżek plastycznej deformacji.

### 3.2.2 Warunek Hilla z roku 1990

W roku 1948 Hill [47], [48] podał kwadratowy warunek płynięcia dla materiałów ortotropowych. Jest on szczególnym przypadkiem kryterium Misesa z roku 1928 [85] i opisuje materiał, który ma właściwości opisane równaniami (3.19). Dokładną analizę tego kryterium przeprowadziliśmy z Jemioł w pracy [65] (porównaj również [62], [63] i [64]). Warunek ten jest obecnie najczęściej wykorzystywanym warunkiem dla anizotropowych elementów metalowych, choć nie obejmuje wielu zjawisk związanych z procesem płynięcia.

Na podstawie obserwacji procesów kształtowania elementów metalowych oraz ich eksploatacji stwierdzono, że warunki plastyczności drugiego stopnia są niewystarczające do opisu wielu zjawisk związanych z procesem płynięcia. Do zjawisk takich należy „earing” pojawiający się podczas tłoczenia blach, zwiększenie odporności na korozję łopatek turbin gazowych, czy zwiększenie wytrzymałości zmęczeniowej sprężyn stosowanych w urządzeniach precyzyjnych. Poszukiwano zatem warunków wyższego rzędu. W roku 1979 Hill [51] podał warunek  $m$ -tego stopnia sformułowany dla stanów naprężenia dla których kierunki główne pokrywały się z osiami ortotropii. W warunku tym występuje 7 stałych materiałowych, których wyznaczenie w testach może być dość kłopotliwe. Autor sugeruje, iż niektóre ze stałych można przyjąć jako równe zero bez utraty możliwości opisu przez to kryterium zjawisk, których nie jest w stanie objąć jego warunek z roku 1948. Dla anizotropii normalnej (materiał jest izotropowy w płaszczyźnie blachy) i płaskiego stanu naprężenia Hill podaje cztery takie szczególne przypadki swojego kryterium. W 1990 roku [53] jeden z owych czterech przypadków został rozszerzony na materiały anizotropowe w płaszczyźnie blachy. W pracach [64] i [65] zaproponowaliśmy inny warunek  $m$ -tego stopnia będący uogólnieniem warunku Hilla z roku 1948. Postać tego warunku wynikała z postaci kanonicznej równania opisującego powierzchnię plastyczności Hilla z 1948 roku w przestrzeni dwiatorów.

Warunek Hilla z roku 1990 został podany w następującej postaci:

$$f_H(\sigma) = |\sigma_{11} + \sigma_{22}|^m + \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^m [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{\frac{m}{2}} + (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{12}^2)^{\frac{m}{2}-1} [-2a(\sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2) + b(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2] = (2\sigma)^m, \quad (3.39)$$

gdzie  $\sigma_{\alpha\beta}$  są składowymi tensora naprężenia  $\sigma$  w bazie  $\{\mathbf{m}_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  związanej z głównymi osiami ortotropii w płaszczyźnie blachy. Łatwo zauważyć, że funkcja  $f_H$  jest funkcją jednorodną stopnia  $m$ . W powyższym warunku  $\sigma, \tau, a, b, m$  to parametry materiałowe, które należy wyznaczyć z badań doświadczalnych. Jeżeli mamy do czynienia z materiałem sztywno-idealnie plastycznym, to dla dowolnego stanu odkształceń przyjmują one stałe wartości. W przypadku izotropowego wzmocnienia, parametr  $\sigma$  staje się funkcją odkształcenia plastycznego, natomiast wzajemny stosunek tego parametru do pozostałych pozostaje niezmienny w procesie deformacji - powierzchnia plastyczności „puchnie” nie zmieniając swojego kształtu. Jeżeli wprowadzimy oddzielne równania ewolucji dla pozostałych parametrów, to możemy otrzymać wzmocnienie anizotropowe i opisać ewolucję anizotropii plastycznej danego materiału. Autor sugeruje, że wykładnik  $m$  powinien być mniejszy od 2. Jeżeli  $m = 2$  z równania (38) otrzymujemy kryterium Hilla z 1948 roku.

Wykorzystując równania (3.23) w (3.39) funkcję płynięcia Hilla przedstawimy w postaci [70]:

$$f_1^H = |tr\sigma|^m + \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^m [2tr\sigma^2 - (tr\sigma)^2]^{\frac{m}{2}} + \\ + 4(tr\sigma^2)^{\frac{m}{2}-1} (trM\sigma - \frac{1}{2}(tr\sigma)) [b(trM\sigma - \frac{1}{2}(tr\sigma)) - atr\sigma] = (2\sigma)^m, \quad (3.40)$$

natomiast w bazie niezmienników dewiatora (3.25):

$$f_2^H = |tr\sigma|^m + \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^m [2trs^2]^{\frac{m}{2}} + \\ + 4(trs^2 + \frac{1}{2}(tr\sigma)^2)^{\frac{m}{2}-1} tr(Ms) [b(tr(Ms) - atr\sigma)] = (2\sigma)^m. \quad (3.41)$$

Aby znaleźć wartość parametrów  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $a$ ,  $b$  dla danego materiału należy wykonać cztery testy doświadczalne np.:

- czyste ścinanie w płaszczyźnie 1-2

$$\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix} \text{ w bazie } \{\mathbf{m}_\alpha\}, \text{ gdzie } k - \text{wartość graniczna naprężenia}, \quad (3.42)$$

- jednorodne dwuosiove rozciąganie w płaszczyźnie 1-2

$$\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} Y_p & 0 \\ 0 & Y_p \end{bmatrix} \text{ w bazie } \{\mathbf{m}_\alpha\}, \text{ gdzie } Y_p - \text{wartość graniczna naprężenia}, \quad (3.43)$$

- jednoosiowe rozciąganie w kierunku  $\mathbf{m}_1$

$$\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ w bazie } \{\mathbf{m}_\alpha\}, \text{ gdzie } Y_1 - \text{wartość graniczna naprężenia}, \quad (3.44)$$

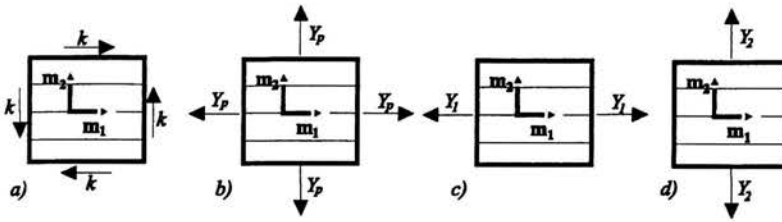
- jednoosiowe rozciąganie w kierunku  $\mathbf{m}_2$

$$\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} \text{ w bazie } \{\mathbf{m}_\alpha\}, \text{ gdzie } Y_2 - \text{wartość graniczna naprężenia}. \quad (3.45)$$

Schematycznie sposób przeprowadzenia powyższych testów został przedstawiony na rysunku 3.2. Podstawiając ich wyniki do równania (3.39) lub (3.40) otrzymamy wyrażenia na parametry występujące w warunku Hilla:

$$a = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{2Y_p}{Y_2} \right)^m - \left( \frac{2Y_p}{Y_1} \right)^m \right], \quad b = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2Y_p}{Y_1} \right)^m + \left( \frac{2Y_p}{Y_2} \right)^m \right] - \left( \frac{Y_p}{k} \right)^m - 1, \quad (3.46)$$

$$\sigma = Y_p, \quad \tau = k.$$



Rysunek 3.2: Proponowane testy doświadczalne służące wyznaczeniu stałych materiałowych występujących w warunku Hilla: a) czyste ścinanie, b) dwuosiowe rozciąganie, c) jednoosiowe rozciąganie w kierunku  $\mathbf{m}_1$ , d) jednoosiowe rozciąganie w kierunku  $\mathbf{m}_2$ .

Hill podaje również inne możliwe testy służące do wyznaczenia stałej  $b$ . Może to być test jednoosiowego rozciągania lub czystego ścinania pod kątem  $45^\circ$  do kierunku  $\mathbf{m}_1$  w płaszczyźnie blachy. Jeżeli wartość graniczną naprężenia uzyskaną w tych testach oznaczmy odpowiednio przez  $Y_{45}$  i  $\tau_{45}$  to otrzymamy poniższą zależność na stałą  $b$ :

$$b = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{2Y_p}{Y_1} \right)^m + \left( \frac{2Y_p}{Y_2} \right)^m \right] - \left( \frac{2Y_p}{Y_{45}} \right)^m = 2^{\frac{m}{2}-1} \left[ \left( \frac{Y_p}{\tau_{45}} \right)^m - \left( \frac{Y_p}{\tau} \right)^m \right]. \quad (3.47)$$

Spójrzmy jaką postać przyjmuje omawiana funkcja płynięcia dla szczególnych przypadków ortotropii. I tak, dla symetrii kubicznej mamy:

$$Y_1 = Y_2 = Y \Rightarrow a = 0, \quad (3.48)$$

a warunek plastyczności w bazie niezmienników dewiatora (3.41) zredukuje się do postaci:

$$|tr\sigma|^m + \left( \frac{\sigma}{\tau} \right)^m [2trs^2]^{\frac{m}{2}} + 4(trs^2 + \frac{1}{2}(tr\sigma)^2)^{\frac{m}{2}-1} [btr(\mathbf{M}s)]^2 = (2\sigma)^m. \quad (3.49)$$

Kiedy materiał jest izotropowy w płaszczyźnie blachy, to własności materiału nie zależą od tensora  $\mathbf{M}$ , a zatem  $b = 0$ . Wtedy

$$|tr\sigma|^m + \left( \frac{\sigma}{\tau} \right)^m [2trs^2]^{\frac{m}{2}} = (2\sigma)^m. \quad (3.50)$$

Jeżeli wyrazimy niezmienniki występujące w powyższym równaniu przez wartości własne płaskiego tensora naprężenia  $\sigma$ , to otrzymamy jeden z czterech podanych przez Hilla szczególnych przypadków jego warunku uplastycznienia z roku 1979 [51].

Wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie lub ściskanie, pod dowolnym kątem  $\phi$  do jednej z głównych osi ortotropii np.  $\mathbf{m}_1$  w płaszczyźnie blachy, przewidywana przez rozważane kryterium płynięcia dana jest równaniem:

$$\sigma_\phi = \pm \left[ \frac{(2\sigma)^m}{1 + \left( \frac{\sigma}{\tau} \right)^m + \cos 2\phi (b \cos 2\phi - 2a)} \right]^{\frac{1}{m}}. \quad (3.51)$$

W przypadku funkcji płynięcia  $f_H(\sigma)$  opisanej równaniem (3.39), otrzymamy następującą formuły na funkcje  $g_i$  występujące w prawie płynięcia (3.26):

$$g_1 = m|tr\sigma|^{m-1}sgn(tr\sigma) + 2(trs^2 + \frac{1}{2}(tr\sigma)^2)^{\frac{m}{2}-2}trMs[b(m-2)trMstr\sigma - a((m-1)(tr\sigma)^2 + 2trs^2)], \quad (3.52)$$

$$g_2 = m\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^m (2trs^2)^{\frac{m}{2}-1} + (2m-4)(trs^2 + \frac{1}{2}(tr\sigma)^2)^{\frac{m}{2}-2}trMs(btrMs - atr\sigma), \quad (3.53)$$

$$g_3 = 4(trs^2 + \frac{1}{2}(tr\sigma)^2)^{\frac{m}{2}-1}(2btrMs - atr\sigma). \quad (3.54)$$

Wykorzystując równania (3.51) i (3.52) w (3.33) można znaleźć wyrażenie określające współczynnik Lankforda  $R_\phi$  dla materiału, który uplastycznia się według kryterium Hilla:

$$R_\phi = \frac{D_{22}^{p\phi}}{D_{33}^{p\phi}} = \frac{-1 + \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^m + \frac{2}{m}b(\cos 2\phi)^2}{2 - 2a \cos 2\phi + \frac{m-2}{m}b(\cos 2\phi)^2}. \quad (3.55)$$

### 3.2.3 Warunek Barlata i Liana z roku 1989

W roku 1989 Barlat i Lian [14] zaproponowali inny warunek  $m$ -tego stopnia dla materiałów polikrystalicznych znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. W roku 1991 rozszerzony on został na przestrzenne stany naprężenia [15]. Warunek ten opisuje również materiał ortotropowy.

Wyrażony przez składowe stanu naprężenia  $\sigma$  w bazie  $\{\mathbf{m}_\alpha\}$  związanej z głównymi osiami ortotropii warunek Barlata i Liana z roku 1989 ma następującą postać:

$$f_B(\sigma) = \bar{a}|K_1 + K_2|^m + \bar{a}|K_1 - K_2|^m + (2 - \bar{a})|2K_2|^m = 2\bar{\sigma}^m, \quad (3.56)$$

$$\text{gdzie } K_1 = \frac{\sigma_{11} + h\sigma_{22}}{2}, \quad K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - h\sigma_{22}}{2}\right)^2 + p^2\sigma_{12}^2}. \quad (3.57)$$

Współczynniki  $\bar{a}, h, p, \bar{\sigma}, m$  są parametrami materiałowymi wyznaczanymi na podstawie testów wytrzymałościowych. Dla kryształów typu A1 sugerowany jest wykładnik  $m = 8$  a dla kryształów typu A2 - wykładnik  $m = 6$ . Funkcja  $f_B$  jest funkcją jednorodną stopnia  $m$ . Według autorów zaletą tego warunku jest jego zgodność z powierzchnią Taylora-Bishopa-Hilla [17], [18] określaną na podstawie mikrostruktury agregatu polikrystalicznego.

Zaproponuję teraz niezmienniczą postać tego warunku [44]. Występujące w nim funkcje  $K_1$  i  $K_2$  wyrażają się poprzez niezmienniki ortotropowe płaskiego tensora naprężenia następująco:

$$K_1 = \frac{(1+h)tr\sigma + 2(1-h)trMs}{4}, \quad (3.58)$$

$$K_2 = \sqrt{\left(\frac{(1-h)tr\sigma + 2(1+h)trMs}{4}\right)^2 + \frac{p^2}{2}(trs^2 - 2(trMs)^2)}. \quad (3.59)$$



Podstawiając do powyższych wyrażeń wyniki czterech testów proponowanych w paragrafie 3.2.1 dla kryterium Hilla otrzymamy następujące wyrażenia na parametry materiałowe:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= Y, & h &= \frac{Y_1}{Y_2}, \\ \text{dla } h > 1: & & & \\ \bar{a} &= \frac{2Y_1^m - 2(h-1)^m Y_p^m}{Y_p^m [1 + h^m - (h-1)^m]}, & p &= \pm \left| \frac{2}{2\bar{a} + (2-\bar{a})2^m} \right|^{\frac{1}{m}} \frac{Y_1}{k}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Dla szczególnych przypadków ortotropii otrzymamy:

- dla symetrii kubicznej:

$$h = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} \text{tr} \sigma, \quad K_2 = \sqrt{(\text{tr} \mathbf{M} \mathbf{s})^2 + \frac{p^2}{2} (\text{tr} \mathbf{s}^2 - 2(\text{tr} \mathbf{M} \mathbf{s})^2)}, \quad (3.61)$$

- dla izotropii:

$$h = 1, p = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} \text{tr} \sigma, \quad K_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{s}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\mathbf{s}\|, \quad (3.62)$$

gdzie  $\|\mathbf{s}\|$  oznacza normę dewiatora tensora  $\sigma$  w przestrzeni  $2D$ .

Aby otrzymać postać niezmienniczą warunku Barlata i Liana, wyrażoną przez niezmienniki tensora naprężenia występujące w równaniu (3.22) należy zastosować poniższe zależności:

$$\text{tr} \mathbf{M} \mathbf{s} = \text{tr} \mathbf{M} \sigma - \frac{1}{2} \text{tr} \sigma, \quad \text{tr} \mathbf{s}^2 = \text{tr} \sigma^2 - \frac{1}{2} (\text{tr} \sigma)^2. \quad (3.63)$$

Podobnie jak dla warunku Hilla, podamy teraz wyrażenie na wytrzymałość na rozciąganie blachy pod dowolnym kątem  $\phi$  do kierunku  $\mathbf{m}_1$ :

$$\sigma_\phi = \bar{\sigma} \left( \frac{2}{\bar{a}|k_1^\phi + k_2^\phi|^m + \bar{a}|k_1^\phi - k_2^\phi|^m + (2-\bar{a})|2k_2^\phi|^m} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (3.64)$$

gdzie

$$k_1^\phi = \frac{1}{2} (\cos \phi^2 + h \sin \phi^2), \quad (3.65)$$

$$k_2^\phi = \frac{1}{2} \sqrt{(\cos \phi^2 - h \sin \phi^2)^2 + p^2 (\sin 2\phi)^2}. \quad (3.66)$$

Występujące w ogólnym prawie płynięcia (3.26) funkcje  $g_i$  dla kryterium Barlata przyjmują następującą postać [70]:

$$g_1 = f_1(\sigma) \frac{1+h}{4} + \frac{f_2(\sigma)}{4K_2} \left[ \frac{1}{4} (1-h)^2 \text{tr} \sigma + \frac{1}{2} (1-h^2) \text{tr} \mathbf{M} \mathbf{s} \right], \quad (3.67)$$

$$g_2 = \frac{f_2(\sigma)}{4K_2} p^2, \quad (3.68)$$

$$g_3 = f_1(\sigma) \frac{1-h}{2} + \frac{f_2(\sigma)}{4K_2} \left[ \frac{1}{2} (1-h^2) \text{tr} \sigma + [(1+h)^2 - 4p^2] \text{tr} \mathbf{M} \mathbf{s} \right], \quad (3.69)$$

gdzie

$$f_1(\sigma) = \frac{\partial f_B}{\partial K_1} = \bar{a}m \left[ |K_1+K_2|^{m-2}(K_1+K_2) + |K_1-K_2|^{m-2}(K_1-K_2) \right], \quad (3.70)$$

$$f_2(\sigma) = \frac{\partial f_B}{\partial K_2} = \bar{a}m \left[ |K_1+K_2|^{m-2}(K_1+K_2) - |K_1-K_2|^{m-2}(K_1-K_2) \right] + 2m(2-\bar{a})(2K_2)^{m-1}. \quad (3.71)$$

Wykorzystując prawo płynięcia można wyprowadzić wzór na współczynnik Lankforda:

$$R_\phi = \frac{2f_1^\phi(\sin \phi^2 + h \cos^2 \phi) + \frac{f_2^\phi}{k_2^\phi} \left[ \frac{1}{4} \sin^2 2\phi [(1+h)^2 - 4p^2] - h \right]}{-[2(1+h)f_1^\phi + \frac{f_2^\phi}{k_2^\phi} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi h^2 - h)]}. \quad (3.72)$$

Występujące w zależności (3.72) funkcje  $f_1^\phi$  i  $f_2^\phi$  są odpowiednio równe  $f_1(\mathbf{W}_\phi)$  i  $f_2(\mathbf{W}_\phi)$ .

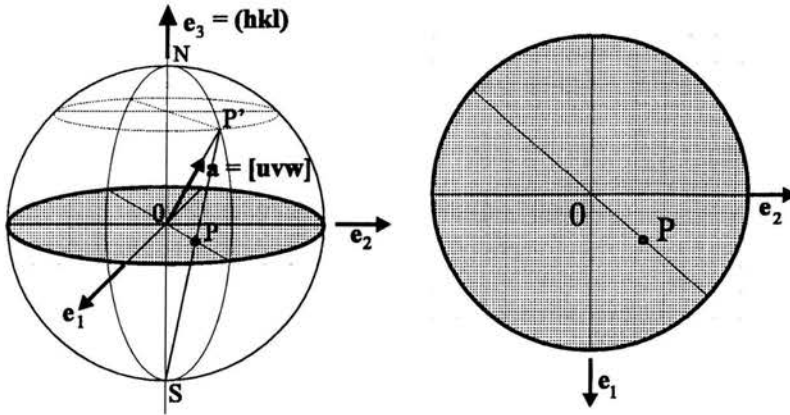
Równania (3.35), (3.36) lub (3.37), (3.38) określające warunek lokalizacji odkształceń są oczywiście prawdziwe również dla materiału opisywanego warunkiem uplastycznienia Barlata i Liana po podstawieniu do nich wyrażań na funkcje  $g_i$ .

### 3.3 Model fizyczny polikrystału

#### 3.3.1 Figury biegunowe i tekstury metali

Podczas dużych deformacji plastycznych, w pojedynczych ziarnach tworzących element reprezentatywny objętości polikrystału (RVE), następuje obrót sieci krystalicznej. W wyniku obrotów sieci w agregacie ziaren o początkowo losowym rozkładzie orientacji większość ziaren uzyskuje pewną wyróżnioną orientację. Materiał izotropowy staje się wtedy materiałem anizotropowym. Zjawisko to nazywamy powstawaniem tekstury krystalograficznej.

Tekstura w reprezentatywnym elemencie polikrystału zadana jest poprzez orientację sieci poszczególnych ziaren tworzących ten element. W rozdziale drugim, do opisu orientacji sieci kryształu względem globalnego układu odniesienia wykorzystaliśmy trzy kąty Eulera. Do opisu tekstury w wycinku blachy możemy wykorzystać również inny sposób. Niech globalny układ odniesienia będzie zdefiniowany w ten sposób, że kierunek  $e_3$  jest prostopadły do płaszczyzny blachy, natomiast kierunki  $e_1$  i  $e_2$  leżą w jej płaszczyźnie. W przypadku blach walcowanych przyjmujemy, że wersor  $e_1$  jest równoległy do kierunku walcowania. Orientację sieci możemy wtedy zadać podając płaszczyznę krystalograficzną równoległą do płaszczyzny blachy oraz kierunek krystalograficzny równoległy do kierunku  $e_1$ . Płaszczyznę krystalograficzną określamy podając kierunek wektora do niej prostopadłego. Do opisu obu tych kierunków wykorzystujemy wskaźniki Millera. Zapis orientacji



Rysunek 3.3: Rzute stereograficzne: a) zasada wykonywania rzutu stereograficznego, b) obraz otrzymany w rzucie stereograficznym - figura biegunowa.

sieci wygląda wtedy następująco:

$$g \rightarrow \{hkl\}\langle uvw \rangle. \quad (3.73)$$

Ponieważ ze względu na symetrię sieci kryształu mamy zwykle do czynienia z grupą orientacji, które są sobie równoważne, do opisu płaszczyzny zastosowaliśmy nawias klamrowy, a do opisu kierunku nawias trójkątny. Liczby  $hkl$  i  $uvw$  definiują dany kierunek względem reperu kierunków krystalograficznych  $\{a_i\}$ .

Często obok zapisu (3.73) do opisu tekstury w agregacie ziaren stosuje się graficzną reprezentację w postaci figur biegunowych. Do ich prezentacji wykorzystujemy rzute stereograficzne. Zasadę wykonywania rzutu stereograficznego pokazaliśmy na rysunku 3.3. Figurę biegunową oznaczamy w sposób następujący:

$$(hkl)[uvw], \quad (3.74)$$

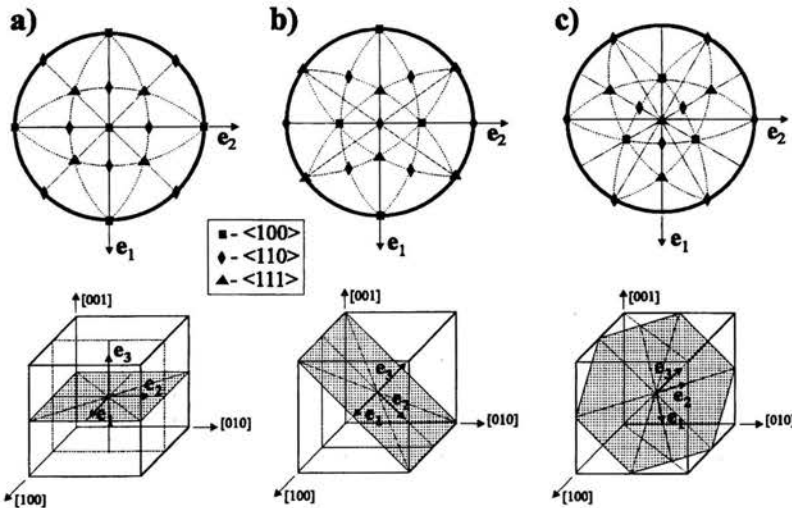
gdzie  $(hkl)$  określa płaszczyznę rzutowania w globalnym układzie odniesienia  $\{e_i\}$ , natomiast  $[uvw]$  rzutowany kierunek krystalograficzny odniesiony do reperu  $\{a_i\}$ . Rzutowany kierunek  $[uvw]$  umieszczamy w środku sfery, której płaszczyzna równikowa jest płaszczyzną rzutowania określoną przez kierunek  $(hkl)$ . Kierunek  $[uvw]$  przedłużamy do przecięcia się ze sferą i wyznaczony punkt przecięcia  $P'$  łączymy prostą z biegunem sfery  $S$ . Punkt  $P$ , w którym prosta przecina płaszczyznę równikową jest obrazem kierunku  $[uvw]$  w rzucie stereograficznym. Figura biegunowa przedstawia obrazy określonych kierunków krystalograficznych w rzucie stereograficznym dla sieci wszystkich ziaren występujących w elemencie reprezentatywnym polikryształu. W przypadku blach płaszczyzna rzutowania jest zwykle równoległa do płaszczyzny blachy.

Przykładowe figury biegunowe pokazano na rysunku 3.4. Są to figury biegunowe dla elementów, w których wszystkie ziarna są jednakowo zorientowane. Teksturę taką nazywamy teksturą idealną. Poniżej obrazu figury biegunowej pokazaliśmy odpowiadającą jej orientację kubicznej komórki sieciowej (np. A1 lub A2) względem płaszczyzny blachy i zdefiniowanego globalnego układu odniesienia  $\{e_i\}$ . Przy opisie figury biegunowej wykorzystaliśmy nawias trójkątny, ponieważ zaprezentowaliśmy rzuty wszystkich kierunków równoważnych danemu kierunkowi krystalograficznemu.

Często mamy do czynienia z przypadkiem, kiedy ziarna mają orientację zbliżoną do jednej określonej orientacji idealnej lub istnieje kilka orientacji, które występują w elemencie z różnym prawdopodobieństwem. Do opisu takiej tekstury w elemencie reprezentatywnym (RVE) służy funkcja rozkładu orientacji, która określa gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia danej orientacji w RVE. W przypadku tekstur zbliżonych do idealnych wyraża się ona następującym równaniem [21]:

$$f^{ODF}(g) = f^{ODF}(g_0) \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Omega_0^2}\right). \quad (3.75)$$

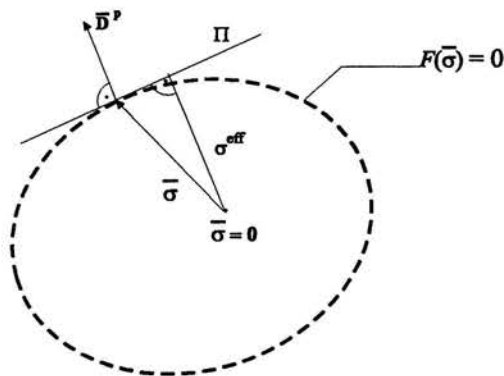
Kąt  $\Omega_0$  opisuje szerokość rozrzutu orientacji. Kąt  $\Omega$  zdefiniowany jest w następujący sposób. Niech  $i(\alpha_1, \alpha_2)$  będzie osią obrotu w wyniku którego możemy orientację  $g_0$  sprowadzić do orientacji  $g$ . Przez  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  oznaczyliśmy kąty, które orientują tę oś względem reperu kierunków krystalograficznych  $\langle 100 \rangle$ . Wówczas  $\Omega$  określa kąt o jaki należy obrócić kryształ wokół osi  $i(\alpha_1, \alpha_2)$ .



Rysunek 3.4: Przykładowe figury biegunowe:  $\square$  –  $(001)\langle 100 \rangle$ ,  $\diamond$  –  $(001)\langle 110 \rangle$ ,  $\triangle$  –  $(001)\langle 111 \rangle$ ; a) tekstura  $\{001\}\langle 100 \rangle$ , b) tekstura  $\{011\}\langle 100 \rangle$ , c) tekstura  $\{111\}\langle \bar{2}11 \rangle$ .

### 3.3.2 Powierzchnia Bishopa-Hilla z roku 1951

Modele polikrystału uwzględniające mikrostrukturę agregatu ziaren wykorzystują model konstytutywny pojedynczego ziarna przedstawiony w rozdziale 2. W odróżnieniu od modeli fenomenologicznych pozwalają one śledzić rozwój tekstury krystalograficznej w procesie deformacji.

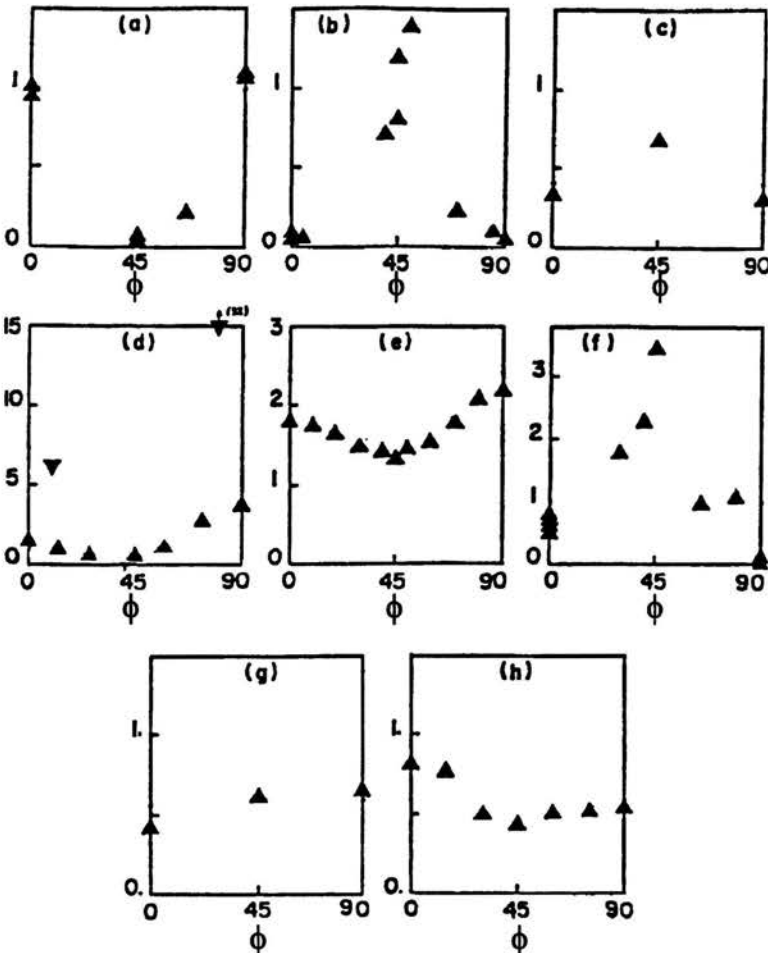


Rysunek 3.5: Konstrukcja globalnej powierzchni plastyczności Bishopa-Hilla dla polikrystału.

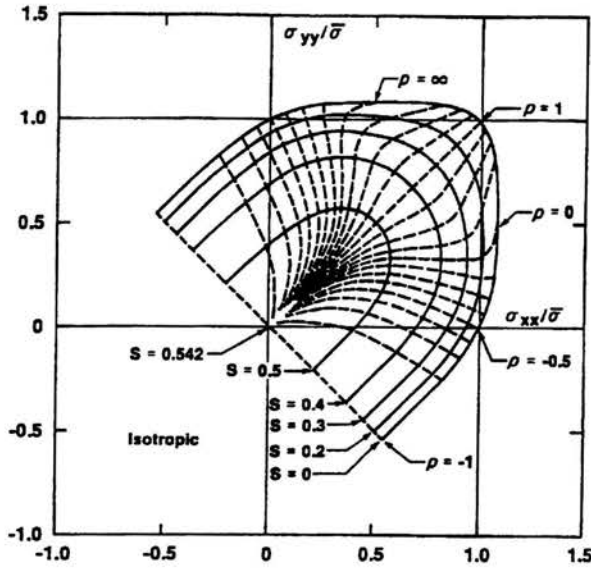
Jednym z najczęściej stosowanych modeli tego typu jest model Taylora z roku 1938 [106]. Zakłada on, że każde ziarno reprezentatywnego elementu podlega tej samej makroskopowej deformacji plastycznej. Założenie to pozwoliło Taylorowi wyznaczyć globalne naprężenie uplastyczniające dla rozciąganego polikrystału. Warunek jednorodnej deformacji elementu polikrystału narzuca silne więzy kinematyczne na model Taylora. W modelu tym naruszone są równania równowagi na granicy ziaren. Istnieją również zrelaksowane modele Taylora zakładające, że tylko część składowych tensora deformacji plastycznej w ziarnie jest równa składowym tensora makroskopowego. Przyjmując założenia modelu Taylora, Bishop i Hill w swoich pracach z 1951 roku [17], [18] poszukiwali globalnej powierzchni plastyczności dla polikrystału.

Konstruując powierzchnię plastyczności dla polikrystału Bishop i Hill na poziomie pojedynczego ziarna przyjęli warunek uplastycznienia Schmidta zakładając, że w procesie plastycznego płynięcia uaktywniają się te systemy poślizgu dla których łączna praca wykonana podczas procesu osiąga minimum. Konstrukcja globalnej powierzchni plastyczności wykorzystywała również warunek wypukłości lokalnych powierzchni plastyczności dla każdego ziarna oraz warunek zgodności Hilla [18], [52] dla pola naprężenia Kirchhoffa i pola gradientu prędkości deformacji lokalnych. Zauważmy, że jeżeli przyjmujemy za konfigurację odniesienia konfigurację aktualną, to:

$$\dot{W} = \dot{W}_t = \langle \sigma^g : (\mathbf{D}^p)^g \rangle = \bar{\sigma} : \bar{\mathbf{D}}^p, \quad (3.76)$$



Rysunek 3.6: Wartość współczynnika  $R(\phi)$  wyznaczona na podstawie eksperymentów dla różnych tekstur: (a)- miedź z silną teksturą  $\{100\}\langle 001\rangle$ , (b)- blacha zbudowana z pojedynczego kryształu żelaza o orientacji  $\{100\}\langle 011\rangle$ , (c)- walcowana na zimno i wyżarzona stal niskowęglowa -  $\{001\}\langle 210\rangle$ , (d)- pojedynczy kryształ żelaza ( $\nabla$ )-  $\{110\}\langle 001\rangle$  oraz walcowana na zimno blacha stalowa ( $\Delta$ ) -  $70\% \{110\}\langle 001\rangle + 20\% \{211\}\langle 01\bar{1}\rangle + 10\%$  rozkład losowy, (e)- walcowana na zimno i wyżarzona stal niskowęglowa -  $60\% \{111\}\langle uvw\rangle + 30\% \{554\}\langle 22\bar{5}\rangle + 10\%$  rozkład losowy, (f)- pojedynczy kryształ żelaza -  $\{112\}\langle 1\bar{1}0\rangle$ , (g)- walcowana na zimno i wyżarzona stal niskowęglowa -  $\{411\}\langle 14\bar{8}\rangle$ , (h)- walcowana na zimno blacha stalowa -  $\{511\}\langle 14\bar{9}\rangle$ ; Lequeu i inni [75].



Rysunek 3.7: Powierzchnia plastyczności Bishopa-Hilla dla elementu polikrystalicznego o izotropowym rozkładzie orientacji ziaren o sieci typu A1; Barlat i Lian [14].

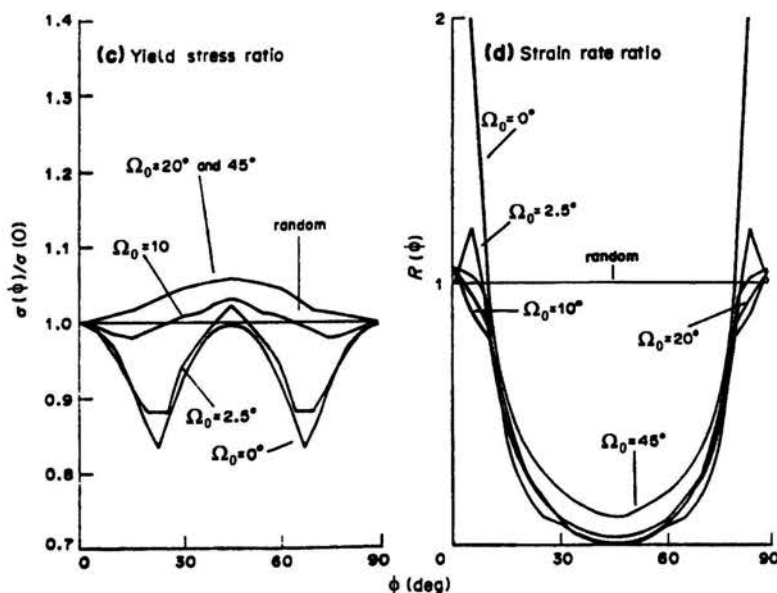
gdzie przez  $\langle \cdot \rangle$  oznaczono operację uśredniania, wielkości  $(\mathbf{D}^p)^g$  i  $\sigma^g$  są odpowiednio lokalnym tensorem gradientu prędkości deformacji plastycznej i lokalnym tensorem naprężenia Cauchy'ego w ziarnie  $g$ ,  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\mathbf{D}}^p$  są odpowiadającymi im wielkościami globalnymi, natomiast  $\dot{W}$  jest prędkością energii deformacji plastycznej. Oczywiście przy założeniu Taylora dla każdego ziarna  $(\mathbf{D}^p)^g = \bar{\mathbf{D}}^p$ . Prędkość energii deformacji plastycznej można wyrazić również jako iloczyn efektywnej prędkości deformacji  $D_{eff}^p$  i efektywnego naprężenia  $\sigma^{eff}$  będącego miarą wyczerpania materiału w momencie uplastycznienia:

$$\dot{W} = \sigma^{eff} D_{eff}^p. \quad (3.77)$$

Graficzną interpretacją efektywnego naprężenia  $\sigma^{eff}$  zaprezentowano na rysunku 3.5. Powierzchnia plastyczności  $F(\bar{\sigma})$  jest obwiednią płaszczyzn  $\Pi$  prostopadłych do kierunku  $\mathbf{D}^p$  dla których odległość od punktu  $\bar{\sigma} = 0$  jest równa  $\sigma^{eff}$ . Efektywna prędkość deformacji plastycznej obliczana jest w sposób tradycyjny jako norma tensora  $\mathbf{D}^p$  to znaczy:

$$D_{eff}^p = \|\mathbf{D}^p\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{D}^p)^2}. \quad (3.78)$$

W teorii małych odkształceń zamiast tensora gradientu prędkości deformacji plastycznej  $\mathbf{D}^p$  stosujemy prędkość odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}^p$ .



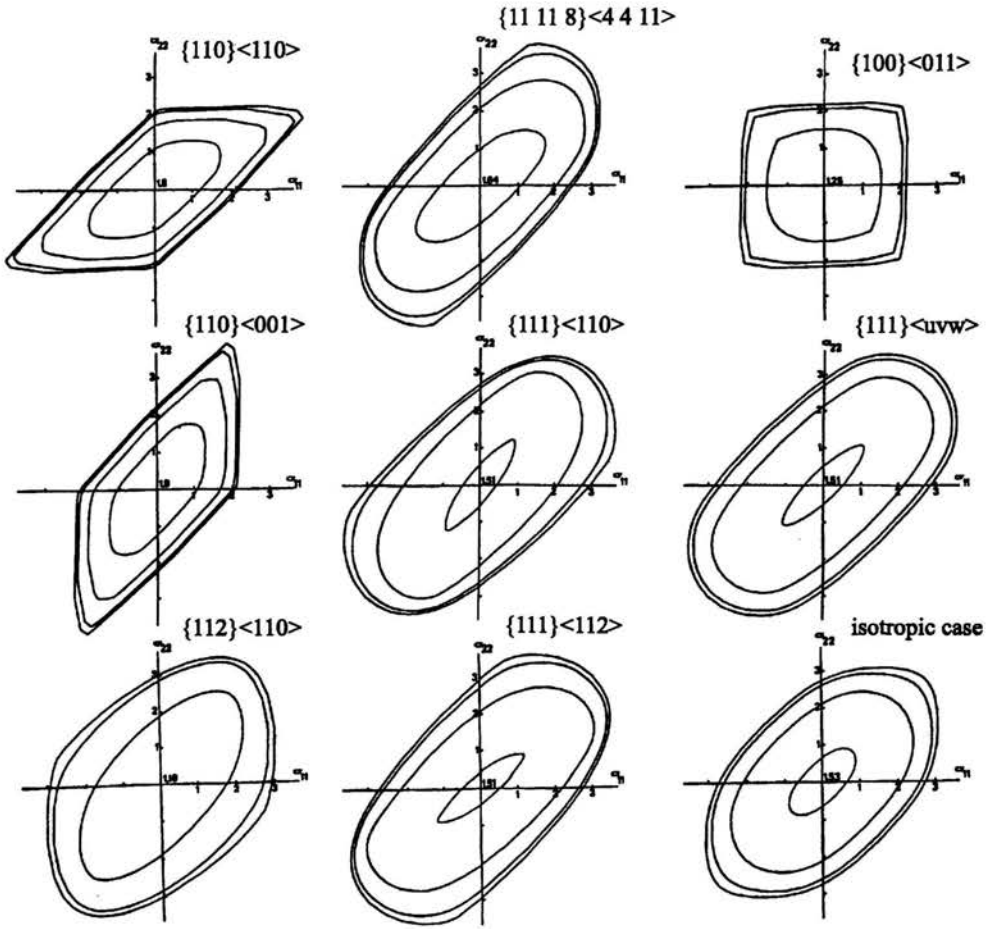
Rysunek 3.8: Wykresy wytrzymałości na rozciąganie  $\sigma(\phi)/\sigma(0)$  (a) oraz współczynnika Lankforda  $R(\phi)$  (b) dla blach o teksturze idealnej  $\{001\}\langle 100\rangle$ , przy różnym kącie rozrzutu  $\Omega_0$ ; Lequeu i inni [75].

Tworzenie powierzchni plastyczności Bishopa-Hilla jest zadaniem dość skomplikowanym i trudnym do zastosowania w obliczeniach ewolucji anizotropii w elemencie metalowym poddanym obróbce plastycznej. Model ten jednak dobrze odpowiada wynikom otrzymywanym w badaniach doświadczalnych. Wyniki doświadczeń dotyczące współczynnika Lankforda (patrz definicja (3.33<sub>1</sub>) i rysunek 3.1) dla metali o różnych teksturach zamieszczone w pracy [75] zaprezentowaliśmy na rysunku 3.6. W dalszym ciągu zaprezentujemy kształt tej powierzchni plastyczności dla metali o różnych teksturach zaczerpnięte z prac innych autorów.

W pracy [14] podano kształt powierzchni plastyczności Bishopa-Hilla dla płaskiego stanu naprężenia w przypadku losowego rozkładu orientacji, który odpowiada izotropii blachy. Pokazujemy go na rysunku 3.7. Jak łatwo zauważyć nawet dla przypadku izotropii powierzchnia ta nie jest elipsą opisywaną przez warunki fenomenologiczne drugiego stopnia.

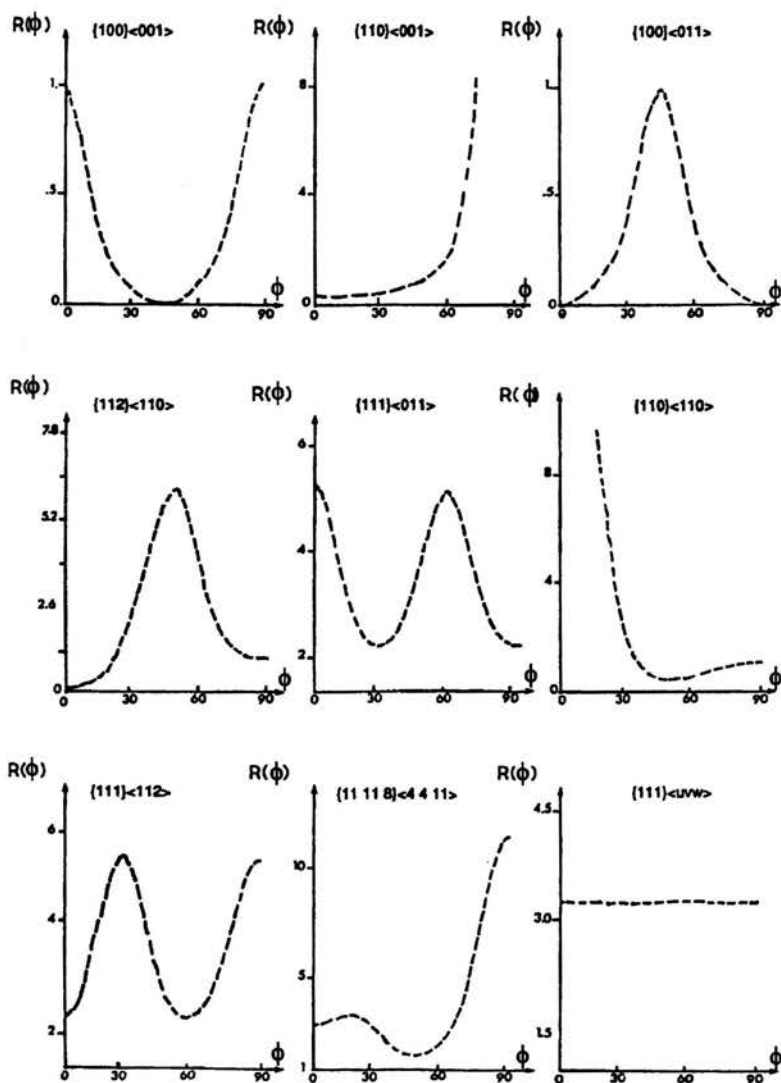
W pracy Lequeu i innych [74] poszukiwano powierzchni Bishopa-Hilla dla agregatu ziaren o teksturze idealnej  $\{001\}\langle 100\rangle$  przy różnej wartości kąta rozrzutu  $\Omega_0$  (porównaj wzór (3.75)). Wyniki dotyczące wytrzymałości na rozciąganie pod dowolnym kątem  $\phi$  w płaszczyźnie blachy oraz odpowiadających mu wartości współczynnika Lankforda pokazano na rysunku 3.8. Wykres 3.8<sub>a</sub> niesie informację o liczbie *uch* technologicznych na obrzeżu





Rysunek 3.9: Powierzchnia plastyczności Bishopa-Hilla dla blach o różnych teksturach znajdujących się w płaskim stanie naprężenia. Kolejne warstwy odpowiadają:  $\sigma_{12} = 0.0, 0.5, 1.04$  i  $1.5$ . Liczba umieszczona w środku oznacza wytrzymałość na czyste ścinanie ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ). Wartości odniesiono do wartości wytrzymałości  $\tau_c$ ; Arminjon i Bacroix [2].

wyciskanych elementów o zadanej teksturze. Dla elementów o teksturze charakteryzującej się małym kątem rozrzutu ( $\Omega_0 = 0^\circ$ ,  $\Omega_0 = 2.5^\circ$  i  $\Omega = 10^\circ$ ) według modelu Bishopa-Hilla przewidywane jest wystąpienie ośmiu takich *uch*, podczas gdy zwiększanie kąta rozrzutu ( $\Omega_0 = 20^\circ$  i  $\Omega_0 = 45^\circ$ ) zmniejsza ich liczbę do czterech. Interesujące wydaje się dość silnie



Rysunek 3.10: Wykres współczynnika Lankforda  $R(\phi)$  wyznaczony na podstawie powierzchni Bishop-Hilla dla blach o różnych teksturach; Arminjon i Bacroix [2].

anizotropowe zachowanie się materiału przy dużym kącie rozrzutu. Dla losowego rozkładu orientacji otrzymujemy izotropowe zachowanie się materiału.

Charakter wykresu współczynnika Lankforda  $R(\phi)$  ulega dużo mniejszym zmianom ze zmianą kąta rozrzutu  $\Omega_0$  przewidując wartość  $R(\phi)$  mniejszą od jedności praktycznie dla całego zakresu kąta  $\phi$  i minimum dla kąta  $\phi = 45^\circ$ .

Przykłady kształtu powierzchni Bishopa-Hilla dla płaskiego stanu naprężenia pokazano również w pracy [2]. Zamieszczone na rysunku 3.9 przekroje zostały wykonane przy założeniu we wszystkich przypadkach kąta rozrzutu wokół orientacji idealnej  $\Omega_0 = 7^\circ$ . Prezentowane przykłady dotyczą tekstur najczęściej spotykanych w metalach. Szczególnie dla tekstur  $\{110\}\langle 110\rangle$ ,  $\{110\}\langle 001\rangle$  oraz  $\{100\}\langle 011\rangle$  obserwujemy znaczne odejście kształtu powierzchni od elipsy. Na rysunku 3.10 pokazano odpowiadający tym teksturom kształt wykresu współczynnika Lankforda  $R(\phi)$ . Warto zaznaczyć, że charakter tego wykresu, otrzymany dla tekstur  $\{111\}\langle 011\rangle$  oraz  $\{111\}\langle 112\rangle$ , nie jest możliwy do zamodelowania kwadratowym warunkiem plastyczności.

## Rozdział 4

# Proponowane powierzchnie plastyczności

### 4.1 Podstawowe założenia

W poprzednim rozdziale omówiliśmy najczęściej wykorzystywane powierzchnie plastyczności metali. Zarówno podejście fenomenologiczne jak i fizyczne ma swoje wady i zalety.

Zaletą podejścia fenomenologicznego jest nieskomplikowany sposób zadania funkcji płynięcia oraz określenia kierunków plastycznego płynięcia. Podejście to w standardowy sposób podlega implementacji do metody elementów skończonych dla nieliniowych modeli konstytutywnych. Wadą podejścia fenomenologicznego jest ograniczona możliwość opisu zjawisk występujących w metalach o pewnej teksturze. Nie jest możliwe uwzględnienie zmiany tej tekstury w materiałach poddanych obróbce plastycznej. Wada ta wynika z tego, że funkcja płynięcia nie uwzględnia w sposób bezpośredni mikrostruktury polikryształów.

Powierzchnia plastyczności Bishopa-Hilla wykorzystuje informację o mikrostrukturze materiału i w dużo lepszym stopniu odpowiada obserwowanemu w doświadczeniach zachowaniu się metali z teksturą. Wadą tego podejścia jest skomplikowany sposób wyznaczania powierzchni plastyczności. Ponadto kierunki główne tensora prędkości deformacji plastycznej dla wielu punktów nie są jednoznacznie określone. Zastosowanie tej powierzchni w metodzie elementów skończonych jest bardzo ograniczone.

Powyższe spostrzeżenia skłaniają do poszukiwania takich powierzchni plastyczności, które łączyłyby zalety obu podejść unikając jednocześnie ich wad. W dalszym ciągu tego rozdziału zdefiniujemy pewną klasę powierzchni plastyczności tego rodzaju. Dokładnej analizie poddamy trzy szczególne przypadki powierzchni należących do tej klasy. Opiszemy one początkowe plastyczne płynięcie agregatu polikrystalicznego. Zaproponowane powierzchnie zostaną porównane z powierzchniami fenomenologicznymi oraz powierzchnią Bishopa-Hilla dla metali o anizotropii, której źródłem jest tekstura krystalograficzna. Pokażemy, że proponowane powierzchnie wykazują dobrą zgodność przewidywanej anizotropii elementów z tą jaka wynika z modelu Bishopa-Hilla. Pokażemy też, że sposób w jaki zo-

stały zdefiniowane pozwala na ich zastosowanie do analizy procesu plastycznego płynięcia metodą elementów skończonych.

Niech *lokalna* powierzchnia plastyczności pojedynczego ziarna opisana będzie przez następujący warunek uplastycznienia (porównaj wzór (3.15)):

$$f(\tau) = (\tau_0)^\mu, \quad (4.1)$$

gdzie funkcja  $f$  jest funkcją jednorodną stopnia  $\mu$  i stanowi potencjał dla tensora prędkości plastycznej deformacji:

$$\mathbf{D}^p = \lambda \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau}. \quad (4.2)$$

Funkcja ta ma oczywiście wszystkie własności podane w paragrafie 3.2 dla tego typu funkcji, w szczególności spełnia zależności (3.18). Wielkość  $\tau_0$  jest dodatnią stałą materiałową, podobnie jak wykładnik  $\mu$ . Wyznamy prędkość energii deformacji plastycznej dla pojedynczego ziarna:

$$\dot{W}^p = \tau : \mathbf{D}^p = \lambda^g \mu f(\tau) = \lambda^g \mu (\tau_0)^\mu. \quad (4.3)$$

Zauważmy, że z równości (4.3) wynika, że mnożnik  $\lambda^g$  jest dodatni, jeżeli spełniony jest warunek płynięcia (4.1) i jest równy zeru w przeciwnym wypadku. Stała  $\tau_0$  opisuje wyężenie materiału pojedynczego ziarna jako pewne naprężenie efektywne. Prędkość energii deformacji plastycznej możemy zatem zapisać jako:

$$\dot{W}^p = D_{eff}^p \tau_0, \quad \text{gdzie} \quad D_{eff}^p = \lambda^g \mu (\tau_0)^{\mu-1}, \quad (4.4)$$

gdzie wielkość  $D_{eff}^p$  jest efektywną prędkością plastycznej deformacji.

Przyjmijmy, że *globalna* powierzchnia plastyczności elementu polikrystalicznego dana jest również za pomocą funkcji jednorodnej tego samego stopnia  $\mu$  o postaci <sup>1</sup>:

$$\bar{f}(\bar{\tau}) = (\bar{\tau}_0)^\mu. \quad (4.5)$$

Z funkcją płynięcia  $\bar{f}$  stowarzyszone jest prawo płynięcia:

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{f}(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}}. \quad (4.6)$$

Podobnie jak dla pojedynczego ziarna wielkość  $\bar{\tau}_0$  i wykładnik  $\mu$  są dodatnimi stałymi materiałowymi. Prędkość energii plastycznej deformacji na poziomie globalnym wyraża się następująco:

$$\dot{\bar{W}}^p = \bar{\tau} : \bar{\mathbf{D}}^p = \bar{\lambda} \mu (\bar{\tau}_0)^\mu. \quad (4.7)$$

Wielkość  $\bar{\tau}_0$ , zadana równaniem (4.5), jest globalnym naprężeniem efektywnym, a globalna efektywna prędkość deformacji plastycznej wyraża się wzorem:

$$\bar{D}^{peff} = \bar{\lambda} \mu (\bar{\tau}_0)^{\mu-1}. \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>zgodnie z przyjętymi w podrozdziale 3.1 oznaczeniami w dalszym ciągu przez  $\bar{a}$  oznaczają będziemy wielkość globalną odpowiadającą wielkości lokalnej  $a$

W dalszym ciągu będziemy postulowali zależność między powierzchniami lokalnymi i globalną powierzchnią plastyczności. Przyjmujemy, że **reprezentatywny element objętości** (RVE) składa się ze skończonej liczby  $N$  grup ziaren o jednakowych właściwościach i takiej samej orientacji. W ziarnach tych pola poszczególnych wielkości są stałe, a procedura uśredniania po RVE zadana jest wzorem (3.2). Jak wykazano w pracy [50], wypukłość lokalnej powierzchni plastyczności wymusza wypukłość globalnej powierzchni plastyczności. Podobnie stowarzyszenie prawa płynięcia na poziomie mikro powoduje, że prawo płynięcia na poziomie makroskopowym jest również stowarzyszone.

Zauważmy, że prawdziwa jest następująca zależność:

$$\bar{f} = \alpha \langle f^g \rangle, \quad (4.9)$$

gdzie  $f^g$  określa wartość funkcji płynięcia w ziarnach o orientacji  $g$ ,  $\alpha$  jest pewnym dodatnim współczynnikiem, a przez  $\langle \cdot \rangle$  oznaczyliśmy operację uśredniania. W ogólnym przypadku  $\alpha$  może być funkcją aktualnych naprężeń lokalnych. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że jest to stała. Ponieważ na danym stadium procesu deformacji RVE nie we wszystkich ziarnach musi być spełniony warunek plastyczności (4.1) prawdziwa jest poniższa nierówność:

$$\langle f^g \rangle \leq \langle (\tau_0)^\mu \rangle. \quad (4.10)$$

Wartość uśrednioną funkcji  $f^g$  możemy zatem zapisać w sposób następujący:

$$\langle f^g \rangle = \frac{\beta}{\alpha} \langle (\tau_0)^\mu \rangle, \quad \text{gdzie } \frac{\beta}{\alpha} \in (0, 1) \quad (4.11)$$

Uplastycznienie elementu polikrystalicznego nastąpi wtedy, gdy (porównaj zależność (4.5) i (4.9)):

$$\alpha \langle f^g \rangle = \beta \langle (\tau_0)^\mu \rangle = (\bar{\tau}_0)^\mu. \quad (4.12)$$

W przypadku założenia, że uplastycznienie elementu polikrystalicznego następuje wtedy, gdy uplastycznione są wszystkie ziarna, współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  są sobie równe, a warunek plastyczności na poziomie globalnym (4.5) jest równoważny warunkowi:

$$\langle f^g \rangle = \langle (\tau_0)^\mu \rangle. \quad (4.13)$$

W dalszym ciągu przyjmujemy, że reprezentatywny element objętości polikryształu składa się z ziaren o tym samym typie sieci i identycznych właściwościach fizycznych, a różniących się wyłącznie orientacją. Stała materiałowa  $\tau_0$  nie zależy od orientacji ziarna, a zatem:

$$\langle \tau_0^\mu \rangle = (\tau_0)^\mu = \beta^{-1} (\bar{\tau}_0)^\mu. \quad (4.14)$$

Prawdziwa jest wtedy zależność między globalną prędkością energii deformacji plastycznej a uśrednioną po RVE lokalną prędkością energii deformacji plastycznej o postaci:

$$\dot{W}^P = \beta \frac{\bar{\lambda}}{\langle \lambda^g \rangle} \langle \dot{W}^p \rangle = \beta^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{D}_{eff}^P}{\langle D_{eff}^p \rangle} \langle \dot{W}^p \rangle. \quad (4.15)$$

Jeżeli wartości naprężeń efektywnych na poziomie lokalnym i globalnym będą sobie równe, to znaczy jeżeli współczynnik  $\beta$  jest równy jedności, to współczynnik  $\alpha$  odpowiada za udział ziaren uplastycznionych na poziomie lokalnym. Teoretycznie możliwa jest sytuacja, gdy żadne z ziaren nie jest uplastycznione natomiast spełniony jest globalny warunek plastyczności dany równaniami (4.5) i (4.9). Aby zabezpieczyć się przed taką sytuacją należy sformułować dodatkowy warunek uplastycznienia agregatu, który mówi, że przynajmniej dla jednego ziarna należącego do rozpatrywanego elementu reprezentatywnego musi być spełnione lokalne kryterium uplastycznienia.

Zauważmy, że gdy mamy do czynienia ze sztywno-plastycznym modelem materiału polikrystalicznego prawdziwa jest zależność:

$$\bar{\lambda} = \beta \langle \lambda^g \rangle \quad \text{lub} \quad \bar{D}_{eff}^p = \beta^{\frac{1}{\mu}} \langle D_{eff}^p \rangle, \quad (4.16)$$

gdź uśredniona lokalna prędkość energii deformacji plastycznej jest równa odpowiadającej jej wielkości globalnej na mocy warunku konsystencji Hilla (3.14). Gdy przyjmiemy, że współczynnik  $\beta$  jest równy jedności, to globalne wartości współczynnika  $\bar{\lambda}$  i efektywnej prędkości deformacji plastycznej  $\bar{D}_{eff}^p$  będą równe uśrednionym odpowiadającym im wielkościom lokalnym  $\langle \lambda^g \rangle$  i  $\langle D_{eff}^p \rangle$ .

### Ogólna postać proponowanej powierzchni plastyczności

Przy formułowaniu początkowego warunku plastyczności dla elementu polikrystalicznego, za kryterium uplastycznienia pojedynczego ziarna przyjmujemy regularyzowane prawo Schmid'a, opisane równaniem (2.98), prezentowane w rozdziale drugim. Przekształćmy równanie (2.98) do następującej postaci:

$$f^g(\tau) - (\tau_c)^\mu = \left\{ \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{\tau^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{\mu}{2n}} - (\tau_c)^\mu, \quad \text{gdzie} \quad a_c^{r,g} = \frac{\tau_c^{r,g}}{\tau_c}. \quad (4.17)$$

Wielkość  $\tau_c$  jest krytycznym efektywnym naprężeniem ścinającym na jednym z systemów poślizgu do którego odnosimy wartości naprężeń krytycznych na pozostałych systemach poślizgu. Przypomnijmy, że wielkości  $\tau^{r,g}$  i  $m^g$  zdefiniowane zostały następująco:

$$\tau^{r,g} = tr(\boldsymbol{\tau}^g \mathbf{P}^{r,g}), \quad m^g = \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \sum_{r=1}^M \left( 2 \frac{\tau_c^{p,g}}{\tau_c^{r,g}} tr(\mathbf{P}^{s,g} \mathbf{P}^{r,g}) \right)^{2n}. \quad (4.18)$$

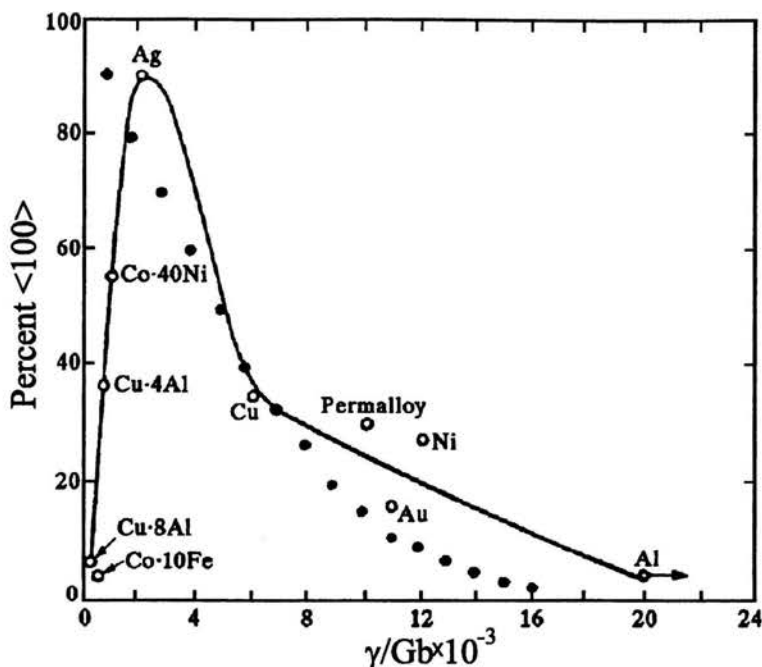
Wielkości  $\mathbf{P}^{r,g}$  i  $\tau_c^{r,g}$  są określone tak jak w rozdziale 2, a zatem  $\mathbf{P}^{r,g}$  jest symetryczną częścią diady definiującej  $r$ -ty system poślizgu w ziarnie  $g$ , a  $\tau_c^{r,g}$  odpowiadającym mu krytycznym naprężeniem ścinającym.  $M$  określa liczbę wszystkich możliwych systemów poślizgu w ziarnie  $g$ .

Funkcja  $f^g$  jest funkcją jednorodną stopnia  $\mu$ . Stowarzyszone z nią prawo płynięcia ma postać:

$$\mathbf{D}^p = \lambda^g \frac{\partial f^g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (4.19)$$

Występujący w powyższym prawie płynięcia mnożnik  $\lambda^g$  związany jest z odpowiadającą mu wielkością  $\lambda$  we wzorach (2.96-2.112) zależnością:

$$\lambda = \lambda^g \frac{T_c^{\mu-2n}}{m^g}. \quad (4.20)$$



Rysunek 4.1: Udział procentowy ziaren o orientacji  $\langle 100 \rangle$  w elemencie materialnym rozciąganych metali o sieci typu A1 otrzymany eksperymentalnie (linia ciągła), przewidywany ostateczny udział tej orientacji przy zastosowaniu regularyzowanego prawa Schmid'a w modelu rozwoju tekstury dla kryształów o sieci A1 jako funkcja parametru  $n$  (wzór (4.21)); Gambin i Barlat [42].

Proponując regularyzowane prawo Schmid'a (2.98) dla pojedynczego kryształu Gambin zaproponował powiązanie parametru  $n$  z parametrem materiałowym zwanym energią błędu ułożenia  $\gamma^{SFE}$  dla kryształów o sieci typu A1 [41], [42]. Wykazano, że od wielkości  $\gamma^{SFE}$  zależy stosunek udziału objętościowego ziaren o orientacji  $\langle 100 \rangle$  do ziaren o orientacji  $\langle 111 \rangle$  jaki powstaje w procesach osiowosymetrycznej deformacji. Na rysunku 4.1 pokazano zależność procentowego udziału tekstury  $\langle 100 \rangle$  od wielkości  $\gamma^{SFE}/Gb \times 10^{-3}$  ( $G$  - moduł Kirchhoffa,  $b$  - wektor Burgersa) otrzymaną doświadczalnie przez Englisha i China [31].



Linia kropkowaną zaznaczono udział takiej tekstury przewidywany przez model rozwoju tekstury oparty na regularyzowanym prawie Schmid'a dla różnych wartości  $n$ . Porównanie obu wykresów pozwala na przyjęcie poniższej aproksymacji:

$$n = \frac{\gamma^{SFE}}{Gb} \times 10^{-3}. \quad (4.21)$$

Według tej interpretacji  $n$  przyjmuje wartości od 1 dla srebra, przez 6 dla miedzi po 20 dla aluminium.

Nieco inną interpretację parametru  $n$  podano w pracy [28], gdzie analizowano warunek stopnia  $m$  dla pojedynczych kryształów i polikryształów równoważny powierzchni zaproponowanej przez Gambina. W rzeczywistych polikryształach tekstury idealne, w których dokładnie wszystkie ziarna mają zadaną orientację  $g_0$  praktycznie nie występują. Zwykle obserwujemy pewien rozrzut orientacji wokół  $g_0$ , które są do niej zbliżone. Sposób opisu takich tekstur poprzez funkcję rozkładu orientacji podaliśmy w rozdziale 3 w części 3.2.1 (wzór (3.75)). Parametr  $n$  można powiązać z kątem  $\Omega_0$  występującym w tym wzorze, a określającym szerokość rozrzutu orientacji wokół orientacji idealnej. Im mniejsza wartość możliwego rozrzutu, tym większą wartość  $n$  przyjmujemy.

Obie interpretacje są ze sobą powiązane. Pojawienie się innej niż  $\langle 100 \rangle$  tekstury, którego prawdopodobieństwo określone jest przez kąt  $\Omega_0$ , związane jest z energią błędu ułożenia.

W dalszym ciągu poddamy analizie szczególne przypadki globalnej powierzchni plastyczności opisanej równaniami (4.5) i (4.9), w których jako lokalną powierzchnię plastyczności przyjmiemy powierzchnię zadaną równaniem (4.17). Przyjmiemy, że poszczególne ziarna składające się na element polikrystaliczny różnią się wyłącznie orientacją sieci, a efektywne naprężenie na poziomie lokalnym i globalnym ma tą samą wartość ( $\beta = 1$ ), wówczas

$$\bar{F} = \bar{f} - \tau_c^\mu = \alpha \sum_{g=1}^N \gamma^g \left\{ \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{\tau^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n^g} \right\}^{2\mu} - \tau_c^\mu = 0. \quad (4.22)$$

Gdy zadana równaniem (4.22) powierzchnia jest początkową powierzchnią plastyczności, możemy przyjąć założenie Sachsa o jednakowym stanie naprężenia w każdym ziarnie, a wtedy:

$$\tau^{r,g} = tr(\tau^g \mathbf{P}^{r,g}) = tr(\bar{\tau} \mathbf{P}^{r,g}). \quad (4.23)$$

Powyższy warunek uplastycznienia sformułowany jest w przestrzeni trójwymiarowej. Warto zauważyć, że dowolny kulisty stan naprężenia nie spowoduje uplastycznienia agregatu polikrystalicznego oraz, że ze względu na postać wykładnika  $2n^g$ , materiał nie jest wrażliwy na znak stanu naprężenia. Typ symetrii materiału nie jest z góry założony i zależy od typu tekstury, jaka występuje w elemencie materiału. Wprowadzone powyżej powierzchnie plastyczności są wypukłe dla dowolnych wartości wykładników  $n^g > 0$  i  $\mu > 0$ . Łatwo zauważyć, że funkcja płynięcia  $\bar{f}$  jest funkcją jednorodną stopnia  $\mu$ .

W dalszym ciągu za konfigurację odniesienia przyjmiemy konfigurację aktualną, a wtedy tensor naprężenia Kirchhoffa  $\tau$  jest równy tensorowi naprężenia Cauchy'ego  $\sigma$ .

Poniżej omówione zostaną trzy szczególne przypadki funkcji płynięcia opisanych równaniem (4.22).

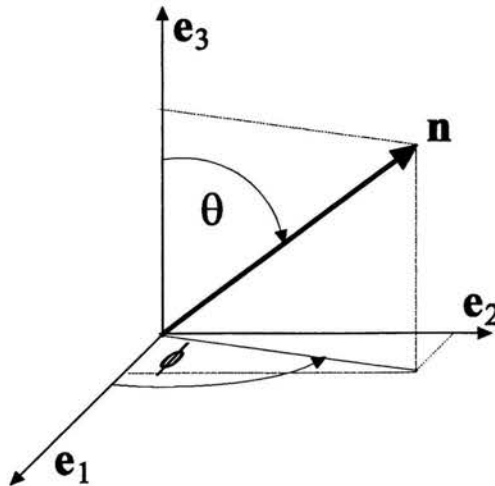
## 4.2 Definicja proponowanych powierzchni plastyczności

### 4.2.1 Powierzchnia $\bar{F}^{(1)}$

Powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$  jest powierzchnią zdefiniowaną poniższym równaniem (porównaj [28]):

$$\bar{F}^{(1)} = \bar{f}^{(1)} - \tau_c^{2n} = \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{\tau^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right]^{2n} - \tau_c^{2n} = 0. \quad (4.24)$$

Funkcja płynięcia  $\bar{f}^{(1)}$  jest funkcją jednorodną stopnia  $2n$ . Występujący w równaniu (4.22) współczynnik  $\alpha$  jest równy jedności, a zatem przyjęliśmy założenie, że element polikrystaliczny uplastycznia się wtedy, gdy uplastycznione są wszystkie ziarna. Wszystkie orientacje ziaren występujące w elemencie polikrystalicznym charakteryzują się takim samym wykładnikiem  $n$ , to znaczy mają taką samą energię błędu ułożenia, lub też taką samą szerokość rozrzutu wokół orientacji idealnej.



Rysunek 4.2: Definicja kątów  $\phi$  i  $\theta$  określających kierunek rozciągania  $\mathbf{n}$  względem globalnego układu odniesienia  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Rozważmy przypadek jednoosiowego rozciągania. Tensor naprężenia zdefiniowany jest wtedy w sposób następujący (patrz rysunek 4.2):

$$\bar{\sigma} = \sigma(\phi, \theta) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (4.25)$$

gdzie wektor  $\mathbf{n}$  określa kierunek rozciągania. W bazie  $\{\mathbf{e}_i\}$  związanej z polikryształem dany jest zależnością:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3. \quad (4.26)$$

Podstawiając tak zdefiniowany tensor naprężenia do wprowadzonego powyżej warunku uplastycznienia (4.24) otrzymamy następującą wartość krytyczną  $\sigma(\phi, \theta)$  w chwili uplastycznienia:

$$Y^{(1)}(\phi, \theta) = \left[ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m_g} \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^{r,g}(\phi, \theta)}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}}, \quad (4.27)$$

gdzie funkcja  $\tau^{r,g}(\phi, \theta)$  określona jest wzorami:

$$\tau^{r,g}(\phi, \theta) = tr(\mathbf{N} \mathbf{P}^{r,g}), \quad \text{w którym } \mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (4.28)$$

Naprężenie krytyczne podczas osiowego rozciągania (lub ściskania), w kierunku nachylnym pod dowolnym kątem  $\phi$  względem kierunku  $\mathbf{e}_1$  i leżącym w płaszczyźnie o normalnej  $\mathbf{e}_3$ , otrzymamy kładąc w równaniu (4.27) wartość  $\theta = 90^\circ$ :

$$\tau^{r,g}(\phi, 90^\circ) = \tau_\phi^{r,g} = P_{11}^{r,g} \cos^2 \phi + P_{22}^{r,g} \sin^2 \phi + P_{12}^{r,g} \sin 2\phi, \quad (4.29)$$

gdzie współczynniki  $P_{ij}^{r,g}$  są składowymi tensora  $\mathbf{P}^{r,g}$  w bazie  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Występująca w równaniu (4.24) funkcja  $\bar{f}^{(1)}$  jest potencjałem dla tensora prędkości plastycznej deformacji. Stowarzyszone z nią prawo płynięcia ma postać:

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \lambda^{(1)} \frac{\partial \bar{f}^{(1)}}{\partial \bar{\sigma}} = \lambda^{(1)} \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{2n}{m_g} \sum_{r=1}^M \frac{1}{a_c^{r,g}} \left( \frac{\tau^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right)^{2n-1} \mathbf{P}^{r,g}. \quad (4.30)$$

Współczynnik  $\lambda^{(1)}$  możemy wyrazić przez prędkość energii deformacji plastycznej wykorzystując zależność (4.7). Pamiętając, że przyjęliśmy za konfigurację odniesienia konfigurację aktualną mamy:

$$\bar{\mathbf{W}}^p = \bar{\sigma} : \bar{\mathbf{D}}^p = \bar{\sigma} : \left( \lambda \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\sigma}} \right). \quad (4.31)$$

Jeżeli wykorzystamy w powyższym równaniu własność jednorodności stopnia  $2n$  funkcji płynięcia, otrzymamy w chwili uplastycznienia:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\dot{\bar{W}}^p}{2n\tau_c^{2n}}. \quad (4.32)$$

Zatem współczynnik  $\lambda^{(1)}$  jest dodatni, jeżeli spełniony jest warunek uplastycznienia, to znaczy jeżeli  $\bar{F}^{(1)} = 0$  i jest równy zeru, jeżeli  $\bar{F}^{(1)} < 0$ . Efektywna prędkość odkształcenia jest w tym przypadku równa:

$$\bar{D}_{eff}^p = 2n\lambda^{(1)}\tau_c^{2n-1}. \quad (4.33)$$

Wykorzystując prawa płynięcia (4.30) dla przypadku jednoosiowego rozciągania w płaszczyźnie o normalnej  $\mathbf{e}_3$  (rysunek 4.2,  $\theta = 90^\circ$ ) możemy obliczyć współczynnik Lankforda:

$$R_\phi = \frac{\bar{D}_{22}^{p\phi}}{\bar{D}_{33}^{p\phi}} = \frac{d_{22}^\phi}{d_{33}^\phi}, \quad (4.34)$$

gdzie  $\bar{D}_{22}^{p\phi}$  i  $\bar{D}_{33}^{p\phi}$  są składowymi tensora prędkości deformacji plastycznej  $\bar{\mathbf{D}}^p$  w bazie  $\{\mathbf{n}, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}, \mathbf{e}_3\}$ . Funkcje  $d_{22}^\phi$  i  $d_{33}^\phi$  dla proponowanego warunku uplastycznienia wyrażają się wzorami:

$$d_{22}^\phi = \sum_{g=1}^N \frac{\gamma^g}{m^g} \varepsilon_2^g(\phi), \quad d_{33}^\phi = \sum_{g=1}^N \frac{\gamma^g}{m^g} \varepsilon_3^g(\phi) \quad (4.35)$$

oraz

$$\varepsilon_2^g(\phi) = \sum_{r=1}^M \frac{1}{a_c^{r,g}} \left( \frac{\tau_\phi^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right)^{2n-1} P_{11}^{r,g} \sin^2 \phi + P_{22}^{r,g} \cos^2 \phi - P_{12}^{r,g} \sin 2\phi, \quad (4.36)$$

$$\varepsilon_3^g(\phi) = \sum_{r=1}^M \frac{1}{a_c^{r,g}} \left( \frac{\tau_\phi^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right)^{2n-1} P_{33}^{r,g}. \quad (4.37)$$

W podrozdziale 4.3 porównamy kształt proponowanych powierzchni plastyczności z kryteriami Hilla z roku 1990 oraz Barlata i Liana z roku 1989. Będziemy również śledzić rozwój anizotropii plastycznej agregatu polikrystalicznego związany z powstawaniem tekstury krystalograficznej w procesach związanych z dużymi deformacjami (porównaj [41]). Współczynniki (3.46) i (3.60) występujące odpowiednio w warunku fenomenologicznym Hilla i Barlata można wyznaczyć z kryterium (4.24) wykorzystując zależności:

$$Y_1 = \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{11}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{-1}{2n}}, \quad (4.38)$$

$$Y_2 = \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{22}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{-1}{2n}}, \quad (4.39)$$

$$k = \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{2P_{12}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{-1}{2n}}, \quad (4.40)$$

$$Y_p = \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{11}^{r,g} + P_{22}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{-1}{2n}}. \quad (4.41)$$

W powyższych wzorach  $\mathbf{e}_3$  definiuje rozpatrywaną płaszczyznę, natomiast  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$  zostały przyjęte jako współosiowe z globalnymi głównymi osiami ortotropii  $\mathbf{m}_1$  i  $\mathbf{m}_2$  w tej płaszczyźnie.

### 4.2.2 Powierzchnia $\bar{F}^{(2)}$

Zdefiniowana wzorem (4.24) powierzchnia plastyczności dla polikryształu wymaga określenia rodzaju tekstury jaka występuje w elemencie, krytycznych naprężeń ścinających na danym systemie poślizgu w pojedynczym ziarnie oraz doboru właściwego wykładnika  $n$ . Wprowadzając powierzchnię  $\bar{F}^{(1)}$  założyliśmy, że aby uplastyczniał się element polikryształu, muszą się uplastyczniać wszystkie ziarna. Powierzchnia  $\bar{F}^{(2)}$  nie wymaga tego założenia i wyraża się wzorem (porównaj [44], [69]):

$$\bar{F}^{(2)} = \bar{f}^{(2)} - K = \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{\bar{\sigma} : \mathbf{P}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} - K = 0. \quad (4.42)$$

Stała  $K$  może być wyznaczana na podstawie testu jednoosiowego rozciągania w kierunku  $\mathbf{e}_1$  przeprowadzanego na poziomie makroskopowym. Wyraża się ona wtedy wzorem:

$$K = \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{Y P_{11}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n}, \quad (4.43)$$

gdzie  $P_{11}^{r,g}$  jest składową tensora  $\mathbf{P}^{r,g}$  w ortonormalnej bazie  $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  związanej z próbką, a  $Y$  jest naprężeniem w chwili uplastycznienia. Stała ta zależy od współczynnika  $\alpha$  wprowadzonego w podrozdziale 4.1 w sposób następujący:

$$K = \frac{1}{\alpha}. \quad (4.44)$$

Funkcja płynięcia  $\bar{f}^{(2)}$  jest funkcją jednorodną stopnia  $2n$ .

Wartość krytyczna naprężenia zdefiniowanego wzorami (4.25) i (4.26), wyznaczona na podstawie kryterium (4.42), ma postać:

$$Y^2(\phi, \theta) = \left[ K \left( \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^{r,g}(\phi, \theta)}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2n}}, \quad (4.45)$$

gdzie funkcja  $\tau^{r,g}(\phi, \theta)$  zdefiniowana jest wzorem (4.28). Podobnie jak w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ , aby otrzymać wartość krytyczną naprężenia podczas rozciągania (lub ściskania) pod dowolnym kątem  $\phi$  do osi  $\mathbf{e}_1$  w płaszczyźnie o normalnej  $\mathbf{e}_3$ , należy przyjąć kąt  $\theta = 90^\circ$  (patrz rysunek 4.2).

Prawo płynięcia stowarzyszone z funkcją płynięcia  $\bar{f}^{(2)}$  ma postać:

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \lambda^{(2)} \frac{\partial \bar{f}^{(2)}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \lambda^{(2)} \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{2n}{m^g} \sum_{r=1}^M \frac{1}{\tau_c^{r,g}} \left[ \frac{\tau^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n-1} \mathbf{P}^{r,g}. \quad (4.46)$$

Współczynnik  $\lambda^{(2)}$  możemy w następujący sposób wyrazić przez prędkość energii plastycznej deformacji:

$$\lambda^{(2)} = \frac{\dot{W}^p}{2nK}. \quad (4.47)$$

Efektywna prędkość deformacji plastycznej  $\bar{D}_{eff}^p$  przy przyjęciu jako efektywnego naprężenia  $\tau_c$ , które jest krytycznym naprężeniem ścinającym na jednym z  $M$  systemów poślizgu, będzie dana wzorem:

$$\bar{D}_{eff}^p = 2n\lambda^{(2)} \frac{K}{\tau_c}. \quad (4.48)$$

Wyznamy teraz postać funkcji  $d_{22}^\phi$  i  $d_{33}^\phi$  występujących we wzorze (4.34) określającym współczynnik Lankforda. Wykorzystując do ich wyznaczenia prawo płynięcia (4.46) otrzymamy:

$$d_{22}^\phi = \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \varepsilon_2^g(\phi), \quad d_{33}^\phi = \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \varepsilon_3^g(\phi) \quad (4.49)$$

oraz

$$\varepsilon_2^g(\phi) = \sum_{r=1}^M \frac{1}{\tau_c^{r,g}} \left( \frac{\tau_\phi^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n-1} P_{11}^{r,g} \sin^2 \phi + P_{22}^{r,g} \cos^2 \phi - P_{12}^{r,g} \sin 2\phi, \quad (4.50)$$

$$\varepsilon_3^g(\phi) = \sum_{r=1}^M \frac{1}{\tau_c^{r,g}} \left( \frac{\tau_\phi^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n-1} P_{33}^{r,g}, \quad (4.51)$$

gdzie funkcja  $\tau_\phi^{r,g}$  wyraża się wzorem (4.29).

Aby porównać kształt powierzchni  $\bar{F}^{(2)}$  z kryteriami fenomenologicznymi analizowanymi w poprzednim rozdziale wykorzystamy poniższe zależności:

$$Y_1 = Y, \quad (4.52)$$

$$Y_2 = K^{\frac{1}{2n}} \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{22}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{-1}{2n}}, \quad (4.53)$$

$$k = K^{\frac{1}{2n}} \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{2P_{12}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{-1}{2n}}, \quad (4.54)$$

$$Y_p = K^{\frac{1}{2n}} \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{11}^{r,g} + P_{22}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n} \right\}^{\frac{-1}{2n}}. \quad (4.55)$$

Podobnie jak w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ , główne osie ortotropii  $\mathbf{m}_1$  i  $\mathbf{m}_2$  zostały przyjęte jako współosiowe z osiami  $\mathbf{e}_1$  i  $\mathbf{e}_2$ , a oś  $\mathbf{e}_3$  definiuje rozpatrywaną płaszczyznę.

### 4.2.3 Powierzchnia $\bar{F}^{(3)}$

Wprowadzając powierzchnie plastyczności (4.24) i (4.42) założyliśmy jednakowy wykładnik  $n$  dla wszystkich orientacji ziaren. Możliwa jest jednak sytuacja, kiedy poszczególnym grupom ziaren o danej orientacji  $g$  należałoby przypisać inny wykładnik  $n^g$ . Według podanej interpretacji wykładnika  $n$  oznaczałoby to, że poszczególne orientacje występujące

w elemencie reprezentatywnym charakteryzują się inną energią błędu ułożenia lub mówiąc inaczej innym kątem  $\Omega_0$ . Powierzchnia  $\bar{F}^{(3)}$  będzie powierzchnią typu (4.22) o postaci:

$$\bar{F}^{(3)} = \bar{f}^{(3)} - \tau_c = \sum_{g=1}^N \gamma^g \left( \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{\tau^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right]^{2n^g} \right)^{\frac{1}{2n^g}} - \tau_c = 0. \quad (4.56)$$

Funkcja  $\bar{f}^{(3)}$  jest funkcją jednorodną stopnia 1. Należy zaznaczyć, że przyjmując dla każdej orientacji  $g$  wykładnik  $n^g = n$ , z równania (4.56) nie otrzymamy warunku plastyczności równoważnego kryterium (4.24), o ile liczba orientacji  $N > 1$ . Podobnie jak w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  przyjęto, że agregat uplastycznia się w chwili, gdy uplastycznione są wszystkie ziarna.

Wartość krytyczna naprężenia o postaci (4.25), wyznaczona na podstawie kryterium (4.56), będzie wyrażać się wzorem:

$$Y^{(3)}(\phi, \theta) = \left\{ \sum_{g=1}^N \gamma^g \left[ \frac{1}{m_g} \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau^{r,g}(\phi, \theta)}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n^g} \right]^{\frac{1}{2n^g}} \right\}^{-1}, \quad (4.57)$$

gdzie funkcja  $\tau^{r,g}(\phi, \theta)$  określona jest zależnością (4.28).

Funkcja  $\bar{f}^{(3)}$  jest potencjałem dla tensora prędkości plastycznej deformacji. Stowarzyszone prawo płynięcia przyjmuje postać:

$$\bar{D}^p = \lambda^{(3)} \frac{\partial \bar{f}^{(3)}}{\partial \bar{\sigma}} = \lambda^{(3)} \sum_{g=1}^N \gamma^g \frac{1}{m^g} (f_3^g)^{\frac{1}{2n^g}-1} \sum_{r=1}^M \frac{1}{a_c^{r,g}} \left( \frac{\tau^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right)^{2n^g-1} \mathbf{P}^{r,g}. \quad (4.58)$$

Funkcja  $f_3^g$ , przypisana do ziaren o orientacji  $g$ , zdefiniowana jest wzorem:

$$f_3^g = \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \frac{1}{a_c^{r,g}} \left( \frac{\tau^{r,g}}{a_c^{r,g}} \right)^{2n^g} \quad (4.59)$$

Występujący we wzorze (4.58) współczynnik  $\lambda^{(3)}$  możemy wyrazić poprzez prędkość energii plastycznej deformacji :

$$\lambda^{(3)} = \frac{\dot{W}^p}{\tau_c}. \quad (4.60)$$

Z drugiej strony jest on równy efektywnej prędkości plastycznej deformacji, mianowicie:

$$\bar{D}^{p\text{eff}} = \lambda^{(3)}. \quad (4.61)$$

Wykorzystując prawo plastycznego płynięcia możemy wyznaczyć funkcje  $d_{22}^\phi$  i  $d_{33}^\phi$  występujące we wzorze (4.34). Dla powierzchni płynięcia  $\bar{F}^{(3)}$ , funkcje te wyrażają się w następujący sposób:

$$d_{22}^\phi = \sum_{g=1}^N \frac{\gamma^g}{m^g} (f_\phi^g)^{\frac{1}{2n^g}-1} \varepsilon_2^g(\phi), \quad d_{33}^\phi = \sum_{g=1}^N \frac{\gamma^g}{m^g} (f_\phi^g)^{\frac{1}{2n^g}-1} \varepsilon_3^g(\phi), \quad (4.62)$$

gdzie

$$\varepsilon_2^g(\phi) = \sum_{r=1}^M \frac{1}{\tau_c^{r,g}} \left( \frac{\tau_\phi^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n^g-1} P_{11}^{r,g} \sin^2 \phi + P_{22}^{r,g} \cos^2 \phi - P_{12}^{r,g} \sin 2\phi, \quad (4.63)$$

$$\varepsilon_3^g(\phi) = \sum_{r=1}^M \frac{1}{\tau_c^{r,g}} \left( \frac{\tau_\phi^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n^g-1} P_{33}^{r,g} \quad (4.64)$$

oraz

$$J_\phi^g = \frac{1}{m_g} \sum_{r=1}^M \left( \frac{\tau_\phi^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right)^{2n^g}. \quad (4.65)$$

Występująca w powyższych wzorach funkcja  $\tau_\phi^{r,g}$  zdefiniowana jest zależnością (4.29).

Stałe  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $k$ ,  $Y_p$  występujące w kryteriach fenomenologicznych można wyznaczyć z przyjętego kryterium uplastycznienia opisanego wzorem (4.56). Mianowicie:

$$Y_1^{-1} = \sum_{g=1}^N \gamma^g \left\{ \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{11}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n^g} \right\}^{\frac{1}{2n^g}}, \quad (4.66)$$

$$Y_2^{-1} = \sum_{g=1}^N \gamma^g \left\{ \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{22}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n^g} \right\}^{\frac{1}{2n^g}}, \quad (4.67)$$

$$k^{-1} = \sum_{g=1}^N \gamma^g \left\{ \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{2P_{12}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n^g} \right\}^{\frac{1}{2n^g}}, \quad (4.68)$$

$$Y_p^{-1} = \sum_{g=1}^N \gamma^g \left\{ \frac{1}{m^g} \sum_{r=1}^M \left[ \frac{P_{11}^{r,g} + P_{22}^{r,g}}{\tau_c^{r,g}} \right]^{2n^g} \right\}^{\frac{1}{2n^g}}. \quad (4.69)$$

Ponownie główne osie ortotropii przyjęto jako współosiowe z kierunkami  $e_1$  i  $e_2$ .

Wprowadzone powierzchnie plastyczności przedyskutujemy dla szczególnego przypadku tekstury. Niech wszystkie ziarna mają sieć krystalograficzną typu A1 o 12-stu systemach poślizgu  $\{111\} \langle 110 \rangle$  i jednakowym krytycznym naprężeniu ścinającym. Naprężenie to jest jednocześnie naprężeniem efektywnym  $\tau_c$ . Współczynniki  $a_c^{r,g}$  są zatem równe jedności dla każdego  $r$  i  $g$ . Załóżmy ponadto, że orientacja tych ziaren względem globalnego układu odniesienia  $\{e_i\}$  jest taka sama. Mamy zatem  $N = 1$ ,  $M = 12$  i kryteria plastyczności (4.24) i (4.56) przyjmują postać:

$$\bar{F}^{(1)} = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{12} (\tau^r)^{2n} - \tau_c^{2n} = 0, \quad \bar{F}^{(3)} = \left( \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{12} (\tau^r)^{2n} \right)^{\frac{1}{2n}} - \tau_c = 0. \quad (4.70)$$

Zauważmy, że oba warunki definiują taką samą powierzchnię płynięcia. Współczynnik  $m$  nie zależy od orientacji sieci względem układu globalnego (porównaj wzór (4.18<sub>2</sub>)) i w rozważanym przypadku zależy wyłącznie od przyjętego  $n$ .



Zdefiniujmy poniższą wielkość dla testu jednoosiowego rozciągania materiału polikrystalicznego o idealnej teksturze:

$$\bar{M}(\phi, \theta) = \frac{Y(\phi, \theta)}{\tau_c}. \quad (4.71)$$

Wielkość ta określa stosunek wartość krytycznego naprężenia przy rozciąganiu polikryształu w kierunku  $\mathbf{n}$  do krytycznego naprężenia ścinającego na systemie poślizgu pojedynczego ziarna. Odgrywa ona podstawą rolę w teorii plastyczności polikryształu [56]. Dla warunków (4.24) i (4.56) wielkość ta wyraża się wzorem:

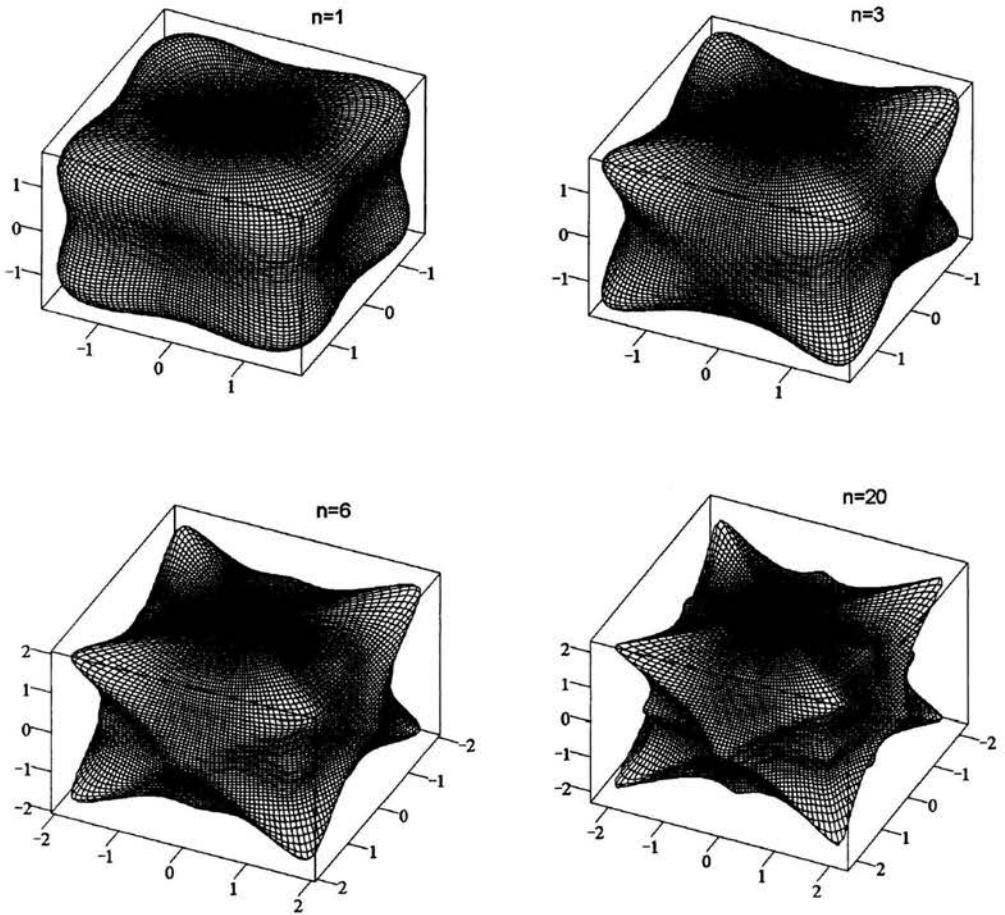
$$\bar{M}(\phi, \theta) = \left[ \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{12} (\tau^r(\phi, \theta))^{2n} \right]^{\frac{-1}{2n}}. \quad (4.72)$$

$n$	$M_{max}$	$M_{min}$	$\mathbf{n}_{max}$	$\mathbf{n}_{min}$
1	2.646	1.528	$\langle 111 \rangle - \phi = 45^\circ, \theta \cong 54.7^\circ$	$\langle 100 \rangle - \phi = 0^\circ, \theta = 0^\circ$
3	2.825	1.792	$\langle 111 \rangle$	$\langle 100 \rangle$
6	3.169	1.918	$\langle 111 \rangle$	$\phi = 0, \theta = 68.4^\circ$
20	3.513	1.994	$\langle 111 \rangle$	$\phi \cong 6.9^\circ, \theta \cong 23.1^\circ$
100	3.642	2.00	$\langle 111 \rangle$	$\phi \cong 5.7^\circ, \theta \cong 66^\circ$

Tablica 4.1: Wartości maksymalne i minimalne współczynnika  $\bar{M}$  (wzór (4.72)).

Rysunek 4.3 przedstawia wykres tej funkcji dla tekstury idealnej  $\{001\}\langle 100 \rangle$  przy różnych wartościach parametru  $n$  (porównaj Fig.3 w pracy [35]). Osie układu odpowiadają kierunkom krystalograficznym  $[100]$ ,  $[010]$  i  $[001]$ , które pokrywają się z kierunkami  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Możemy zaobserwować, że wraz ze wzrostem wykładnika zwiększa się liczba lokalnych minimumów i maksimumów tej funkcji oraz wartość funkcji ulega dużo bardziej gwałtownym zmianom przy nieznacznej zmianie kierunku rozciągania. Wartości maksymalne i minimalne funkcji oraz kierunki rozciągania im odpowiadające zebrano w tablicy 4.1. Dla wszystkich analizowanych  $n$  maksymalną wartość współczynnika  $\bar{M}$  otrzymujemy dla kierunków  $\langle 111 \rangle$ . Wartość ta rośnie wraz ze wzrostem  $n$  od 2.646 dla  $n = 1$  (warunek odpowiada wtedy warunkowi Hilla z 1948 roku) do 3.642 dla  $n = 100$ . Wartość minimalna również rośnie ze wzrostem  $n$  od 1.526 do 2.00. Kierunek w jakim otrzymujemy minimalną wartość  $\bar{M}$  zmienia się wraz z parametrem  $n$ . Dla  $n = 1, 2, 3$  jest to kierunek  $\langle 100 \rangle$ , dla  $n = 6$  kierunek dany kątami  $\phi = 0^\circ$  i  $\theta = 68.4^\circ$  oraz kierunki mu równoważne wynikające z symetrii kryształu. Dalsze zwiększanie  $n$  powoduje kolejną zmianę tego kierunku.

Zauważmy, że rysunek 4.3 możemy interpretować również w inny sposób. Niech osie układu nadal pokrywają się z kierunkami krystalograficznymi  $[100]$ ,  $[010]$  i  $[001]$ , natomiast kierunki próbki polikrystalicznej  $\{\mathbf{e}_i\}$  będą względem nich dowolnie obrócone. Przekroje przez powierzchnię  $\bar{M}(\phi, \theta)$  płaszczyznami o normalnej  $\mathbf{e}_3$  będą wykresami tej funkcji w płaszczyźnie blachy o dowolnej teksturze idealnej (porównaj rysunek 4.4). Otrzymane



Rysunek 4.3: Wykres funkcji  $\bar{M}(\phi, \theta) = Y(\phi, \theta)/\tau_c$  dla tekstury idealnej  $\{001\}\langle 100 \rangle$  dla różnych wartości parametru  $n$ .

w ten sposób wykresy dla blach, w których normalna do ich płaszczyzny pokrywa się odpowiednio z kierunkami krystalograficznymi  $\{001\}$ ,  $\{011\}$  i  $\{111\}$  (porównaj rysunek 3.4) zaprezentowano na rysunku 4.5. Kierunki  $\mathbf{n}$  leżące w tych płaszczyznach można zapisać w poniższy sposób w bazie związanej z reperem kierunków krystalograficznych  $\{\mathbf{a}_i\}$ :

$$\mathbf{n}_{\omega}^{\{001\}} = \cos(\omega)\mathbf{a}_1 + \sin(\omega)\mathbf{a}_2, \quad (4.73)$$

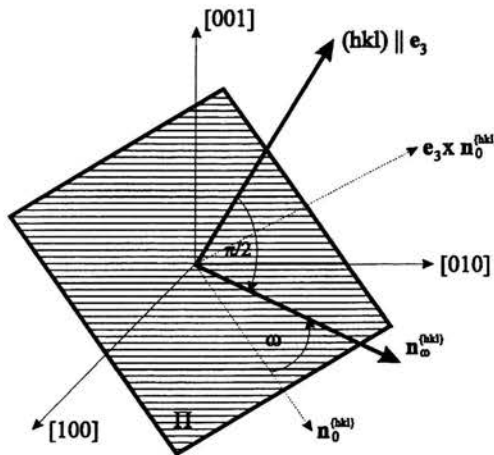
$$\mathbf{n}_\omega^{\{011\}} = \cos(\omega)\mathbf{a}_1 + \frac{\sin(\omega)}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_2 - \frac{\sin(\omega)}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_3, \quad (4.74)$$

$$\mathbf{n}_\omega^{\{111\}} = \left(\frac{\cos(\omega)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(\omega)}{\sqrt{6}}\right)\mathbf{a}_1 + \left(\frac{2\sin(\omega)}{\sqrt{6}}\right)\mathbf{a}_2 + \left(-\frac{\cos(\omega)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(\omega)}{\sqrt{6}}\right)\mathbf{a}_3. \quad (4.75)$$

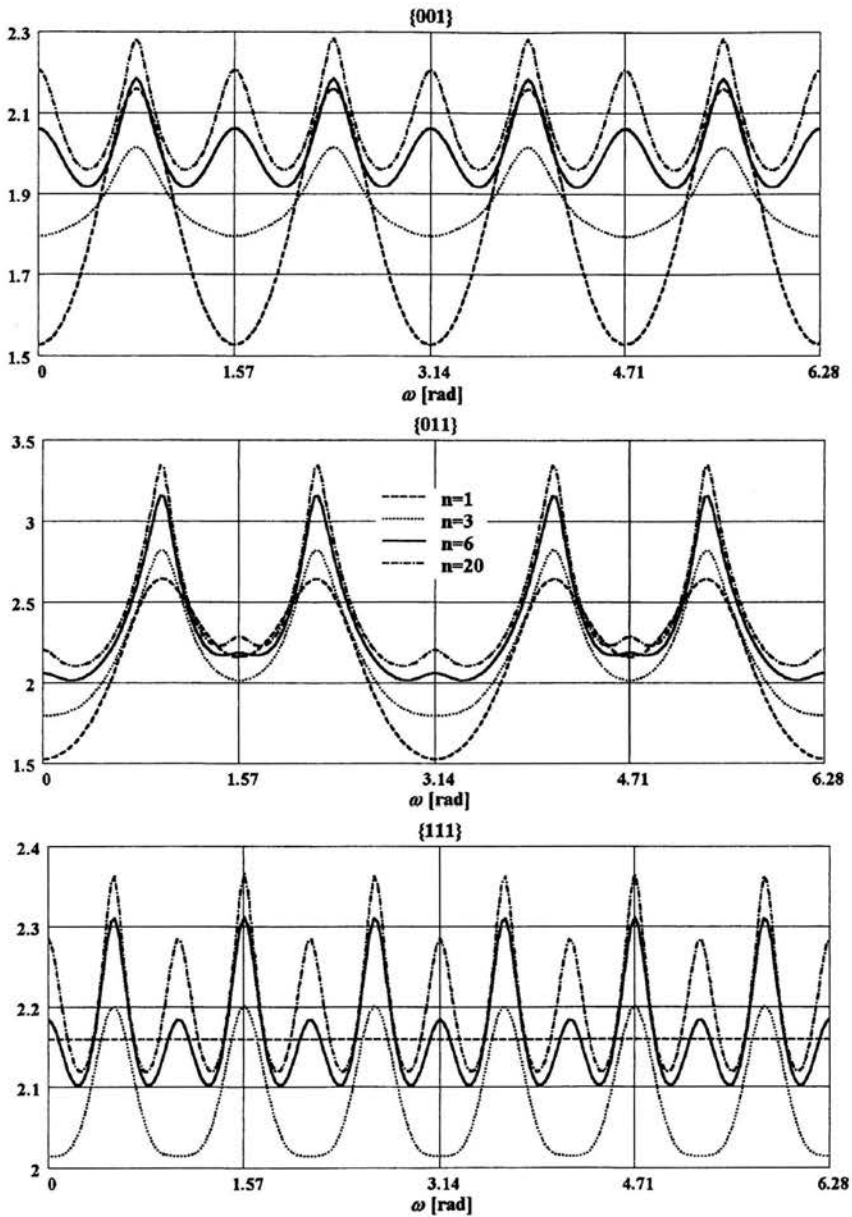
Zauważmy, że blachę o teksturze  $\{001\}\langle 100 \rangle$  (*cube texture*) otrzymamy, gdy  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_0^{\{001\}}$ , a  $\{001\}\langle 110 \rangle$ , gdy  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_{45^\circ}^{\{100\}}$ . Inną często spotykaną w blachach teksturą jest tekstura  $\{011\}\langle 100 \rangle$  (*goss texture*), wtedy  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_0^{\{011\}}$ . We wszystkich analizowanych przypadkach blacha ma własności ortotropowe. Blacha o płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny krystalograficznej  $\{001\}$  wykazuje oczywiście symetrię kubiczną.

Największą wytrzymałość na rozciąganie otrzymujemy dla kąta  $\omega = 45^\circ$  i kątów, które mu odpowiadają ze względu na symetrię kryształu. Im większe  $n$ , tym wartość krytyczna wytrzymałości w tym kierunku jest większa (przy stałej wartości  $\tau_c$ ). Dla  $n = 6$  i  $n = 20$  mamy również dodatkowe maksima lokalne dla kąta  $\omega = 0^\circ$ . Dla wartości  $n = 1$  i  $n = 3$ , w tym kierunku wartość krytyczna naprężenia jest najmniejsza. Przy  $n = 1$  obserwujemy największą różnicę między wartością minimalną i maksymalną naprężenia krytycznego.

Otrzymany wykres dla tekstury  $\{111\}$  można porównać z odpowiadającym mu wykresem (rysunek 3.8a) dla powierzchni Bishopa-Hilla otrzymanym przez Lequeu i innych [75] dla blach o teksturze idealnej przy różnym kącie rozrzutu  $\Omega_0$  zamieszczonym w rozdziale trzecim. Otrzymaliśmy zadowalającą zgodność kształtu wykresów. Zgodnie z podaną interpretacją wykładnika  $n$  funkcjom otrzymanym dla powierzchni Bishopa-Hilla przy małym kącie rozrzutu wokół orientacji idealnej odpowiadają wykresy  $\bar{M}(\omega)$  dla dużego  $n$  i odwrotnie.



Rysunek 4.4: Orientacja płaszczyzny blachy względem kierunków krystalograficznych  $\langle 100 \rangle$  w przypadku blach o teksturze idealnej.



Rysunek 4.5: Wykres funkcji  $\bar{M}(\omega) = Y(\omega)/\tau_c$  (wzory (4.72) i (4.73)) dla blach, których płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny krystalograficznej {001}, {011} i {111} dla różnych wartości parametru  $n$  według kryteriów (4.24) i (4.56).

Dla blachy o płaszczyźnie równoległej do  $\{011\}$  maksimum wytrzymałości otrzymujemy dla kąta równego  $\arctan(1/\sqrt{3})$ . W przypadku  $n = 6$  i  $n = 20$  pojawiają się dodatkowe maksima lokalne dla kątów  $0^\circ$  i  $90^\circ$ . Można zauważyć, że różnice w wytrzymałości blachy są w tym przypadku większe niż dla blachy  $\{001\}$ .

Interesujący jest wykres dla blach o płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny krystalograficznej  $\{111\}$ . Przy  $n = 1$  blacha będzie wykazywać wtedy własności izotropowe. Dla wyższych  $n$  wartości funkcji powtarzają się co  $60^\circ$  z tym, że dla  $n = 3$  maksimum wytrzymałości otrzymujemy dla  $\omega = 30^\circ + k60^\circ$ , ( $k = 0, 1, \dots, 5$ ) a minimum dla  $\omega = k60^\circ$ . Dla  $n = 6$  i  $n = 20$  dla wartości  $\omega = k60^\circ$  występują dodatkowe maksima lokalne, a minima dla wartości  $\omega = 15^\circ + l30^\circ$ , ( $l = 0, 1, \dots, 11$ ).

Omawiane powyżej wykresy niosą ze sobą informację o ilości możliwych uch technologicznych w procesie wytłaczania blach. Minima lokalne funkcji odpowiadają maksymalnym wydłużeniom na obrzeżu blachy. Wykorzystując prawo płynięcia (4.30) wykonano wykresy zależności prędkości wydłużenia próbki  $d(\omega)$  w kierunku rozciągania  $n$  od kąta  $\omega$ . Wartości odniesiono do normy tensora prędkości deformacji plastycznej dla kierunku rozciągania  $n_{\omega_{min}}$ , dla którego wartość wytrzymałości na rozciąganie była najmniejsza, to znaczy

$$d(\omega) = \frac{D_{11}^{p\omega}}{\|\mathbf{D}^p(\omega_{min})\|}, \quad (4.76)$$

gdzie  $D_{11}^{p\omega}$  jest składową tensora prędkości deformacji plastycznej w bazie  $\{\mathbf{n}_w^{\{hkl\}}, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}_w^{\{hkl\}}, \mathbf{e}_3\}$  (porównaj rysunek 4.4).

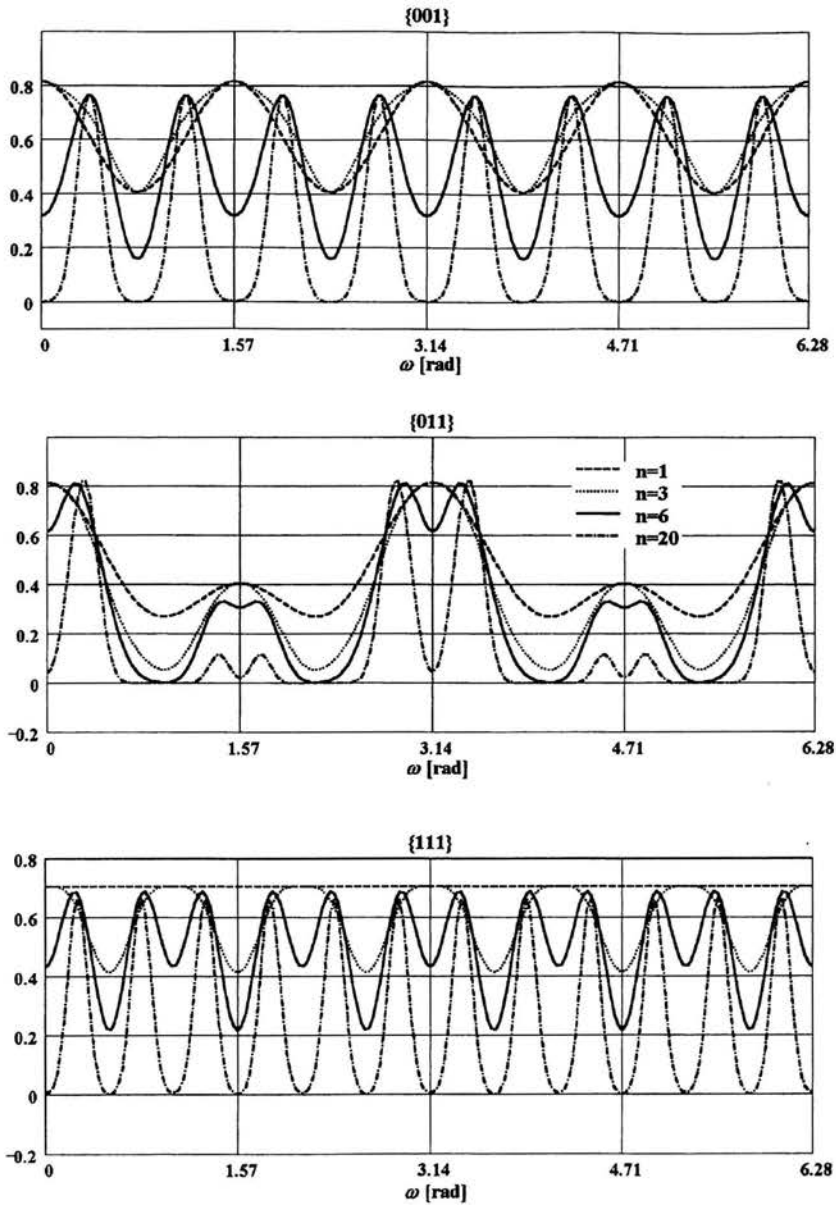
Dla tekstury  $\{001\}$  o symetrii kubicznej liczba przewidywanych uch technologicznych zwiększa się z czterech przy wykładniku  $n = 1$  i  $n = 3$  do ośmiu w przypadku  $n = 6$  i  $n = 20$ . Dla  $n = 1$  i  $n = 3$  wykazywane nierówności mają taką samą geometrię, natomiast dla wyższych  $n$  mogą istnieć różnice między nimi.

Dla tekstury  $\{011\}$ , kiedy blacha ma symetrię tylko ortotropową liczba wykazywanych uch ponownie wynosi odpowiednio cztery i osiem. Jednak wydłużenie w kierunku o kącie  $\omega = 0^\circ$  jest większe niż w kierunku  $\omega = 90^\circ$ . W przypadku tekstury  $\{011\}\langle 001 \rangle$  kierunki te odpowiadają kierunkowi walcowania i kierunkowi do niego prostopadłemu. Większy wykładnik  $n$  powoduje powstanie podwójnych grzbietów w tych kierunkach. Stosunek maksymalnej do minimalnej prędkości wydłużenia jest dużo większy w przypadku  $n = 6$  i  $n = 20$  niż  $n = 1$  i  $n = 3$ . Wskazuje to na możliwą lokalizację odkształceń.

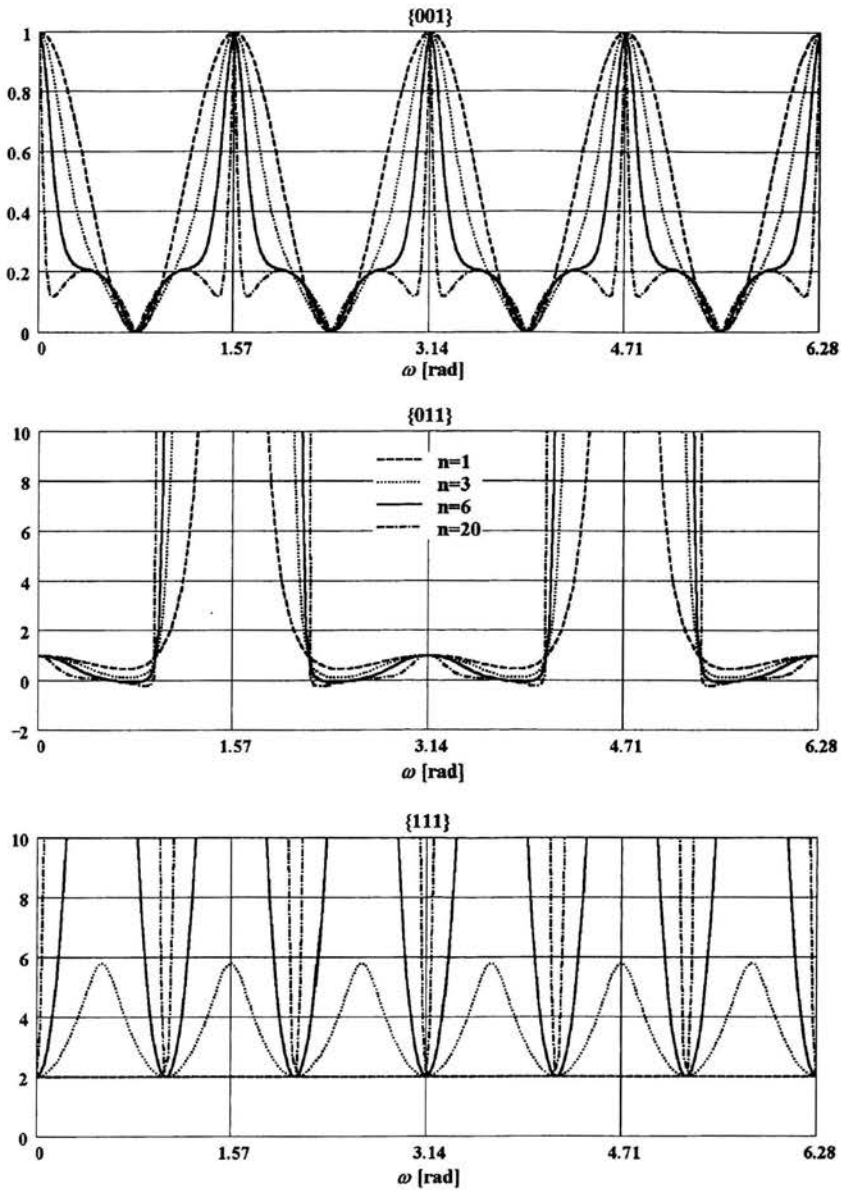
W przypadku tekstury  $\{111\}$  warunek przy  $n = 1$  nie przewiduje powstania nierówności na obrzeżu, podczas gdy dla  $n = 3$  ich liczba rośnie do sześciu a dla  $n = 6$  i  $n = 20$  wynosi dwanaście. Ponownie wykładnik  $n = 20$  sugeruje lokalizację odkształceń w kierunkach maksymalnych wydłużeń.

O anizotropii odkształceń po grubości blachy możemy się dowiedzieć obliczając wartość współczynnika Lankforda dla analizowanych tekstur. Wskazuje on na możliwe poślizgowanie brzegów elementów metalowych. Na rysunku 4.7 przedstawiono wykres tego współczynnika przy różnych wartościach wykładnika  $n$ . Minimum na wykresie  $R(\omega)$  będzie odpowiadać wgłębieniu na zewnętrznej powierzchni elementu.

Silnie zaznaczają się wgłębienia pod kątem  $\omega = 45^\circ$  dla tekstury  $\{100\}$ . Mogą być one nawet źródłem lokalizacji odkształceń. W przypadku  $n = 20$  istnieją również dodatkowe



Rysunek 4.6: Wykres funkcji  $d(\omega) = D_{11}^{\omega} / D_{max}^{eff}$  (wzór (4.76)) dla blach, których płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny krystalograficznej  $\{001\}$ ,  $\{011\}$  i  $\{111\}$  dla różnych wartości parametru  $n$  według kryteriów (4.24) i (4.56).



Rysunek 4.7: Wykres współczynnika Lankforda  $R(\omega) = D_{22}^{\omega}/D_{33}^{\omega}$  dla blach, których płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny krystalograficznej  $\{001\}$ ,  $\{011\}$  i  $\{111\}$  dla różnych wartości parametru  $n$  według kryteriów (4.24) i (4.56).

minima funkcji po obu stronach kąta  $0^\circ$ . Ponieważ wartość  $R$  ulega wtedy gwałtownym zmianom również one mogą być źródłem lokalizacji. Wykres ten możemy porównać z rysunkiem 3.8b) zamieszczonym w rozdziale trzecim przedstawiającym wykres współczynnika Lankforda dla blach o teksturze idealnej przy różnym kącie rozrzutu  $\Omega_0$  otrzymanymi przez Lequeu i innych [75] na podstawie powierzchni Bishopa-Hilla. Ponownie charakter wykresów jest do siebie zbliżony. Wykres ten możemy również porównać z rysunkami 3.10 dla tekstur  $\{100\} < 001 >$  i  $\{100\} < 011 >$  powtórzonymi w rozdziale trzecim za pracą [2].

Tekstura typu  $\{011\}$  wykazuje minimum  $R(\omega)$  dla kąta  $\arctan(1/\sqrt{3})$ . Zauważmy, że przy wartości  $n = 6$  i  $n = 20$  prawo płynięcia przewiduje *nie-fizyczne* zachowanie się materiału - istnieją zakresy kąta  $\omega$  dla których  $R$  jest mniejszy od zera. Dążenie  $R$  do nieskończoności sugeruje, że prędkość deformacji plastycznej w kierunku normalnym do płaszczyzny blachy dąży do zera. Zauważmy, że wartość  $R$  zmienia się gwałtownie w okolicy kąta  $54.7^\circ$  wykazując w ten sposób gwałtowną zmianą kierunku plastycznego płynięcia. Wykresy te mają charakter zbliżony tych przewidywanych przez powierzchnię Bishopa-Hilla dla tego typu tekstury ( $\{110\} < 001 >$  i  $\{110\} < 110 >$ ) zaprezentowanych na rysunku 3.10.

W przypadku tekstury  $\{111\}$  współczynnik  $R(\omega)$  dla  $n = 3$ ,  $n = 6$  i  $n = 20$  wykazuje minimum dla kąta  $\omega = 30^\circ + k60^\circ$  z tym, że im większe  $n$ , tym zmiany  $R$  są gwałtowniejsze i poza kątami, gdzie wykazywane jest minimum prędkość odkształcenia po grubości, jego wartość dąży do zera. Jeżeli przyjmiemy  $n = 1$ , to wykres  $R(\omega)$  wskazuje na izotropowe zachowanie się materiału. Również dla tego przypadku tekstury proponowane przez nas powierzchnie dają wykres współczynnika Lankforda zbliżony do wynikającego z powierzchni Bishopa-Hilla zaprezentowanego na rysunku 3.10 (tekstury  $\{111\} < 011 >$  i  $\{100\} < 211 >$ ).

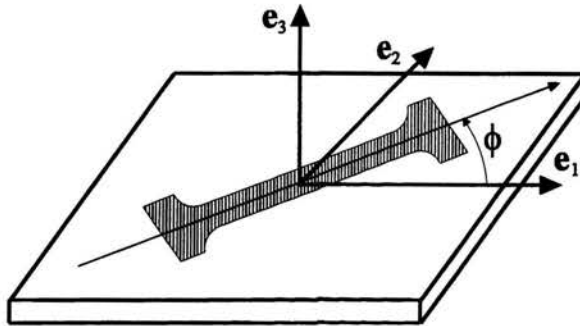
Przeprowadzona powyżej analiza anizotropii elementu polikrystalicznego o teksturze idealnej przewidywanych przez proponowane kryteria (4.24) i (4.56) wykazała, że dają one wyniki zbliżone do powierzchni Bishopa-Hilla. Kształt powierzchni danej równaniem (4.42) jest taki sam jak powierzchni (4.24). Powierzchnie te różnią się tylko wartościami naprężeń granicznych. W przypadku powierzchni (4.42) następuje przeskalowanie tych wartości, gdyż wartość współczynnika  $M$  dla kierunku  $\mathbf{n}$  pokrywającego się z osią  $\mathbf{e}_1$  jest wyznaczona na podstawie testu określającego wytrzymałość  $Y$  (porównaj wzory (4.43) i (4.71)). W dalszym ciągu porównamy proponowane powierzchnie z warunkami fenomenologicznymi Hilla i Barlata dla blach o różnej anizotropii, której źródłem jest pewna tekstura krystalograficzna. Ze względu na to, że w przeprowadzanej analizie interesował nas będzie szczególnie kształt powierzchni granicznej i względne różnice w wytrzymałości elementów w różnych kierunkach skupimy się na powierzchni  $F^{(1)}$ .



## 4.3 Wpływ kształtu powierzchni plastyczności na proces plastycznego płynięcia

### 4.3.1 Anizotropia plastycznego płynięcia

W przypadku kształtowania elementów metalowych szczególnie istotne są kierunki główne tensora prędkości plastycznej deformacji przewidywane przez prawa płynięcia stowarzyszone z zastosowanymi funkcjami płynięcia. Adekwatne określenie powierzchni plastyczności pozwala przewidywać takie cechy jak zdolność blachy do formowania, nierównomierność odkształceń oraz możliwe punkty ich lokalizacji. Na cechy te szczególnie duży wpływ ma kształt powierzchni plastyczności. Jak pokażemy dalej, na kształt ten ma bardzo duży wpływ tekstura krystalograficzna w blasze.



Rysunek 4.8: *Geometria blachy.*

Na podstawie analizowanych kryteriów w kolejnych podrozdziałach omówimy właściwości blachy (rysunek 4.8), która ze względu na występującą w niej teksturę (porównaj [32]):

- jest izotropowa, to znaczy rozkład orientacji w blaszce jest równomierny zarówno w płaszczyźnie jak i w przekroju, lub
- wykazuje anizotropię normalną, to znaczy jest izotropowa w płaszczyźnie a anizotropowa w przekroju, lub
- wykazuje anizotropię płaską, to znaczy jest anizotropowa zarówno w płaszczyźnie jak i w przekroju (w większości przypadków mamy do czynienia z blachami o symetrii ortotropowej).

W dwóch pierwszych przypadkach do opisu plastycznego płynięcia blachy stosuje się kryterium uplastycznienia Hilla z roku 1990 o postaci (3.50). W przypadku warunku Barlata z roku 1989 wykorzystuje się postać (3.62) tego warunku. Zauważmy, że do opisan

zachowania się materiału każdym z tych warunków potrzebne jest określenie dwóch stałych materiałowych:  $\sigma$  i  $\tau$  dla kryterium Hilla oraz  $\bar{\alpha}$  i  $\bar{\sigma}$  dla warunku Barlata. Stałe te wyraża się często poprzez wyniki testów jednoosiowego rozciągania (3.42) -  $Y_1$  i dwuosiowego rozciągania (3.43) -  $Y_p$ :

$$\sigma = Y_p, \quad \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^m = (2q)^m - 1, \quad (4.77)$$

$$\bar{\sigma} = Y_1, \quad \bar{\alpha} = q^{-m}, \quad (4.78)$$

gdzie

$$q = \frac{Y_p}{Y_1}. \quad (4.79)$$

Ze względu na kryterium wypukłości jakie muszą spełniać powierzchnie płynięcia powinny być spełnione poniższe warunki nałożone na stosunek  $q$  i wykładnik  $m$ :

$$q > 0.5 \quad \text{dla warunku Hilla [51]}, \quad (4.80)$$

$$q^{-m} < 2 \quad \text{dla warunku Barlata [14]}. \quad (4.81)$$

O anizotropii blachy w jej przekrojach, to znaczy o tym czy mamy do czynienia z blachą izotropową, czy też blachą o anizotropii normalnej możemy wnioskować na podstawie współczynnika Lankforda  $R$ . Współczynnik ten w przypadku anizotropii normalnej przyjmuje stałą wartość i dla warunku Hilla wynosi:

$$R_H = 2^{m-1}q^m - 1, \quad (4.82)$$

a dla warunku Barlata:

$$R_B = 2q^m - 1. \quad (4.83)$$

Zauważmy, że jeżeli materiał jest izotropowy nie tylko w płaszczyźnie blachy, ale również w przekrojach prostopadłych do tej płaszczyzny, to w próbie jednoosiowego rozciągania zmiana grubości i szerokości wyciętej z niej próbki powinna być taka sama (porównaj rysunek 4.8). Współczynnik Lankforda  $R$  jest wtedy równy jedności. W przypadku warunku Barlata dzieje się tak, gdy  $q = 1$  natomiast w przypadku kryterium Hilla, gdy  $q^m = 2^{2-m}$ . Zauważmy, że dla warunku Hilla jedynie przy wykładniku  $m = 2$ , stosunek  $q = 1$ . Przypomnijmy, że jak to wykazaliśmy w rozdziale trzecim (porównaj (3.19-3.21)), materiał izotropowy, który nie uplastycznia się dla dowolnego kulistego stanu naprężenia i nie jest wrażliwy na znak stanu naprężenia, powinien wykazywać równość naprężeń uplastyczniających  $Y_p = Y_1$  ( $q = 1$ ). Brak tej cechy w przypadku warunku Hilla dla płaskiego stanu naprężenia (PSN) sugeruje, że odpowiadający mu warunek w przestrzeni trójwymiarowej 3D nie wykazuje przynajmniej jednej z powyższych własności.

Analizując zależności (4.82) i (4.83) można zaobserwować, że warunek Hilla z roku 1990, dla pewnych zakresów wykładnika  $m$ , umożliwia opis zachowania się materiału różny od opisywanego poprzez warunek kwadratowy z 1948 roku. Zachowanie takie będziemy nazywać „*anomalnym*”. Materiał wykazuje wtedy dla stosunku  $q < 1$  współczynnik Lankforda

$R_H > 1$  i dla  $q > 1$  współczynnik Lankforda  $R_H < 1$ . Opisanie takiego zachowania warunkiem Barlata nie jest możliwe.

Aby uniemożliwić „nie-fizyczne” zachowanie się materiału, to znaczy zwiększanie się grubości lub szerokości próbki przy jednoosiowym rozciąganiu, współczynnik  $R$  w obu przypadkach musi być większy od zera. W przypadku warunku Hilla narzuca to dodatkowe, oprócz nierówności (4.80), ograniczenie na stałą  $q$  i wykładnik  $m$  o postaci:

$$q^m > 2^{1-m}. \quad (4.84)$$

Dla warunku Barlata współczynnik Lankforda  $R$  jest większy od zera, jeżeli tylko spełniona jest nierówność (4.81).

### 4.3.2 Lokalizacja odkształceń plastycznych

Poniżej omówimy wpływ kształtu powierzchni plastyczności na zjawisko lokalizacji odkształceń. Zaprezentujemy model lokalizacji Marciniaka i Kuczyńskiego [78], [79] oraz pewne parametry pomocne w określaniu wpływu kształtu powierzchni na formowalność blach.

Istotne z punktu widzenia możliwej lokalizacji odkształceń są stany naprężenia, które spełniają równania (3.37) i (3.38). Równania te w przypadku anizotropii normalnej przyjmują poniższą formę dla warunku Hilla:

$$|tr\sigma|^{m-2} tr\sigma = \pm [(2q)^m - 1] (2trs^2)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{lub} \quad tr\sigma = 0 \quad (4.85)$$

i dla warunku Barlata:

$$\left( \frac{|K_1 - K_2|}{2K_2} \right)^{m-1} = \frac{2 - q^m}{q^m} \quad \text{lub} \quad \left( \frac{|K_1 + K_2|}{2K_2} \right)^{m-1} = \frac{q^m - 2}{q^m} \quad \text{lub} \quad K_1 = 0, \quad (4.86)$$

gdzie funkcje  $K_1$  i  $K_2$  wyrażają się zależnościami (3.62). Dla płaskich tensorów naprężenia, które spełniają powyższe równania, stowarzyszone z odpowiadającymi im warunkami prawa płynięcia przewidują płaski stan płynięcia. Równanie (3.38) dla rozważanych warunków jest spełnione dla tych samych wartości naprężeń i nie zależy od stosunku  $q$ . Z równania tego wynika, że płaskiemu dewiatorowi naprężenia odpowiada płaski stan odkształcenia w rozważanej płaszczyźnie. Rozwiązania równania (3.37) zależą od  $q$  a tym samym od  $R$ .

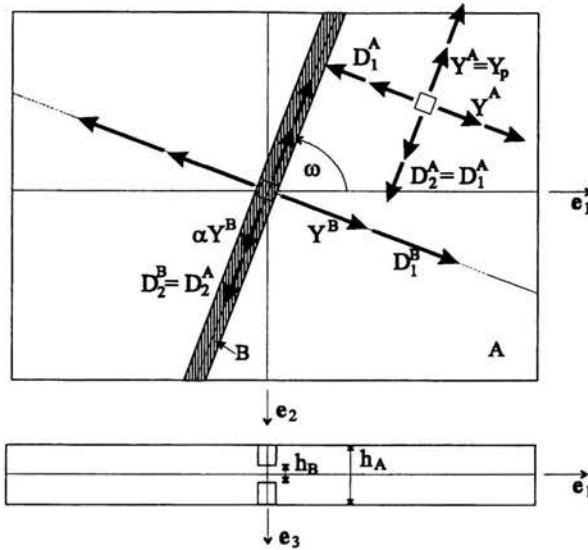
Dla dalszych rozważań przydatne będzie wprowadzenie poniższych oznaczeń dla analizowanych kierunków naprężeń:

$$\alpha = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}, \quad \beta = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}, \quad (4.87)$$

gdzie  $\sigma_{ij}$  są składowymi płaskiego tensora naprężenia w bazie  $\{e_i\}$ .

Zdolność do formowania (*formability*) metali w dużym stopniu zależy od kształtu powierzchni plastyczności ze względu na stowarzyszoną z nią prawo płynięcia. Zdolność ta opisywana jest zwykle za pomocą wykresu odkształceń granicznych w przestrzeni odkształceń

głównych (*forming limit diagram - FLD*) powyżej których następuje lokalizacja odkształceń. W przypadku blach lokalizacja taka objawia się na dwa zasadnicze sposoby: przewężenia (*thinning*) i szyjkowania (*necking*). Trzeci sposób lokalizacji określany jako utrata stateczności przez materiał wiąże się z powstaniem pasm lub warstw poślizgu i nie będzie przedmiotem niniejszych rozważań (porównaj [32]). Z przewężeniem będziemy mieli do czynienia, gdy spełnione jest równanie (3.38) opisujące powstanie płaskiego stanu odkształcenia (PSO) w płaszczyźnie blachy, a z szyjkowaniem wtedy, gdy spełnione jest równanie (3.37) opisujące powstanie PSO w jednym z przekrojów blachy.



Rysunek 4.9: Model lokalizacji odkształceń w materiale o symetrii kubicznej przy równomiernym rozciąganiu blachy.

Najczęściej wykorzystywanym modelem lokalizacji odkształceń jest model Marciniaka i Kuczyńskiego [78], [79]. Zakłada on, że w blasze o grubość  $h_A$  (strefa A) istnieje pewna imperfekcja (strefa B) o mniejszej grubości  $h_B$  (porównaj rysunek 4.9). Przy założonej ścieżce naprężenia w strefie A śledzona jest ścieżka odkształceń i ich prędkości w strefie B. Wykorzystywane są równania równowagi na granicy dwóch stref, równania ciągłości prędkości odkształceń oraz dana powierzchnia plastyczności i stowarzyszone z nią prawo płynięcia w obu strefach. Na podstawie analizy ścieżki odkształceń wyznaczane są odkształcenia graniczne w strefie A powodujące lokalizację odkształceń w strefie B. W pracach [12] i [76] przedstawiono rozszerzenie tego modelu na materiały anizotropowe przy dowolnej funkcji opisującej powierzchnię plastyczności oraz zaproponowano pewne parametry określające ciągłość (*stretchability*) danego materiału przy zadanym kształcie powierzchni plastyczności.

Kiedy mamy do czynienia ze stanami naprężeń dla których kierunek prędkości deformacji jest taki, że:

$$\rho = \frac{D_2}{D_1} < 0, \quad (4.88)$$

większość modeli lokalizacji przewiduje, że odkształcenia graniczne zależą od zdolności materiału blachy do przeciwstawiania się przewężeniu, gdyż lokalizacja w strefie B odpowiada wtedy wytworzeniu się w niej stanu naprężenia odpowiadającego równaniu (3.38). Zdolność ta w dużym stopniu zależy od wartości współczynnika Lankforda  $R$ . Im ma on większą wartość, tym zdolność do przeciwstawiania się przewężeniu jest większa.

Jak wykazano w pracach [12] i [76] odporność materiału na drugi typ lokalizacji - szyjkowanie związany z równaniem 3.37 w małym stopniu zależy od współczynnika Lankforda. Z szyjkowaniem mamy do czynienia dla stanów w których  $\rho = D_2/D_1 > 0$ . W pracy [76] wprowadzono dodatkowe parametry charakteryzujące wpływ kształtu powierzchni na formowalność metali przy stanach naprężenia prowadzących do szyjkowania. Jednym z nich jest parametr  $P_\omega$  zdefiniowany w poniższy sposób. Niech  $\omega$  oznacza kąt pomiędzy kierunkiem imperfekcji, w której następuje lokalizacja a kierunkiem walcowania, wtedy:

$$P_\omega = \frac{Y_\omega^{max}}{Y_p}, \quad (4.89)$$

gdzie  $Y_\omega^{max}$  maksymalne z naprężeń głównych odpowiadających lokalizacji w imperfekcji. Lokalizacja odkształcenia nastąpi pod kątem  $\omega$  dla którego parametr  $P_\omega$  osiąga minimum.

Na rysunku 4.9 przedstawiono schemat wyznaczania funkcji  $P_\omega$  dla materiałów o symetrii kubicznej. Zakładamy w strefie A zrównoważony stan dwuosiowego rozciągania:

$$\sigma^A \rightarrow \begin{bmatrix} Y_p & 0 \\ 0 & Y_p \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Każdy z kierunków w materiale jest wtedy kierunkiem głównym. Stwierdzono, że taki stan naprężenia, w przypadku materiałów o symetrii kubicznej, daje zwykle maksymalne odkształcenia graniczne. Zakładamy kąt  $\omega$  orientujący imperfekcję w której następuje lokalizacja. Dla tego typu materiałów i takiej ścieżki naprężenia pozostaje on stały w procesie deformacji. Zgodnie z modelem Marciniaka korzystamy z równań równowagi:

$$Y^A h_A = Y^B h_B \quad (4.91)$$

oraz równania ciągłości:

$$D_2^B = D_2^A, \quad \text{gdzie} \quad D_2^A = D_1^A. \quad (4.92)$$

Na podstawie funkcji płynięcia i prawa wzmocnienia określamy stan naprężenia w strefie B oraz odkształcenia graniczne w strefie A przy których następuje lokalizacja, to znaczy gdy:

$$\rho^B = \frac{D_2^B}{D_1^B} \rightarrow 0. \quad (4.93)$$

Wartość funkcji  $P_\omega$  jest wtedy równa:

$$P_\omega = \frac{Y_{PSO}^B}{Y_p}. \quad (4.94)$$

W przypadku materiału ortotropowego występuje dodatkowa trudność związana z tym, że w procesie deformacji zmienia się kąt  $\omega$ . Reorientacja imperfekcji, w której następuje lokalizacja, wynika z tego, że  $D_1^A \neq D_2^A$ . W przypadku materiałów izotropowych lub o anizotropii normalnej funkcja  $P_\omega$  jest stała i nie zależy od przyjętej orientacji imperfekcji i wynosi

$$P_\omega = P = \frac{Y_s}{Y_p}, \quad (4.95)$$

gdzie  $Y_s$  określa maksymalne z naprężeń głównych, przy których w materiale osiągnięty jest płaski stan płynięcia. Im większa wartość parametru  $P$ , tym lepsza odporność materiału na szybkowanie i większa ciągliwość blachy ze względu na większe odkształcenia graniczne.

Parametr  $P$  dobrze opisuje maksymalne odkształcenia graniczne możliwe do osiągnięcia w materiale. Jak wspomnieliśmy osiągnąć je zwykłe przy stanie równomiernego dwuosowego rozciągania. Kształt wykresu odkształceń granicznych dla różnych ścieżek odkształcenia, gdzie  $1 > \rho > 0$  może się jednak różnić w zależności od przyjętej powierzchni plastyczności, nawet jeżeli wartość  $P$  jest taka sama. Do zaprezentowania tego efektu służy zaproponowany przez Liana i innych ([76]) wykres wzmocnienia wynikający z kształtu powierzchni granicznej (*Yield Surface Shape Hardening Diagram - YSSHD*) zdefiniowany dla materiałów izotropowych i o anizotropii normalnej. Pokazuje on zależność między ścieżką odkształcenia  $\rho = D_2/D_1$  a wartością odpowiadającego jej krytycznego maksymalnego naprężenia głównego odniesionego do wartości krytycznej  $Y_p$ . Efekt wzmocnienia wynikający z kształtu powierzchni granicznej można wytłumaczyć następująco. W przypadku imperfekcji prostopadłej do kierunku maksymalnego naprężenia głównego w strefie A, ścieżka odkształceń w strefie A -  $\rho^A$  pozostaje stała w procesie deformacji natomiast w strefie B zmienia się dążąc do wartości  $\rho^B = 0$ . Zmiana tej ścieżki oraz warunek ciągłości powoduje wzrost naprężeń granicznych w imperfekcji, który przeciwstawia się rozwojowi płynięcia plastycznego. Należy podkreślić iż wzmocnienie to obserwowane jest również wtedy, gdy materiał nie wykazuje wzmocnienia odkształceniowego (*strain-hardening*).

W dalszym ciągu porównamy omówione powyżej parametry dla blach o różnych teksturach i przy różnych powierzchniach plastyczności. Wskażemy na tekstury korzystne z punktu widzenia formowania elementów metalowych. Zależność tych parametrów od zastosowanego stopnia  $n$  proponowanej powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  wskazuje na możliwość alternatywnej interpretacji tego wykładnika.

## 4.4 Porównanie powierzchni plastyczności $\bar{F}^{(1)}$ , $\bar{F}^{(2)}$ i $\bar{F}^{(3)}$ z powierzchniami fenomenologicznymi

### 4.4.1 Blachy izotropowe

W tej części pracy porównamy kształt omawianych w rozdziale trzecim fenomenologicznych powierzchni plastyczności z powierzchniami proponowanymi. Wśród powierzchni proponowanych skoncentrujemy się na powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ , choć podamy również pewne rezultaty dotyczące powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$ . Powierzchnia  $\bar{F}^{(2)}$  różni się od powierzchni  $F^{(1)}$  wyłącznie współczynnikiem  $\alpha$  (porównaj wzory (4.24), (4.42) i (4.44)). Powierzchnie te mają ten sam kształt dla materiału o danej teksturze, a różnią się wyłącznie rozmiarem. Stowarzyszone z tymi powierzchniami prawa płynięcia będą wyznaczać ten same kierunki główne tensora prędkości deformacji plastycznej dla zadanej ścieżki naprężenia. Ze względu na powyższe własności powierzchnia  $F^{(2)}$  nie występuje w dalszej analizie.

Rozważać będziemy blachy o różnych teksturach, w których pojedyncze ziarna mają sieć typu A1. Pokażemy jaki wpływ na cechy kształtowanej blachy ma jej tekstura krystalograficzna. Porównamy kształt poszczególnych powierzchni plastyczności oraz jego wpływ na pożądane i niepożądane cechy formowanych blach.

W tym podrozdziale zostanie przedstawione zachowanie się blach, które są izotropowe zarówno w płaszczyźnie o normalnej  $e_3$ , jak i w swoich przekrojach (patrz rysunek 4.8).

Jeżeli do opisu plastycznego płynięcia takiej blachy zastosuje się kryterium uplastycznienia Hilla z 1990 roku, to przyjmie ono postać (3.50). Ponieważ opisujemy blachę izotropową przyjmujemy, że współczynnik Lankforda  $R_H$  (wzór (4.82)) jest równy jedności. W przypadku warunku Barlata z 1989 roku wykorzystuje się formę (3.62) tego warunku. Przyjmujemy, podobnie jak w przypadku warunku Hilla,  $R_B$  (wzór (4.83)) równy jedności. Zauważmy, że współczynnik  $q$  (wzór (4.79)) w przypadku warunku Hilla wynosi wtedy:

$$q = \frac{Y_p}{Y_1} = 2^{\frac{2-m}{m}}, \quad (4.96)$$

a dla warunku Barlata

$$q = \frac{Y_p}{Y_1} = 1. \quad (4.97)$$

Warunki dane równaniami (3.50) i (3.62) w przypadku izotropii blachy mają postać:

- warunek Hilla

$$|tr\sigma|^m + 3[2trs^2]^{\frac{m}{2}} = 4Y_1^m, \quad (4.98)$$

- warunek Barlata

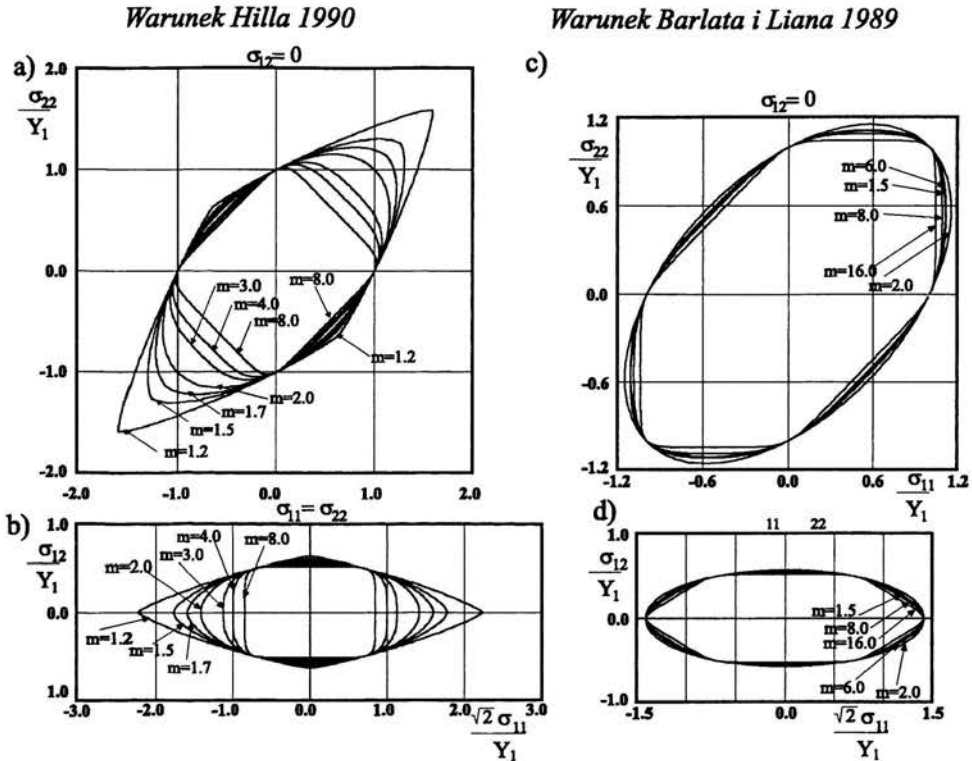
$$|K_1 + K_2|^m + |K_1 - K_2|^m + |2K_2|^m = 2Y_1^m, \quad (4.99)$$

gdzie funkcje  $K_1$  i  $K_2$  dane są zależnościami (3.62), natomiast niezmienniki tensora naprężenia występujące w równaniu (4.98) wyrażają się poprzez składowe tego tensora według

wzórów (3.23<sub>1</sub>) i (3.25<sub>1</sub>). W naprężeniach głównych niezmienniki te można zapisać w następującej postaci:

$$tr\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad trs^2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2. \quad (4.100)$$

Warunek Barlata redukuje się zatem w tym przypadku do propozycji Logana i Hosforda z roku 1980, natomiast warunek Hilla odpowiada propozycji IV w jego pracy z roku 1979 (patrz wzór 4 · 10, str. 189 w [51]) przy założeniu, że  $\tau = 1$ .



Rysunek 4.10: Przekroje przez powierzchnię plastyczności Hilla z 1990 roku: (a)  $\sigma_{12} = 0$  i (b)  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  oraz przez powierzchnię Barlata i Liana z 1989 roku: (c)  $\sigma_{12} = 0$  i (d)  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  dla różnych wartości wykładnika  $m$ . Blacha jest izotropowa:  $R_H = R_B = 1.0$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do naprężeń granicznych  $Y_1$ .

Na rysunku 4.10 zaprezentowano przekroje  $\sigma_{12} = 0$  oraz  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  omawianych powyżej powierzchni o różnych wartościach wykładnika  $m$ . Dla  $m = 2$  w obu przypadkach otrzymujemy elipsę odpowiadającą powierzchni Hubera-Misesa. Kształt powierzchni Hilla ulega dużo większym zmianom ze wzrostem stopnia  $m$  funkcji płynięcia. Maksymalne wartości



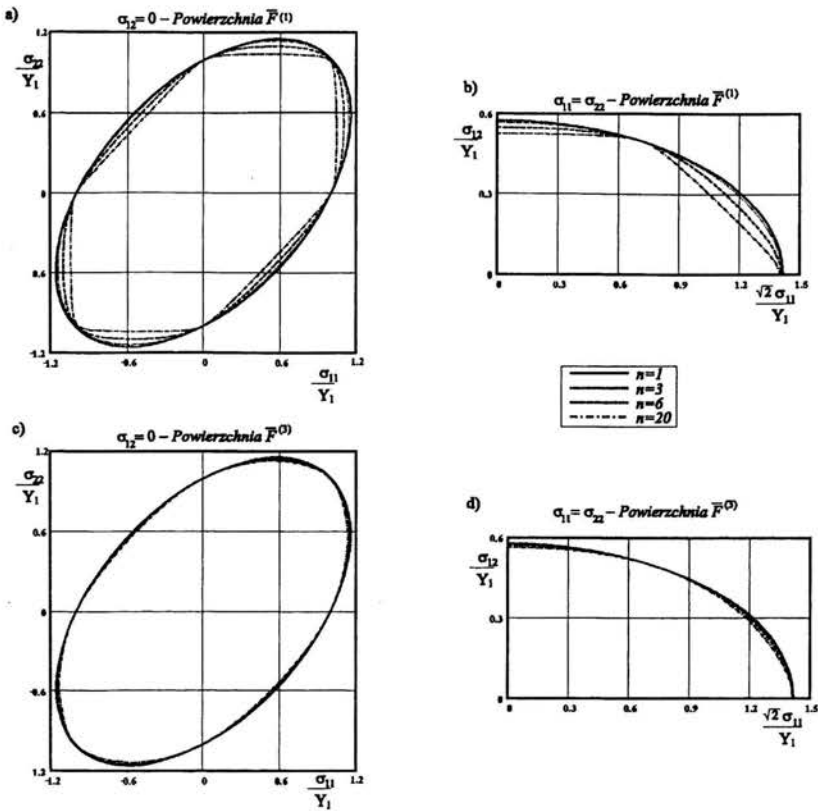
Warunek	Wykładnik	$Y_1 = Y_2 [\tau_c]$	$q = \frac{Y_p}{Y_1}$	$\frac{k}{Y_1}$
$F^{(1)}$	$n = 1$	1.976	1.003	0.577
	$n = 3$	1.993	1.000	0.568
	$n = 6$	2.072	0.997	0.548
	$n = 20$	2.078	0.994	0.525
$F^{(3)}$	$n = 1$	1.996	1.002	0.577
	$n = 3$	2.033	1.000	0.580
	$n = 6$	2.136	0.999	0.571
	$n = 20$	2.202	1.001	0.563
Hill 1990	$m=1.5$	—	1.260	0.606
Barlat 1989	$m=8$	—	1	0.545

Tablica 4.2: Wartości naprężeń granicznych dla stanów naprężeń (3.42-3.45) według odpowiednich powierzchni plastyczności.

naprężeń granicznych otrzymujemy dla  $m \rightarrow 1.0$ , natomiast minimalne dla  $m \rightarrow \infty$ . W przypadku powierzchni Barlata i Liana kształt przekroju podlega dużo mniejszym zmianom. Maksymalne wartości naprężeń granicznych otrzymujemy dla  $m = 2$ . Minimalne wartości naprężeń granicznych odpowiadają dla  $m \rightarrow \infty$  lub  $m \rightarrow 1$ , gdy kształt powierzchni zbliża się do kształtu powierzchni Tresci.

W dalszym ciągu porównamy kształt powyższych fenomenologicznych powierzchni plastyczności Hilla i Barlata z kształtem powierzchni opisanej wzorem (4.42). Izotropię materiału opisano w sposób przybliżony przez jednorodny rozkład orientacji 2000 ziaren o sieci typu A1. Sposób podziału przetrzeni kątów Eulera dla uzyskania takiego rozkładu można znaleźć w monografii [56] lub [21]. Wartości naprężeń granicznych  $Y_1 = Y_2$ ,  $Y_p$  i  $k$  (patrz testy (3.42-3.45)) w zależności od wykładnika  $n$  zamieściliśmy w tabeli 4.2. Wartość naprężeń granicznych w próbie jednoosiowego rozciągania  $Y_1 \approx 2\tau_c$ . Odpowiada to wartościom otrzymywanym w obliczeniach wykorzystujących model Sachsa. Przypomnijmy, że wartością tą możemy sterować wykorzystując powierzchnię  $\bar{F}^{(2)}$  (patrz wzory (4.42) i (4.43). Dla kryterium Barlata i Liana przyjęliśmy według sugestii autora  $m = 8$ . Wartość tę uważa on za prawidłową dla metali o sieci typu A1. Natomiast dla powierzchni Hilla przyjęliśmy  $m = 1.5$ , również według sugestii autora warunku.

Kształt powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  (patrz rysunek 4.11) ze wzrostem wykładnika  $n$  zbliża się do powierzchni Tresci, natomiast kształt powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  niezależnie od wzrostu wykładnika  $n$  pozostaje zbliżony do elipsy Hubera-Misesa. Zauważmy, że obie te powierzchnie w przypadku izotropii dają wartość  $q$  bardzo bliską jedności niezależnie od  $n$ . Kształt powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  jest zbliżony do kształtu powierzchni plastyczności Bishopa-Hilla dla izotropii zaprezentowanej na rysunkach 3.7 oraz 3.9. Należy zaznaczyć, że powierzchnie  $\bar{F}^{(1)}$  i  $\bar{F}^{(3)}$  stanowią dwa graniczne przypadki powierzchni zdefiniowanej równaniem (4.22), kiedy przyjmujemy, że każda orientacja ma ten sam błąd ułożenia, a zatem dla każdego ziarna

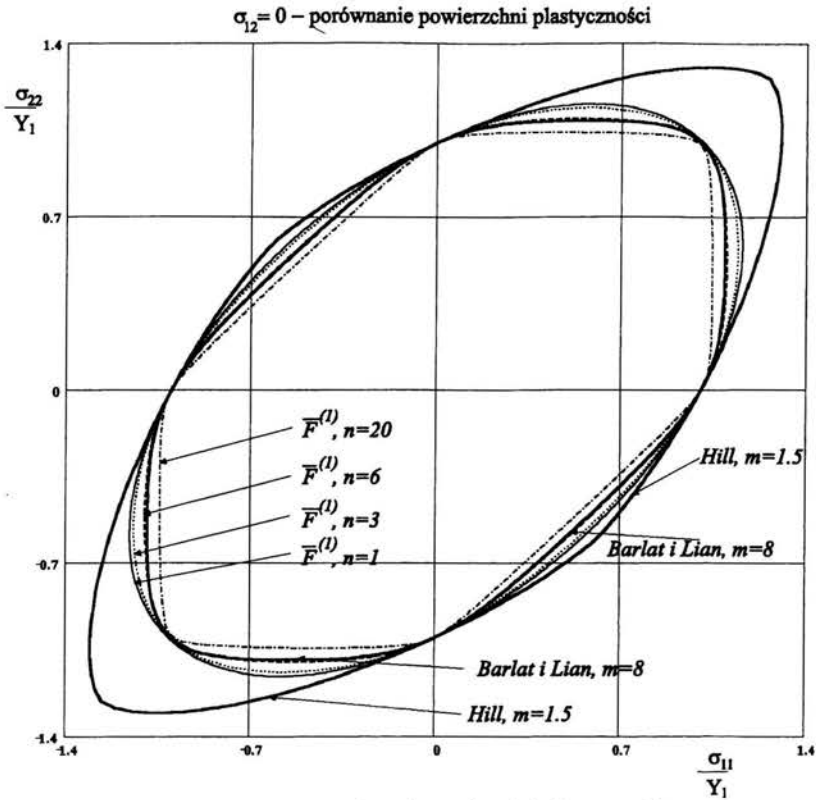


Rysunek 4.11: Przekroje przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ : (a)  $\sigma_{12} = 0$  i (b)  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  oraz przez powierzchnię  $\bar{F}^{(3)}$ : (c)  $\sigma_{12} = 0$  i (d)  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  dla różnych wartości wykładnika  $m$ . Izotropowy rozkład orientacji został zamodelowany za pomocą 2000 ziaren. Wszystkie wartości zostały odniesione do naprężenia granicznego  $Y_1$ .

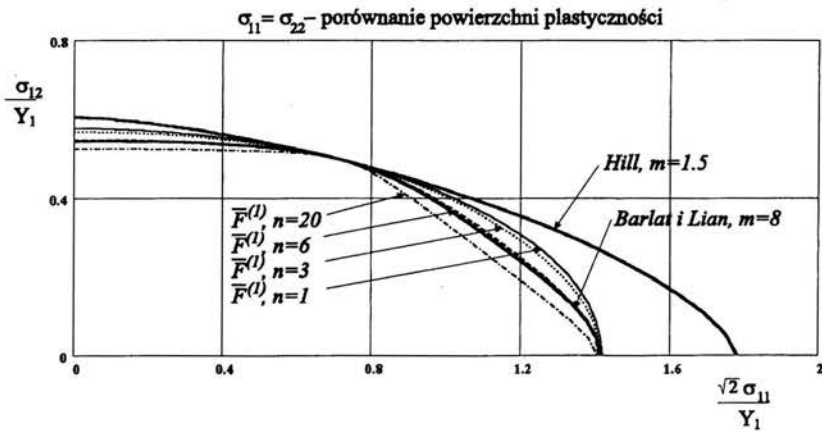
$n = n_g$ . Występujący w równaniu (4.22) wykładnik  $\mu$  w przypadku funkcji  $\bar{F}^{(1)}$  jest równy wykładnikowi  $2n$ , a w przypadku  $\bar{F}^{(3)}$  jest równy jedności. Wykładnik  $\mu$  o wartościach między  $2n$  i jeden będzie dawał powierzchnię zachowującą się w sposób pośredni wobec powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  i  $\bar{F}^{(3)}$ .

Powyższa obserwacja pozwala na powiązanie wykładnika  $\mu$  z wpływem oddziaływań pomiędzy ziarnami na uplastycznienie. Im  $\mu$  wyższe, tym ten wpływ mniejszy. Oddziaływanie zjawisk zachodzących pomiędzy ziarnami na uplastycznienie polikryształu zwiększa się ze zmniejszaniem się średnicy ziaren. Wydaje się zatem, że wykładnik  $\mu$  można związać

a)



b)



Rysunek 4.12: Porównanie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(l)}$  dla różnych wartości wykładnika  $n$  z powierzchnią plastyczności Hilla ( $m = 1.5$ ) i powierzchnią plastyczności Barlata i Liana ( $m = 8$ ); (a) - przekrój  $\sigma_{12} = 0$  i (b) - przekrój  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ .

ze średnią wielkością ziarna w agregacie. Według zaproponowanej interpretacji powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  opisuje zatem polikryształ, w którym ziarna mają małą średnicę i oddziaływanie zjawisk zachodzących pomiędzy ziarnami ma duży wpływ na uplastycznienie, w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  oddziaływanie to w ogóle nie jest uwzględnione i polikryształ traktowany jest jak pojedynczy kryształ o  $NGR \times M$  systemach poślizgu.

Na rysunku 4.12 przedstawiono porównanie kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  przy różnym  $n$  z powierzchnią plastyczności Hilla ( $m=1.5$ ) i powierzchnią plastyczności Barlata i Liana ( $m=8$ ). Najlepszą zgodność proponowane kryterium  $\bar{F}^{(1)}$  wykazuje z kryterium Barlata, jeżeli przyjmiemy  $n = 6$ . Warunek Barlata daje tę samą liczbę naroży i pojawiają się one dla tych samych stanów naprężenia. Kształt powierzchni Hilla w sposób znaczący odbiega w analizowanym przypadku od pozostałych powierzchni plastyczności.

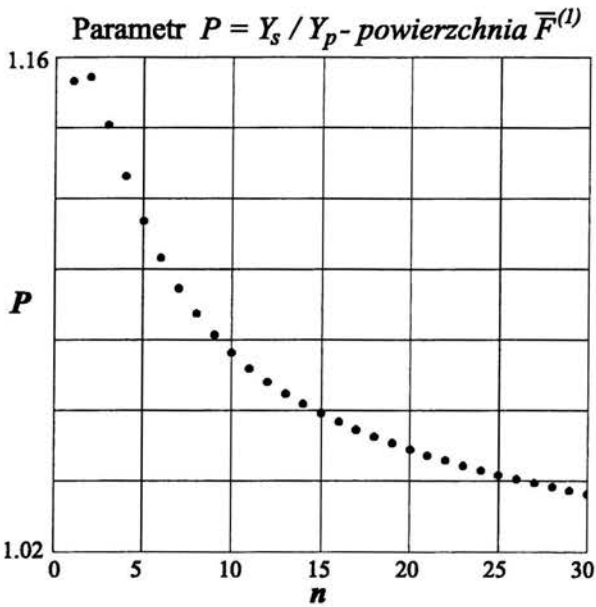
Warunek	Wykładnik	$R = \frac{D_p^2}{D_{33}^2}$	$P = \frac{Y_p}{Y_p}$
$\bar{F}^{(1)}$	$n = 1$	1.014	1.153
	$n = 3$	1.030	1.141
	$n = 6$	1.055	1.103
	$n = 20$	1.129	1.049
$\bar{F}^{(3)}$	$n = 1$	1.012	1.154
	$n = 3$	1.015	1.165
	$n = 6$	1.028	1.150
	$n = 20$	1.054	1.134
Hill 1990	$m=1.5$	1	1.036
Barlat 1989	$m=8$	1	1.089

Tablica 4.3: Wartości współczynnika Lankforda  $R$  oraz parametru  $P$  według odpowiednich powierzchni plastyczności.

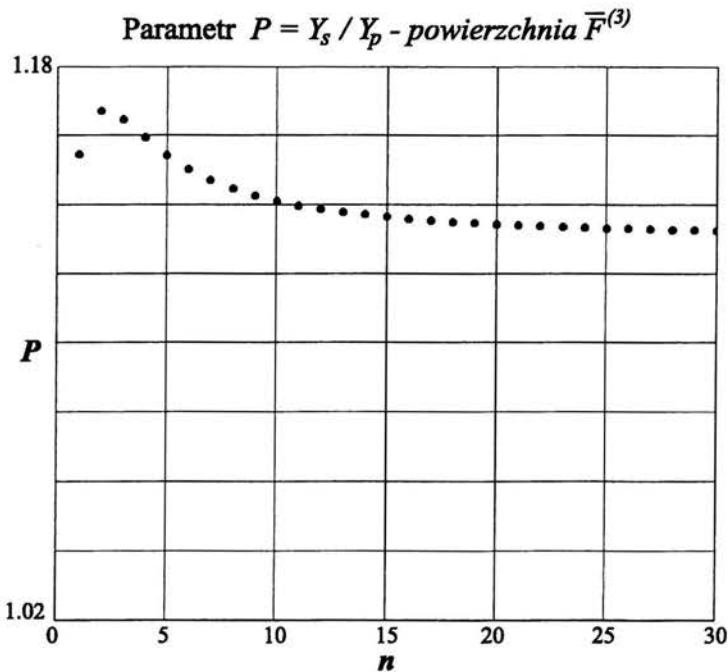
Przejdziemy teraz do analizy parametrów związanych z procesem plastycznego płynięcia, a mianowicie współczynnika Lankforda  $R$  oraz parametru  $P$  opisanego w poprzednim podrozdziale. Pokażemy również wykresy wzmocnienia związanego z kształtem powierzchni plastyczności omawiane w poprzednim podrozdziale. Ponieważ mamy do czynienia z blachą izotropową, współczynnik  $R$  jest z założenia równy jedności dla warunków fenomenologicznych. Dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  i  $\bar{F}^{(3)}$  jest on zbliżony do jedności ze względu na przybliżony sposób opisu izotropii. Wartości współczynnika  $R$  oraz parametru  $P$  zamieściliśmy w tabeli 4.3.

Wartość parametru  $P$  maleje ze wzrostem wykładnika  $n$  zarówno dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  jak i  $\bar{F}^{(3)}$ . W przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  wartość jego maleje dużo wolniej i stabilizuje się na dużo większej wartości niż dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ . Efekt ten można dobrze zaobserwować na rysunku 4.13 przedstawiającym zależność tego parametru od wykładnika  $n$ . Przypomnijmy, że im większa wartość tego parametru, tym lepsze zdolności blachy do formowania. Wykres z rysunku 4.13a warto porównać z wykresem na rysunku 4.1. Bardzo

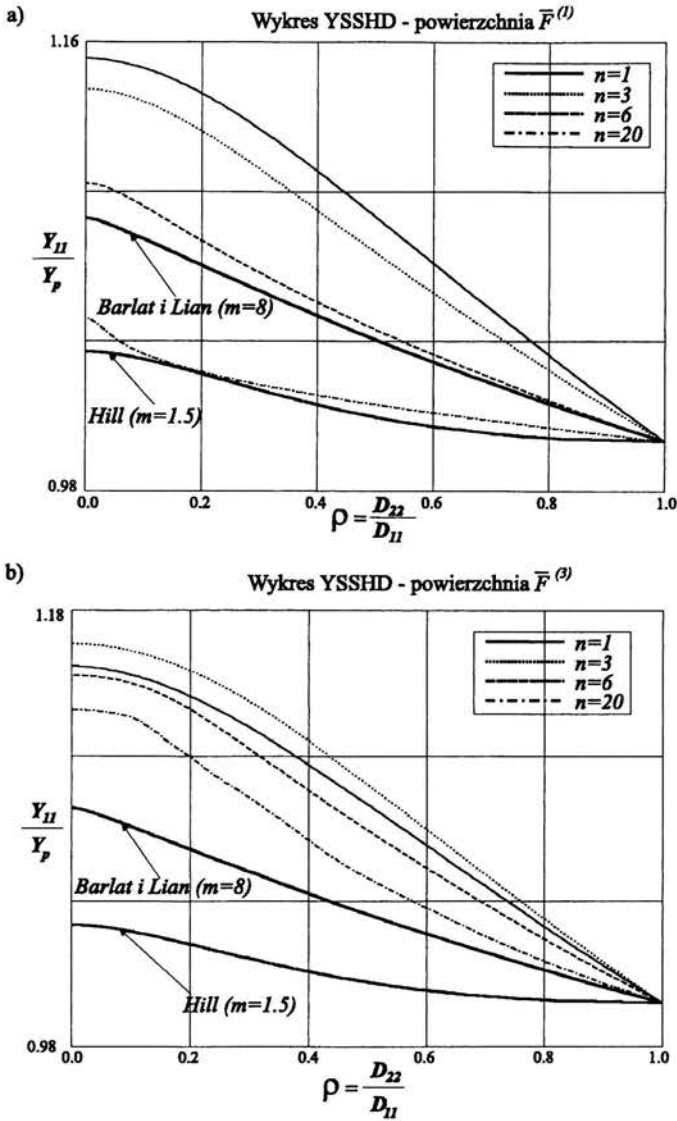
a)



b)



Rysunek 4.13: Zależność parametru  $P$  od wykładnika  $n$ : a) dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  i b) dla powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$ .



Rysunek 4.14: Wykres wzmocnienia związane z kształtem powierzchni plastyczności (YSSHD) według warunku Hilla ( $m = 1.5$ ), warunku Barlata i Liana ( $m = 8$ ) oraz : a) dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  i b) dla powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$ .

zbliżony charakter tych wykresów wskazuje, że zdolność do formowania blachy, przy stanach naprężenia dla których  $\rho = D_2/D_1$  jest większe od zera, można powiązać z energią błędu ułożenia. Im wartość energii błędu ułożenia większa, tym możemy osiągnąć większe odkształcenia graniczne. Z kolei wysoka wartość parametru  $P$  w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  niezależnie od  $n$  w powiązaniu z interpretacją tej powierzchni wskazuje na lepszą formowalność blach, w których mamy do czynienia z małą wielkością ziarna.

Na rysunku 4.14 zamieściliśmy wykres wzmacnienia związanego z kształtem powierzchni plastyczności (YSSHD) dla analizowanych warunków fenomenologicznych oraz powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  i  $\bar{F}^{(3)}$ . Podobieństwo tych wykresów wskazuje na podobieństwo odpowiednich wykresów odkształceń granicznych (FLD) dla różnych ścieżek odkształcenia takich, że  $\rho = D_2/D_1 > 0$ . Zbliżony kształt powierzchni Barlata i Liana przy  $m = 8$  oraz powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 6$  powoduje, że również odpowiadające im wykresy YSSHD są zbliżone. Wykres otrzymany dla warunku Hilla przy  $m = 1.5$  odpowiada wykresowi dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 20$ . Wykresy otrzymane dla powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  ponownie wskazują na wysokie wartości odkształceń granicznych otrzymywane przy różnych ścieżkach odkształcenia w przypadku polikryształu o małej średnicy ziaren.

#### 4.4.2 Blachy o anizotropii normalnej

Przejdziemy teraz do opisu blach, które są izotropowe w płaszczyźnie o normalnej  $e_3$  (patrz rysunek 4.8), natomiast anizotropowe w swych przekrojach. Rozważymy szczególnie przypadki anizotropii normalnej wynikające z powstawania w blasze tekstury  $\{hkl\}\langle uvw \rangle$ , gdzie kierunek  $\{hkl\}$  określa płaszczyznę krystalograficzną równoległą do płaszczyzny blachy, natomiast  $\langle uvw \rangle$  może być dowolny. Powstanie tego typu tekstury może być wynikiem pewnych procesów technologicznych takich jak np. przeciąganie. Rozpatrzmy cztery szczególne przypadki takich tekstur, które mogą pojawić się w materiałach:  $\{001\}\langle uvw \rangle$ ,  $\{011\}\langle uvw \rangle$ ,  $\{111\}\langle uvw \rangle$  i  $\{211\}\langle uvw \rangle$ . Najczęściej spotykaną teksturą jest tekstura  $\{111\}\langle uvw \rangle$ , która pojawia się w walcowanych i wyzarzanych stalach niskowęglowych.

W tabelicy 4.4 zestawiono wartości naprężeń granicznych otrzymanych w testach (3.42-3.43) ustalone na podstawie powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  (4.24) dla różnych wartości wykładnika  $n$ . Do otrzymania własności izotropowych w płaszczyźnie blachy wystarczyło przyjęcie 30 orientacji ziaren o różnym  $\langle uvw \rangle$ . Wszystkie ziarna mają sieć typu A1. Przy wykorzystaniu określonych wartości naprężeń granicznych przy jednoosiowym rozciąganiu  $Y_1$ , dwuosiowym równomiernym rozciąganiu  $Y_p$  oraz czystym ścinaniu  $k$  ustalono postać funkcji opisujących warunek Hilla (3.50) przy  $m = 1.5$  i Barlata (3.62) przy  $m = 8$ . Funkcja płynięcia Hilla została ustalona na dwa sposoby: przy założeniu jako znanych naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  oraz przy założeniu jako znanych  $k$  i  $Y_p$ . Zauważmy, że dla powierzchni plastyczności, które mają własności (3.19) spełniona jest równość (3.21), a zatem wartość naprężenia granicznego  $Y_p$  odpowiada naprężeniu granicznemu przy ściskaniu lub rozciąganiu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny blachy.

Otrzymana postać powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  (4.24) ustalonej dla agregatu ziaren różni się znacznie przy zmianie tekstury i parametru  $n$ . Ogólnie można zauważyć, że wraz ze wzrostem  $n$  (to znaczy przy spadku energii błędu ułożenia lub kąta  $\Omega_0$  opisującego szerokość rozrzutu

Typ tekstury	{001}⟨uvw⟩				{011}⟨uvw⟩			
	1	3	6	20	1	3	6	20
$\bar{F}^{(1)} - Y_1[\tau_c]$	1.764	1.864	1.990	2.051	2.037	2.062	2.183	2.251
$\bar{F}^{(1)} - k[\tau_c]$	1.080	1.178	1.234	1.246	1.155	1.138	1.166	1.175
$\bar{F}^{(1)} - q = Y_p/Y_1$	0.866	0.963	<b>1.036</b>	<b>1.134</b>	1.061	<b>0.977</b>	<b>1.001</b>	<b>1.051</b>
$\bar{F}^{(1)} - R$	0.500	0.378	<b>0.249</b>	<b>0.192</b>	1.250	<b>1.189</b>	<b>0.956</b>	<b>0.341</b>
$k^B[\tau_c]$	—	1.071	1.055	1.051	1.067	1.155	1.188	1.184
$R^B$	—	0.478	1.660	4.469	2.204	0.661	1.012	1.978
$Y_1^{H_1}[\tau_c]$	1.583	1.773	1.915	1.999	1.853	1.798	1.872	1.924
$q^{H_1} = Y_p/Y_1^{H_1}$	0.965	<b>1.012</b>	<b>1.077</b>	<b>1.163</b>	<b>1.165</b>	<b>1.121</b>	<b>1.167</b>	<b>1.230</b>
$R^{H_1}$	0.140	<b>0.336</b>	<b>0.492</b>	<b>0.708</b>	<b>0.545</b>	<b>0.366</b>	<b>0.416</b>	<b>0.524</b>
$k^{H_2}[\tau_c]$	1.296	1.274	1.306	1.292	1.322	1.397	1.460	1.467
$R^{H_2}$	0.341	0.440	<b>0.581</b>	<b>0.775</b>	<b>0.779</b>	0.678	<b>0.783</b>	<b>0.929</b>

Typ tekstury	{111}⟨uvw⟩				{211}⟨uvw⟩			
	1	3	6	20	1	3	6	20
$\bar{F}^{(1)} - Y_1[\tau_c]$	2.160	2.072	2.158	2.174	2.037	2.011	2.061	2.062
$\bar{F}^{(1)} - k[\tau_c]$	1.183	1.098	1.097	1.087	1.155	1.116	1.109	1.053
$\bar{F}^{(1)} - q = Y_p/Y_1$	1.225	1.363	1.468	1.616	1.061	1.094	1.122	1.167
$\bar{F}^{(1)} - R$	2.000	3.029	7.003	381	1.250	1.517	1.977	2.808
$k^B[\tau_c]$	1.094	1.042	1.082	1.088	1.067	1.041	1.059	1.051
$R^B$	9.125	22.87	42.16	92.17	2.204	3.113	4.017	5.904
$Y_1^{H_1}[\tau_c]$	1.988	1.900	1.939	1.955	1.853	1.817	1.832	1.778
$q^{H_1} = Y_p/Y_1^{H_1}$	<b>1.331</b>	1.487	1.634	1.797	<b>1.165</b>	<b>1.211</b>	<b>1.262</b>	<b>1.354</b>
$R^{H_1}$	<b>0.917</b>	1.251	1.516	1.906	<b>0.545</b>	<b>0.619</b>	<b>0.680</b>	<b>0.784</b>
$k^{H_2}[\tau_c]$	1.321	1.225	1.251	1.233	1.322	1.287	1.304	1.284
$R^{H_2}$	1.172	1.563	1.955	2.406	<b>0.779</b>	<b>0.885</b>	1.005	1.228

Tablica 4.4: Naprężenia graniczne otrzymane w testach (3.42-3.45) i ustalone dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  o różnym  $n$  (wzory (4.38-4.41) dla tekstur dających izotropię płaską.

Oznaczenia:

$B$  - Warunek Barlata  $m = 8$ , do definicji powierzchni wykorzystano stałe  $Y_1$  i  $Y_p$  (wzory 4.78);

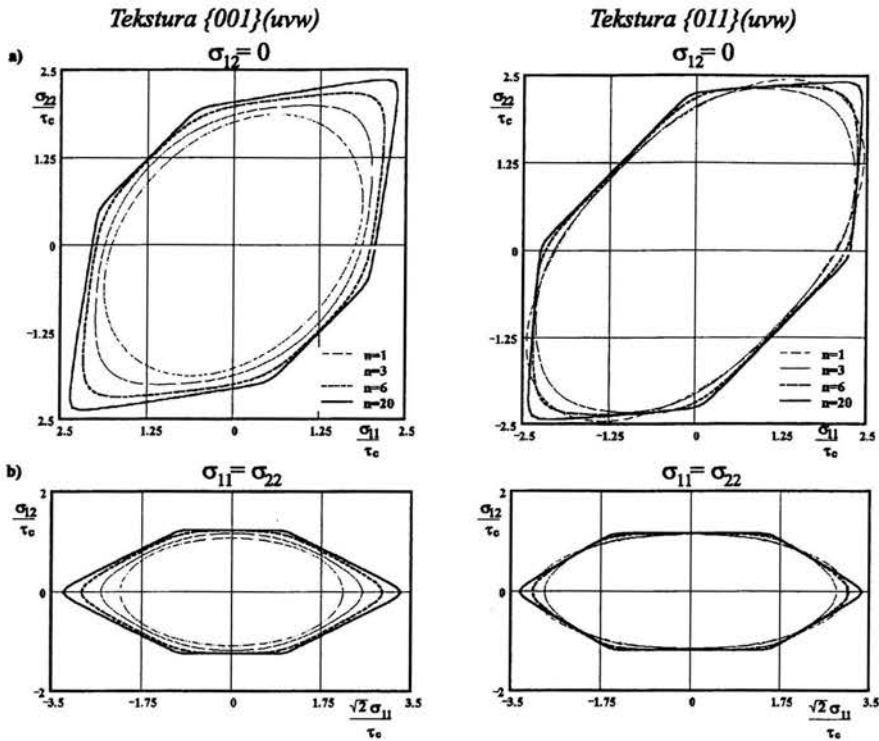
$H_1$  - Warunek Hilla  $m = 1.5$ , do definicji powierzchni wykorzystano stałe  $Y_p$  i  $k$  (wzory 4.77);

$H_2$  - Warunek Hilla  $m = 1.5$ , do definicji powierzchni wykorzystano stałe  $Y_p$  i  $Y_1$  (wzory 4.77),

pogrubiłą czcionką wyróżniono przypadki „anomalnego” zachowania materiału.

orientacji wokół orientacji idealnej) wystrzają się naroża oraz w większości przypadków



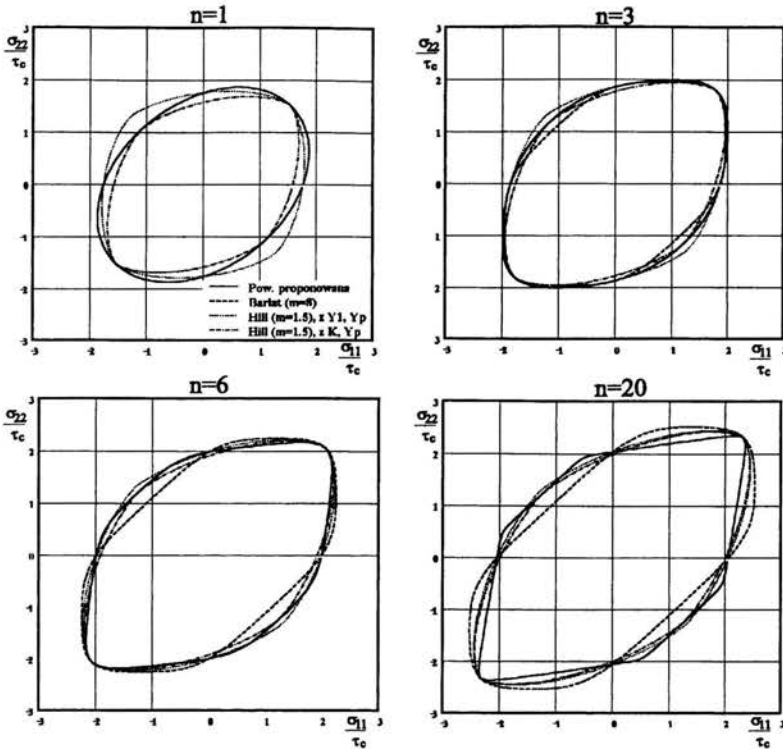


Rysunek 4.15: Przekroje przez proponowaną powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$ : a) przekrój  $\sigma_{12} = 0$ , b)  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  dla tekstur  $\{001\}\langle uvw \rangle$  i  $\{011\}\langle uvw \rangle$ .

następuje zwiększenie wartości naprężeń granicznych dla materiału.

Dla tekstury  $\{001\}\langle uvw \rangle$  (rysunek 4.15) naroża pojawiają się dla stanów naprężenia gdzie  $\alpha = \sigma_{22}/\sigma_{11} = 1$  (wzór (4.87<sub>1</sub>)) oraz dodatkowo dla dwóch kierunków o  $\alpha < 0$  w przekroju  $\beta = \sigma_{12}/\sigma_{11} = 0$  (wzór 4.87<sub>2</sub>). W przekroju  $\alpha = 1$  mamy dodatkowe naroża dla stanów przy których  $\beta > 1$ . Blacha o takiej teksturze wykazuje największą wśród analizowanych wartość naprężenia granicznego przy ścinaniu w stosunku do wartości naprężenia granicznego  $\tau_c$ . Wśród porównywanych powierzchni fenomenologicznych lepsze przybliżenie wartości naprężeń granicznych otrzymujemy przy zastosowaniu powierzchni Hilla (porównaj rysunki 4.16 i 4.17), szczególnie dla stanów w których  $\alpha < 0$  i występują naprężenia ścinające ( $\beta \neq 0$ ). Warunek Barlata o parametrach materiałowych wyznaczonych z warunku proponowanego dla  $n = 1$  nie spełnia warunku wypukłości (4.81) dlatego nie został zamieszczony na rysunkach

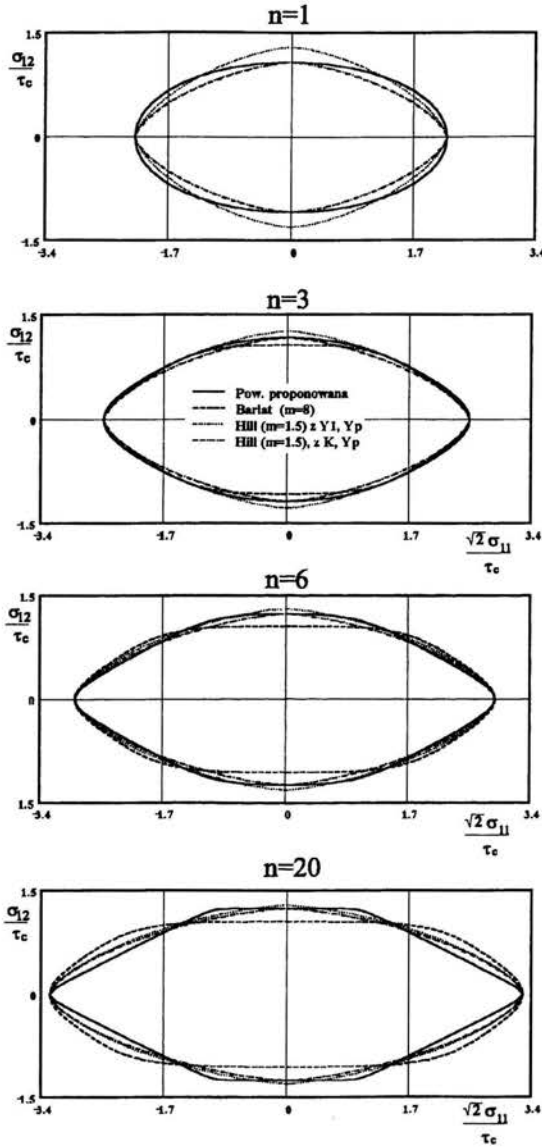
W przypadku tekstury  $\{011\}\langle uvw \rangle$  (rysunek 4.15) naroża występują ponownie dla stanu

Tekstura  $\{001\}\langle uvw \rangle$  - przekroje  $\sigma_{12} = 0$ 

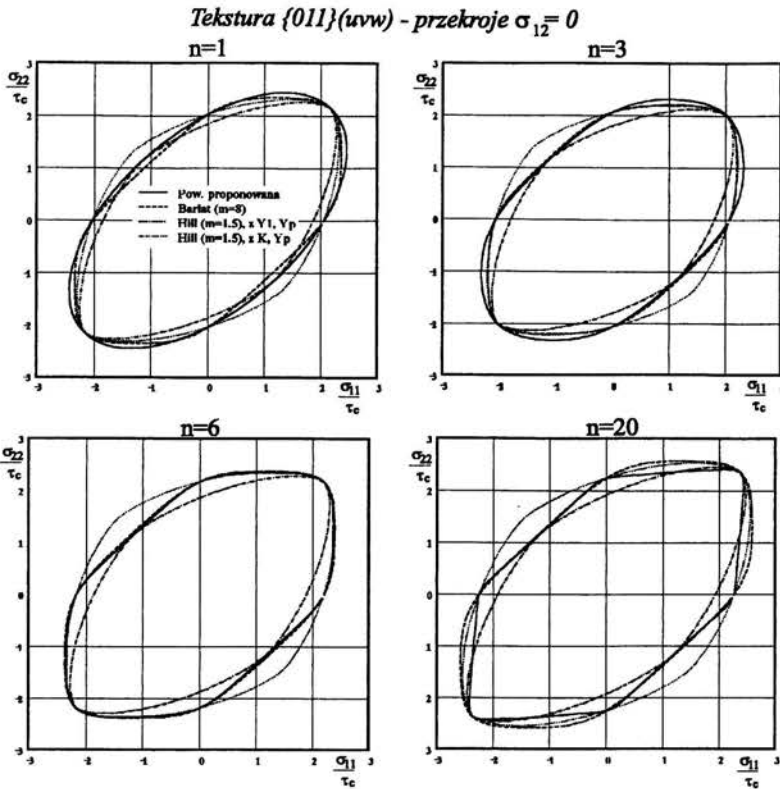
Rysunek 4.16: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{12} = 0$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{001\}\langle uvw \rangle$ .

$\alpha = 1$  oraz dla stanów  $\alpha^{-1} = 0$  ( $\sigma_{11} = 0$ ) i  $\alpha = 0$  ( $\sigma_{22} = 0$ ) w przekroju  $\beta = 0$ . Dodatkowo naroża występują w przekroju  $\alpha = 1$ . Tekstura ta charakteryzuje się małą różnicą między  $Y_1$  i  $Y_p$  dla dowolnych  $n$ . Przy wzroście  $n$  obserwujemy tu małą zmianę w wartościach naprężeń granicznych. W przypadku takiej tekstury obserwujemy zgodność pomiędzy powierzchnią proponowaną i warunkiem Barlata, szczególnie dla  $n = 6$  (rysunki 4.18 i 4.19).

Tekstura  $\{111\}\langle uvw \rangle$  (rysunek 4.20) daje powierzchnię silnie wydłużoną w kierunku  $\alpha = 1$ . Wartość naprężenia granicznego  $Y_p$  jest w tym przypadku największa (przypomnijmy, że kierunek  $\langle 111 \rangle$  jest kierunkiem o największej wartości naprężeń granicznych dla

Tekstura  $\{001\}(uvw)$  - przekrój  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ 

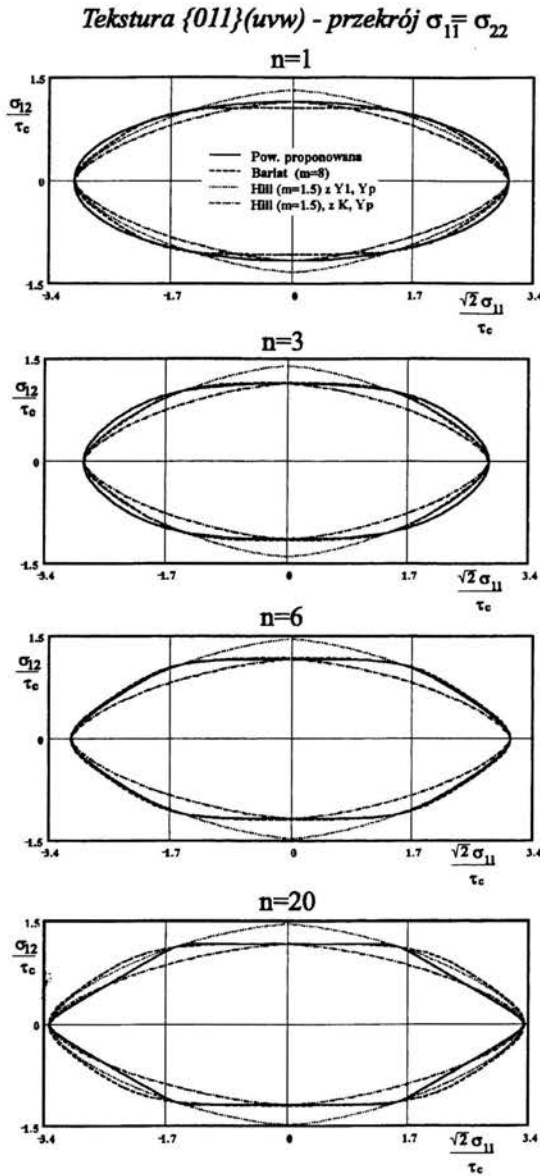
Rysunek 4.17: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{001\}(uvw)$ .



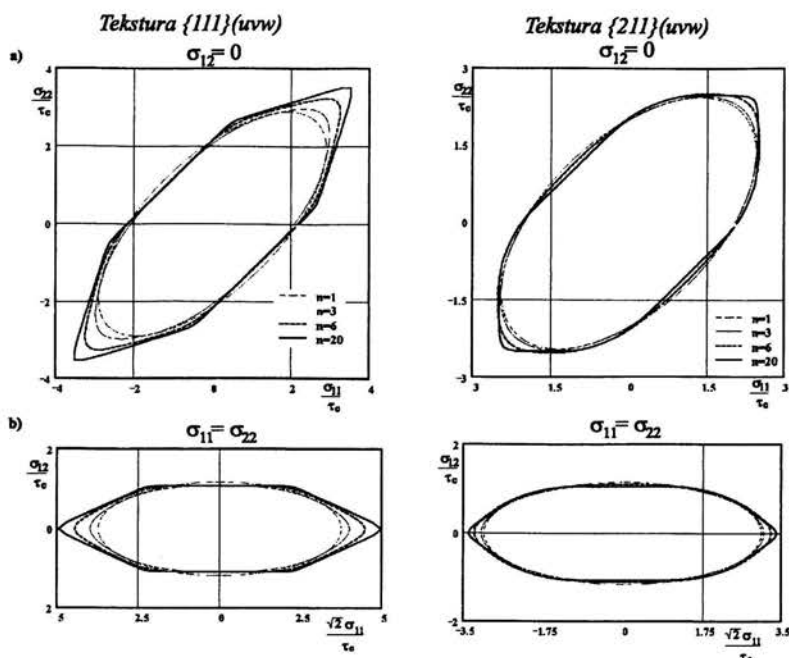
Rysunek 4.18: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{12} = 0$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{011\}\langle uvw \rangle$ .

kryształu o sieci A1 według proponowanego kryterium). Pewne spłaszczenie powierzchni w kierunku  $\alpha = -1$  powoduje nieznaczne zmniejszenie wartości naprężeń granicznych materiału o tej teksturze na ścinanie w stosunku do pozostałych tekstur. Naroża w przekroju  $\beta = 0$  oprócz kierunku  $\alpha = 1$  występują dla stanów w których  $\alpha > 0$ . Dla dodatnich  $\alpha$  lepsze przybliżenie tej powierzchni, szczególnie dla dużych  $n$  uzyskujemy wykorzystując powierzchnię Hilla natomiast dla ujemnych  $\alpha$  wykorzystując powierzchnię Barlata (rysunki 4.21 i 4.22).

Charakterystyczną cechą powierzchni otrzymanej dla tekstury  $\{211\}\langle uvw \rangle$  (rysunek 4.20) jest brak dodatkowych naroży dla stanów innych niż  $\alpha = 1$  zarówno w przekroju



Rysunek 4.19: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{011\}(uvw)$ .



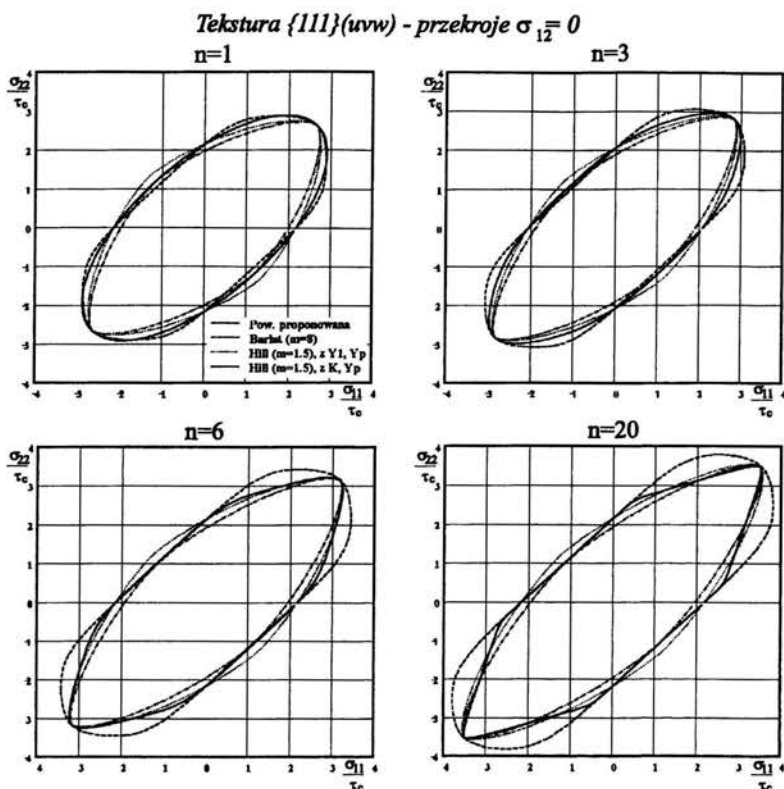
Rysunek 4.20: Przekroje przez proponowaną powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$ : a) przekrój  $\sigma_{12} = 0$ , b)  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  dla tekstur  $\{111\}\langle uvw \rangle$  i  $\{211\}\langle uvw \rangle$ .

$\beta = 0$ , jak i  $\alpha = 1$ . Zauważmy, że dla  $n = 1$  tekstura ta daje identyczną elipsę jak tekstura  $\{011\}\langle uvw \rangle$ . Kształt powierzchni lepiej przybliżony jest w tym przypadku przez powierzchnię Barlata (rysunki 4.23 i 4.24).

Wartości współczynnika  $R$  dla proponowanej powierzchni oraz warunków fenomenologicznych zebrano w tablicy 4.4. Przypomnijmy, że im wyższa wartość tego współczynnika, tym większa odporność materiału na przewężenie. Wartość współczynnika  $R$  ulega dużym zmianom w zależności od tekstury i parametru  $n$ .

Zgodnie z proponowaną powierzchnią pożądane cechy pod względem możliwego przewężenia wykazywane są przez blachy o teksturze  $\{111\}\langle uvw \rangle$  i  $\{211\}\langle uvw \rangle$ , a wzrost  $n$  powoduje dalsze polepszenie tych cech. Warto zaznaczyć, że bardzo dobre własności blachy o teksturze  $\{111\}\langle uvw \rangle$  związane z wysoką wartością współczynnika  $R$  były również obserwowane w eksperymentach [75]. Wysoką wartość  $R$  dla tego typu tekstury otrzymujemy również dla powierzchni Bishopa-Hilla z 1951 roku (porównaj rysunek 3.10).

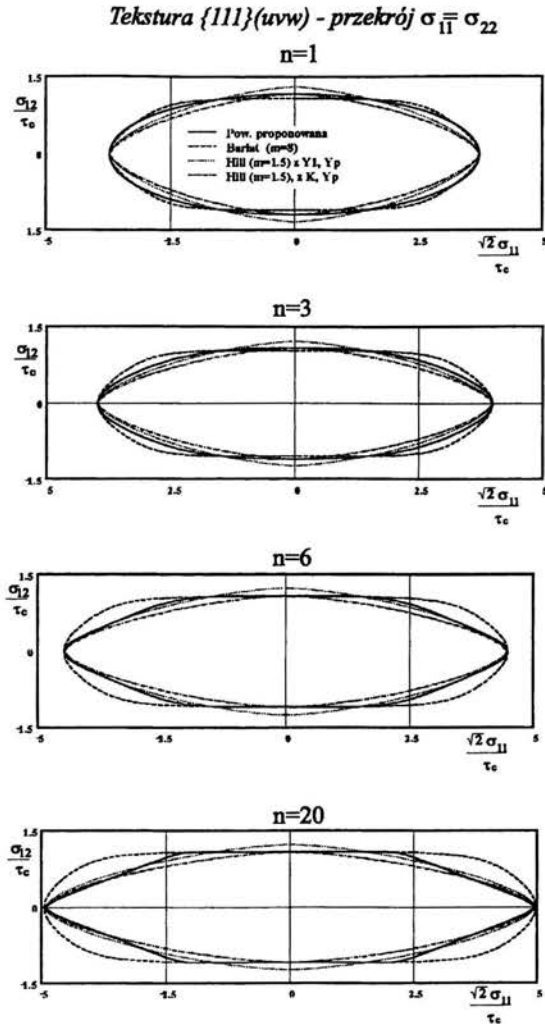
Dużo mniej odporne na przewężenie są blachy o teksturach  $\{001\}\langle uvw \rangle$  i  $\{011\}\langle uvw \rangle$ , a wzrost  $n$  powoduje w tym przypadku dalsze osłabienie materiału pod tym względem. Za-



Rysunek 4.21: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{12} = 0$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{111\}\langle uvw \rangle$ .

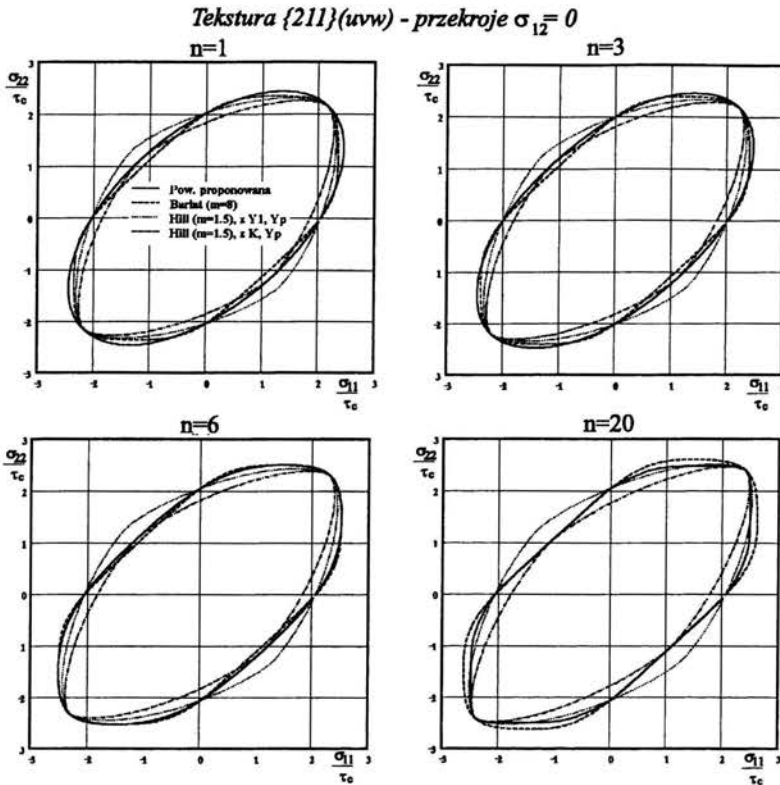
uważmy, że dla tekstur  $\{001\}\langle uvw \rangle$  i  $\{011\}\langle uvw \rangle$  otrzymaliśmy *anomalne* zachowanie się materiału ( $R \ll 1$  przy  $q \gg 1$ ). Zachowanie takie było obserwowane w eksperymentach wykonywanych na walcowanych blachach aluminiowych (porównaj [51]). W pierwszym przypadku dla  $n = 6$  i  $n = 20$  (mały błąd ułożenia) pomimo  $Y_p > Y_1$  wartość  $R$  jest dużo mniejsza od jedności. Wartość ta maleje ze wzrostem  $n$ . Dla tekstury  $\{011\}\langle uvw \rangle$  powierzchnia proponowana przewiduje również spadek  $R$  ze wzrostem  $n$ , ale w tym przypadku jest on bliższy jedności i początkowo ( $n = 1, n = 3$ ) współczynnik  $R$  jest od jedności nieco większy, aby dla  $n = 6$  i  $n = 20$  spaść poniżej tej wartości.

Ogólnie można stwierdzić, że warunki fenomenologiczne przewidują podobne wartości



Rysunek 4.22: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{011\}(uvw)$ .

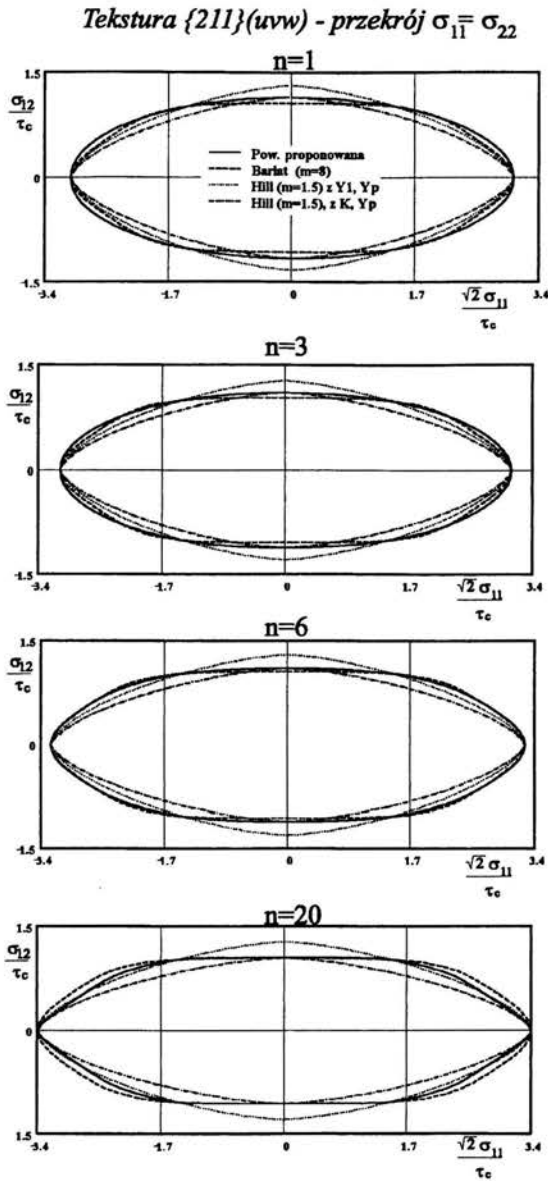




Rysunek 4.23: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{12} = 0$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{211\}(uvw)$ .

współczynnika  $R$  o ile odpowiadające im powierzchnie dla  $\alpha < 0$  mają zbliżony kształt, choć istnieją odstępstwa od tej reguły. Powierzchnia Barlata dobrze przewiduje wartości współczynnika  $R$  dla tekstur  $\{111\}(uvw)$  i  $\{211\}(uvw)$ , natomiast słabo dla dwóch pozostałych, ponieważ nie jest w stanie opisać *anomalnego* zachowania się materiału. Dla tych tekstur lepsza jest powierzchnia Hilla, choć przewiduje ona zwiększanie się  $R$  ze wzrostem  $n$ .

W tabelicy 4.5 zebrano wartości parametru  $P = Y_s/Y_p$  (porównaj wzór (4.95) w podrozdziale 4.3.2) dla analizowanych tekstur przy zastosowaniu różnych powierzchni plastyczności. Przypomnijmy, że parametr ten opisuje zdolność blachy do przeciwstawiania się



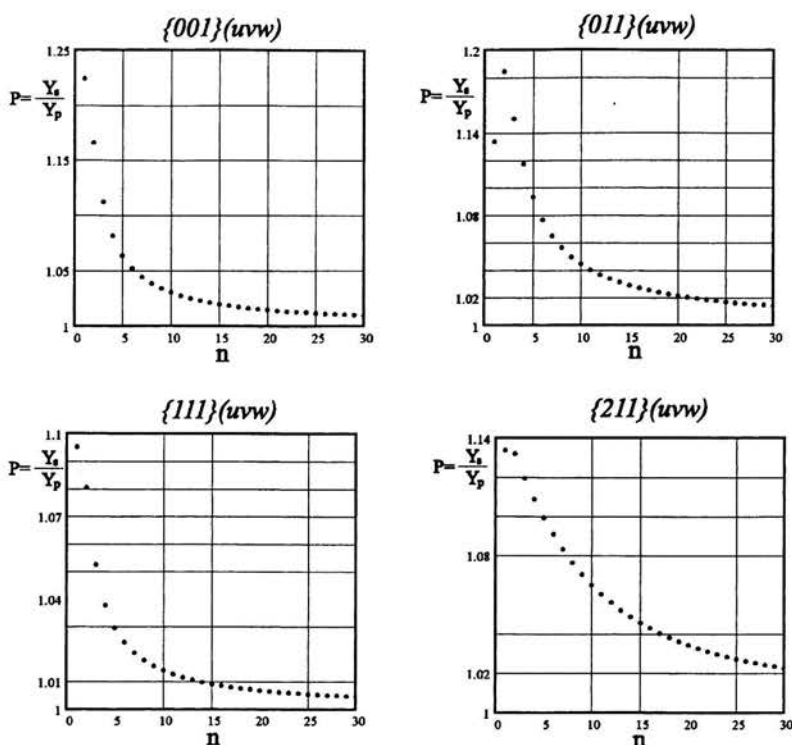
Rysunek 4.24: Porównanie kształtu przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  z przekrojami przez powierzchnie fenomenologiczne: dwie powierzchnie Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono na podstawie naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstura  $\{211\}(uvw)$ .

Warunek	Powierzchnia $\bar{F}^{(1)}$	Barlat $m = 8$	Hill ( $Y_1, Y_p$ ) $m = 1.5$	Hill ( $k, Y_p$ ) $m = 1.5$
Typ tekstury	$\{001\}\langle uvw \rangle$			
$n = 1$	1.225	—	1.172	1.106
$n = 3$	1.113	1.0898	1.107	1.087
$n = 6$	1.053	1.0891	1.078	1.067
$n = 20$	1.015	1.0884	1.054	1.049
Typ tekstury	$\{011\}\langle uvw \rangle$			
$n = 1$	1.134	1.0889	1.071	1.048
$n = 3$	1.150	1.0896	1.101	1.057
$n = 6$	1.077	1.0894	1.091	1.048
$n = 20$	1.022	1.0890	1.074	1.039
Typ tekstury	$\{111\}\langle uvw \rangle$			
$n = 1$	1.197	1.0876	1.026	1.029
$n = 3$	1.182	1.0863	1.017	1.019
$n = 6$	1.024	1.0852	1.012	1.014
$n = 20$	1.007	1.0836	1.008	1.010
Typ tekstury	$\{211\}\langle uvw \rangle$			
$n = 1$	1.134	1.0889	1.071	1.049
$n = 3$	1.120	1.0887	1.063	1.042
$n = 6$	1.091	1.0885	1.057	1.035
$n = 20$	1.035	1.0881	1.043	1.027

Tablica 4.5: Porównanie wartości parametru  $P = Y_s/Y_p$  dla warunków fenomenologicznych i powierzchni proponowanej przy różnym  $n$ .

szykowaniu. Im większa wartość tego parametru, tym większa jest ciągliwość blachy. W przypadku proponowanej powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  wyznaczono dodatkowo wartość tego współczynnika dla dużego zakresu  $n$  ( $1 \leq n \leq 30$ ). Otrzymane wyniki zamieszczono na rysunku 4.25. Dla wszystkich analizowanych tekstur parametr  $P$  zmniejsza się ze wzrostem  $n$ , choć istnieją pewne odstępstwa od tej reguły dla małych wartości  $n$ . Tendencja ta wynika z wyostrzania się naroży powierzchni. Warto jednak zaznaczyć, że przy tym samym  $n$  istnieją znaczne różnice w wartości parametru  $P$  dla poszczególnych tekstur. Ze względu na kształt powierzchni (porównaj rysunek 4.20) przy dużym  $n$  ( $n \geq 5$ ) najlepsze właściwości wykazują materiały o teksturze  $\{211\}\langle uvw \rangle$ , natomiast najniższe  $P$  występuje w przypadku tekstury  $\{111\}\langle uvw \rangle$ . Przy małych  $n$  ( $n < 5$ ) najlepszą formowalność wykazują materiały o teksturze  $\{001\}\langle uvw \rangle$  ( $n = 1$ ) i  $\{011\}\langle uvw \rangle$  ( $n > 1$ ).

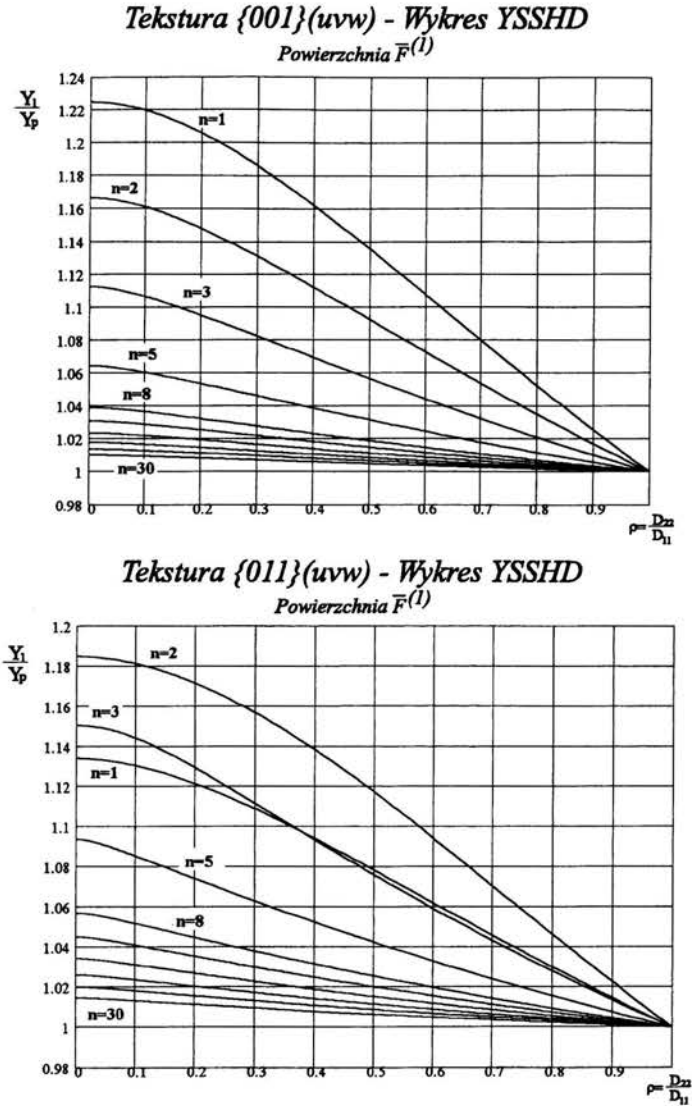
Wartość parametru  $P$  przewidywana przez warunki fenomenologiczne tym lepiej zgadza się z wartością otrzymaną dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ , im bardziej zbliżony jest kształt tych powierzchni dla dodatnich wartości  $\alpha$ . Wartość  $P$  przewidywana przez warunek Barlata i Liana w małym stopniu zależy od wartości parametrów materiałowych wykorzystywanych



Rysunek 4.25: Zależność parametru  $P = Y_s/Y_p$  od wykładnika  $n$  i założonej tekstury dla proponowanej powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ .

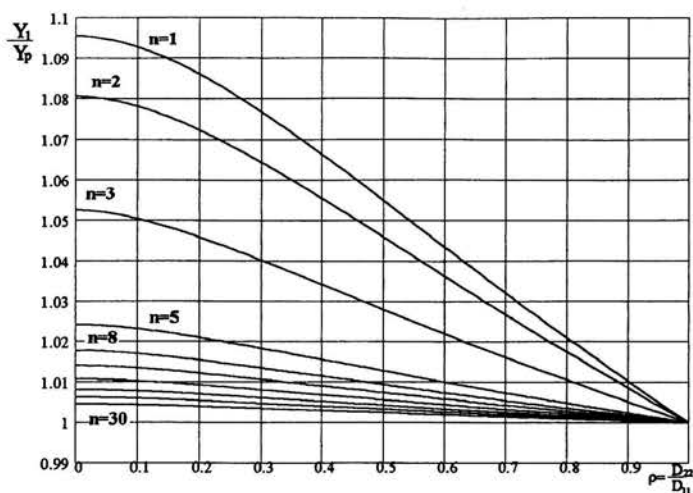
do określenia odpowiadającej mu funkcji płynięcia. Wartość ta zależy głównie od parametru  $m$ , który w przeprowadzonej analizie pozostaje stały (porównaj [14] i [76]). Funkcja Hilla przy tym samym  $m$  dopuszcza dość duże różnice w wartości  $P$  zmieniając się w zależności od tekstury i w większości przypadków wykazuje lepszą zgodność z proponowaną powierzchnią.

Przejdziemy teraz do omówienia efektu wzmocnienia wynikającego z kształtu powierzchni granicznej. Jest ono związane ze zjawiskiem lokalizacji odkształceń plastycznych (4.3.2). Jak pamiętamy do opisu tego efektu służy *Yield Surface Shape Limit Diagram* - YSSHD. Na rysunkach 4.26 i 4.27 pokazano wykresy YSSHD dla analizowanych tekstur i różnych wartości parametru  $n$ . Linia  $\rho = 0$  reprezentuje płaski stan płynięcia, natomiast pozostałe wartości  $\rho$  - możliwe ścieżki deformacji. Różnica między wartościami stosunku naprężeń  $Y_1/Y_p$  dla  $\rho = D_2/D_1 = 0$  i dla danego  $\rho = D_2/D_1 \neq 0$  występującego w strefie A rozciąganej blachy (patrz rysunek 4.9) odpowiada wielkości wzmocnienia. Im większa wielkość wzmocnienia, tym większa jest wartość odkształceń granicznych dla analizowanej ścieżki

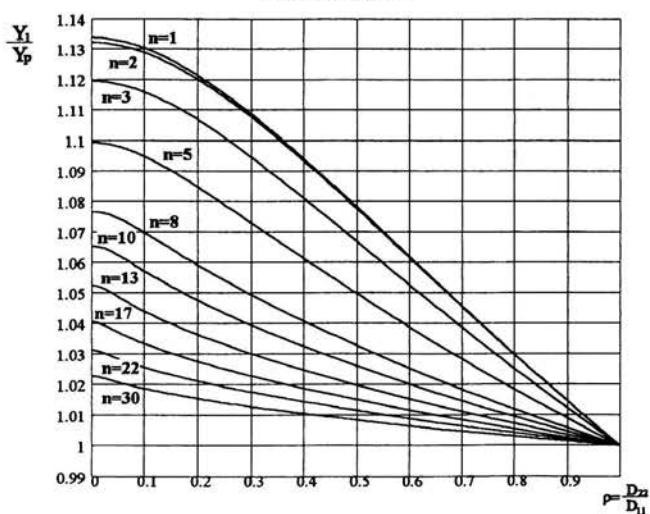


Rysunek 4.26: Wykresy wzmocnienia wynikające z kształtu powierzchni plastyczności (YSSHD) dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  o różnym wykładniku  $n$ ; tekstury  $\{001\}(uvw)$  i  $\{011\}(uvw)$ .

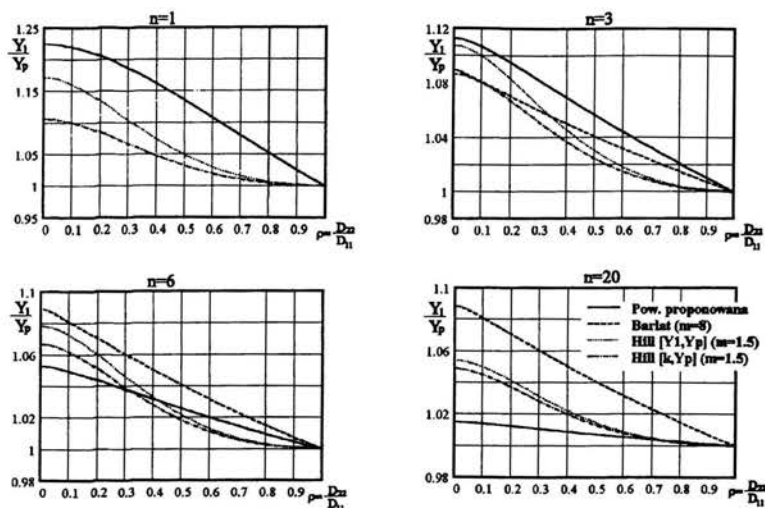
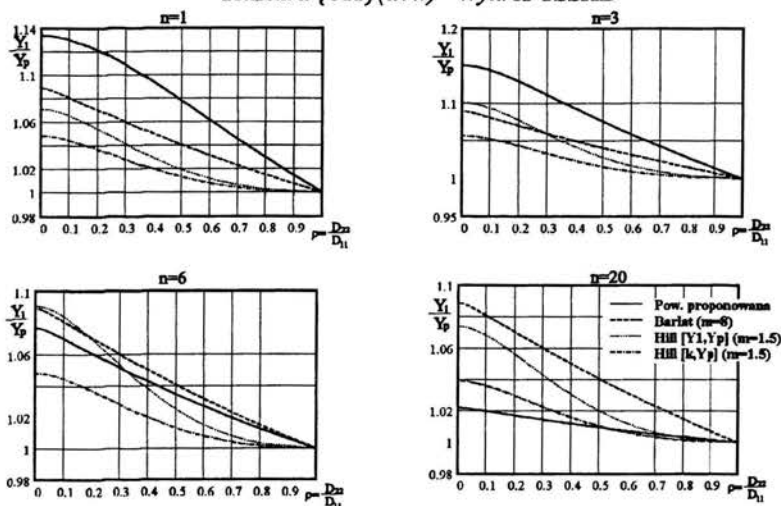
*Tekstura  $\{111\}(uvw)$  - Wykres YSSHD*  
*Powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$*



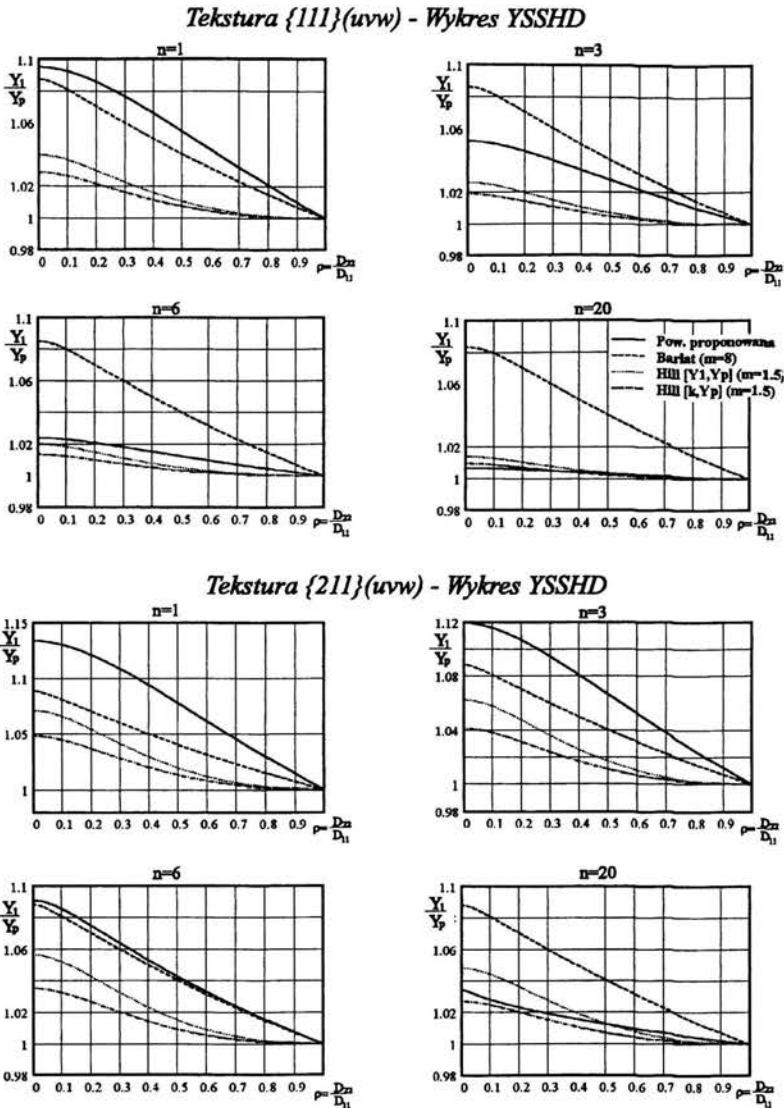
*Tekstura  $\{211\}(uvw)$  - Wykres YSSHD*  
*Powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$*



Rysunek 4.27: Wykresy wzmocnienia wynikające z kształtu powierzchni plastyczności (YSSHD) dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  o różnym wykładniku  $n$ ; tekstury  $\{111\}(uvw)$  i  $\{211\}(uvw)$ .

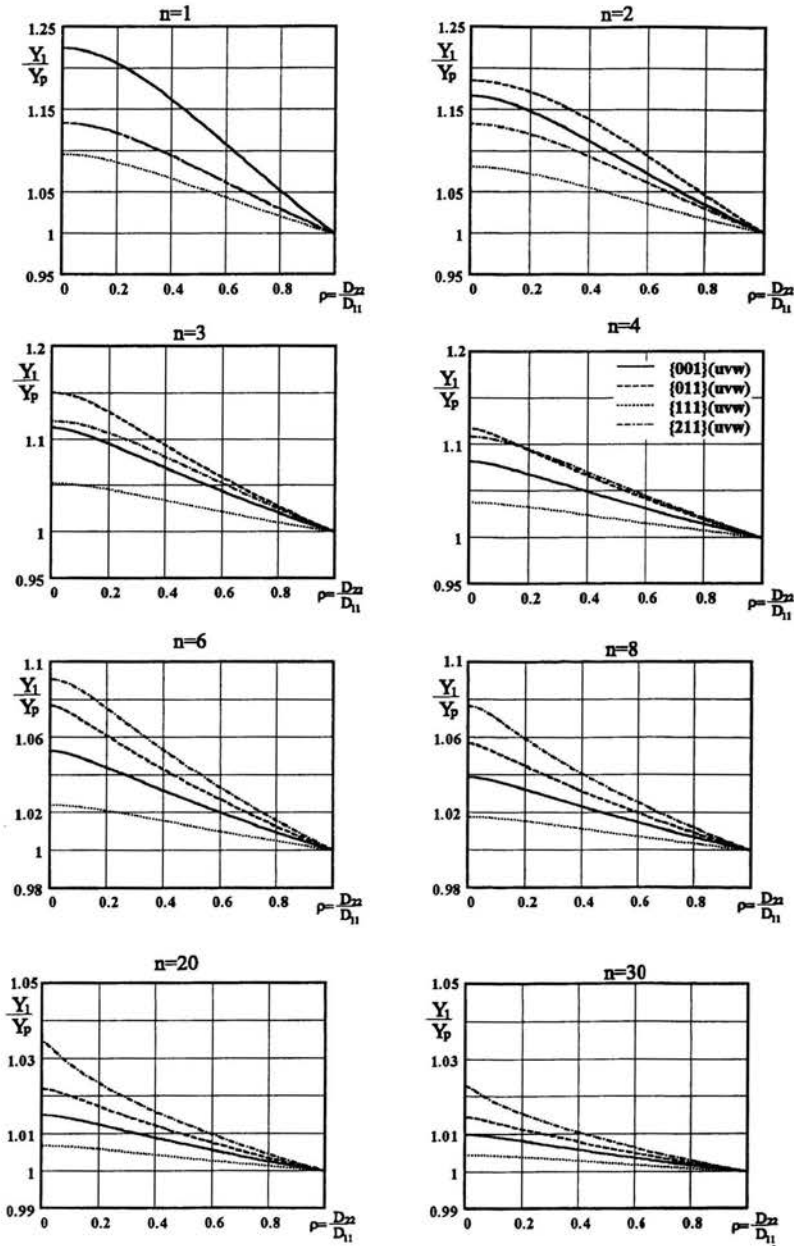
Tekstura  $\{001\}(uvw)$  - Wykres YSSHDTekstura  $\{011\}(uvw)$  - Wykres YSSHD

Rysunek 4.28: Porównanie wykres wzmocnienia wynikającego z kształtu powierzchni plastyczności (YSSHD) dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  o różnym wykładniku  $n$  z fenomenologicznymi powierzchniami plastyczności: dwiema powierzchniami Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono przy wykorzystaniu naprężeń granicznych  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnią Barlata i Liana ( $m = 8$ ); tekstury  $\{001\}(uvw)$  i  $\{011\}(uvw)$ .



Rysunek 4.29: Porównanie wykres wzmocnienia wynikającego z kształtu powierzchni plastyczności (YSSHD) dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  o różnym wykładniku  $n$  z fenomenologicznymi powierzchniami plastyczności: dwiema powierzchniami Hilla ( $m = 1.5$ ) - kształt powierzchni ustalono przy wykorzystaniu naprężeń  $Y_1$  i  $Y_p$  lub  $Y_1$  i  $k$  oraz powierzchnią Bartala i Liana ( $m = 8$ ); tekstury  $\{111\}(uvw)$  i  $\{211\}(uvw)$ .



Wykresy YSSHD - powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$ 

Rysunek 4.30: Porównanie wykres wzmocnienia wynikającego z kształtu powierzchni plastyczności (YSSHD) według powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  dla różnych tekstur.

odkształcenia  $\rho$ . Można zauważyć, że im większe  $n$ , tym wykres  $YSSHD$  jest bardziej płaski co powoduje mniejsze wzmocnienie i mniejsze odkształcenia graniczne dla dowolnych ścieżek naprężenia.

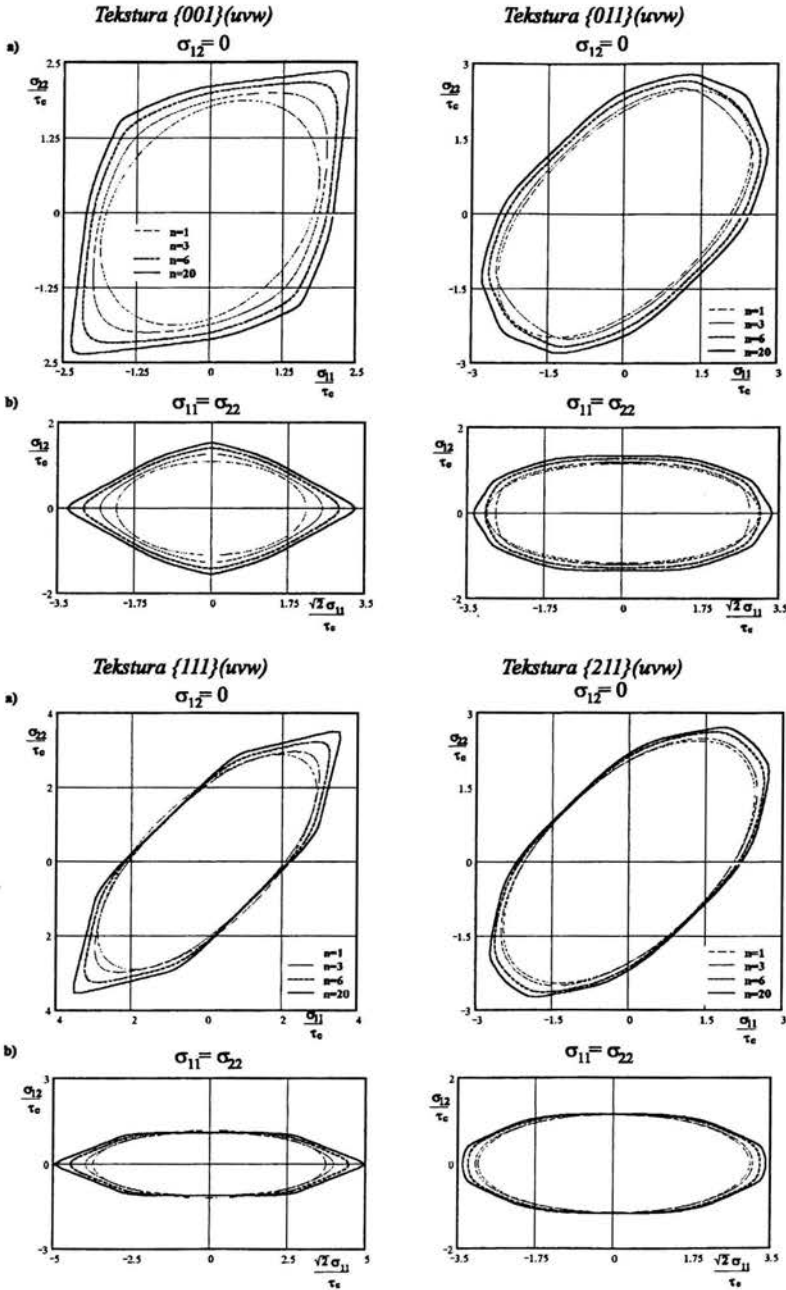
Zauważmy, że rodzaj tekstury ma mały wpływ na kształt wykresu  $YSSHD$  w przypadku powierzchni Barlata (porównaj rysunki 4.28 i 4.29). Stosunkowo duże odkształcenia graniczne dla dużego zakresu  $\rho$  przewidywane są dla tych materiałów, dla których druga pochodna przedstawionej funkcji po  $\rho$  jest dodatnia. Cechę taką mają wykresy związane z warunkiem Hilla oraz proponowanego kryterium dla dużych  $n$  w przypadku tekstury  $\{211\}\langle uvw \rangle$  (rysunek 4.29). Wykresy  $YSSHD$  są do siebie zbliżone dla powierzchni o podobnym kształcie przy dodatnich wartościach parametru  $\alpha$ .

Na rysunku 4.30 porównano wykresy  $YSSHD$  wynikające z proponowanej powierzchni plastyczności dla takiego samego  $n$  i różnych tekstur. Ponownie, najlepsze własności pod względem szybkowania wykazuje tekstura  $\{211\}\langle uvw \rangle$ , dla dużych  $n$  i tekstura  $\{011\}\langle uvw \rangle$ , dla  $2 \leq n \leq 4$ .

Przeprowadzona analiza pozwala stwierdzić, że proponowana powierzchnia plastyczności zdolna jest opisać szereg zjawisk związanych z formowaniem elementów metalowych, a wynikających z powstałej w materiale tekstury. Wynika to z dużej różnorodności kształtu tej powierzchni. Konieczna jest oczywiście jej weryfikacja doświadczalna. Pozwoliłoby to, przy wykorzystaniu modelu ewolucji tekstury zaprezentowanego w rozdziale drugim, nie tylko na opis własności materiału o danej teksturze, ale również projektowanie takich procesów deformacji plastycznej, które powodują powstanie pożądanej ze względów technologicznych tekstury. Wśród tekstur analizowanych powyżej byłaby to tekstura  $\{111\}\langle uvw \rangle$  o zwiększonej odporności na przewężenie oraz tekstura  $\{211\}\langle uvw \rangle$  o zwiększonej odporności na szykowanie.

Na zakończenie rozdziału dotyczącego blach o anizotropii normalnej podamy jeszcze pewne wyniki dotyczące powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  dla analizowanych w tym rozdziale tekstur. Przyjmijmy, że podobnie jak w rozważaniach dotyczących blach izotropowych, każda występująca w elemencie reprezentatywnym orientacja charakteryzuje się tym samym błędem ułożenia - wykładnik  $n$  jest taki sam dla wszystkich orientacji. Powierzchnia ta w przypadku blachy izotropowej ma kształt bliski elipsie Hubera-Misesa niezależnie od  $n$ .

Przekroje  $\sigma_{12} = 0$  i  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(3)}$  dla analizowanych powyżej tekstur przedstawiono na rysunku 4.31. Kształt tych przekrojów różni się znacznie od tych, jakie otrzymujemy dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ . Dla tekstury  $\{001\}\langle uvw \rangle$  kształt powierzchni plastyczności jest bardzo zbliżony do powierzchni Hilla (porównaj rysunki 4.16 i 4.17) wykazując mniejszą liczbę naroży niż powierzchnia  $F^{(1)}$ . Natomiast dla tekstur  $\{011\}\langle uvw \rangle$  i  $\{211\}\langle uvw \rangle$  powierzchnia ta wykazuje dodatkowe naroża w stosunku do powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ . Kształty powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  i  $\bar{F}^{(1)}$  dla tekstury  $\{111\}\langle uvw \rangle$  są zbliżone.



Rysunek 4.31: Przekroje przez proponowaną powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(3)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$ : a) przekrój  $\sigma_{12} = 0$ , b)  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  dla analizowanych tekstur.

### 4.4.3 Blachy ortotropowe

Większość tekstur krystalograficznych, jakie powstają w elementach metalowych poddanych obróbce plastycznej, powoduje, że obrabiane elementy są ortotropowe. Blacha o takich własnościach jest anizotropowa zarówno w płaszczyźnie o normalnej  $e_3$  jak i w swoich przekrojach. Omówimy teraz własności blach ortotropowych opisywane przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  (wzór (4.24)) oraz warunki fenomenologiczne: warunek Hilla z roku 1990 (wzór (3.39)) i warunek Barlata i Liana z roku 1989 (wzór (3.56)).

Poddamy analizie blachy, w których występuje sześć różnych tekstur krystalograficznych. Cztery z nich to tekstury idealne:  $\{001\}\langle 100 \rangle$  (rysunek 3.4a),  $\{011\}\langle 100 \rangle$  (rysunek 3.4b),  $\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2 \rangle$  (rysunek 3.4c),  $\{211\}\langle 0\bar{1}1 \rangle$ . Dwie pozostałe tekstury występują w elementach w których mamy następujący rozkład orientacji:  $75\%\{211\}\langle 110 \rangle + 25\%\{011\}\langle 100 \rangle$  oraz  $70\%\{111\}\langle 11\bar{2} \rangle + 30\%\{001\}\langle 100 \rangle$ .

Cztery parametry służące opisowi anizotropii materiału w warunkach Hilla oraz Barlata i Liana zostały wyznaczone odpowiednio ze wzorów (3.46) i (3.60). Wartości naprężeń granicznych zostały określone na podstawie wzoru (4.24) opisującego powierzchnię  $\bar{F}^{(1)}$  przy założeniu różnych wartości wykładnika  $n$  i wykorzystaniu wzorów (4.38-4.41). Otrzymane wartości zostały zebrane w tablicy 4.6. Wartość naprężenia granicznego  $Y_{45}$  została otrzymana ze wzoru (4.27) przy założeniu  $\phi = 45^\circ$ . Wartość ta posłużyła do alternatywnego określenia parametru  $b$  (wzór (3.47)) występującego w warunku Hilla.

$n$	$Y_1 [\tau_c]$	$Y_2 [\tau_c]$	$Y_p [\tau_c]$	$k [\tau_c]$	$Y_{45} [\tau_c]$	$Y_1 [\tau_c]$	$Y_2 [\tau_c]$	$Y_p [\tau_c]$	$k [\tau_c]$	$Y_{45} [\tau_c]$
	$\{001\}\langle 100 \rangle$					$\{011\}\langle 100 \rangle$				
1	1.527	1.527	1.527	1.527	2.160	1.527	2.160	2.016	1.527	2.494
3	1.795	1.795	1.795	1.795	2.015	1.795	2.015	2.015	1.583	2.526
6	2.063	2.063	2.063	2.063	2.185	2.063	2.185	2.185	1.637	2.690
20	2.325	2.325	2.325	2.325	2.366	2.325	2.366	2.366	1.702	2.820
	$\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2 \rangle$					$\{211\}\langle 011 \rangle$				
1	2.160	2.160	2.646	1.183	2.160	2.160	2.646	2.160	1.0	2.494
3	2.201	2.015	2.825	1.083	2.052	2.015	2.825	2.201	1.0	2.526
6	2.312	2.185	3.169	1.062	2.105	2.185	3.169	2.312	1.0	2.690
20	2.407	2.366	3.513	1.061	2.121	2.366	3.513	2.407	1.0	2.820
	$75\%\{011\}\langle 100 \rangle + 25\%\{211\}\langle 011 \rangle$					$70\%\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2 \rangle + 30\%\{001\}\langle 100 \rangle$				
1	1.633	2.256	2.160	1.323	2.256	1.895	1.895	2.091	1.261	2.160
3	1.835	2.099	2.052	1.224	2.206	2.011	1.929	2.145	1.145	2.040
6	2.086	2.237	2.209	1.122	2.166	2.193	2.138	2.278	1.094	2.125
20	2.333	2.383	2.374	1.035	2.066	2.369	2.350	2.396	1.070	2.140

Tablica 4.6: Wartości naprężeń granicznych otrzymywanych w próbach (3.42-3.45) według powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  (wzory (4.38-4.41)).

Większość z analizowanych tekstur możemy zaobserwować w rzeczywistych elementach

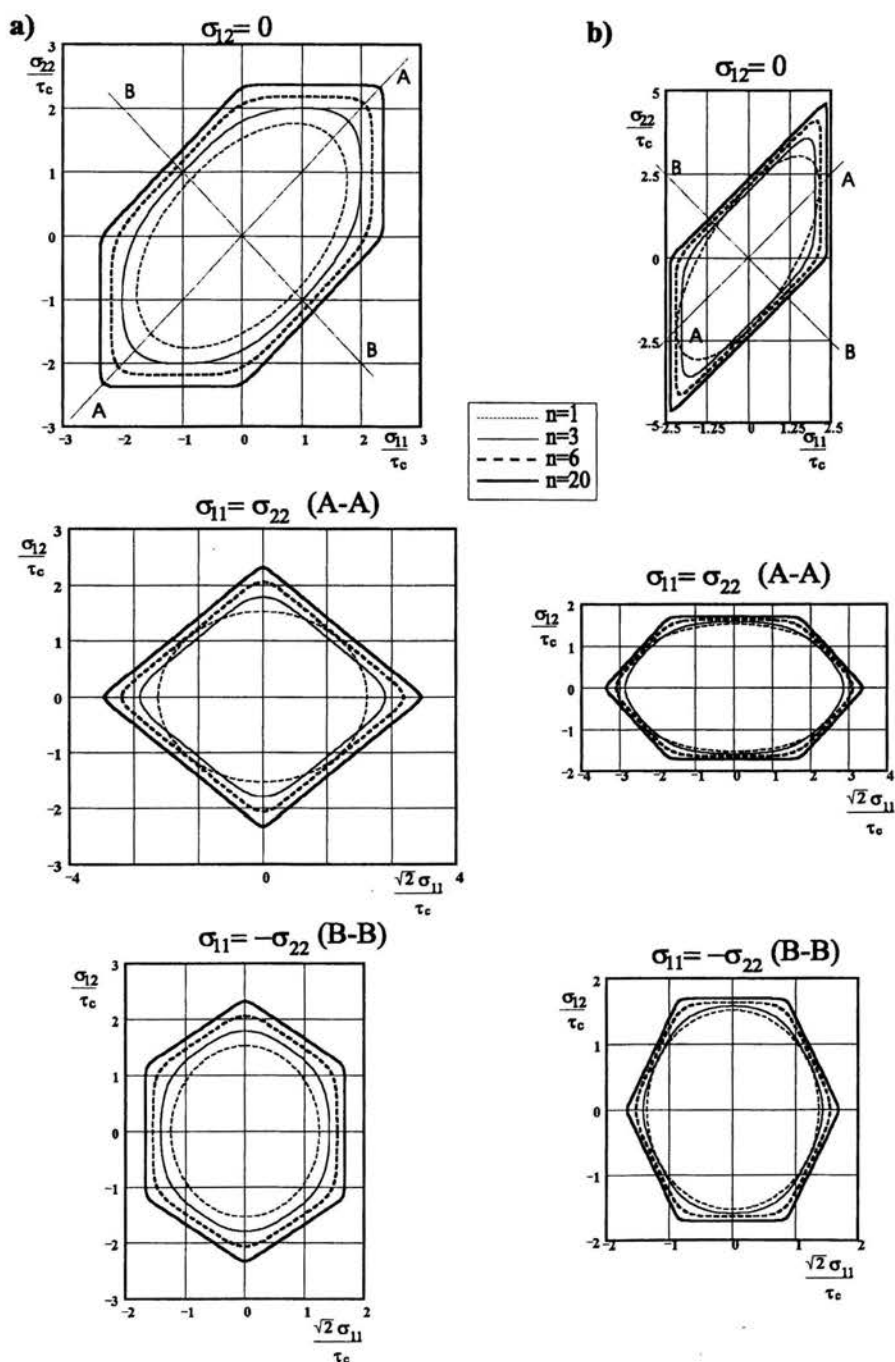
metalowych. W testach ścinania próbek aluminiowych i miedzianych w niskich temperaturach i przy małych odkształceniach obserwowano powstanie tekstury  $\{111\}\langle 110 \rangle$  [86]. W przypadku miedzi towarzyszyła jej tekstura  $\{211\}\langle 0\bar{1}1 \rangle$ . W ścinanej próbce żelaza- $\alpha$  obserwowano tekstury  $\{211\}\langle 111 \rangle$  i  $\{011\}\langle 111 \rangle$ . Przy wzroście temperatury tekstura  $\{211\}\langle 0\bar{1}1 \rangle$  dominuje w ścinanej próbce aluminiowej, natomiast w przypadku próbki miedzianej towarzyszy jej tekstura  $\{111\}\langle 110 \rangle$ . Dla żelaza- $\alpha$  przy ścinaniu w podwyższonej temperaturze charakterystyczna jest tekstura  $\{211\}\langle 111 \rangle$ . W walcowanej na zimno nierdzewnej stali austenitycznej obserwowano teksturę  $\{011\}\langle 112 \rangle$  [29]. Towarzyszył jej dodatek tekstury  $\{011\}\langle 100 \rangle$ . Ta sama stal poddana wyżarzaniu wykazywała teksturę  $\{011\}\langle 522 \rangle$ .

Przeanalizujemy na początek kształt przekrojów przez powierzchnie plastyczności ze szczególnym uwzględnieniem liczby naroży. Jako charakterystyczne wybraliśmy trzy przekroje:  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  oraz  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ , gdzie  $\sigma_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) są składowymi tensora naprężenia w bazie  $\{e_i\}$ . Kierunki  $e_1$  i  $e_2$  pokrywają się z głównymi osiami ortotropii. Zaważmy, że ostatni z przekrojów jest przekrojem dewiatorowym: dowolny stan naprężenia reprezentowany w tym przekroju ma zerowy ślad.

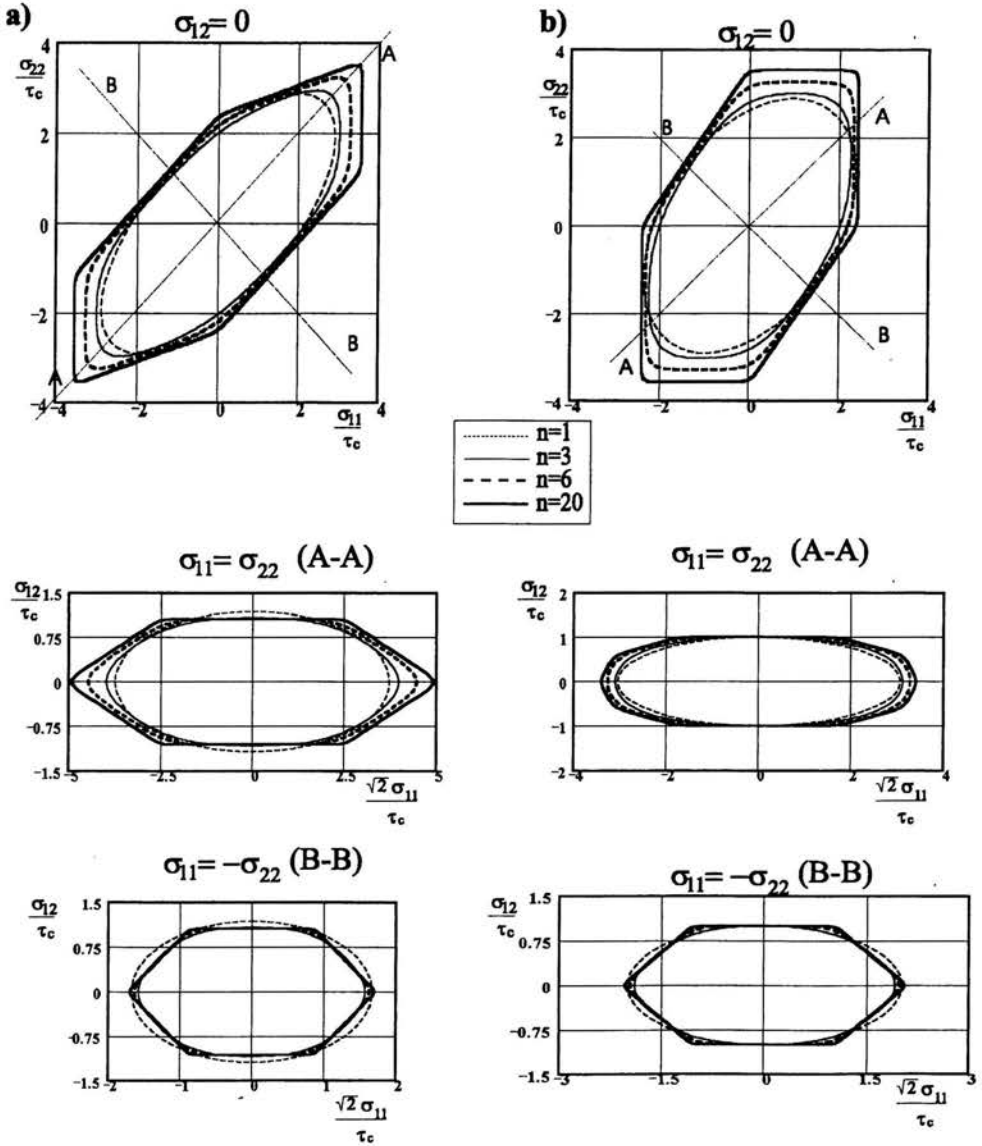
Rysunki 4.32, 4.33 i 4.34 przedstawiają powyższe przekroje przez powierzchnię  $\bar{F}^{(1)}$  dla analizowanych tekstur. Ogólnie wzrost wykładnika  $n$  we wszystkich przypadkach powoduje wyostrenie się naroży, które występują we wszystkich analizowanych przekrojach. Ich liczba waha się w zależności od tekstury.

Dla tekstury kubicznej  $\{001\}\langle 100 \rangle$  (rysunek 4.32a) otrzymujemy sześć naroży w przekroju  $\sigma_{12} = 0$  oraz w przekroju dewiatorowym, natomiast cztery naroża w przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ . Kolejna tekstura:  $\{011\}\langle 100 \rangle$  (rysunek 4.32b) dająca blachę o własnościach ortotropowych, wykazuje cztery naroża w przekroju  $\sigma_{12} = 0$  (porównaj rysunek 3.9 w rozdziale trzecim dla powierzchni Bishopa-Hilla) i sześć naroży w pozostałych dwu przekrojach. Tekstura  $\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2 \rangle$  (rysunek 4.33a) wykazuje sześć naroży we wszystkich analizowanych przekrojach, natomiast tekstura  $\{211\}\langle 0\bar{1}1 \rangle$  (rysunek 4.33b) wykazuje sześć naroży w przekroju  $\sigma_{12} = 0$  i przekroju dewiatorowym oraz dziesięć naroży w przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ . Jeżeli w elemencie oprócz tekstury typu *goss* ( $\{011\}\langle 100 \rangle$ ) mamy dodatkowo teksturę  $\{211\}\langle 0\bar{1}1 \rangle$  (rysunek 4.34a), to powoduje to zwiększenie liczby naroży w analizowanych przekrojach dla dużych wartości  $n$  ( $n = 20$ ). W przypadku tekstury  $\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2 \rangle$  (rysunek 4.34b), jeżeli towarzyszy jej dodatek tekstury  $\{001\}\langle 100 \rangle$ , naroża ulegają przesunięciu, ale ich liczba pozostaje niezmienną.

Analizowane powyżej kształty powierzchni dla  $n = 3$  (rysunki 4.35, 4.36, 4.37), gdy otrzymujemy silnie zaokrąglone naroża oraz dla  $n = 6$  (rysunki 4.38, 4.39, 4.40), gdy naroża te zaznaczają się dużo mocniej, porównaliśmy z przekrojami przez powierzchnię Hilla ( $m = 1.5$ ) i powierzchnię Barlata i Liana ( $m = 8$ ). Ogólnie można stwierdzić, że przy większym  $n$  warunki fenomenologiczne znacząco odbiegają od kształtu powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  w przekroju dewiatorowym, ponieważ nie są w stanie wykazać w tym przekroju naroży. Niezależnie od przyjętego stopnia  $m$  warunków fenomenologicznych przekrój ten jest elipsą. Dla poszczególnych tekstur pewne przekroje lepiej przybliżane są przez warunek Hilla, a inne przez warunek Barlata i Liana (na przykład odpowiednio przekrój  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  i  $\sigma_{12} = 0$  dla tekstury  $\{001\}\langle 100 \rangle$  - rysunki 4.35a i 4.38a). Szczególną trudność przy przybliżeniu powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  przez warunki fenomenologiczne obserwujemy w przypadku



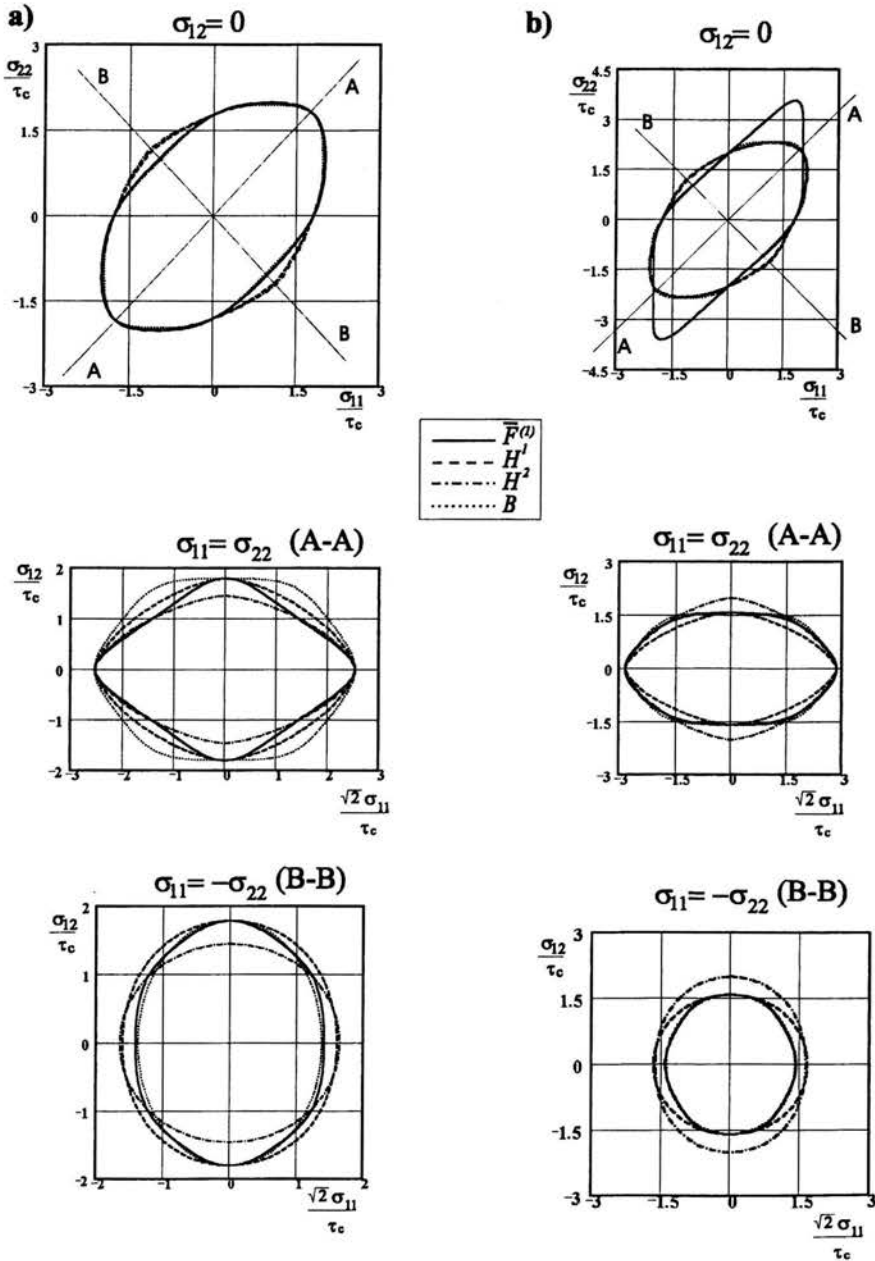
Rysunek 4.32: Przekroje przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ : (a) tekstura  $\{001\}\langle 100 \rangle$ , (b) tekstura  $\{011\}\langle 100 \rangle$  dla różnych wartości wykładnika  $n$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do krytycznego naprężenia ścinającego  $\tau_c$ .



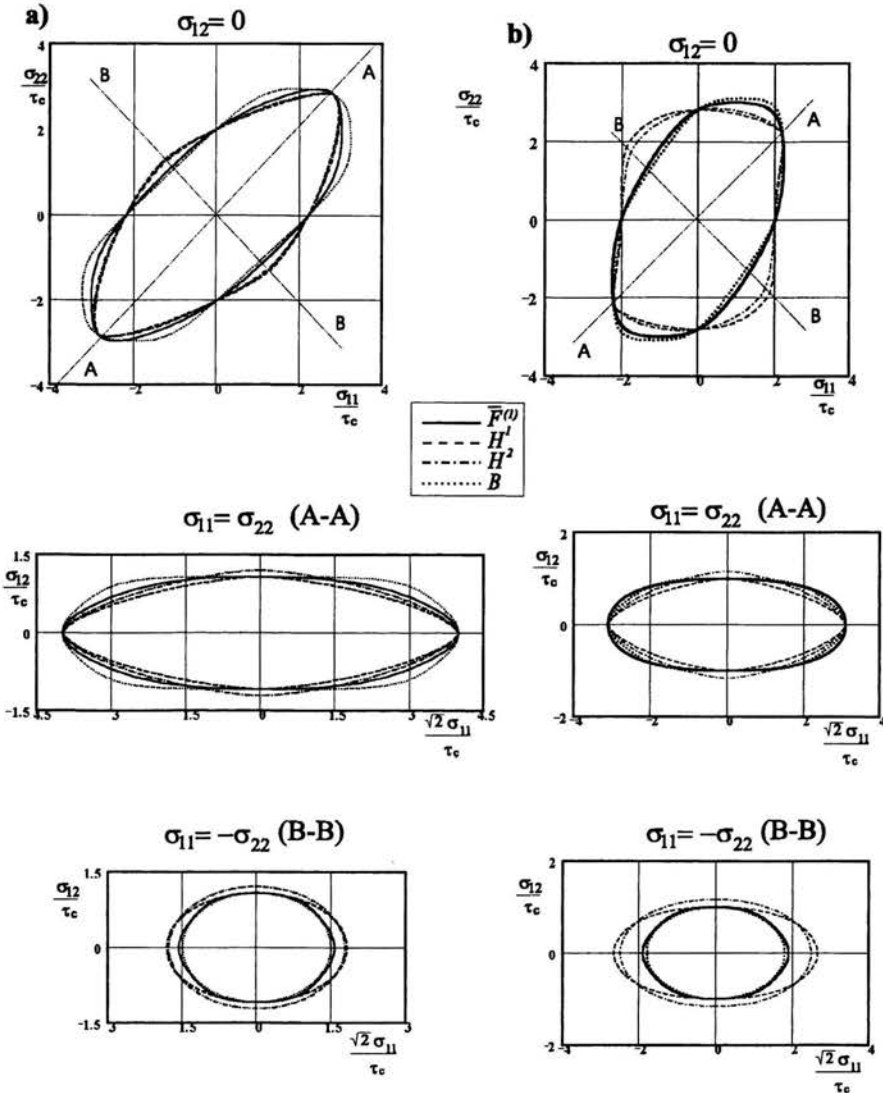
Rysunek 4.33: Przekroje przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ : (a) tekstura  $\{111\}\langle\bar{1}\bar{1}2\rangle$ , (b) tekstura  $\{211\}\langle 0\bar{1}1\rangle$  dla różnych wartości wykładnika  $n$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do krytycznego naprężenia ścinającego  $\tau_c$ .



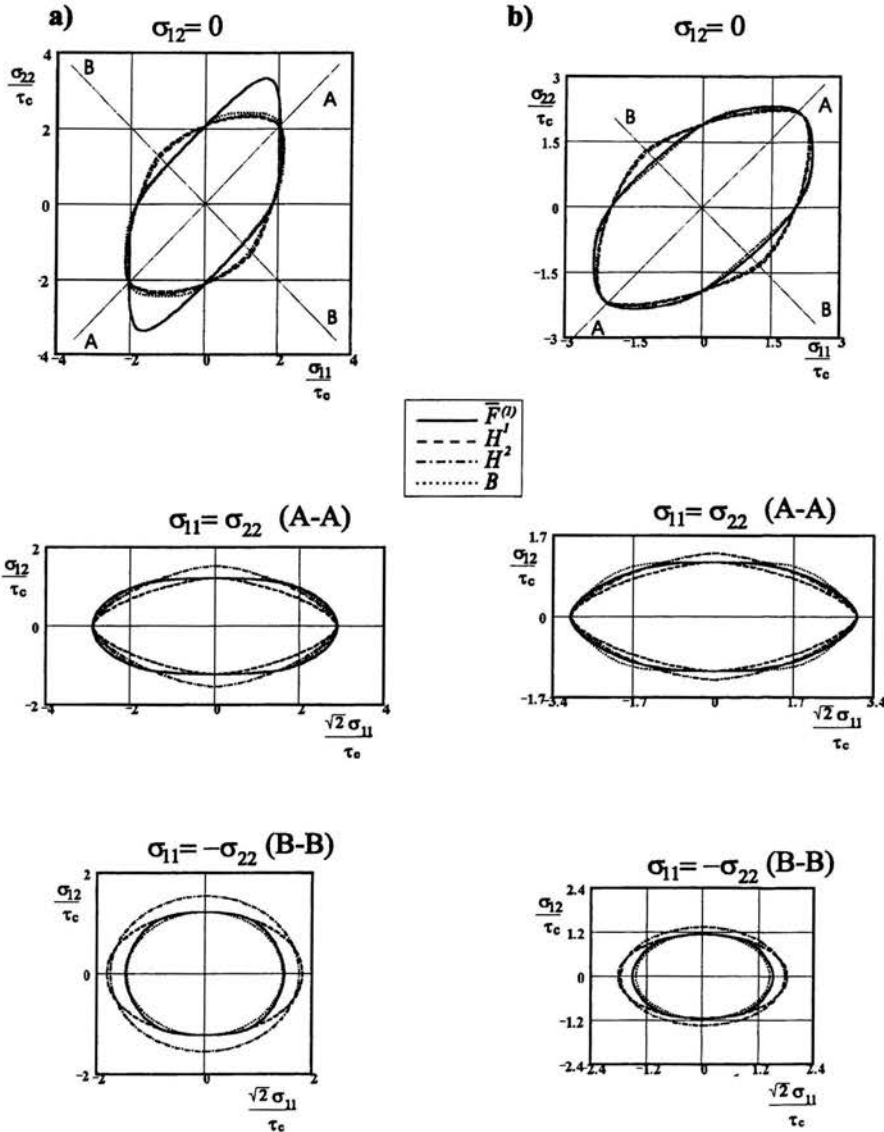




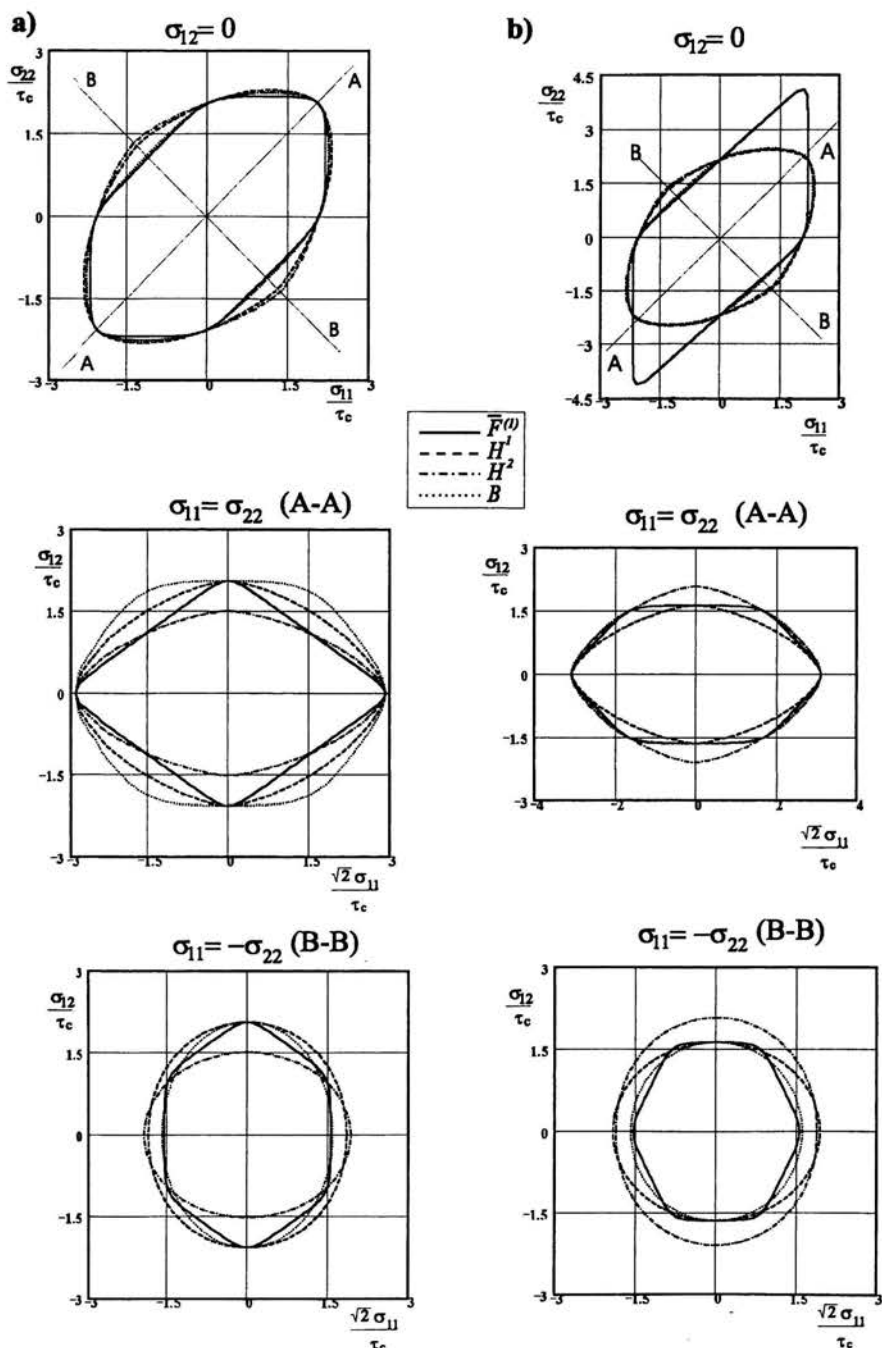
Rysunek 4.35: Porównanie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 3$  z dwoma powierzchniami plastyczności Hilla (dla  $m = 1.5$ ): typu  $H^1$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.46)) i typu  $H^2$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.47)) i powierzchnią plastyczności Barlata i Liana (dla  $m = 8$ ) - na rysunku B; (a) tekstura  $\{001\}\langle 100 \rangle$ , (b) tekstura  $\{011\}\langle 100 \rangle$ .



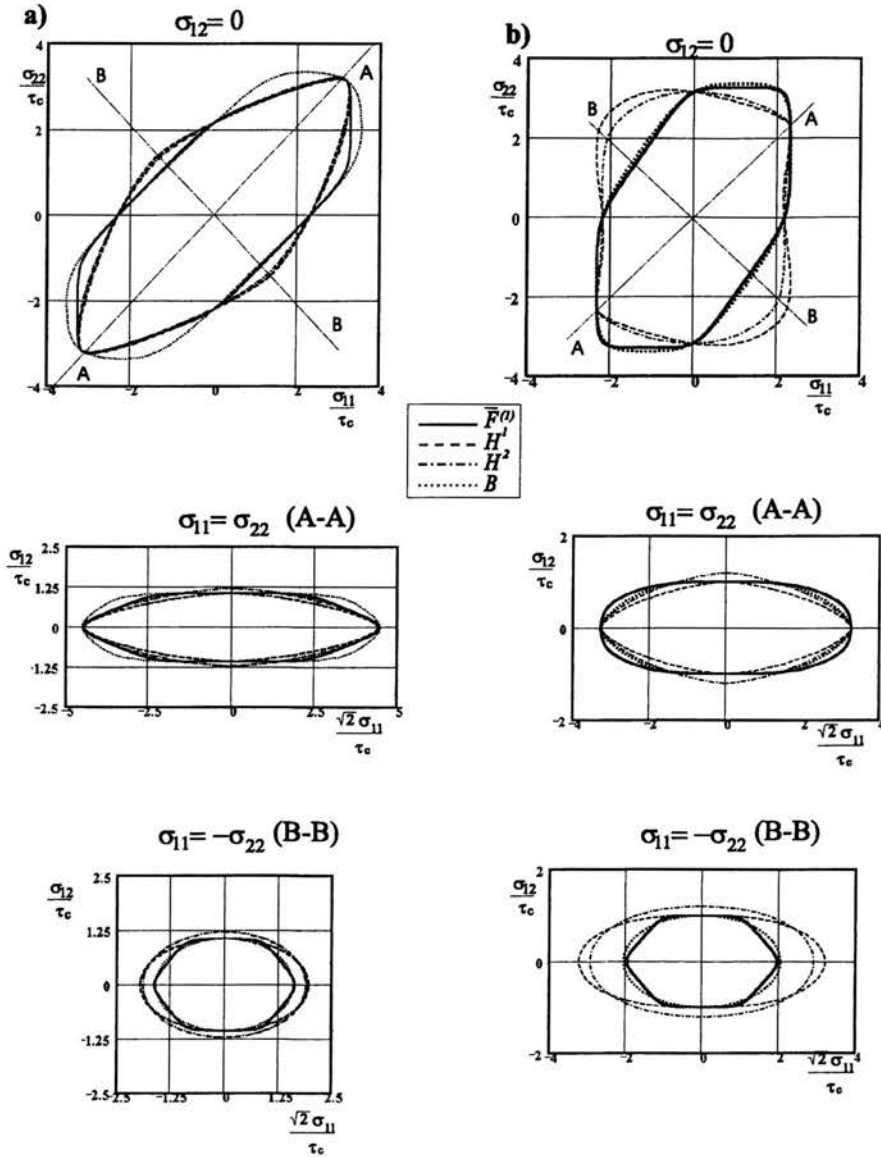
Rysunek 4.36: Porównanie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 3$  z dwiema powierzchniami plastyczności Hilla (dla  $m = 1.5$ ): typu  $H^1$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.46)) i typu  $H^2$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.47)) i powierzchnią plastyczności Barlata i Liana (dla  $m = 8$ ) - na rysunku B; (a) tekstura  $\{111\}\langle\bar{1}\bar{1}2\rangle$ , (b) tekstura  $\{211\}\langle 0\bar{1}1\rangle$ .



Rysunek 4.37: Porównanie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 3$  z dwoma powierzchniami plastyczności Hilla (dla  $m = 1.5$ ): typu  $H^1$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.46)) i typu  $H^2$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.47)) i powierzchnią plastyczności Barlata i Liana (dla  $m = 8$ ) - na rysunku B; (a) tekstura  $75\%\{011\}\langle 100\rangle + 25\%\{211\}\langle 011\rangle$ , (b) tekstura  $70\%\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2\rangle + 30\%\{001\}\langle 100\rangle$ .



Rysunek 4.38: Porównanie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 6$  z dwiema powierzchniami plastyczności Hilla (dla  $m = 1.5$ ): typu  $H^1$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.46)) i typu  $H^2$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.47)) i powierzchnią plastyczności Barlata i Liana (dla  $m = 8$ ) - na rysunku B; (a) tekstura  $\{001\}\langle 100 \rangle$ , (b) tekstura  $\{011\}\langle 100 \rangle$ .



Rysunek 4.39: Porównanie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 6$  z dwoma powierzchniami plastyczności Hilla (dla  $m = 1.5$ ): typu  $H^1$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.46)) i typu  $H^2$  (parametr  $b$  ze wzoru (3.47)) i powierzchnią plastyczności Barlata i Liana (dla  $m = 8$ ) - na rysunku B; (a) tekstura  $\{111\}\langle\bar{1}\bar{1}2\rangle$ , (b) tekstura  $\{211\}\langle 0\bar{1}1\rangle$ .



tekstury  $\{011\}\langle 100 \rangle$  i przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  (rysunki 4.35b i 4.38b). W przypadku tekstury  $\{211\}\langle 0\bar{1}1 \rangle$  powierzchnia Hilla nie spełnia kryterium wypukłości (rysunki 4.36b i 4.39b).

Przejdziemy teraz do opisu zjawisk związanych z procesem plastycznego płynięcia. Przypomnijmy, że możliwą do opisu liczbę *uch* technologicznych pojawiających się na obrzeżu wytłaczanych elementów możemy odczytać na podstawie wykresu zmiany wartości naprężenia uplastyczniającego przy rozciąganiu w zależności od kąta  $\phi$  definiującego kierunek rozciągania (rysunek 4.8). Minima na tym wykresie wskazują na występowaniu grzbietu na obrzeżu wytłaczanego elementu.

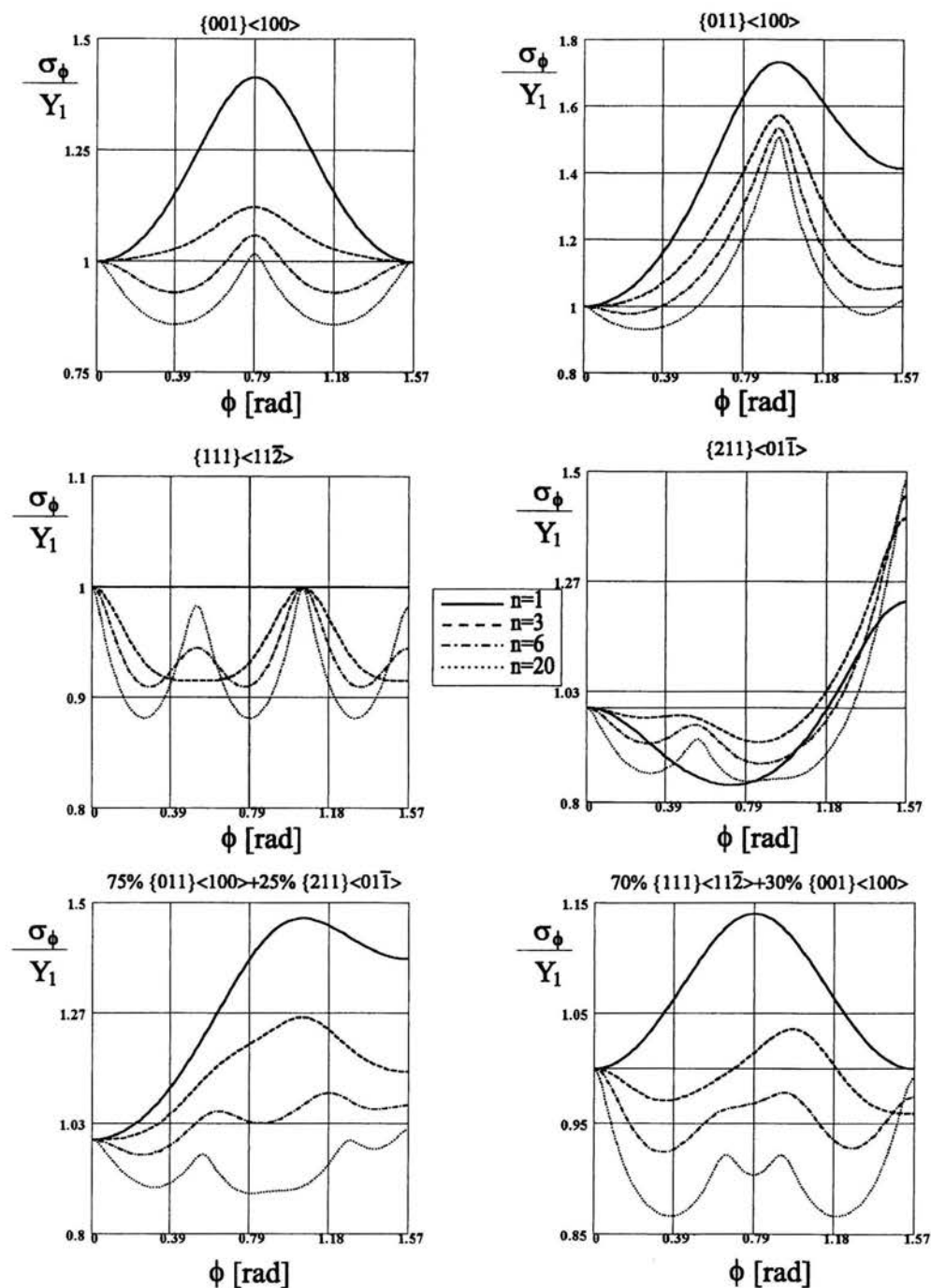
Analizując powyższe wykresy dla różnych tekstur, przy różnej wartości wykładnika  $n$ , możemy zauważyć, że w większości przypadków wzrost  $n$  powoduje zwiększenie liczby *uch* technologicznych zmniejszając jednocześnie ich amplitudę (wzory (4.27) i (4.29) oraz rysunek 4.41). Największą ich liczbę obserwujemy w przypadku tekstur  $\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2 \rangle$ ,  $\{211\}\langle 011 \rangle$  i tekstur, w których występują dwie orientacje.

Równie niekorzystne z technologicznego punktu widzenia są te tekstury, które niezależnie od opisywanej liczby minimów wykazują większe różnice w wartościach wytrzymałości w różnych kierunkach. Do takich tekstur należą tekstury  $\{211\}\langle 011 \rangle$  i  $\{011\}\langle 100 \rangle$ , dla dowolnych  $n$ , oraz tekstura  $\{001\}\langle 100 \rangle$  i tekstury mieszane dla małych wartości  $n$ . Przy dużych wartościach  $n$  występowanie obok siebie w elemencie dwóch tekstur obniża amplitudę nierówności, szczególnie w przypadku tekstury  $75\%\{011\}\langle 100 \rangle + 25\%\{211\}\langle 011 \rangle$ , pomimo tego że występująca pojedynczo tekstura  $\{011\}\langle 100 \rangle$  powodowała silną anizotropię plastycznego płynięcia.

Porównajmy wykres zależności naprężenia uplastyczniającego od kąta  $\phi$  dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 3$  (rysunek 4.42) i  $n = 6$  (rysunek 4.43) z odpowiadającymi im wykresami dla warunków fenomenologicznych. Jak można zauważyć warunki fenomenologiczne z trudnością opisują większą od czterech liczbę *uch* technologicznych, choć różny od dwóch stopień tych warunków formalnie na to pozwala. Dość dobrą zgodność warunku Barlata i warunku Hilla, gdzie parametr  $b$  wyznaczono na podstawie  $Y_{45}$ , z powierzchnią  $F^{(1)}$  dla  $n = 3$  i  $n = 6$  otrzymujemy dla tekstur  $\{011\}\langle 100 \rangle$ ,  $\{211\}\langle 011 \rangle$  oraz  $75\%\{011\}\langle 100 \rangle + 25\%\{211\}\langle 011 \rangle$ .

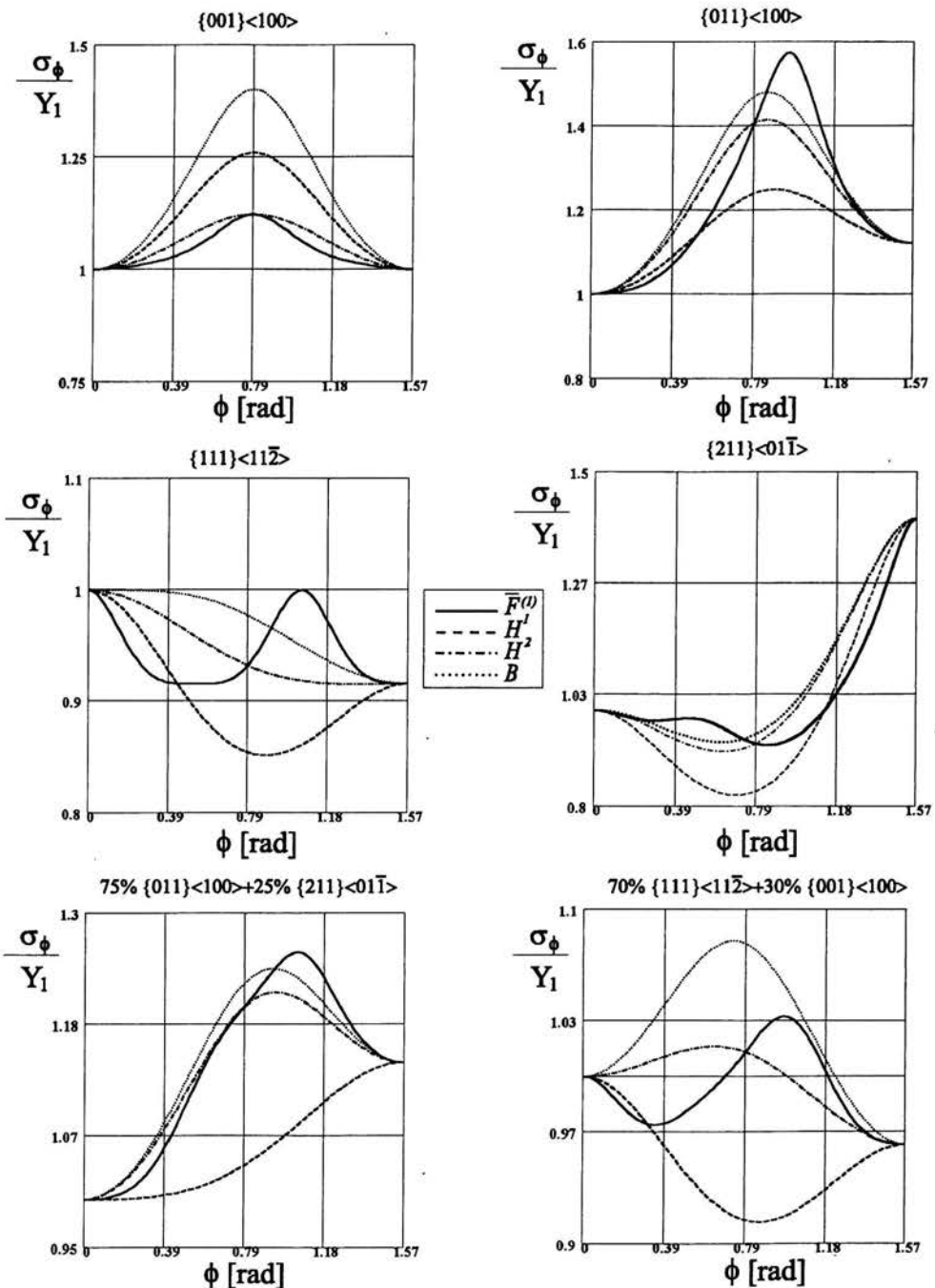
Możliwe pofałdowanie ścian wytłaczanych elementów metalowych opisywane jest przez współczynnik Lankforda  $R_\phi$ , którego wysoka wartość średnia wskazuje na dobrą formowalność blachy przy wyciskaniu. Jest on stale większy od jedności jedynie dla tekstury  $\{111\}\langle \bar{1}\bar{1}2 \rangle$  co wskazuje na dobre właściwości blachy o takiej teksturze pod względem formowania (rysunek 4.44). Korzystna pod tym względem wydaje się również tekstura  $\{211\}\langle 011 \rangle$ . Najmniej korzystne właściwości ma natomiast blacha o teksturze  $\{001\}\langle 100 \rangle$  dla której współczynnik  $R_\phi$  jest stale mniejszy od jedności. Pozostałe tekstury wskazują na różne zachowanie blachy w zależności od kąta  $\phi$ . Dla pewnych zakresów kąta  $\phi$  zmiana grubości elementu jest szybsza od zmiany jego szerokości ( $R < 1$ ), dla innych jest odwrotnie ( $R > 1$ ).

Wykres współczynnika Lankforda  $R_\phi$  otrzymany na podstawie warunków fenomenologicznych w większości przypadków znacznie odbiega od wykresu otrzymywanego dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  (rysunki 4.45 i 4.46). Warunek Hilla na ogół zaniża jego wartość. W przypadku powierzchni Barlata i Liana otrzymujemy jedynie jakościową zgodność opisywanego zachowania dla tekstur  $\{001\}\langle 100 \rangle$ ,  $\{011\}\langle 100 \rangle$  i tekstur mieszanych. Zgodność ta

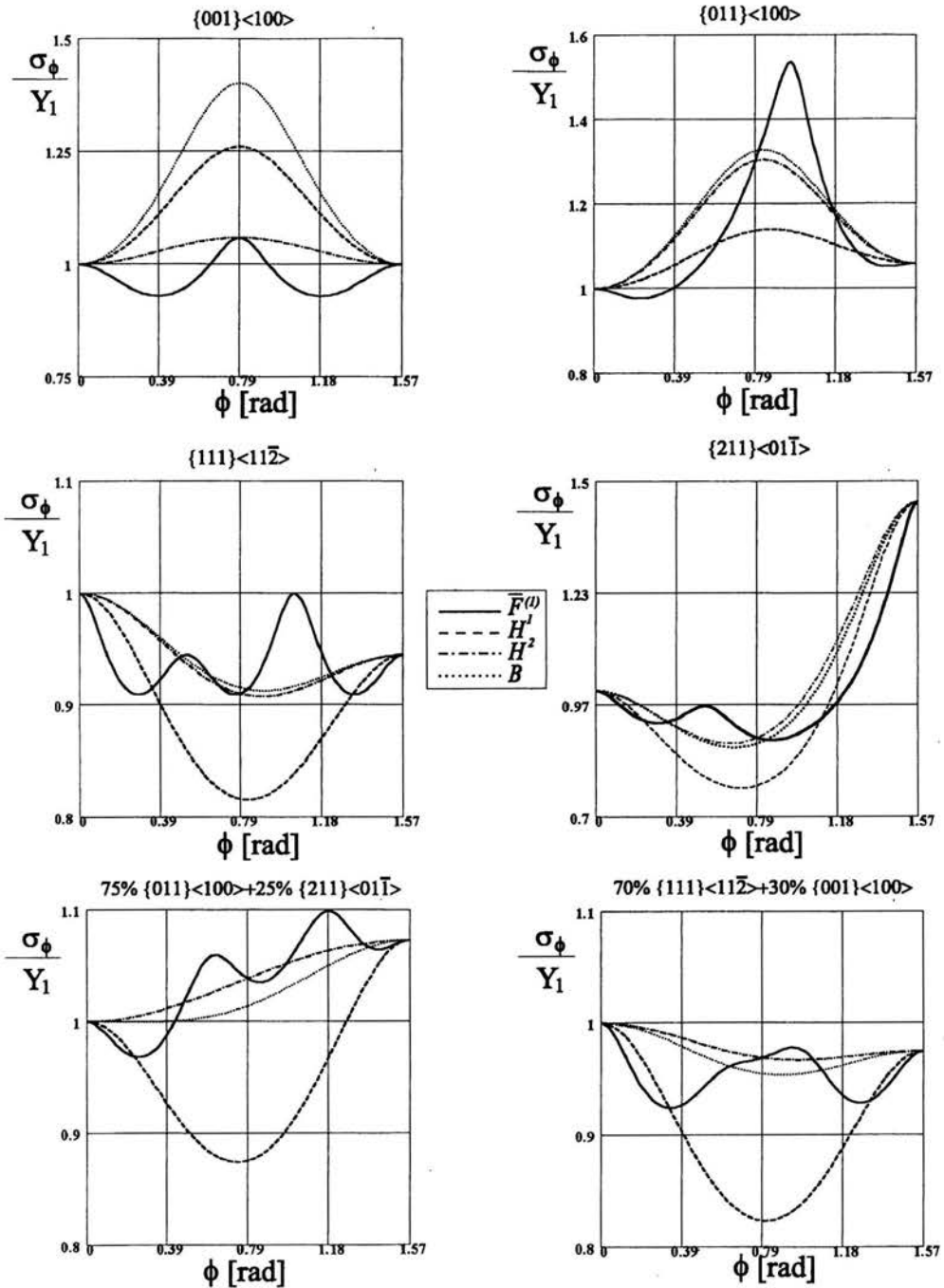


Rysunek 4.41: Wykres naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_\phi/Y_1$  dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$ .

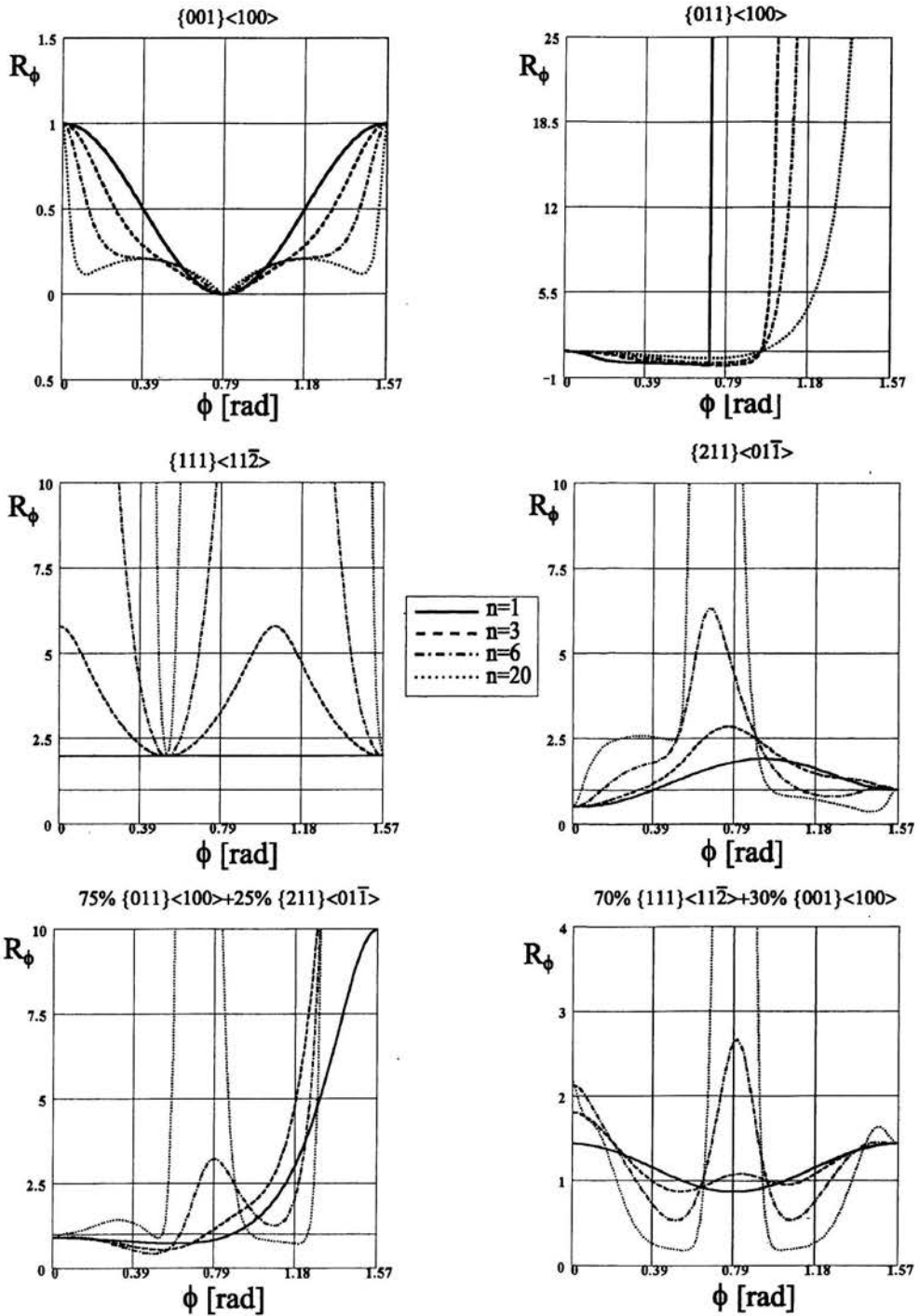




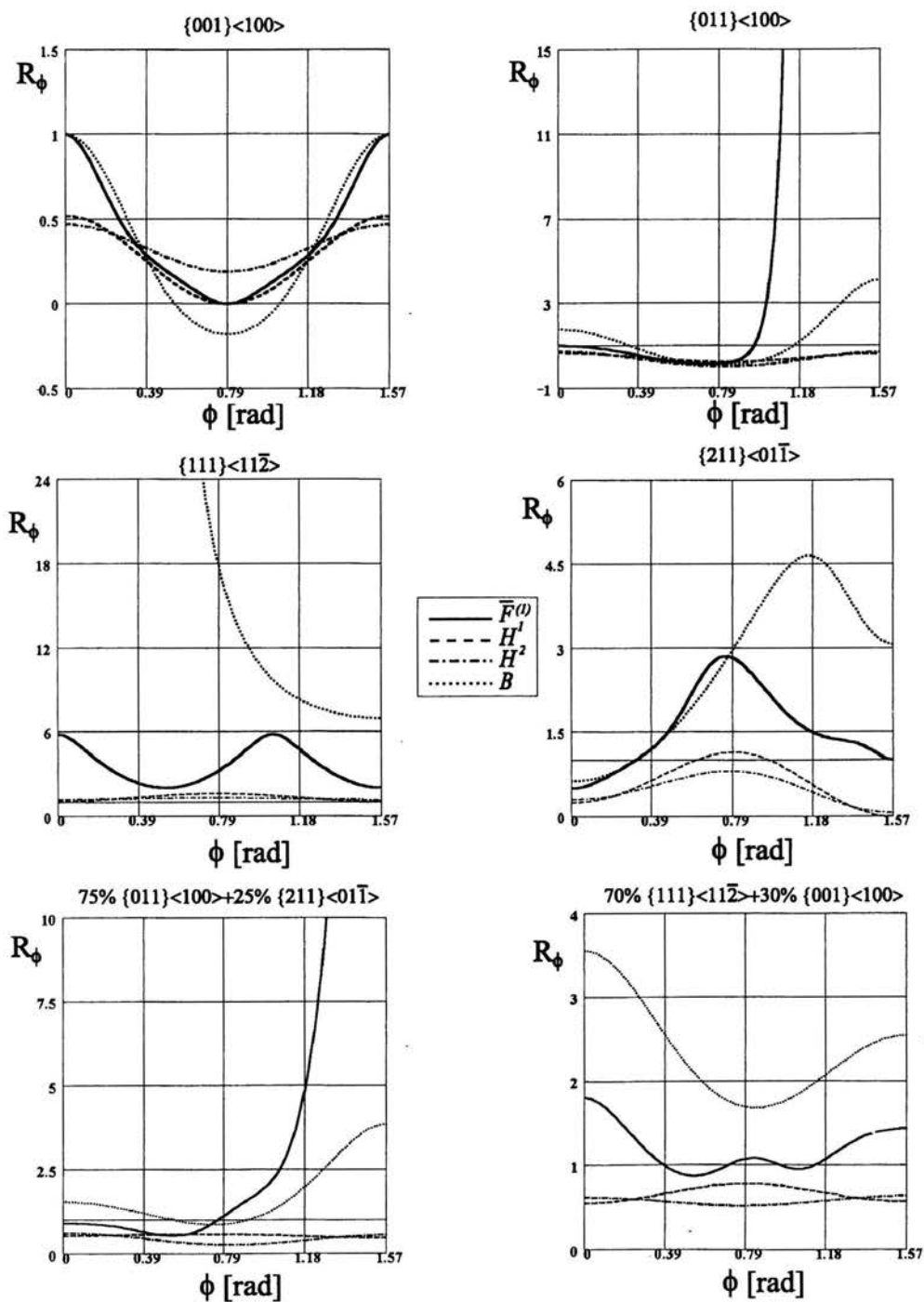
Rysunek 4.42: Wykres naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_\phi/Y_1$  dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ , gdy  $n = 3$  i powierzchni fenomenologicznych. Oznaczenia linii jak na rysunkach 4.35-4.40.



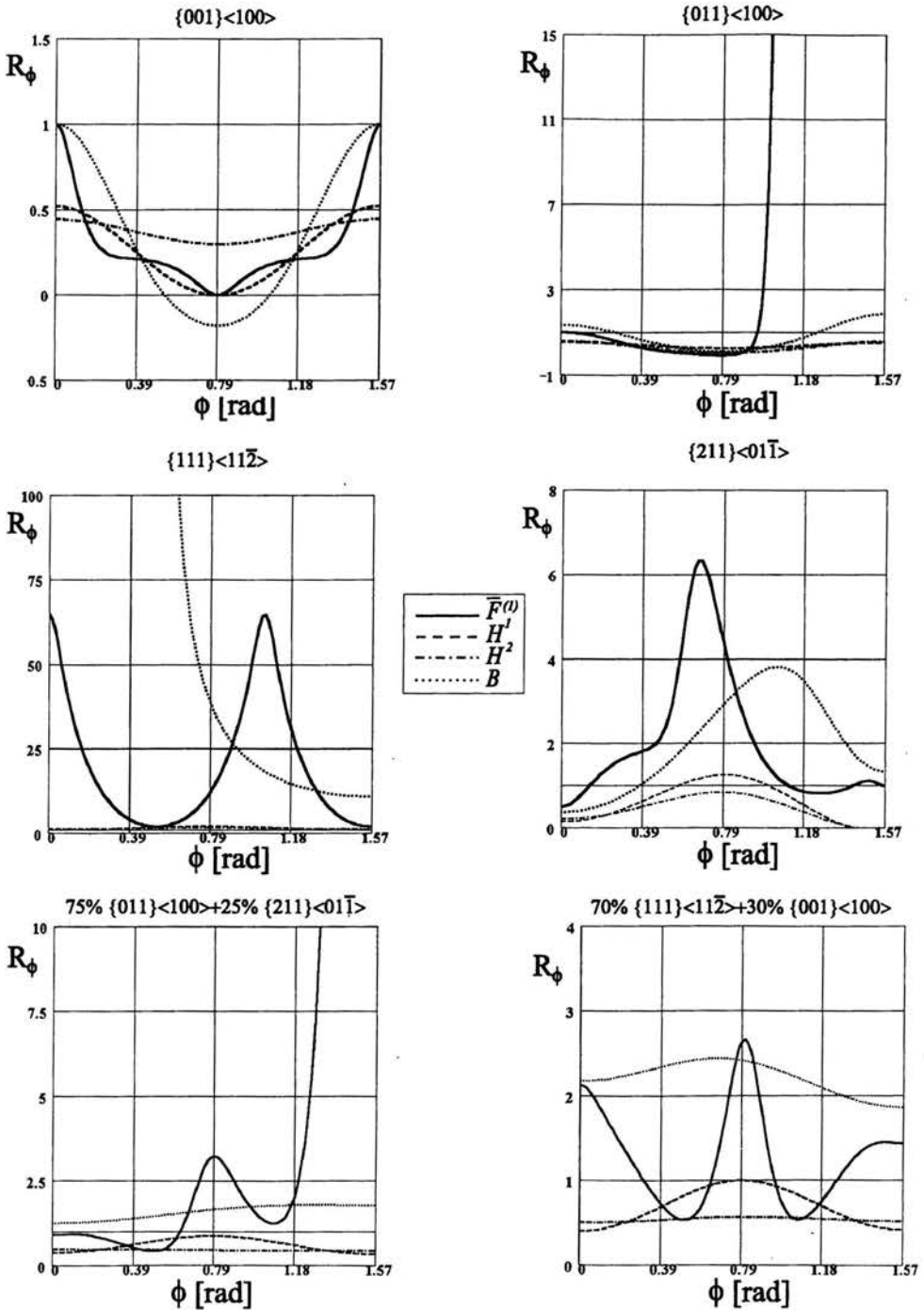
Rysunek 4.43: Wykres naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_\phi/Y_1$  według powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ , gdy  $n = 6$  i powierzchni fenomenologicznych. Oznaczenia linii jak na rysunkach 4.35-4.40.



Rysunek 4.44: Wykres współczynnika Lankforda  $R_\phi$  dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$ .



Rysunek 4.45: Wykres współczynnika Lankforda  $R_\phi$  dla powierzchni plastyczności  $\overline{F}^{(1)}$ , gdy  $n = 3$  i powierzchni fenomenologicznych. Oznaczenia linii jak na rysunkach 4.35-4.40.



Rysunek 4.46: Wykres współczynnika Lankforda  $R_\phi$  dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ , gdy  $n = 6$  i powierzchni fenomenologicznych. Oznaczenia linii jak na rysunkach 4.35-4.40.

jest większa dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  przy wykładniku  $n = 3$ .

Przeprowadzone porównanie powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  z warunkami fenomenologicznymi wskazuje na to, że jest ona w stanie opisać szereg zjawisk, które nie są możliwe do opisanego za pomocą powierzchni fenomenologicznych. Do zjawisk takich należy między innymi *anomalne* zachowanie blach o anizotropii normalnej, występowanie naroży w przekroju dewiatorowym dla blach ortotropowych oraz większa od czterech liczba *uch* technologicznych. Jednocześnie dzięki temu, że w sformułowaniu powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  wykorzystano informację o mikrostrukturze materiału, dość dobrze odpowiada ona powierzchni Bishopa-Hilla oraz wynikom badań doświadczalnych (patrz rysunek 3.6 w rozdziale trzecim oraz rysunek 4.44 prezentowany w tym podrozdziale).

## Rozdział 5

# Ewolucja tekstury i proponowanych powierzchni plastyczności

### 5.1 Tekstury przeciągania

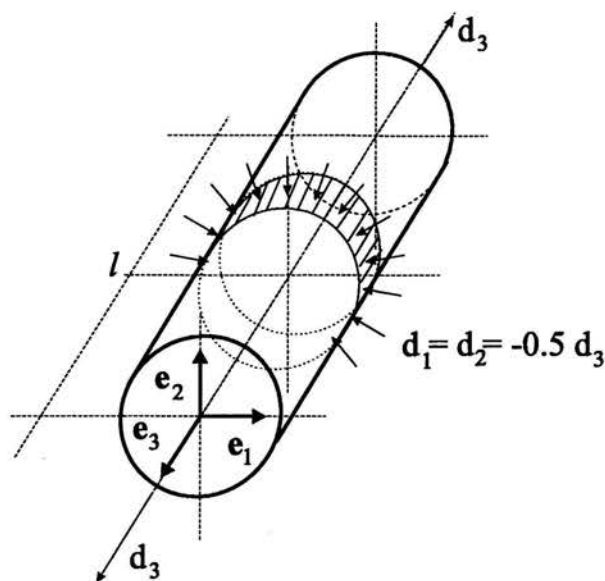
W rozdziale tym pokażemy jak zmieniają się właściwości elementów metalowych w procesach związanych z dużymi deformacjami plastycznymi. Skoncentrujemy się na ewolucji powierzchni plastyczności i związanych z nią parametrów określających zdolność blachy do jej formowania. Zmiana własności blachy będzie związana przede wszystkim z wytworzeniem się w kształtowanym elemencie tekstury krystalograficznej. Zjawisko powstawania tekstury krystalograficznej powoduje, że początkowo izotropowy element staje się anizotropowy. Rozważymy tekstury powstające w wyniku trzech procesów: przeciągania, walcowania i ścinania. W każdym przypadku założymy, że pole tensora prędkości deformacji jest jednorodne w rozważanym elemencie metalowym.

W podrozdziale tym zajmiemy się teksturami przeciągania. Są to tekstury najmniej skomplikowane, chociaż w przypadku blach rzadko spotykane. Tekstura przeciągania może pojawić się w cienkim blaszanym krążku wyciętym z metalowego pręta, jeżeli pręt ten był uprzednio przeciągany przez kołowy otwór w celu zmniejszenia jego średnicy. Im bardziej wydłużony jest przeciągany pręt, tym silniejsza jest tekstura przeciągania w wyciętym krążku. Pokażemy wpływ wzrostu tej tekstury na zmianę powierzchni plastyczności dla wycinanych z pręta blaszanych krążków.

Schematycznie proces przeciągania został przedstawiony na rysunku 5.1. Tensor prędkości deformacji dla tego procesu możemy określić następująco:

$$\mathbf{D} = d_o \cdot \text{diag}\{ -0.5, -0.5, 1.0 \}, \quad (5.1)$$

gdzie  $d_o$  oznacza wartość prędkości deformacji w kierunku  $e_3$ . Rozwój tekstury w polikrystalale dla powyższego jednorodnego pola gradientu deformacji wyznaczyliśmy przy pomocy opracowanego przez nas programu numerycznego. W programie tym wykorzystaliśmy model konstytutywny dla pojedynczego ziarna przedstawiony w rozdziale drugim. Wyznacza on obroty sieci w agregacie ziaren. Tekstury przeciągania obliczyliśmy dla agregatu 1024

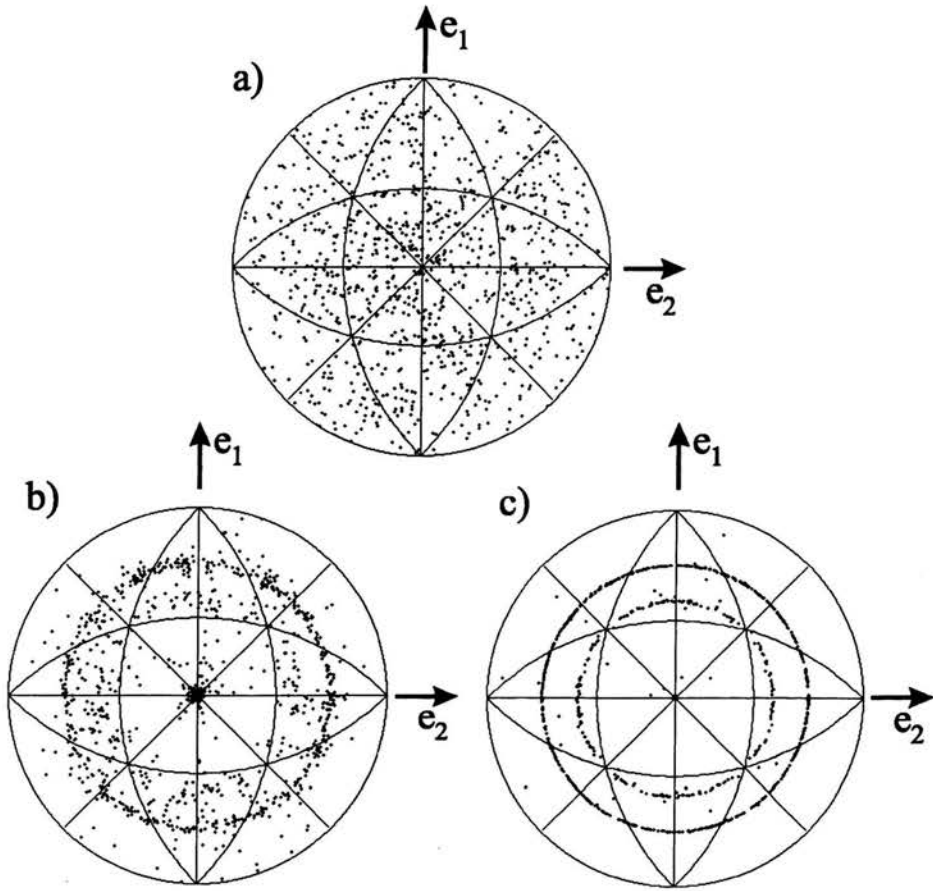


Rysunek 5.1: *Proces przeciągania elementu metalowego.*

ziaren o sieci typu A1. Krytyczne naprężenie ścinające na każdym systemie poślizgu było takie same. Jego wartość była taka sama dla każdego ziarna i oznaczyliśmy ją przez  $\tau_c$ . Początkowy rozkład orientacji w agregacie był jednorodny. Prezentowane wyniki obliczeń wyznaczyliśmy przy założeniu sztywno idealnie plastycznego modelu kryształu przy założeniu, że tensor prędkości deformacji  $D$  jest taki sam w każdym ziarnie. Proces obliczeń był przyrostowy. Proces został poprowadzony do momentu, gdy element uległ dziesięciokrotnemu wydłużeniu ( $l/l_0 = 10$ , gdzie  $l_0$  oznacza początkową długość elementu). Obliczenia wykonywane dla modelu sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem nie wykazały znaczących różnic w otrzymywanej anizotropii materiału.

Rozwój tekstury krystalograficznej w trakcie procesu przeciągania w elemencie polikryształu prezentujemy na rysunku 5.2. Na rysunku tym zamieszczono figury biegunowe  $\{111\}[001]$  dla stanu początkowego ( $l/l_0 = 1$ ), w trakcie procesu ( $l/l_0 = 2$ ) oraz na zakończenie procesu ( $l/l_0 = 10$ ). Proces przeciągania jest procesem w którym mamy do czynienia z deformacją osiowo-symetryczną. Cechę osiowej symetrii mają również otrzymywane figury biegunowe. Pokazują one, że prawie 90% ziaren na zakończenie procesu uzyskuje orientację  $\{111\}\langle uvw \rangle$  (porównaj [75]). Pozostałe ziarna dążą do orientacji  $\{001\}\langle uvw \rangle$ . Uzyskiwany materiał wykazuje zatem anizotropię normalną. Płaszczyzną izotropii jest przekrój o normalnej  $e_3$ . Na podstawie analizy przeprowadzonej w rozdziale czwartym dla blach o takiej symetrii materiału możemy spodziewać się, że w skutek powstałej tekstury wytrzymałość materiału ulega zwiększeniu w kierunku  $e_3$ . Zmianie ulegnie również





Rysunek 5.2: *Figura biegunowa {111}{001}*: a) początkowa, b) w trakcie procesu przeciągania ( $l/l_0 = 2$ ), c) na zakończenie procesu ( $l/l_0 = 10$ )

możliwość formowania takich blach oraz ich podatność na lokalizację odkształceń.

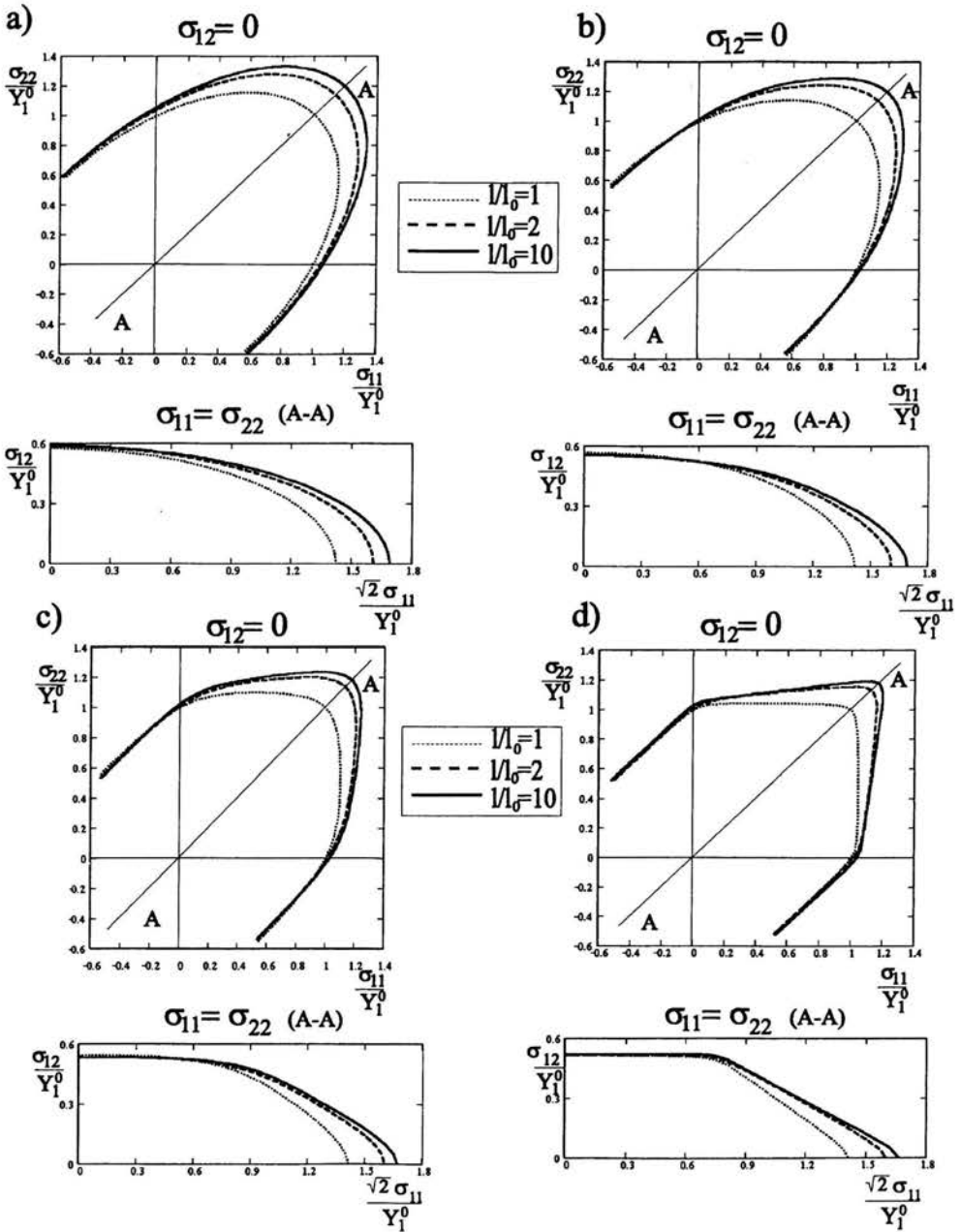
W dalszym ciągu pokażemy ewolucję powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  i powierzchni fenomenologicznych wynikającą z rozwoju tekstury w procesie przeciągania. Przystępując do analizy wszystkie te powierzchnie traktujemy jako początkowe powierzchnie plastyczności. Zmiana tych powierzchni pokazuje jak zmieniają się właściwości początkowo izotropowego elementu metalowego, który poddano przeciąganiu do pewnego zakresu odkształcenia, a następnie odciążono. W kolejnych krokach badamy, jakie właściwości ma element metalowy poddany kolejnym operacjom przeciągania.

W tablicy 5.1 zamieściliśmy naprężenia uplastyczniające materiał o teksturze otrzymanej na poszczególnych stadiach procesu przeciągania dla stanów naprężenia opisanych wzorami (3.42-3.45) w płaszczyźnie o normalnej  $e_3$ . Wartości naprężeń uplastyczniających w stosunku do wartości stałej  $\tau_c$  zostały wyznaczone dla proponowanej powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnych wartościach wykładnika  $n$  na podstawie wzorów (4.38-4.41). Możemy zaobserwować, że szczególnie silnie rośnie wartość naprężeń granicznych  $Y_p$ , która w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  jest równa wartościom naprężeń granicznych przy rozciąganiu w kierunku  $e_3$ . Rośnie również, choć słabiej, wartość naprężenia granicznego przy rozciąganiu w płaszczyźnie izotropii. Niewielkiemu spadkowi ulega natomiast wartość naprężenia granicznego przy ścinaniu  $k$ . Ze względu na izotropię w płaszczyźnie o normalnej  $e_3$  nie powstają w niej ucha technologiczne oraz brak jest pofałdowania na powierzchni bocznej elementów wytłaczanych z blach o takiej teksturze.

$n$	$Y_1 = Y_2$	$Y_p$	$k$	$Y_1 = Y_2$	$Y_p$	$k$	$Y_1 = Y_2$	$Y_p$	$k$
	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$	$[\tau_c]$
	stan początkowy			zakres procesu $l/l_0 = 2$			zakres procesu $l/l_0 = 10$		
1	1.978	1.989	1.140	2.064	2.252	1.161	2.096	2.366	1.169
3	1.994	1.995	1.131	2.020	2.267	1.111	2.036	2.383	1.106
6	2.073	2.067	1.133	2.097	2.350	1.110	2.100	2.445	1.107
20	2.081	2.075	1.075	2.099	2.353	1.075	2.116	2.449	1.091

Tablica 5.1: Zmiana naprężeń granicznych dla blachy przy stanach naprężenia (3.42-3.45) znajdujących się na powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  (wzory (4.38-4.41)) w kolejnych stadiach procesu przeciągania.

Zmiana kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  dla różnych wartości wykładnika  $n$  została pokazana na rysunku 5.3. Założyliśmy płaski stan naprężenia w płaszczyźnie o normalnej  $e_3$ . Wartości naprężeń zostały odniesione do wartości naprężenia granicznego  $Y_1$  dla materiału w stanie początkowym. Niezależnie od wykładnika  $n$  powierzchnia plastyczności ulega silnemu wydłużeniu w kierunku  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ . Można zauważyć, że w momencie gdy długość elementu zwiększyła się dwukrotnie, zmiana powierzchni plastyczności była znacząca. Później zmiany te są już mniejsze.



Rysunek 5.3: *Ewolucja kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  na skutek procesu przeciągania - przekroje  $\sigma_{12} = 0$  i  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ : a)  $n = 1$ , b)  $n = 3$ , c)  $n = 6$ , d)  $n = 20$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do wartości naprężenia granicznego  $Y_1^0$  dla stanu początkowego.*

Zmiana kształtu powierzchni plastyczności wpływa na proces plastycznego płynięcia. Zmianie ulegają własności blachy związane z możliwością jej formowania. Jak pisaliśmy w rozdziale czwartym, o zdolności blachy do przeciwstawiania się przewężeniu decyduje współczynnik Lankforda  $R$ . Tworzenie się tekstury  $\{111\}\langle uvw \rangle$  zwiększa jego wartość. Wartości tego współczynnika dla materiału otrzymywanego w poszczególnych stadiach procesu przeciągania obliczone na podstawie powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  (wzór (4.34)) zamieszczone zostały w tabelcy 5.2. Wzrost współczynnika  $R$  w trakcie procesu przeciągania sprawia, że element metalowy poddany tego typu obróbce plastycznej uzyskuje większą odporność na przewężenie.

Innym parametrem określającym własności elementu związane z jego formowaniem jest parametr  $P$  dany wzorem (4.95). Opisuje on zdolność blachy do przeciwstawiania się szykowaniu związanemu z lokalizacją odkształceń. Zmianę wartości tego parametru wywołaną procesem przeciągania pokazuje tablica 5.2. Niezależnie od wykładnika  $n$ , zmiana kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  powoduje spadek wartości parametru  $P$ . Zjawisko to wskazuje na pogorszenie się własności elementu. Im większe wydłużenie podczas przeciągania, tym zdolność materiału do przeciwstawiania się szykowaniu jest mniejsza i mniejsze są odkształcenia graniczne możliwe do uzyskania podczas dwuosiowego rozciągania elementu.

$n$	$l/l_0 = 1$		$l/l_0 = 2$		$l/l_0 = 10$	
	$R$	$P$	$R$	$P$	$R$	$P$
1	1.022	1.153	1.381	1.125	1.550	1.115
3	1.043	1.142	1.587	1.097	1.862	1.082
6	1.079	1.104	1.807	1.062	2.223	1.050
20	1.186	1.046	1.697	1.022	1.239	1.015

Tablica 5.2: Zmiana współczynnika Lankforda  $R$  oraz parametru  $P$  określających formowalność blachy dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  w kolejnych stadiach procesu przeciągania.

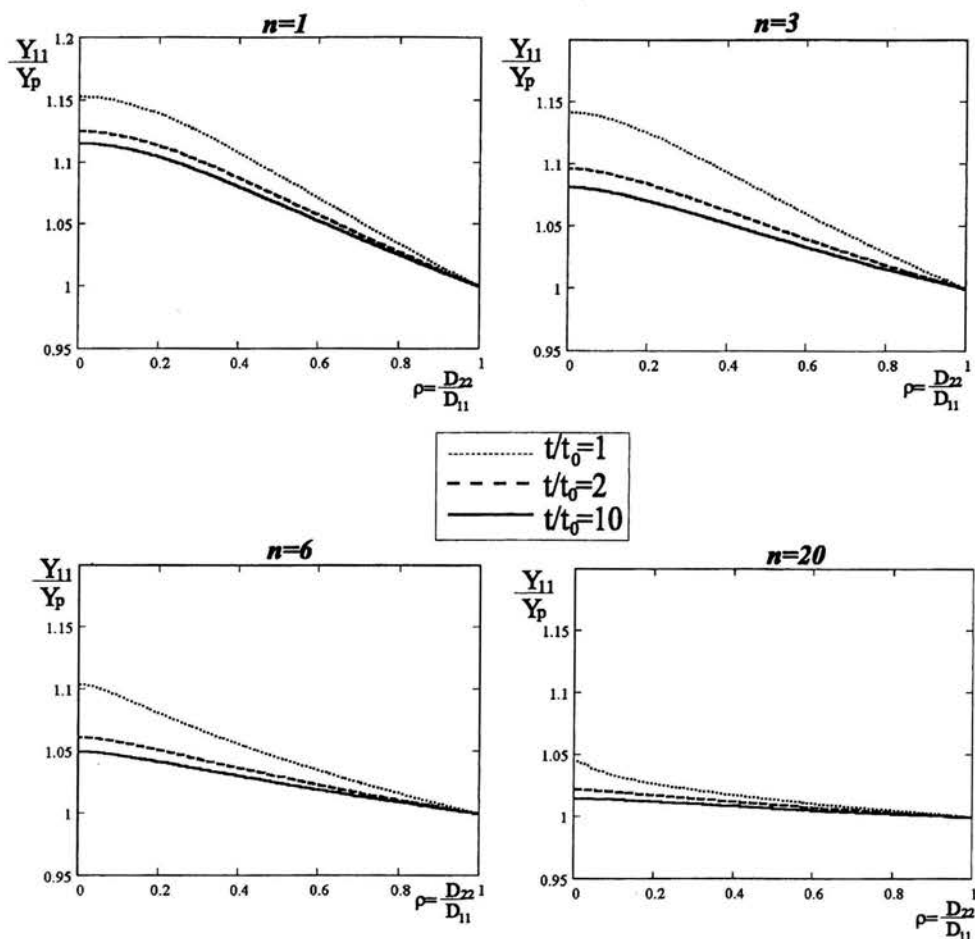
Wpływ zmiany kształtu powierzchni plastyczności na wartość odkształceń granicznych pokazaliśmy przy wykorzystaniu wprowadzonych przez Liana [76] wykresów wzmocnienia wynikającego z kształtu powierzchni plastyczności (YSSHD) (rysunek 5.4). Możemy zaobserwować, że dla dowolnych ścieżek odkształcenia takich, że:

$$\rho = \frac{D_1}{D_2} > 0, \quad (5.2)$$

wartości odkształceń granicznych maleją. Wykazywane wzmocnienie związane z kształtem powierzchni plastyczności jest coraz słabsze. Wartości odkształceń granicznych w procesach, w których

$$\rho = \frac{D_1}{D_2} < 0, \quad (5.3)$$

związane są z wartością współczynnika Lankforda  $R$ . Ze względu na wzrost tego parametru podczas procesu przeciągania, odkształcenia graniczne dla procesów opisanych wzorem (5.3) będą rosły.



Rysunek 5.4: Zmiana wykresu wzmocnienia wynikającego z kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  (YSSHD).

Przejdziemy teraz do ewolucji anizotropii przewidywanej przez warunki fenomenologiczne, a mianowicie warunek Hilla z roku 1990 oraz warunek Barlata i Liana z roku 1989. Materiał poddany przeciąganiu pozostaje stale izotropowy w płaszczyźnie o normalnej  $\mathbf{e}_3$ , dlatego wymienione warunki opisane są odpowiednio wzorami (3.50) i (3.62). Dwa pa-

parametry materiałowe występujące w tych warunkach ulegają zmianie wywołanej tworzącą się teksturą, a ich aktualna wartość określona jest z powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  o  $n = 12$ . Podobnie jak w części rozdziału czwartego dotyczącej blach o anizotropii normalnej, parametry występujące w warunku Hilla zostały określone na dwa sposoby: do definicji powierzchni wykorzystaliśmy aktualne wartości wytrzymałości  $Y_p$  i  $k$  lub aktualne wartości  $Y_p$  i  $Y_1$ . Aktualne wartości parametrów materiałowych występujących w warunku Barlata i Liana określiliśmy na podstawie wartości wytrzymałości  $Y_p$  i  $Y_1$  (tablica 5.3).

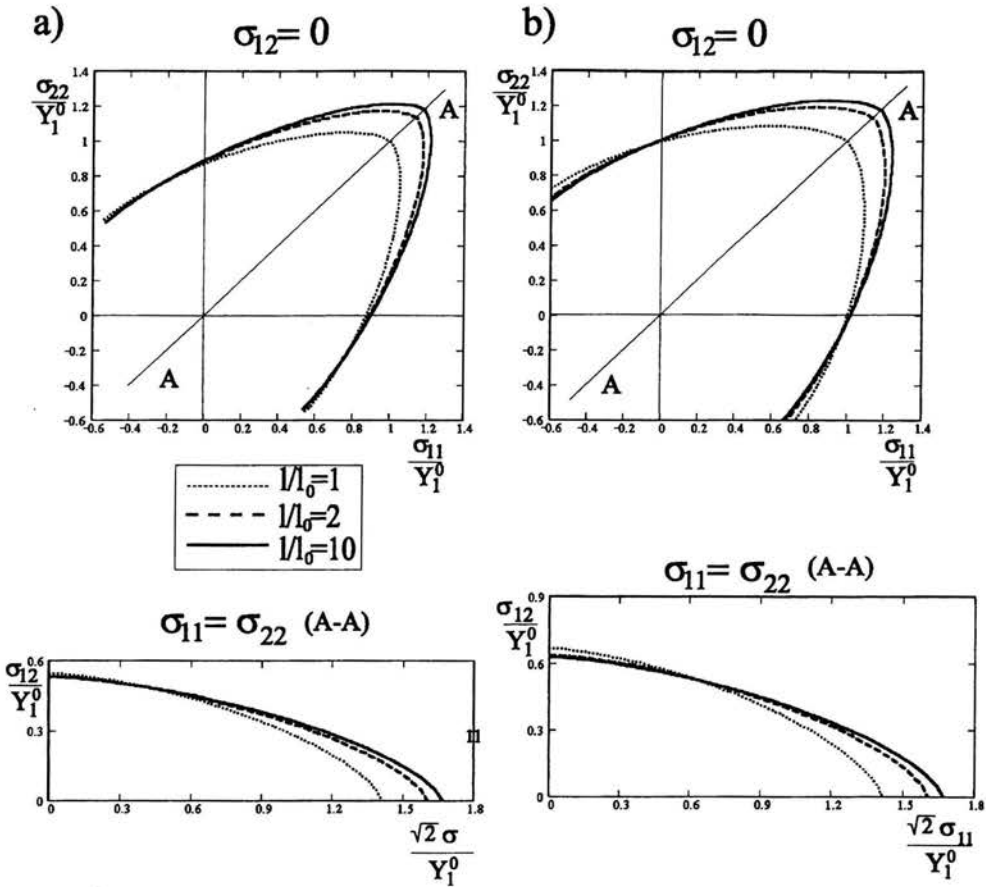
	$Y_1 = Y_2 [\tau_c]$	$Y_p [\tau_c]$	$k [\tau_c]$	$R$	$P$
Warunek Hilla, $m = 1.5 (H^1)$					
$l/l_0 = 1$	1.806	2.067	1.133	0.731	1.052
$l/l_0 = 2$	1.841	2.350	1.110	1.040	1.034
$l/l_0 = 10$	1.854	2.445	1.107	1.142	1.030
Warunek Hilla, $m = 1.5 (H^2)$					
$l/l_0 = 1$	2.072	2.067	1.388	0.408	1.092
$l/l_0 = 2$	2.097	2.350	1.327	0.678	1.057
$l/l_0 = 10$	2.100	2.445	1.309	0.777	1.049
Warunek Barlata, $m = 8$					
$l/l_0 = 1$	2.072	2.067	1.132	0.955	1.088
$l/l_0 = 2$	2.097	2.350	1.078	3.982	1.088
$l/l_0 = 10$	2.100	2.445	1.071	5.751	1.088

Tablica 5.3: Zmiana wartości granicznych dla stanów naprężeń (3.42-3.45) oraz współczynnika Lankforda  $R$  i parametru  $P$  dla dwóch powierzchni plastyczności Hilla ( $m = 1$ ): ( $H^1$ ) - gdy do definicji powierzchni wykorzystano stałe  $Y_p$  i  $k$ ; ( $H^2$ ) - gdy do definicji powierzchni wykorzystano stałe  $Y_p$  i  $Y_1$ , a także dla powierzchni plastyczności Barlata ( $m = 8$ ), w kolejnych stadiach procesu przeciągania.

Otrzymaną ewolucję kształtu powierzchni Hilla dla płaskiego stanu naprężenia przy  $m = 1.5$  pokazaliśmy na rysunku 5.5. Powierzchnia ta, podobnie jak powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$ , ulega wydłużeniu w kierunku  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ . Możemy również zaobserwować, że warunek Hilla określony na podstawie naprężeń granicznych  $Y_p$  i  $k$  zanizła wartość pozostałych naprężeń granicznych w stosunku do powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ , natomiast przy warunku Hilla określonym na podstawie  $Y_p$  i  $Y_1$  mamy do czynienia ze zjawiskiem przeciwnym.

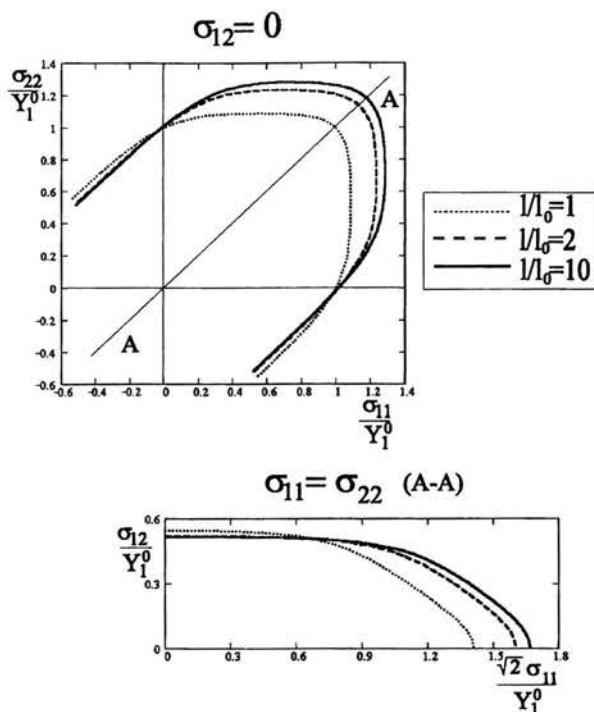
W przypadku powierzchni Barlata o  $m = 8$  oprócz wydłużenia w kierunku  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  mamy również do czynienia ze zmianą stanów naprężenia dla których powstają naroża (rysunek 5.6). Ulegają one przesunięciu. Zjawisko to nie występuje w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ .

W tablicy 5.3 możemy porównać zmianę współczynnika Lankforda  $R$  oraz parametru  $P$  w trakcie procesu przeciągania wyznaczoną na podstawie warunków fenomenologicz-



Rysunek 5.5: *Ewolucja kształtu powierzchni plastyczności Hilla ( $m = 1.5$ ) w trakcie procesu przeciągania - przekroje  $\sigma_{12} = 0$  i  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ : a) w obliczeniach wykorzystano naprężenia graniczne  $Y_p$  i  $k$  ( $H^1$ ), b) w obliczeniach wykorzystano naprężenia graniczne  $Y_p$  i  $Y_1$  ( $H^2$ ). Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowego naprężenia granicznego  $Y_1^0$ .*

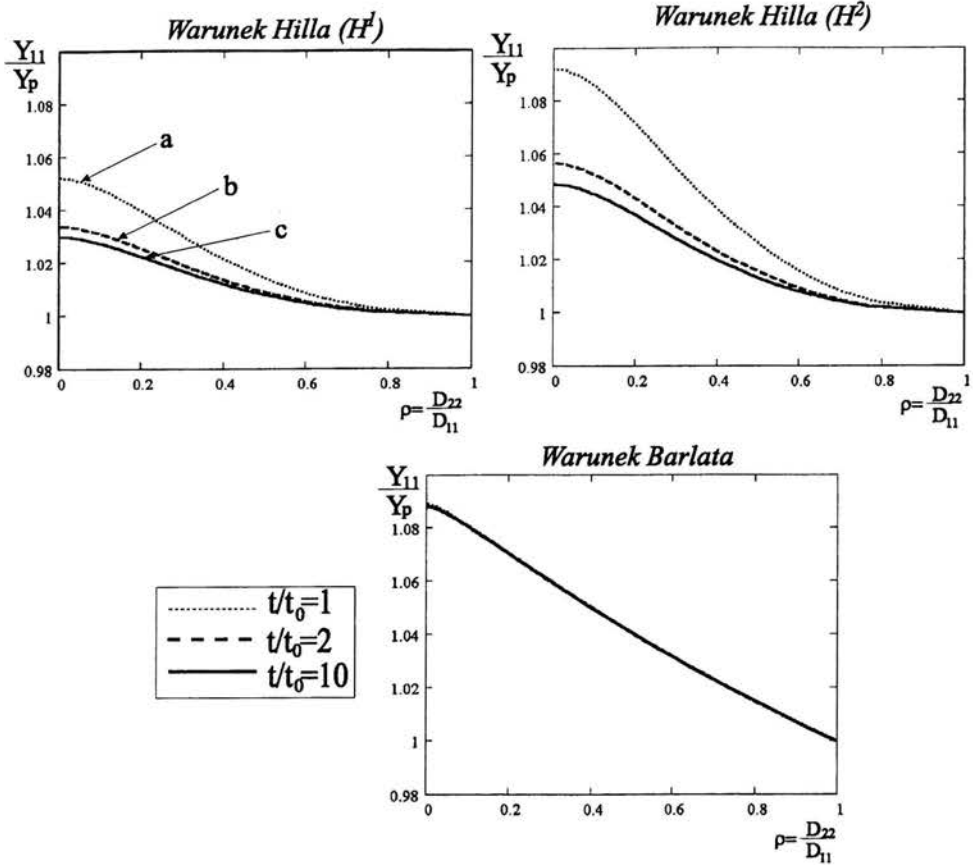
nych. Należy zauważyć, że warunek Hilla niezależnie od sposobu wyznaczenia parametrów materiałowych w nim występujących zaniża wartość współczynnika  $R$  w stosunku do powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ . Ponadto w przypadku, gdy parametry materiałowe zostały określone na podstawie  $Y_p$  i  $Y_1$ , warunek Hilla opisuje *anomalne* zachowanie się materiału (przy  $Y_p > Y_1$  współczynnik  $R < 1$ ), jakościowo różne od opisywanego przez powierzchnię  $\bar{F}^{(1)}$ . Natomiast powierzchnia Barlata zawyża wartość współczynnika Lankforda. Podczas procesu przeciągania rośnie on znacznie szybciej, niż rósł w przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ .



Rysunek 5.6: Ewolucja powierzchni plastyczności Barlata ( $m = 8$ ) w trakcie procesu przeciągania - przekroje  $\sigma_{12} = 0$  i  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowego naprężenia granicznego  $Y_1^0$ .

Wartość parametru  $P$  dla powierzchni Hilla, dla obu jej wariantów, spada na skutek procesu przeciągania. Jego wartość jest mniejsza niż dla powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  przy  $n = 1$ ,  $n = 3$  i  $n = 6$ . Wartość parametru  $P$  dla powierzchni Barlata praktycznie nie ulega zmianie. Wpływ zmiany kształtu powierzchni plastyczności na zmianę wykresu odkształceń granicznych dla ścieżek odkształcenia określonych przez nierówność 5.2 możemy odczytać na podstawie wykresu YSSHD (rysunek 5.7). Według warunku Hilla odkształcenia graniczne ulegają zmniejszeniu natomiast warunek Barlata nie wykazuje zmian w wykresie odkształceń granicznych dla badanych ścieżek odkształcenia.



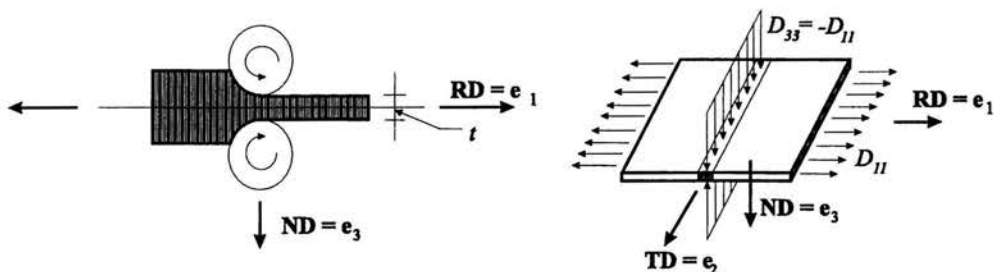


Rysunek 5.7: Zmiana wykresu wzmocnienia wynikającego z kształtu dwóch powierzchni plastyczności Hilla ( $m = 1.5$ ): ( $H^1$ ) - gdy w obliczeniach wykorzystano naprężenia graniczne  $Y_p$  i  $k$ , ( $H^2$ ) - gdy w obliczeniach wykorzystano naprężenia graniczne  $Y_p$  i  $Y_1$  oraz powierzchni plastyczności Barlata i Liana ( $m = 8$ ).

Podsumowując rozważania dotyczące rozwoju anizotropii elementu metalowego poddanego przeciągnięciu możemy stwierdzić, że proces ten zwiększa wytrzymałość materiału w kierunku przeciągania. Wpływa korzystnie na właściwości związane z kształtowaniem materiału przy odkształceniach określonych nierównością (5.3) poprzez podwyższenie współczynnika  $R$ , natomiast niekorzystnie na wielkość odkształceń granicznych w procesach w których odkształcenia określone są nierównością (5.2) z powodu spadku parametru  $P$ .

## 5.2 Tekstury walcowania

Przejdziemy teraz do opisu rozwoju plastycznej anizotropii w blaszce poddanej procesowi walcowania. W rzeczywistych procesach walcowania rozwój tekstury jest jednym z głównych źródeł rozwoju anizotropii choć oczywiście nie jedynym. W dalszym ciągu zakładamy, że walcowana blacha jest początkowo izotropowa, a powstająca anizotropia jest wynikiem wyłącznie rozwoju tekstury krystalograficznej.



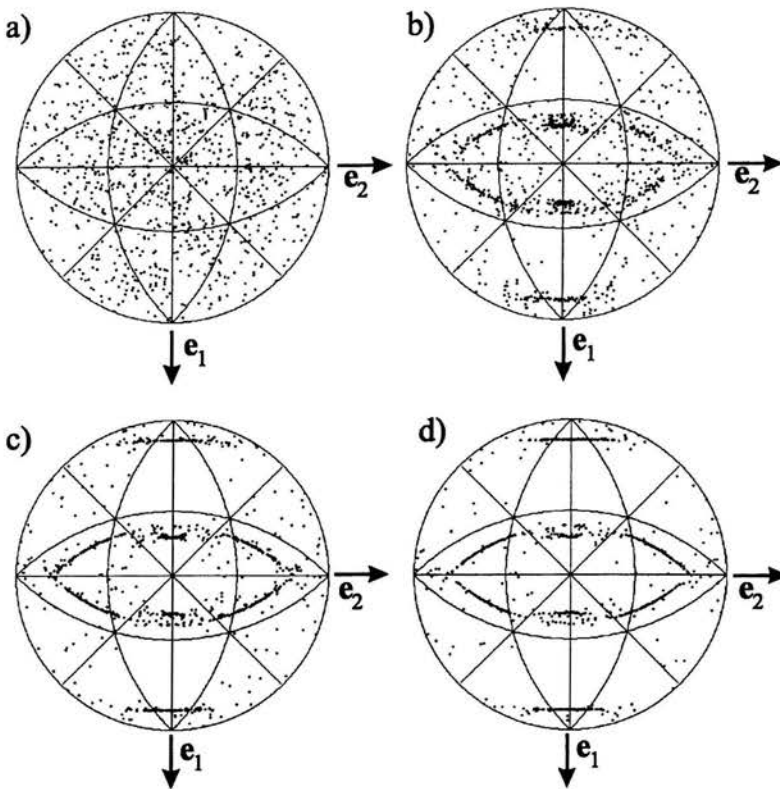
Rysunek 5.8: *Proces walcowania blachy.*

Schematycznie proces walcowania przedstawiony został na rysunku 5.8. Podobnie jak w przypadku procesu przeciągania, rozwój tekstury w walcowanym elemencie metalowym został wyznaczony przy założeniu, że każde pojedyncze ziarno tworzące agregat polikrystaliczny jest ziarnem sztywno idealnie plastycznym. Początkowo izotropowy rozkład orientacji został zamodelowany za pomocą 1024 różnie zorientowanych ziaren o sieci typu A1 i takiej samej wartości krytycznych naprężeń ścinających  $\tau_c$  na 12 systemach poślizgu. W rozważanym elemencie blachy mamy do czynienia z jednorodnym polem gradientu deformacji o postaci:

$$\mathbf{D} = d_o \cdot \text{diag}\{ 1.0, 0.0, -1.0 \}, \quad (5.4)$$

gdzie  $d_o$  określa prędkość odkształcenia w kierunku walcowania. Przyjmujemy, że kierunek  $e_1$  jest zgodny z kierunkiem walcowania, natomiast kierunek  $e_3$  jest prostopadły do płaszczyzny blachy.

Podobnie jak w przypadku przeciągania do opisu tekstury powstającej podczas procesu walcowania blachy zastosowaliśmy model opisany w rozdziale drugim i zbudowany na jego podstawie program komputerowy. Otrzymana tekstura krystalograficzna dla różnych zakresów procesu walcowania została pokazana na rysunku 5.9 przy wykorzystaniu figur biegunowych  $\{111\}[001]$ . Jak możemy zauważyć, początkowo izotropowa blacha w wyniku walcowania staje się ortotropowa. Główne osie ortotropii w płaszczyźnie blachy pokrywają się z kierunkiem walcowania  $e_1$  i kierunkiem do niego prostopadłym  $e_2$ . Należy zaznaczyć, że otrzymana postać figury biegunowej jest zbliżona do otrzymywanych w rzeczywistych



Rysunek 5.9: *Figura biegunowa*  $\{111\}[001]$ : a) początkowa, b) dla  $t/t_0 = 0.5$ , c) dla  $t/t_0 = 0.2$  d) dla  $t/t_0 = 0.1$ .

eksperymentach (porównaj [75]). Na podstawie badań doświadczalnych stwierdzono, że na skutek walcowania w metalach o sieci typu Al tworzy się tekstura o trzech głównych składnikach:  $\{110\}\langle 1\bar{1}2\rangle$ ,  $\{112\}\langle 11\bar{1}\rangle$ ,  $\{123\}\langle 634\rangle$ .

Rozwój tekstury i związanej z nią anizotropii plastycznej blachy wpływa na jej cechy wytrzymałościowe oraz własności związane z procesami formowania. W tabelicy 5.4 zestawiliśmy wartości naprężeń uplastyczniających w testach (3.42)-(3.45) dla blach poddanych walcowaniu w różnym stopniu. Podana w tabeli wartość  $t/t_0$  oznacza stosunek aktualnej grubości blachy  $t$  do grubości początkowej  $t_0$ . Możemy zauważyć, że najsilniej rośnie wartość naprężenia uplastyczniającego przy rozciąganiu w kierunku walcowania ( $Y_1$ ), słabiej w kierunku do niego prostopadłym ( $Y_2$ ). Spada natomiast w stosunku do wartości początkowej wartość naprężenia uplastyczniającego przy rozciąganiu pod kątem  $45^\circ$  do kierunku

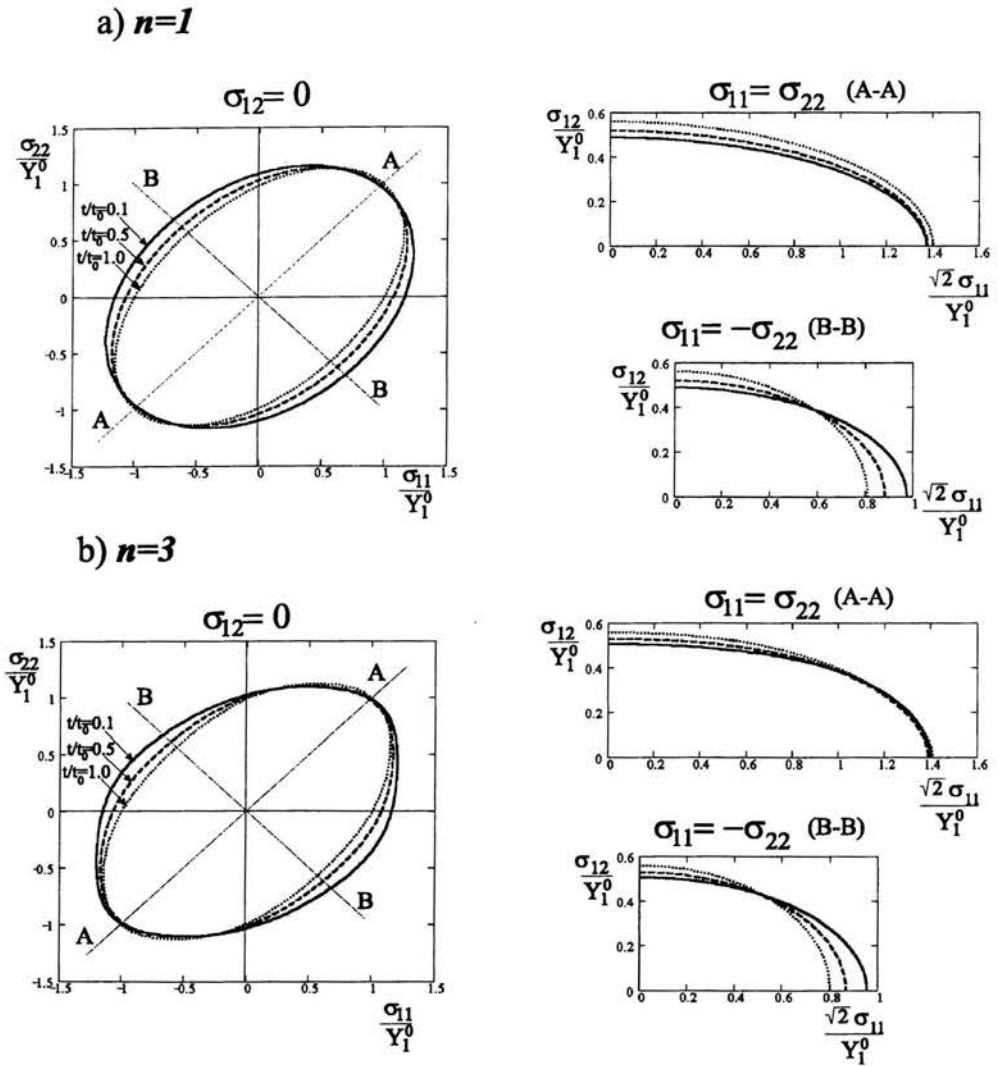
walcowania ( $Y_{45}$ ). Obserwujemy również osłabienie materiału w wyniku wartości naprężeń uplastyczniających przy czystym ścinaniu ( $k$ ).

$n$	$Y_1 [\tau_c]$	$Y_2 [\tau_c]$	$Y_{45} [\tau_c]$	$Y_p [\tau_c]$	$k [\tau_c]$
stan początkowy: $t/t_0 = 1.0$					
1	1.978	1.978	1.978	1.989	1.140
3	1.994	1.994	1.994	1.995	1.131
6	2.073	2.073	2.073	2.067	1.133
20	2.081	2.081	2.081	2.075	1.075
zakres procesu $t/t_0 = 0.5$					
1	2.109	2.090	1.856	1.959	1.055
3	2.132	2.042	1.930	1.963	1.072
6	2.220	2.120	2.023	2.043	1.093
20	2.193	2.109	2.056	2.068	1.060
zakres procesu $t/t_0 = 0.2$					
1	2.226	2.187	1.786	1.967	1.010
3	2.227	2.080	1.893	1.978	1.036
6	2.300	2.176	1.994	2.059	1.062
20	2.225	2.168	2.043	2.077	1.044
zakres procesu $t/t_0 = 0.1$					
1	2.304	2.213	1.764	1.955	0.988
3	2.295	2.079	1.875	1.986	1.022
6	2.362	2.184	1.979	2.074	1.049
20	2.296	2.200	2.035	2.090	1.038

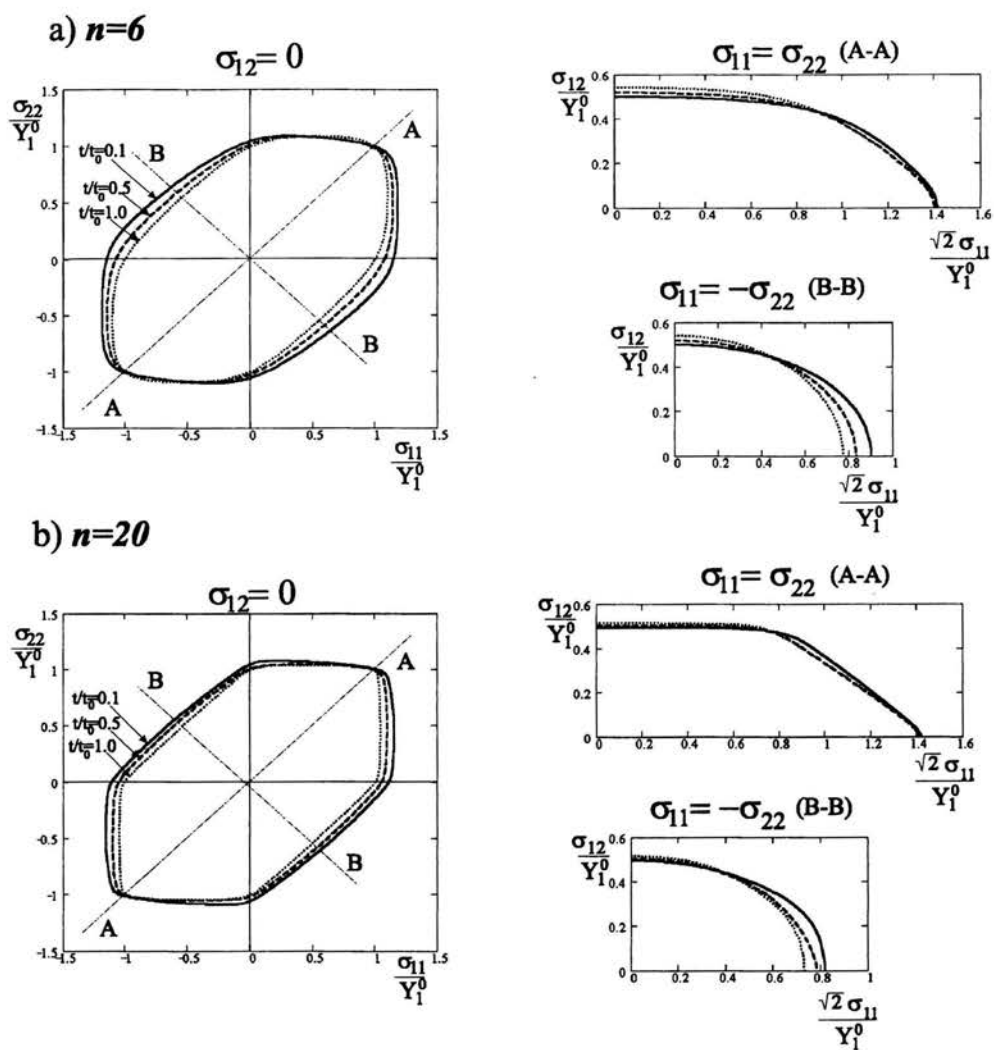
Tablica 5.4: Zmiana wartości granicznych dla stanów naprężeń (3.42-3.45) oraz naprężeń granicznych przy rozciąganiu pod kątem  $45^\circ$  do kierunku walcowania dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  (wzory (4.38-4.41) i 4.10) dla różnych zakresów procesu walcowania.

Na rysunkach 5.10 i 5.11 obserwujemy ewolucję kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ , przy różnych wartościach wykładnika  $n$ , związanej z różnym zakresem procesu walcowania. Na rysunkach tych  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  są składowymi płaskiego tensora naprężenia w bazie  $\{e_\alpha\}$ . Analizowana powierzchnia plastyczności rozszerza się w kierunku  $\sigma_{11}$  i spłaszcza się w kierunku  $\sigma_{12}$ . W przekroju  $\sigma_{12} = 0$  obserwujemy obrót powierzchni, który wiąże się ze zmianą położenia naroży plastycznych.

Zmiana kształtu powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  wpływa na proces plastycznego płynięcia. Na podstawie kształtu wykresu  $\sigma_\phi$  (rysunek 5.12) możemy przewidzieć liczbę możliwych *uch* technologicznych na obrzeżach elementów wytłaczanych z walcowanej blachy [16]. Dla  $n = 1$ ,  $n = 3$

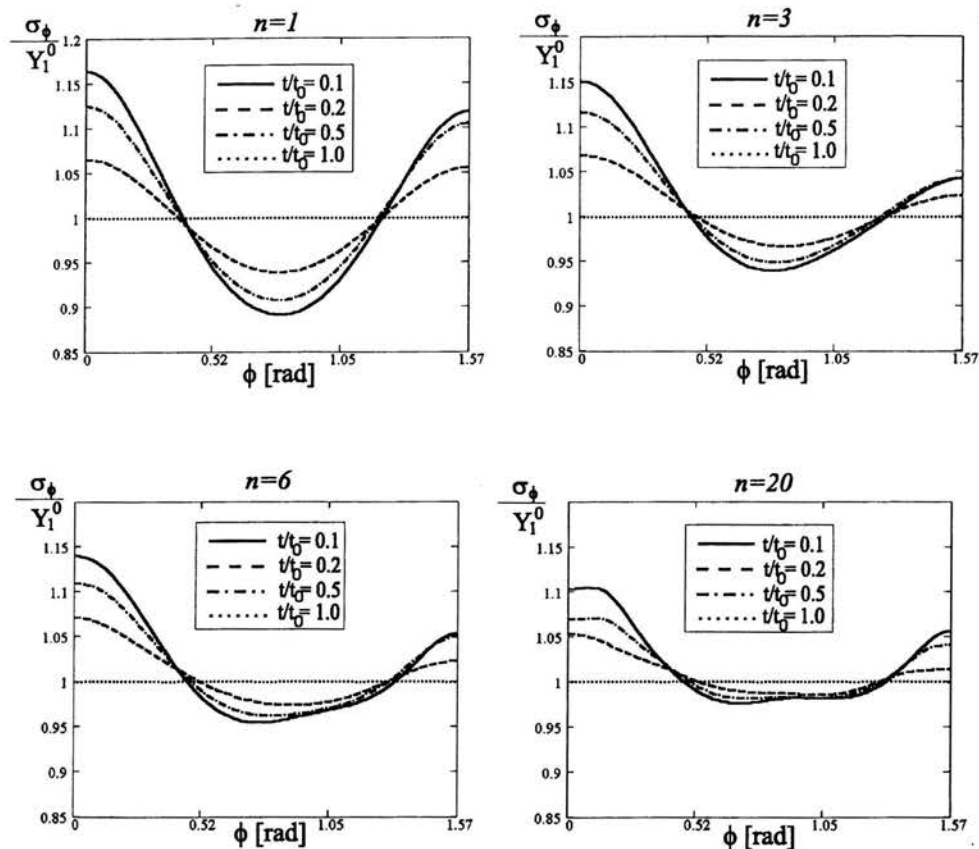


Rysunek 5.10: Ewolucja kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  na skutek procesu walcowania: a)  $n = 1$ , b)  $n = 3$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowych naprężeń granicznych  $Y_1^0$ .



Rysunek 5.11: Ewolucja powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  na skutek procesu walcowania: a)  $n = 6$ , b)  $n = 20$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowych naprężeń granicznych  $Y_1^0$ .

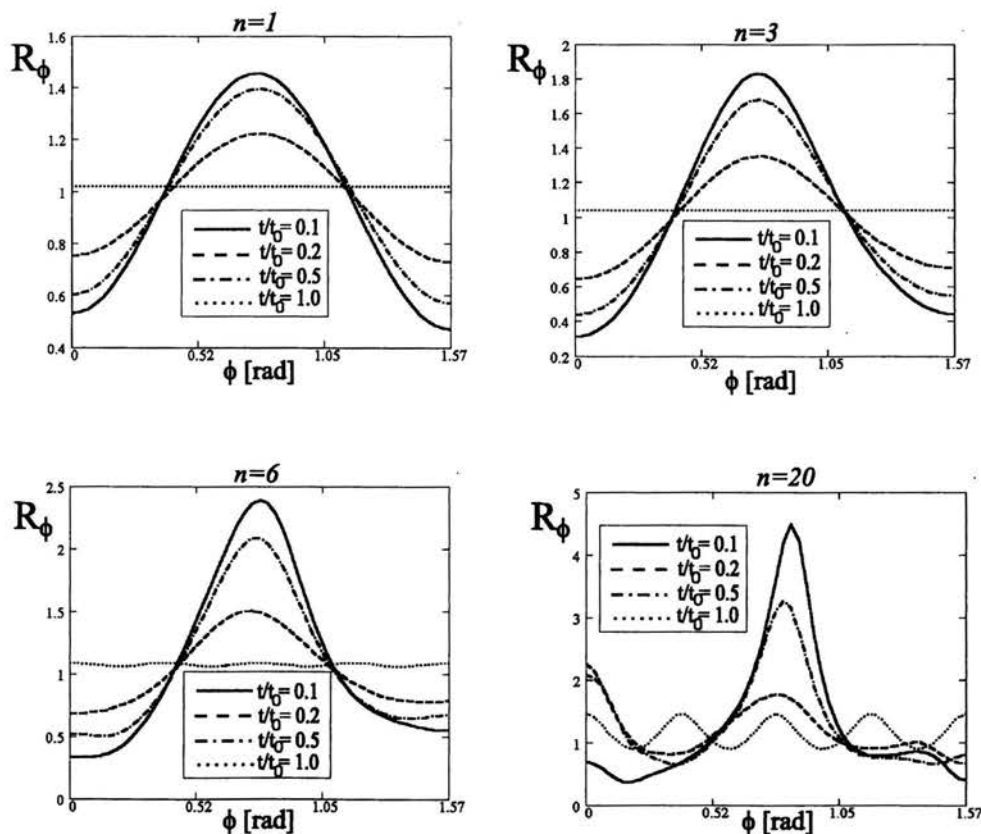
i  $n = 6$  ich liczba wynosi cztery, a maksima nierówności brzegu wytłaczanego elementu znajdują się w okolicy kąta  $\phi = 45^\circ$  do kierunku walcowania, a następnie pojawiających się co  $90^\circ$ . Jest to liczba i położenie najczęściej obserwowane w procesach rzeczywistych. Dla  $n = 20$  można zaobserwować cztery dodatkowe *ucha*, ale o dużo mniejszej amplitudzie. Generalnie, im mniejszy wykładnik  $n$ , tym amplituda przewidywanych nierówności brzegu jest większa.



Rysunek 5.12: Zmiana naprężeń granicznych przy rozciąganiu pod kątem  $\phi$  do osi  $e_1$  (patrz rysunki 4.8 i 5.8) na skutek procesu walcowania dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowych naprężeń granicznych  $Y_1^0$ .

Wykres współczynnika Lankforda  $R_\phi$ , którego wartość określa zdolność blachy do przeciwstawiania się przewężeniu, został zamieszczony na rysunku 5.13. Wysoką wartość  $R_\phi$

korzystną ze względu na formowalność blachy i wskazującą na jej zdolność do przeciwstawiania się przewężeniu obserwujemy w kierunku nachylonym pod kątem  $\phi = 45^\circ$  do kierunku walcowania. Wartość średnia współczynnika Lankforda oscyluje tu wokół jedności. Istnieją zakresy kąta  $\phi$  (w pobliżu  $\phi = 0^\circ$  i  $\phi = 90^\circ$ ) dla których współczynnik  $R_\phi$  jest mniejszy od jedności. Taka wartość współczynnika  $R_\phi$  wskazuje, że podczas rozciągania próbki w kierunku  $R_\phi$  możemy spodziewać się lokalizacji odkształceń w postaci przewężenia. Istnieje również zakres kąta  $\phi$  (w pobliżu  $\phi = 45^\circ$ ) dla którego przewidywana jest lokalizacja odkształceń w postaci szyjkowania ( $R_\phi > 1$ ). Im większa jest redukcja grubości blachy przy walcowaniu, tym różnice w wartości współczynnika Lankforda są większe przy tej samej wartości wykładnika  $n$ .



Rysunek 5.13: Zmiana wartości współczynnika Lankforda  $R_\phi$  (patrz rysunek 3.1) na skutek procesu walcowania dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ .



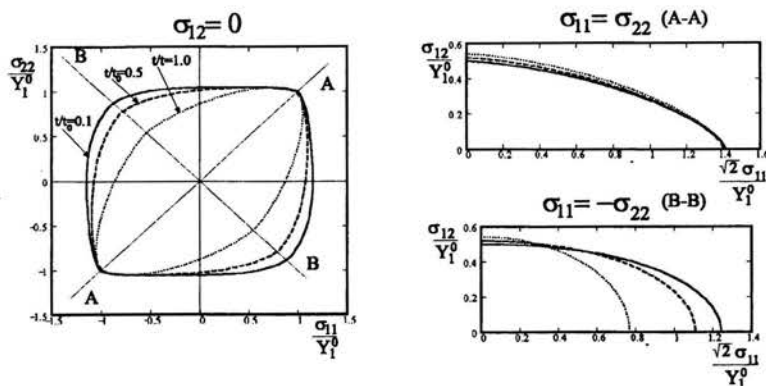
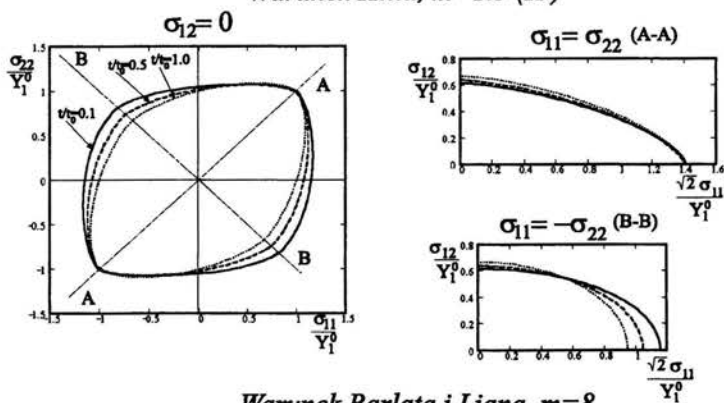
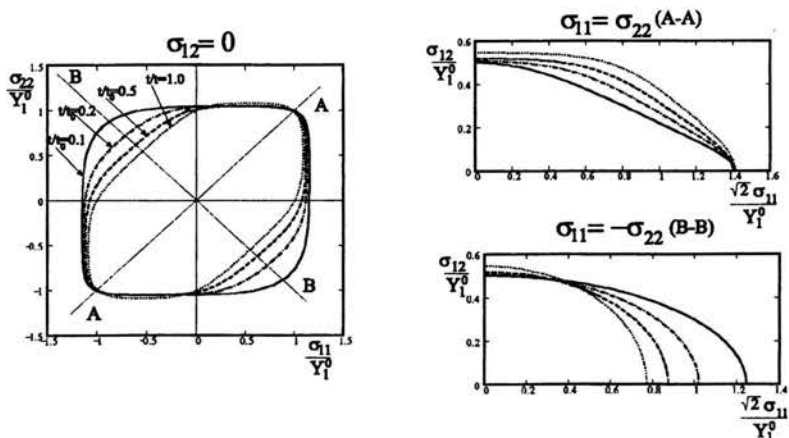
Przejdźmy do porównania wyników otrzymywanych przy wykorzystaniu powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  z wynikami otrzymywanymi przy wykorzystaniu powierzchni fenomenologicznych. W tablicy 5.5 zamieściliśmy wartości parametrów opisujących anizotropię w warunku Hilla z 1990 roku i warunku Barlata i Liana z 1989 roku. Do wyznaczenia wszystkich parametrów wykorzystaliśmy wartości naprężeń uplastyczniających  $Y_1, Y_2, Y_p$  i  $k$  określone na podstawie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ , dla  $n = 6$ , przy wykorzystaniu wzorów (4.38)-(4.41) i wartość  $Y_{45}$  określoną na podstawie zależności (4.10) przy  $\theta = 90^\circ$  i  $\phi = 45^\circ$ . Parametry  $h, p$  i  $\bar{a}$  występujące w warunku Barlata obliczyliśmy według wzorów (3.60), natomiast parametr  $a$  dla warunku Hilla ze wzoru (3.46<sub>1</sub>). Parametr  $b$  występujący w warunku Hilla obliczyliśmy na dwa sposoby: wykorzystując wzór (3.46<sub>2</sub>) -  $H^1$  oraz wykorzystując wzór (3.47<sub>1</sub>) -  $H^2$ . Dla blachy w stanie początkowym zostały przyjęte izotropowe postaci warunków, odpowiednio (3.50) w przypadku warunku Hilla i (3.62) w przypadku warunku Barlata i Liana. Dla otrzymanych wartości parametrów, w przypadku obu powierzchni plastyczności spełnione było kryterium wypukłości.

$t/t_0$	War. Barlata, $m = 8$			War. Hilla, $m = 1.5 (H^1)$		War. Hilla, $m = 1.5 (H^2)$	
	$h$	$p$	$\bar{a}$	$a$	$b$	$a$	$b$
1.0	1	1	1.022	0	0	0	0
0.5	1.047	1.235	1.591	0.045	-0.971	0.045	-0.285
0.2	1.057	1.537	1.894	0.052	-1.199	0.052	-0.468
0.1	1.081	1.831	1.974	0.073	-1.309	0.073	-0.563

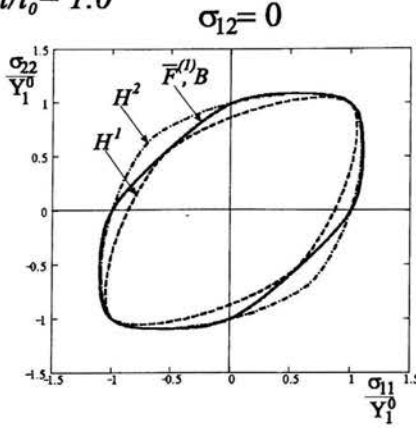
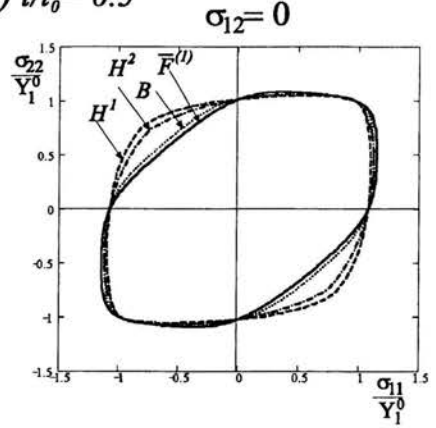
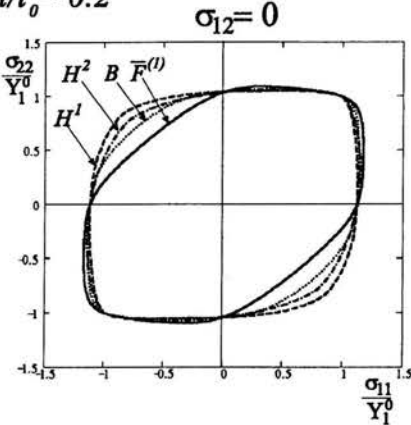
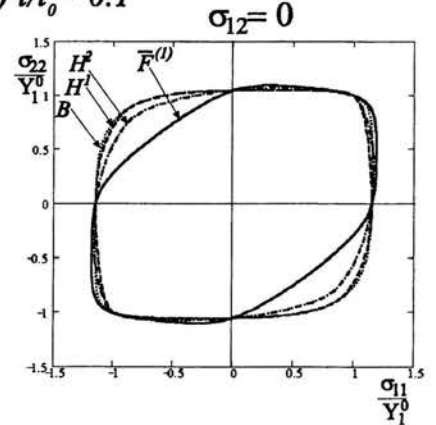
Tablica 5.5: Wartości parametrów określających anizotropię materiału w warunkach fenomenologicznych (wzory 3.60 (Barlat) oraz 3.46 ( $H^1$ ) i 3.47 ( $H^2$ )) dla różnych zakresów procesu walcowania.

Zarówno w przypadku powierzchni Barlata jak i powierzchni Hilla obserwujemy (rysunek 5.14) rozszerzanie się powierzchni w kierunku  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ . Kształt powierzchni Barlata zmienia się również w przekroju  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ , w którym przy dużej redukcji grubości blachy w procesie walcowania zanika jedno z naroży. Przy małej redukcji grubości blachy do kształtu proponowanej powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  najbardziej zbliżony jest kształt powierzchni Barlata (rysunek 5.15). W przypadku dużej redukcji grubości blachy kształt powierzchni fenomenologicznych znacząco odbiega od kształtu powierzchni proponowanej szczególnie dla stanów naprężenia w których  $\sigma_{11}$  i  $\sigma_{22}$  mają przeciwne znaki. Zapewne lepszą zgodność powierzchni Hilla i powierzchni Barlata i Liana z powierzchnią proponowaną  $\bar{F}^{(1)}$  można uzyskać zmieniając sposób wyznaczania parametrów występujących w warunkach fenomenologicznych.

Podobnie jak powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$ , warunki fenomenologiczne przewidują powstanie czterech *uch* technologicznych na obrzeżu wytłaczanych elementów (porównaj rysunek 5.16).

Warunek Hilla,  $m=1.5 (H^1)$ Warunek Hilla,  $m=1.5 (H^2)$ Warunek Barlata i Liana,  $m=8$ 

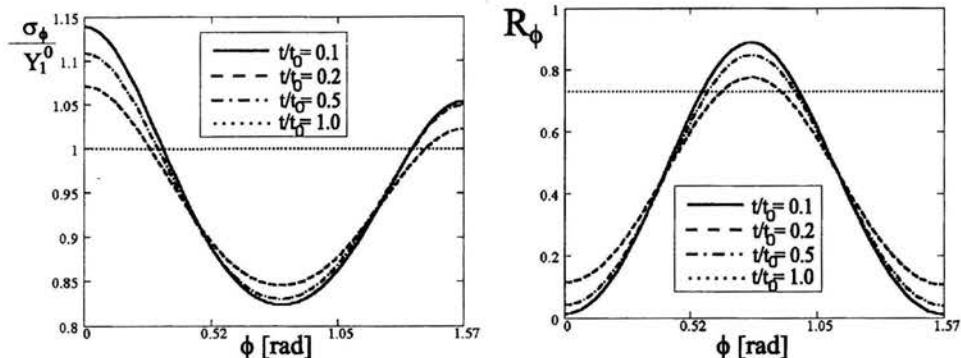
Rysunek 5.14: Ewolucja kształtu dwóch powierzchni plastyczności Hilla (dla  $m = 1.5$ ) na skutek procesu walcowania:  $H^1$  - parametr  $b$  wyznaczono ze wzoru (3.46),  $H^2$  - parametr  $b$  wyznaczono ze wzoru (3.47<sub>1</sub>) oraz powierzchni plastyczności Barlata i Liana (dla  $m = 8$ ). Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowego naprężenia granicznego  $Y_1^0$ .

a)  $t/t_0 = 1.0$ b)  $t/t_0 = 0.5$ c)  $t/t_0 = 0.2$ d)  $t/t_0 = 0.1$ 

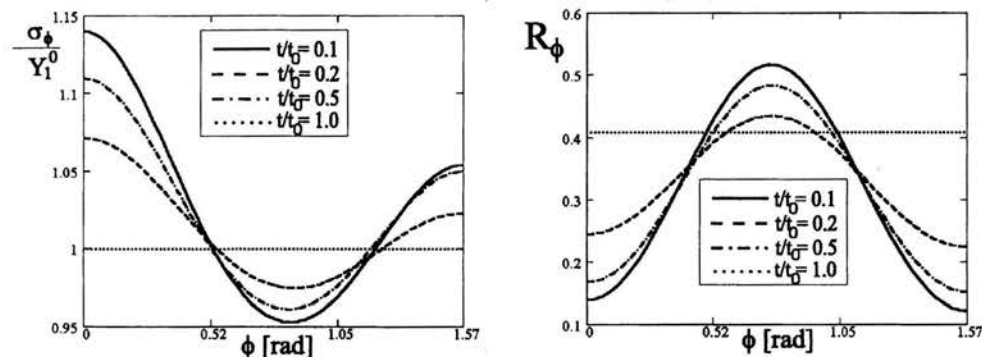
Rysunek 5.15: Porównanie kształtu proponowanej powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  (dla  $n = 6$ ) z kształtem dwóch powierzchni Hilla (dla  $m = 1.5$ ):  $H^1$  - parametr  $b$  wyznaczono ze wzoru (3.46) i  $H^2$  - parametr  $b$  wyznaczono ze wzoru (3.47) oraz powierzchni Barlata i Liana (dla  $m = 8$ ) (na rysunku oznaczonej przez  $B$ ). Porównania dokonano dla różnych stosunków grubości walcowanej blachy  $t$  do jej grubości początkowej  $t_0$ : 1.0, 0.5, 0.2 i 0.1. Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowego naprężenia granicznego  $Y_1^0$ .

Charakter wykresu  $\sigma_\phi$  jest zbliżony dla wszystkich warunków, choć zarówno warunek Barlata jak i warunek Hilla, w którym parametr  $b$  określono ze wzoru (3.46<sub>2</sub>), zaniżają wartości naprężeń uplastyczniających w stosunku do powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  (rysunek 5.17).

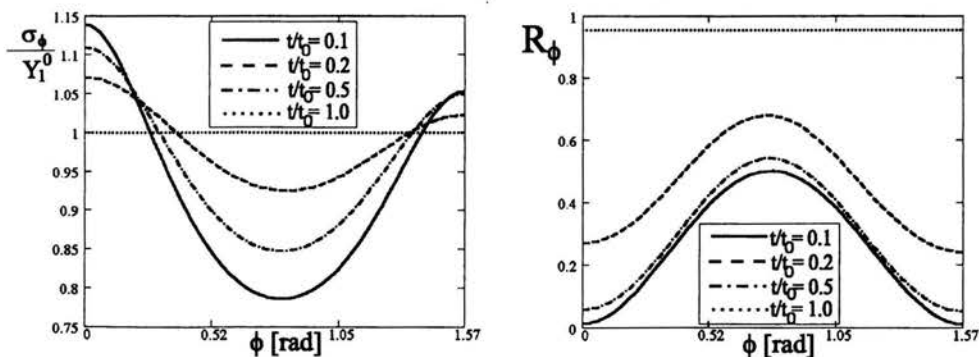
### Warunek Hilla, $m=1.5$ ( $H^1$ )



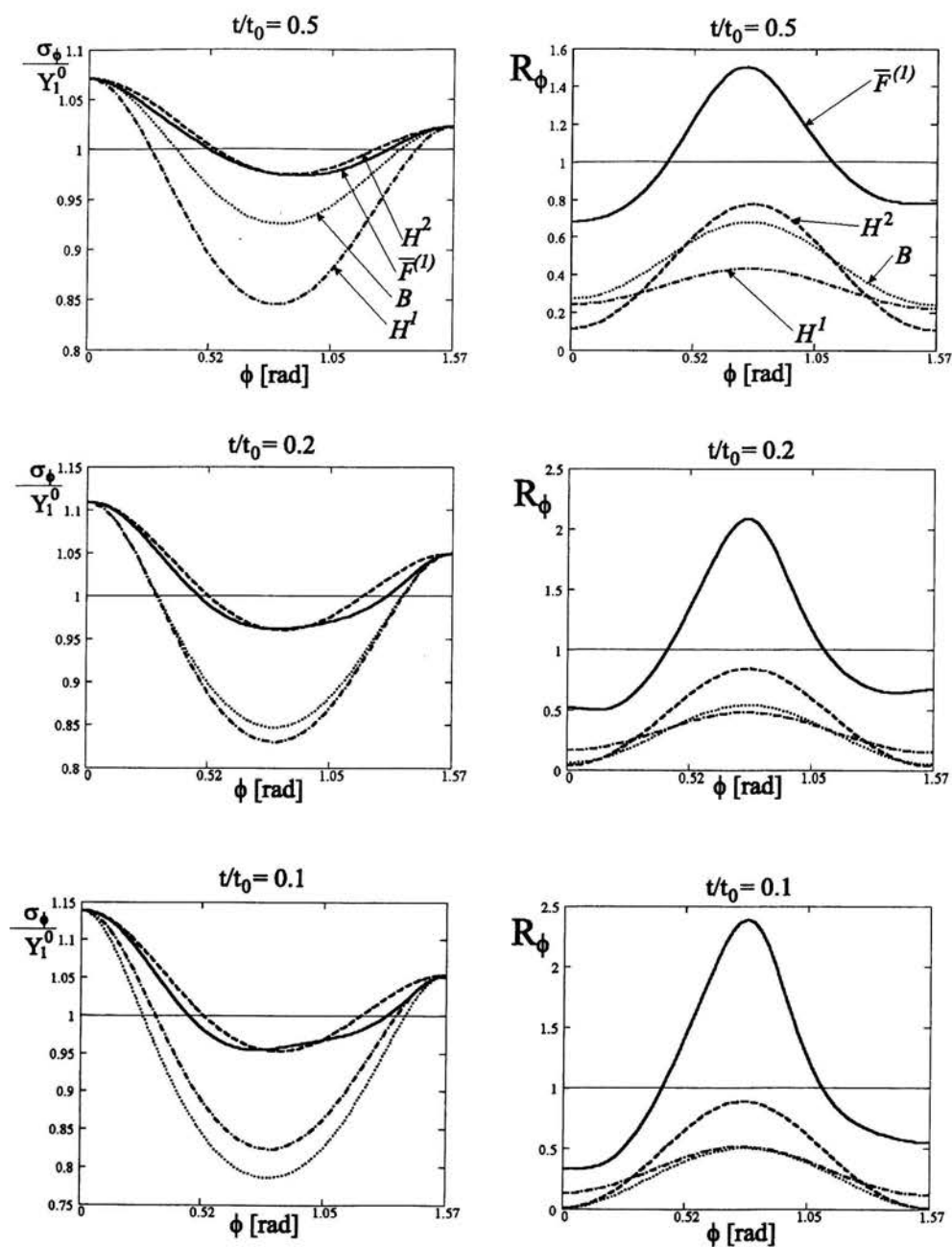
### Warunek Hilla, $m=1.5$ ( $H^2$ )



### Warunek Barlata i Liana, $m=8$



Rysunek 5.16: Zmiana wartości naprężeń uplastyczniających przy rozciąganiu pod kątem  $\phi$  do osi  $e_1$  oraz współczynnika Lankforda  $R_\phi$  (patrz rysunek 3.1) na skutek procesu walcowania dla fenomenologicznych powierzchni plastyczności.



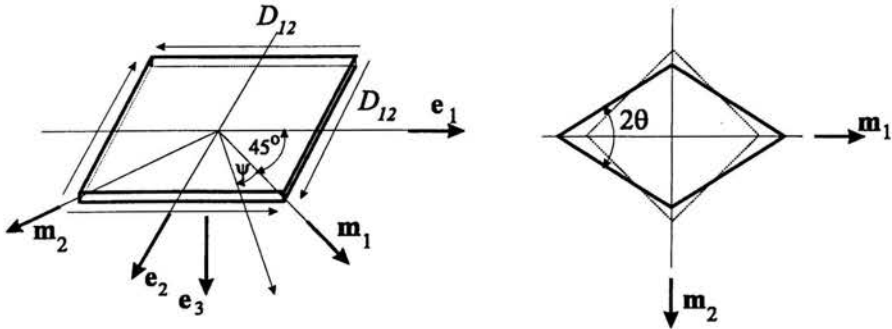
Rysunek 5.17: Porównanie wartości naprężeń uplastyczniających przy rozciąganiu pod kątem  $\phi$  do osi  $e_1$  (patrz rysunek 4.8) dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$   $n = 6$  z wartościami otrzymywanymi dla powierzchni fenomenologicznych i różnych zakresów procesu walcowania.  $H^1$ ,  $H^2$ ,  $B$  - jak na rysunku 5.15.

Wykres współczynnika Lankforda  $R_\phi$  wyznaczony na podstawie warunków fenomenologicznych ma charakter zbliżony do wykresu tego współczynnika wyznaczonego na podstawie powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  (rysunki 5.16 i 5.17). Maksymalną wartość  $R_\phi$  otrzymujemy dla kąta  $\phi = 45^\circ$ , jednak dla wszystkich analizowanych warunków fenomenologicznych wartość  $R_\phi$  dla dowolnego  $\phi$  jest mniejsza od jedności przewidując lokalizację odkształceń w postaci przewężenia. Dla kierunków położonych w pobliżu kąta  $45^\circ$  do kierunku walcowania warunki fenomenologiczne przewidują zatem jakościowo różne zachowanie materiału w stosunku do powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ .

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że proces walcowania powoduje powstanie w blaszce ortotropii. Tego typu obróbka plastyczna prowadzi do podniesienia wartości naprężeń uplastyczniających w kierunku walcowania i obniżenia ich w kierunku położonym pod kątem  $45^\circ$  do kierunku walcowania. Tworząca się w blaszce tekstura krystalograficzna powoduje powstawanie czterech *uch* technologicznych przy wytłaczaniu elementów z walcowanej blachy. Na skutek procesu walcowania zmienia się również wartość współczynnika Lankforda  $R_\phi$  polepszając własności blachy pod względem formowalności w kierunku położonym pod kątem  $45^\circ$  do osi walcowania, a pogarszając w kierunku walcowania oraz kierunku do niego prostopadłym.

### 5.3 Tekstury czystego ścinania

W tym podrozdziale przeanalizujemy rozwój anizotropii związanej z ewolucją tekstury w blaszce poddanej procesowi czystego ścinania. Schematycznie proces ten został przedstawiony na rysunku 5.18. Podobnie, jak w przypadku procesu przeciągania i walcowania założymy, że materiał blachy jest początkowo izotropowy. Jednorodny rozkład orientacji w agregacie polikrystalicznym ponownie został zamodelowany za pomocą 1024 ziaren o sieci typu A1 i jednakowej wartości naprężenia ścinającego  $\tau_c$  na każdym systemie poślizgu.



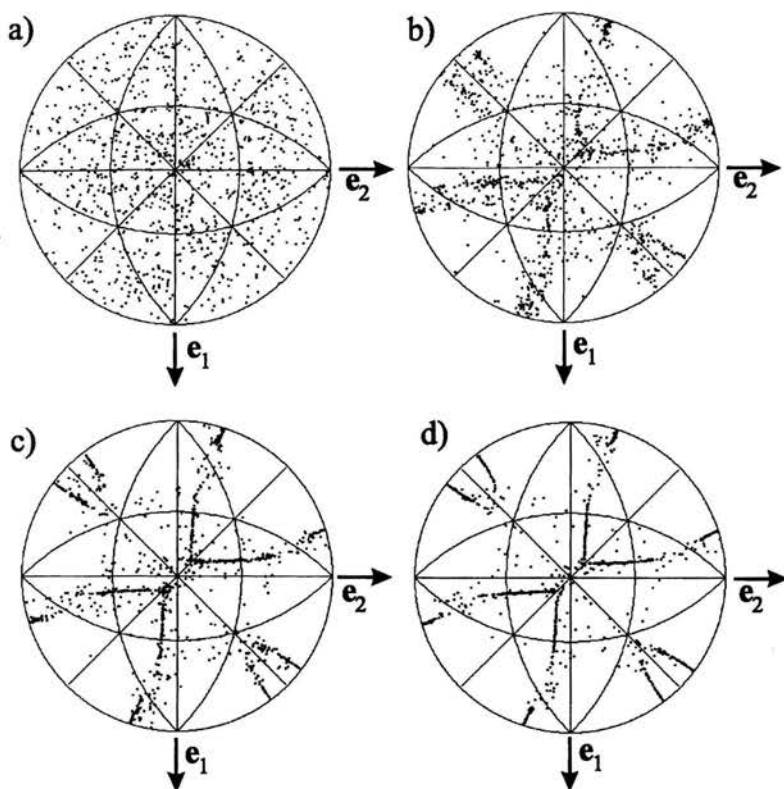
Rysunek 5.18: *Proces ścinania blachy.*

Przyjmujemy, że pole gradientu deformacji jest jednorodne w rozważanym elemencie blachy i ma w bazie  $\{e_\alpha\}$  postać:

$$\mathbf{D} = d_o \cdot \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

gdzie  $d_o$  oznacza prędkość ścinania. Kierunki  $e_1$  i  $e_2$  zostały przyjęte zgodnie z rysunkiem 5.18.

Przy założeniu sztywno idealnie plastycznego modelu pojedynczego ziarna został obliczony rozwój tekstury krystalograficznej w ścinanym agregacie polikrystalicznym. Wyniki obliczeń pokazane są na rysunku 5.19 przy wykorzystaniu figury biegunowej  $\{111\}[001]$ . Jak można zauważyć, otrzymane w kolejnych stadiach procesu ścinania figury biegunowe mają dwie do siebie prostopadłe osie symetrii nachylone pod kątem  $45^\circ$  do kierunków  $e_1$  i  $e_2$ . Proces czystego ścinania prowadzi zatem do powstania w początkowo izotropowej blaszce symetrii ortotropowej, a główne osie ortotropii nachylone są pod kątem  $45^\circ$  do kierunków  $e_1$  i  $e_2$ . Kierunki głównych osi ortotropii zostały oznaczone przez  $m_1$  i  $m_2$  (patrz rysunek 5.18). Otrzymana postać figur biegunowych zbliżona jest do tych otrzymywanych w doświadczeniach (porównaj [86], [108]).



Rysunek 5.19: *Figura biegunowa*  $\{111\}[001]$ : a) początkowa, b) dla  $\text{tg}\theta = 0.25$ , c) dla  $\text{tg}\theta = 0.04$  d) dla  $\text{tg}\theta = 0.01$ .

Wpływ rozwoju tekstury na właściwości blachy przewidywane przez powierzchnię plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  o różnej wartości wykładnika  $n$  pokazuje tablica 5.6 oraz kolejne rysunki. W tablicy zebraliśmy wartości naprężeń uplastyczniających otrzymywanych w testach (3.42)-(3.45) dla blach poddanych ścinaniu w różnym zakresie. Należy podkreślić, że wielkości  $Y_1$  i  $Y_2$  oznaczają teraz naprężenia uplastyczniające przy rozciąganiu odpowiednio w kierunkach  $\mathbf{m}_1$  i  $\mathbf{m}_2$ . Podobnie, wielkość  $k$  oznacza naprężenie uplastyczniające przy czystym ścinaniu w płaszczyźnie  $\mathbf{m}_1$ - $\mathbf{m}_2$ , a  $Y_{45}$  naprężenie uplastyczniające przy rozciąganiu pod kątem  $45^\circ$  do kierunku  $\mathbf{m}_1$ . Podana w tablicy wartość  $\text{tg}\theta$  odnosi się do kąta  $\theta$  zdefiniowanego tak jak na rysunku 5.18. Analizując wartości zamieszczone w tablicy 5.6 możemy stwierdzić, że na skutek procesu ścinania mamy do czynienia ze wzmocnieniem materiału w kierunku  $\mathbf{m}_1$ . Zwiększa się również wartość naprężeń uplastyczniających  $Y_p$  przy dwuosiowym rozciąganiu. Maleje, ale słabiej niż w przypadku procesu walcowania, naprężenie

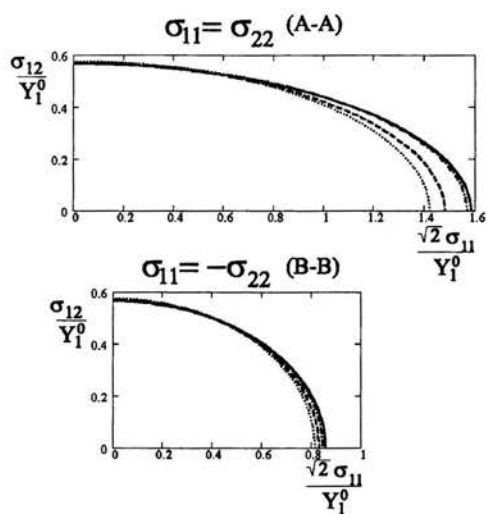
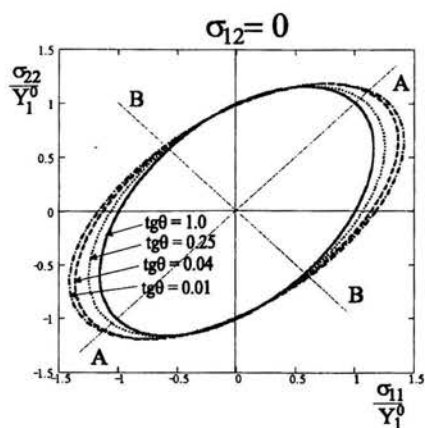
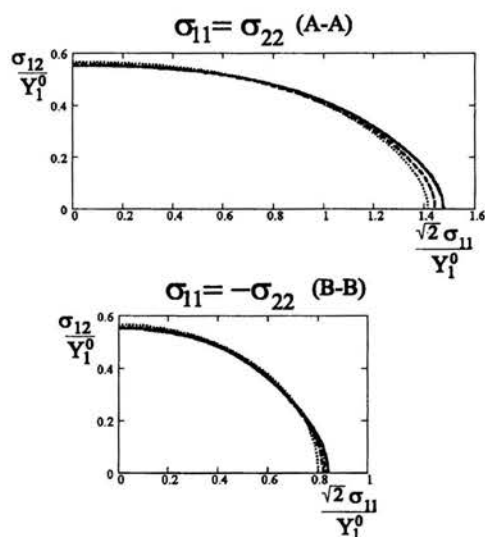
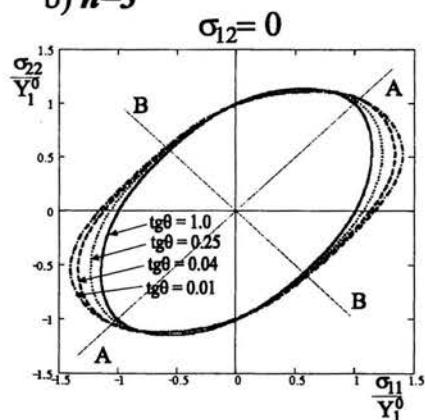


uplastyczniające  $k$  przy czystym ścinaniu.

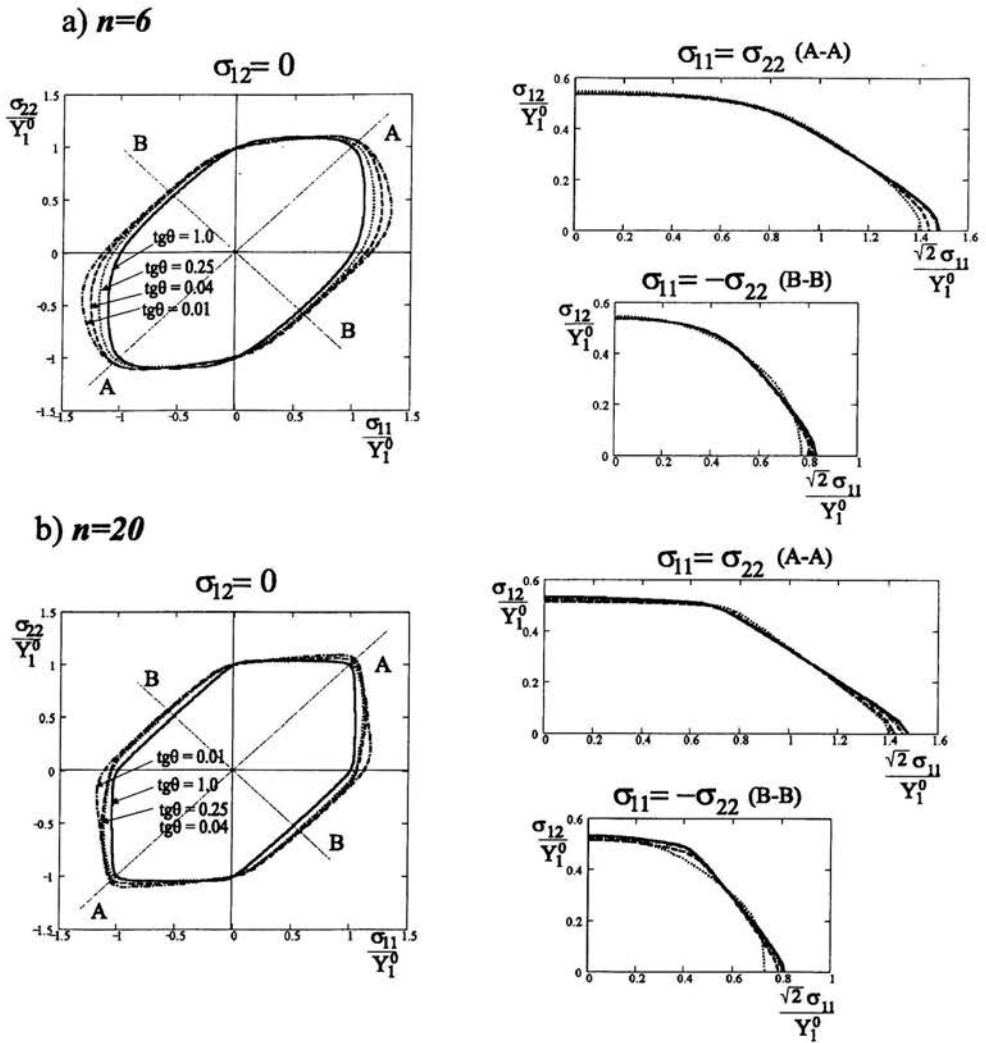
$n$	$Y_1 [\tau_c]$	$Y_2 [\tau_c]$	$Y_{45} [\tau_c]$	$Y_p [\tau_c]$	$k [\tau_c]$
stan początkowy: $tg\theta = 1.0$					
1	1.978	1.978	1.978	1.989	1.140
3	1.994	1.994	1.994	1.995	1.131
6	2.073	2.073	2.073	2.067	1.133
20	2.081	2.081	2.081	2.075	1.075
zakres procesu $tg\theta = 0.25$					
1	2.109	1.959	1.987	2.072	1.132
3	2.128	1.967	1.985	2.037	1.113
6	2.207	2.054	2.049	2.113	1.111
20	2.174	2.079	2.060	2.098	1.072
zakres procesu $tg\theta = 0.04$					
1	2.242	1.957	2.012	2.196	1.131
3	2.243	1.976	1.996	2.083	1.106
6	2.310	2.059	2.055	2.167	1.113
20	2.204	2.075	2.061	2.146	1.093
zakres procesu $tg\theta = 0.01$					
1	2.322	1.950	2.002	2.219	1.121
3	2.314	1.986	1.995	2.082	1.101
6	2.391	2.071	2.061	2.180	1.116
20	2.328	2.087	2.066	2.180	1.110

Tablica 5.6: Zmiana wartości naprężeń granicznych dla stanów naprężeń (3.42-3.45) oraz naprężenia granicznego przy rozciąganie pod kątem  $45^\circ$  do kierunku  $\mathbf{m}_1$  dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  (wzory (4.38-4.41) i 4.10) i różnych zakresów procesu ścinania.

Ewolucja kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  związana z czystym ścinaniem blachy została przedstawiona na rysunkach 5.20 i 5.21. Występujące na rysunkach wielkości  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) oznaczają składowe płaskiego tensora naprężenia w bazie  $\{\mathbf{m}_\alpha\}$ . Możemy zaobserwować, że w wyniku procesu ścinania powierzchnia plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  oprócz zmiany rozmiarów zmienia również swój kształt. Tworzą się nowe naroża w przekroju  $\sigma_{12} = 0$  oraz pojawia się sześć naroży w przekroju dewiatorowym  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ . Naroża te nie występują w przypadku blachy izotropowej. Powstawanie tych naroży jest szczególnie widoczne dla dużych wartości wykładnika  $n$  ( $n = 6$  i  $n = 20$ ).

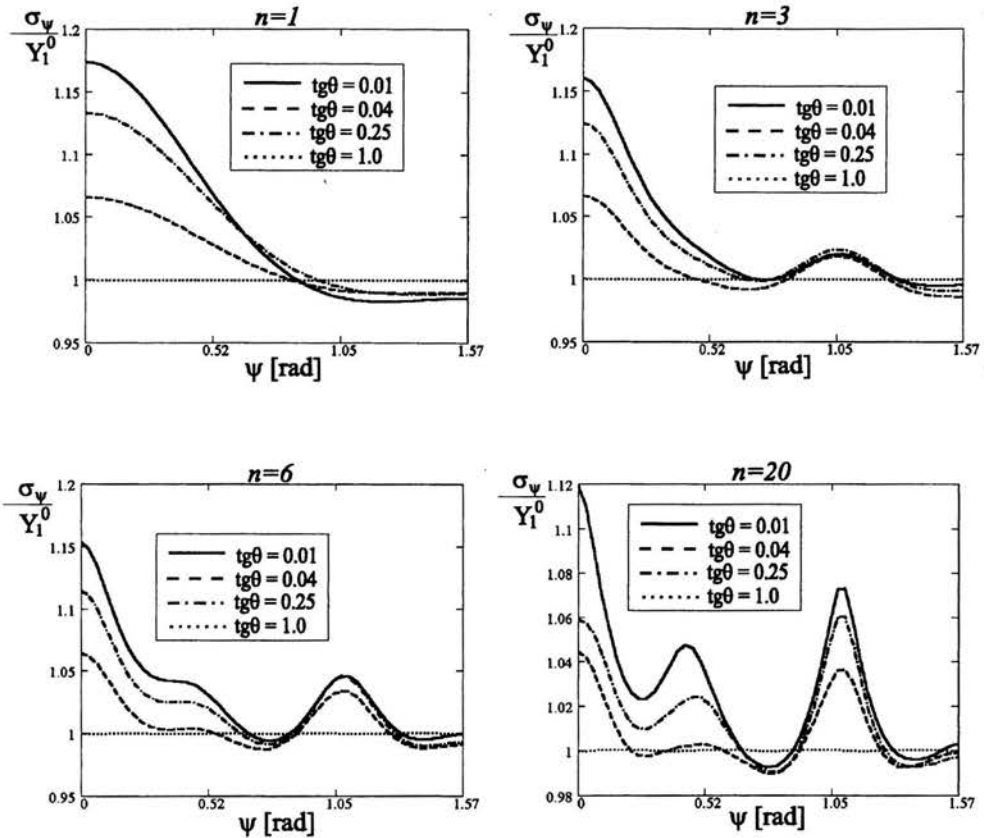
a)  $n=1$ b)  $n=3$ 

Rysunek 5.20: Ewolucja kształtu powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  na skutek procesu ścinania: a)  $n = 1$ , b)  $n = 3$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowych naprężeń granicznych  $Y_1^0$ .



Rysunek 5.21: Ewolucja powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  na skutek procesu ścinania: a)  $n = 6$ , b)  $n = 20$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowych naprężeń granicznych  $Y_1^0$ .

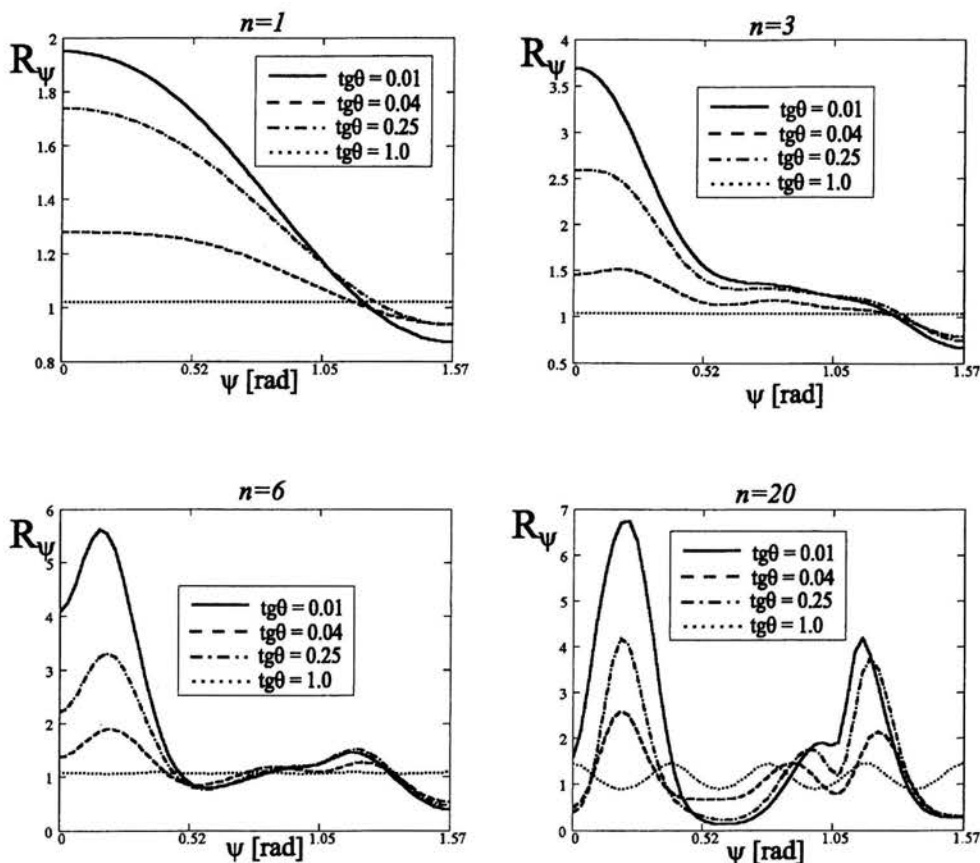
Rozwój anizotropii wpływa również na proces plastycznego płynięcia. Na podstawie wykresu (rysunek 5.22) wartości naprężenia uplastyczniającego  $\sigma_\psi$  przy rozciąganiu pod kątem  $\psi$  do kierunku  $\mathbf{m}_1$  (rysunek 5.18), określonego na podstawie powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ , możemy stwierdzić, że na obrzeżu wytłaczanego elementu pojawi się sześć *uch* technologicznych przy  $n = 3$  i  $n = 6$ , a ich liczba wzrasta do dziesięciu dla  $n = 20$ . Powstałe nierówności mają różną amplitudę i ich maksima koncentrują się w okolicy kąta  $\psi = 45^\circ$  i  $\psi = 90^\circ$ . Różnice w wartości naprężeń uplastyczniających przy rozciąganiu pod różnymi kątami do osi  $\mathbf{m}_1$  są tym większe, im większy jest zakres procesu ścinania.



Rysunek 5.22: Zmiana wytrzymałości na rozciąganie pod kątem  $\psi$  do osi  $\mathbf{m}_1$  (patrz rysunek 5.18) na skutek procesu ścinania blachy opisanej powierzchnią plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ . Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowych naprężeń granicznych  $Y_1^0$ .

Na podstawie wykresu współczynnika Lankforda  $R_\psi$  możemy stwierdzić, że na skutek

procesu ścinania własności blachy pod względem jej formowalności polepszają się, gdyż wartość średnia  $R_\psi$  staje się większa od jedności. Najlepsze własności do przeciwstawiania się przewężeniu ma blacha w kierunku opisanym kątem  $0^\circ < \psi < 30^\circ$ , a najłabsze w okolicach  $\psi = 90^\circ$ , gdzie wartość współczynnika  $R_\psi$  spada poniżej jedności. Dla  $n = 6$  i  $n = 20$  współczynnik  $R$  spada poniżej jedności również dla kąta  $\psi$  bliskiego  $30^\circ$ .



Rysunek 5.23: Zmiana wartości współczynnika Lankforda  $R_\psi$  (patrz rysunki 3.1 i 5.18) na skutek procesu ścinania blachy opisaney powierzchnią plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ .

Porównamy teraz własności blach poddanych czystemu ścinaniu przewidywane przez powierzchnię  $\bar{F}^{(1)}$  z własnościami przewidywanymi przez warunki fenomenologiczne. Parametry określające anizotropię materiału w warunku Hilla i warunku Barlata i Liana określiliśmy tak samo jak w przypadku procesu walcowania blachy opisaney powierzchnią  $\bar{F}^{(1)}$ . Naprężenia uplastyczniające występujące we wzorach (3.46), (3.47) i (3.60) określiliśmy

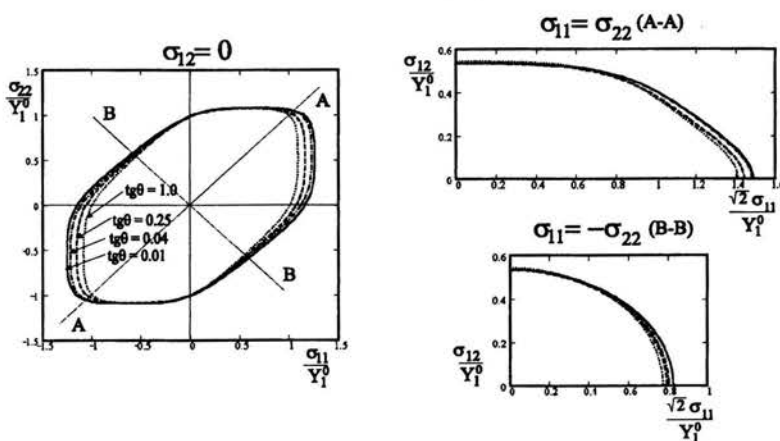
przy wykorzystaniu zależności (4.38)-(4.41) z tym, że występujące w nich współczynniki  $P_{ij}^{r,s}$  oznaczają teraz składowe tensorów  $P^{r,s}$  w bazie związanej z głównymi osiami ortotropii  $\{\mathbf{m}_\alpha\}$ .

$tg\theta$	War. Barlata, $m = 8$			War. Hilla, $m = 1.5 (H^1)$		War. Hilla, $m = 1.5 (H^2)$	
	$h$	$p$	$\bar{a}$	$a$	$b$	$a$	$b$
1.0	1	1	1.022	0	0	0	0
0.25	1.074	1.085	1.021	0.075	-0.822	0.075	-0.161
0.04	1.122	1.123	0.948	0.121	-0.903	0.121	-0.249
0.01	1.154	1.168	1.007	0.148	-0.971	0.148	-0.318

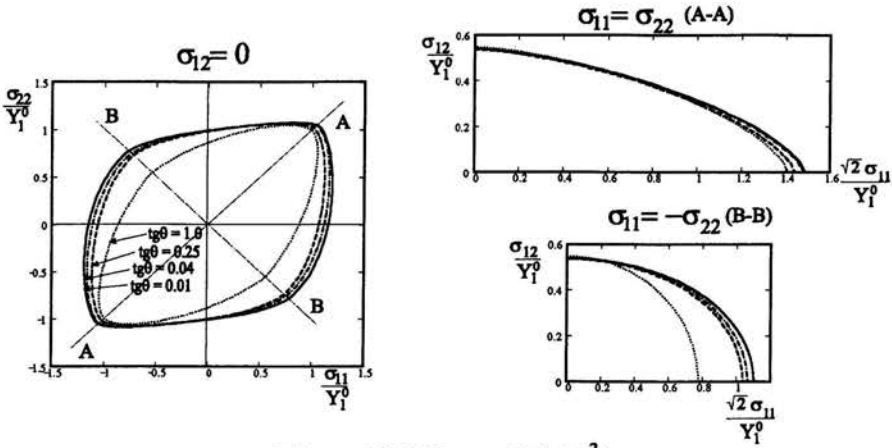
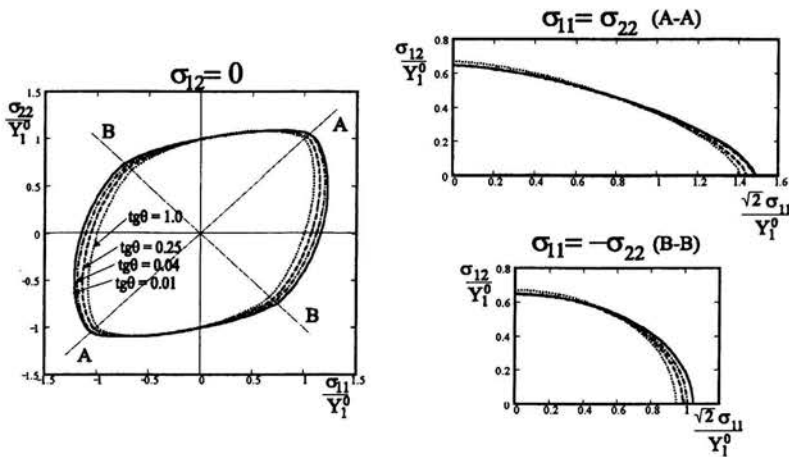
Tablica 5.7: Zmiana parametrów określających anizotropię materiału w warunkach fenomenologicznych (wzory (3.60) - Barlat oraz (3.46) -  $H^1$  i (3.47) -  $H^2$ ) dla różnych zakresów procesu ścinania.

Na rysunkach 5.24 i 5.25 zamieściliśmy zmianę kształtu powierzchni fenomenologicznych odpowiadającą różnemu zaawansowaniu procesu ścinania. Możemy zauważyć, że zarówno powierzchnia Hilla jak i powierzchnia Barlata i Liana rozszerzają się w kierunku  $\sigma_{11}$ . W przekroju  $\sigma_{12} = 0$  najbardziej zbliżona do powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  jest powierzchnia Barlata dla każdego stadium procesu ścinania (rysunek 5.26). Powierzchnia ta nie jest jednak w stanie opisać naroży pojawiających się w przekroju dewiatorowym  $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$ .

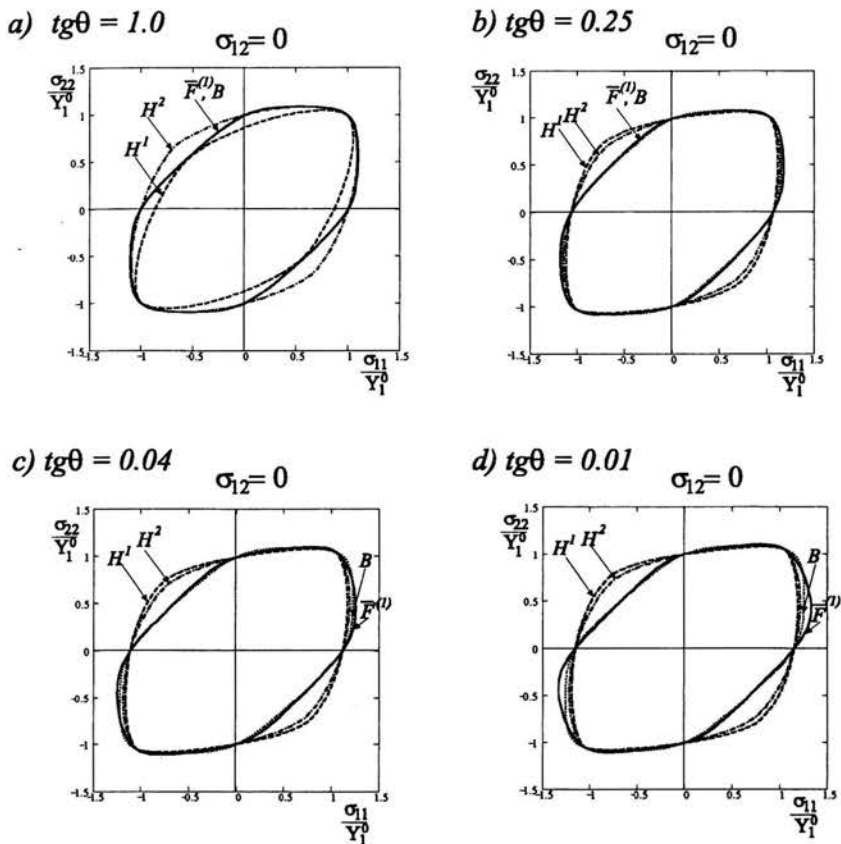
#### Warunek Barlata i Liana, $m=8$



Rysunek 5.24: Ewolucja powierzchni plastyczności Barlata ( $m = 8$ ) wywołana procesem ścinania. Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowego naprężenia granicznego  $Y_1^0$ .

Warunek Hilla,  $m=1.5$  ( $H^1$ )Warunek Hilla,  $m=1.5$  ( $H^2$ )

Rysunek 5.25: Ewolucja kształtu powierzchni plastyczności Hilla ( $m = 1.5$ ) na skutek procesu ścinania:  $H^1$  - parametr  $b$  wyznaczono ze wzoru (3.46),  $H^2$  - parametr  $b$  wyznaczono ze wzoru (3.47<sub>1</sub>). Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowych naprężeń granicznych  $Y_1^0$ .

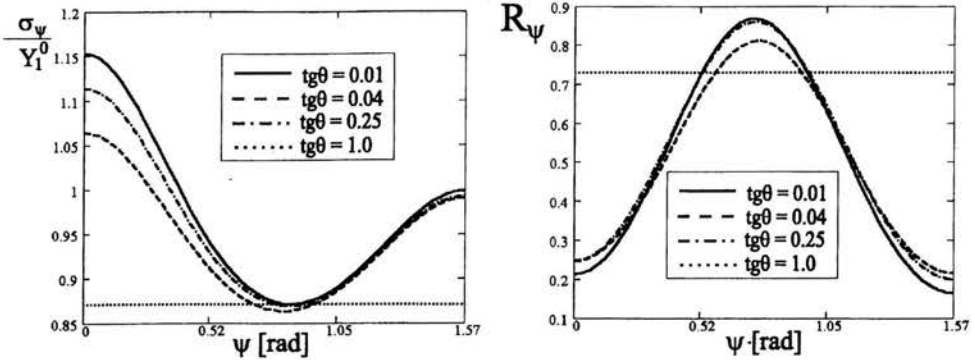


Rysunek 5.26: Porównanie kształtu (przekrój  $\sigma_{12} = 0$ ) proponowanej powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ ,  $n = 6$  z kształtem powierzchni Hilla,  $m = 1.5$  ( $H^1$  - parametr  $b$  ze wzoru (3.46),  $H^2$  - parametr  $b$  ze wzoru (3.47)) oraz powierzchni Barlata i Liana,  $m = 8$  ( $B$ ) dla różnych zakresów procesu ścinania. Wszystkie wartości zostały odniesione do początkowego naprężenia granicznego  $Y_1^0$ .

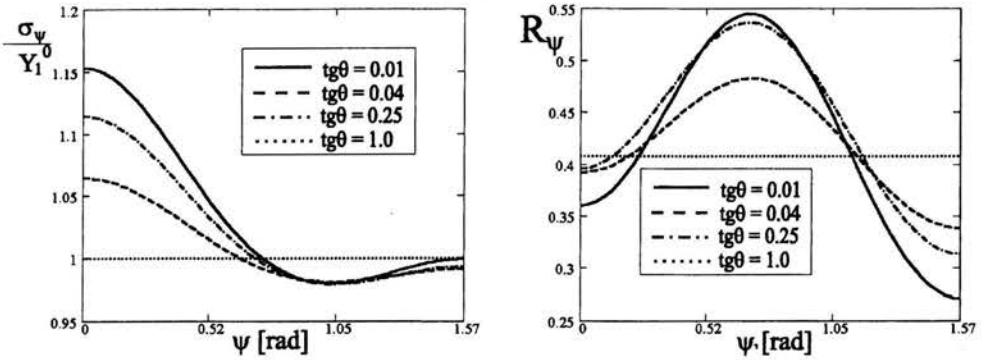
Jak już stwierdziliśmy w rozdziale czwartym, powierzchnie fenomenologiczne z trudnością opisują liczbę *uch* technologicznych większą od czterech. Podobnie jest w przypadku tekstur powstających w procesie ścinania. W odróżnieniu od powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  powierzchnia Barlata i Liana i powierzchnia Hilla ( $H^2$ ) przewidują powstanie jedynie dwóch *uch* technologicznych, a ich maksimum otrzymujemy dla kąta  $\psi = 90^\circ$  (patrz rysunki 5.27 i 5.28). Wartości naprężeń uplastyczniających  $\sigma_\psi$  przewidywane przez powierzchnię  $F^{(1)}$  są lepiej przybliżane przez powierzchnię Barlata i Liana i powierzchnię Hilla ( $H^2$ ), gdzie parametr  $b$  określono na podstawie wzoru (3.47).



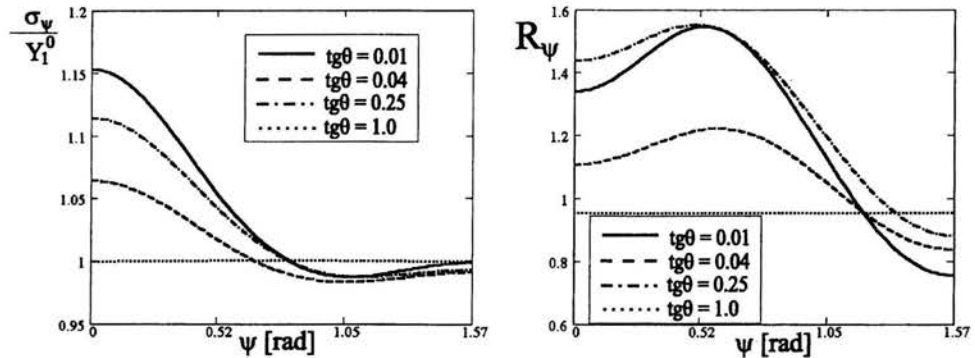
### Warunek Hilla, $m=1.5$ ( $H^1$ )



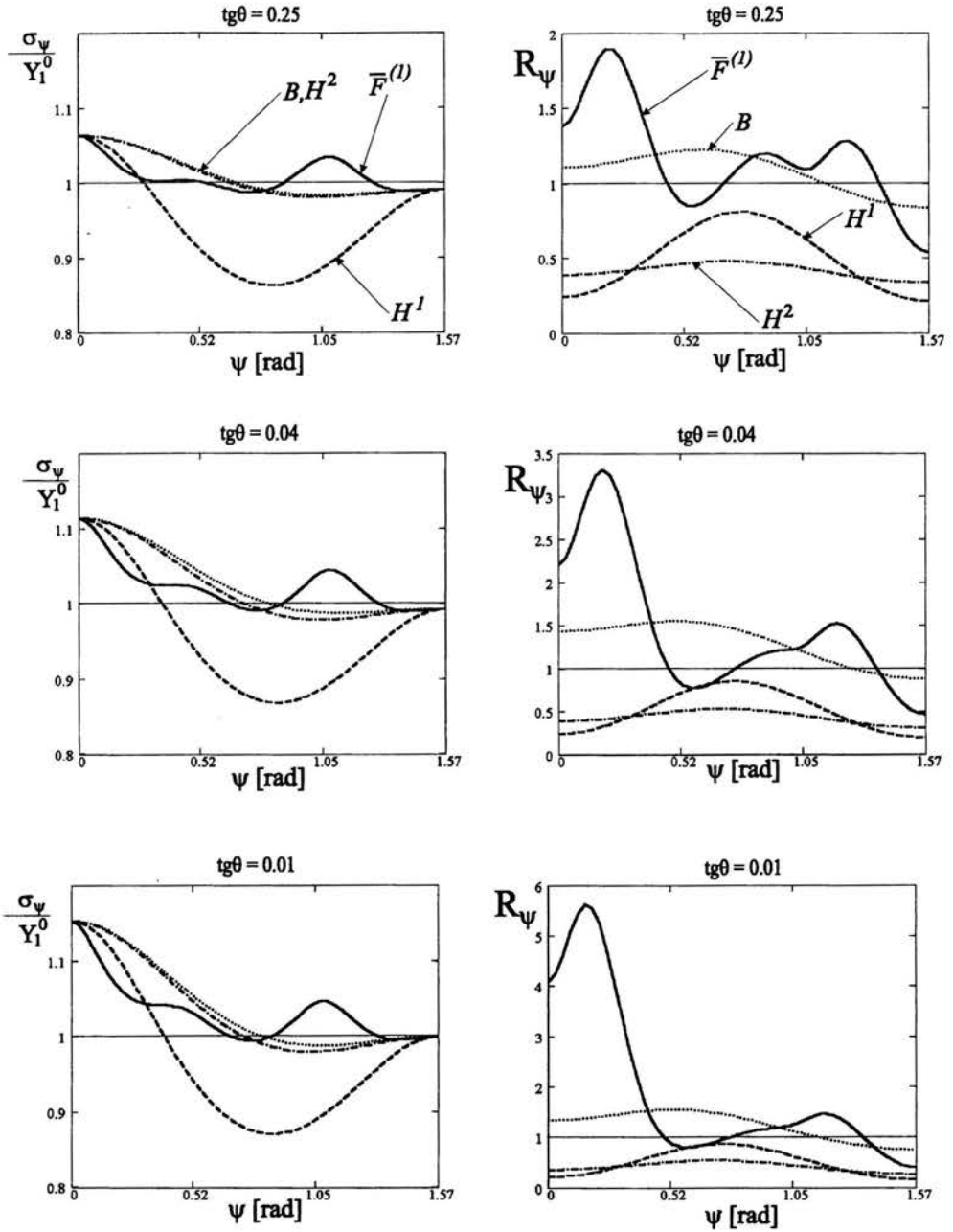
### Warunek Hilla, $m=1.5$ ( $H^2$ )



### Warunek Barlata i Liana, $m=8$



Rysunek 5.27: Zmiana wartości naprężeń granicznych przy rozciąganiu pod kątem  $\psi$  do osi  $m_1$  oraz współczynnika Lankforda  $R_\psi$  (patrz rysunek 3.1) na skutek procesu ścinania dla fenomenologicznych powierzchni plastyczności.



Rysunek 5.28: Porównanie wartości naprężeń granicznych przy rozciąganiu pod kątem  $\psi$  do osi  $m_1$  (patrz rysunek 5.18) dla powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$ ,  $n = 6$ , z wartościami otrzymywanymi dla powierzchni fenomenologicznych i różnych zakresów procesu ścinania.  $H^1$ ,  $H^2$ ,  $B$  - jak na rysunku 5.27.

Podobnie jak w przypadku tekstur powstających w procesie walcowania, warunek Hilla zaniża wartość współczynnika Lankforda  $R$  w stosunku do wartości przewidywanej przez powierzchnię  $\bar{F}^{(1)}$ . Według warunku Hilla wartość  $R$  jest stale mniejsza od jedności. Warunek Barlata i Liana lepiej przybliża wartość współczynnika  $R_\psi$  przewidując dla dużego zakresu kąta  $\psi$  jego wartość większą od jedności i dla kąta  $90^\circ$  wartość  $R < 1$ .

Podsumowując opis ewolucji anizotropii związanej z procesem czystego ścinania należy podkreślić, że blacha poddana tego typu obróbce staje się ortotropowa, a główne osie ortotropii pokrywają się z kierunkami głównymi tensora prędkości deformacji  $\mathbf{D}$  (wzór (5.5) i rysunek 5.18). Wytworzona w wyniku procesu ścinania tekstura krystalograficzna według przyjętej powierzchni plastyczności  $\bar{F}^{(1)}$  powoduje powstanie sześciu *uch* technologicznych oraz wytworzenie się naroży plastycznych w przekroju dewiatorowym. Na podstawie prawa płynięcia stowarzyszonego z powierzchnią  $\bar{F}^{(1)}$  przewidywana jest również poprawa odporności blachy na przewężenie ze względu na zwiększenie się wartości średniej współczynnika Lankforda.

# Rozdział 6

## Podsumowanie

W pracy przedstawiliśmy model ewolucji anizotropii plastycznej silnie deformowanych elementów metalowych. Zmianę własności plastycznie formowanych blach pokazaliśmy korystając z zaproponowanej powierzchni plastyczności (4.22). Powierzchnia ta łączy zalety podejścia fenomenologicznego i fizycznego. Funkcja płynięcia stowarzyszona z proponowaną powierzchnią plastyczności zależy od mikrostruktury polikryształu. W odróżnieniu jednak od modelu fizycznego Bishopa-Hilla [17], [18] tu, stowarzyszone prawo płynięcia w sposób jednoznaczny wyznacza kierunek plastycznego płynięcia. Umożliwia to wykorzystanie proponowanej powierzchni plastyczności w metodzie elementów skończonych.

Po dokonaniu przeglądu literatury dotyczącej tematu pracy w rozdziale pierwszym, w rozdziale drugim skoncentrowaliśmy się na modelu pojedynczego ziarna kryształu poddanego dużym deformacjom. Uznając, że podstawową przyczyną rozwoju anizotropii elementów metalowych poddanych dużym deformacjom plastycznym jest tworzenie się tekstury krystalograficznej, główny nacisk położyliśmy na równania opisujące zmianę orientacji sieci w procesie deformacji. Przedstawiliśmy komplet równań konstytutywnych sprężysto-plastycznych wraz z równaniem spinu plastycznego odgrywającym podstawową rolę przy wyznaczaniu obrotów sieci w kryształach. W równaniach tych wykorzystaliśmy warunek uplastycznienia pojedynczego kryształu zaproponowany przez Gambina [37] będący regularyzowanym prawem Schmidta. Przedstawiony model jest podstawą skonstruowanego przez nas programu numerycznego. Program ten modeluje rozwój tekstury w agregacie ziaren tworzących element reprezentatywny objętości polikryształu dla zadanego jednorodnego pola gradientu prędkości. W programie obliczamy zmianę orientacji sieci krystalicznej każdego z ziaren przyjmując założenia Taylora o jednakowym tensorze gradientu deformacji w każdym ziarnie.

W rozdziale trzecim poddaliśmy analizie najczęściej wykorzystywane fenomenologiczne powierzchnie plastyczności  $m$ -tego stopnia dla blach: powierzchnię plastyczności Hilla [53] oraz powierzchnię plastyczności Barlata i Liana [14]. Wyprowadziliśmy ich postaci niezmiennicze pomocne przy wyznaczaniu równań opisujących te powierzchnie oraz stowarzyszone z nimi prawa płynięcia w dowolnym układzie odniesienia. Postaci niezmiennicze warunków plastyczności wykorzystaliśmy również przy wyprowadzaniu wzorów (3.55) i (3.72) opisujących współczynnik Lankforda  $R_\phi$  oraz do sformułowania równań określają-

cych stany naprężenia przy których może wystąpić lokalizacja odkształceń plastycznych (3.37) i (3.38). Lokalizacja odkształceń jest zjawiskiem bardzo ważnym z punktu widzenia procesu formowania metali. Kolejną część rozdziału trzeciego poświęciliśmy analizie wyników otrzymywanych dla blach o różnej teksturze przy wykorzystaniu powierzchni Bishopa-Hilla. Wyniki te odpowiadają zwykle wynikom badań doświadczalnych. Analiza pozwoliła na określenie zjawisk, jakie mogą występować w metalach o różnej teksturze i które powinny opisywać powierzchnia plastyczności. Wielu z tych zjawisk nie jest w stanie opisać warunek plastyczności 2-ego stopnia.

W rozdziale czwartym zaproponowaliśmy klasę powierzchni plastyczności dla polikryształów metali (4.22), która łączy zalety podejścia fenomenologicznego i fizycznego. Szerzej omówiliśmy trzy powierzchnie plastyczności należące do tej klasy oznaczone przez  $\bar{F}^{(1)}$  (4.24),  $\bar{F}^{(2)}$  (4.42) i  $\bar{F}^{(3)}$  (4.56). Analiza wyników otrzymywanych dla polikryształów metali o różnej teksturze wykazała, że powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$  i powierzchnia  $\bar{F}^{(3)}$  stanowią dwa graniczne przypadki. W przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  traktujemy polikryształ jako pojedynczy kryształ o  $NGR \times M$  systemach poślizgu, gdzie  $NGR$  jest liczą ziaren w elemencie reprezentatywnym, a  $M$  liczbą systemów poślizgu w ziarnie. W przypadku powierzchni  $\bar{F}^{(3)}$  uwzględniamy granice ziaren o różnej orientacji. Powierzchnia  $\bar{F}^{(2)}$  różni się od powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  jedynie współczynnikiem  $\alpha$ , który należy wyznaczyć na podstawie testu na poziomie polikryształu. Powierzchnia ta ma więc ten sam kształt co powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$ , a współczynnik  $\alpha$  przeskalowuje jedynie wartości naprężeń uplastyczniających dla poszczególnych stanów naprężenia nie zmieniając ich wzajemnego stosunku. Powierzchnia  $\bar{F}^{(2)}$  przewiduje zatem dla zadanej ścieżki naprężenia ten sam kierunek tensora plastycznej deformacji  $D^p$ , co powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$ .

W dalszej części pracy skoncentrowaliśmy się na powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$ . Wyniki otrzymywane przy wykorzystaniu tej powierzchni dla metali o zadanej teksturze odpowiadały wynikom otrzymywanym dla powierzchni Bishopa-Hilla. W szczególności przy wykorzystaniu tej powierzchni możliwe jest opisanie większej od czterech liczby *uch* technologicznych powstających podczas wyciągania elementów, *anomalnego* zachowania się blach [51] i powstawania naroży w przekrojach przez powierzchnię plastyczności, w których warunki fenomenologiczne ich nie wykazują. W przypadku blach o anizotropii normalnej badaliśmy również wpływ kształtu powierzchni plastyczności na wielkość odkształceń granicznych przy wykorzystaniu modelu lokalizacji odkształceń Marciniaka i Kuczyńskiego [78], [79]. Stwierdziliśmy, że własności blachy w sposób znaczący mogą zależeć od tekstury krystalograficznej.

Piąty rozdział poświęciliśmy wyznaczeniu rozwoju anizotropii plastycznej w elementach metalowych poddanych obróbce plastycznej. Powstająca anizotropia wynikała z rozwoju tekstury krystalograficznej w elemencie. Korzystając ze wspomnianego powyżej programu numerycznego wyznaczaliśmy ewolucję tekstury w agregacie ziaren dla przyjętej ścieżki gradientu prędkości. Założona postać gradientu prędkości odpowiadała trzem procesom technologicznym: przeciąganiu, walcowaniu i czystemu ścinaniu. Następnie korzystając z powierzchni  $F^{(1)}$  analizowaliśmy ewolucję anizotropii w blachach poddanych powyższym procesom. W każdym przypadku zakładaliśmy, że materiał blachy ma sieć typu A1, a każde ziarno należące do elementu reprezentatywnego ma te same właściwości. Sformułowane poniżej wnioski dotyczą zatem tego typu blach. Należy jednak zaznaczyć, że przedstawiony

w pracy model można zastosować do metali o innym typie sieci oraz do sytuacji kiedy poszczególne ziarna różnią się między sobą.

Na podstawie analizy stwierdziliśmy, że tworzenie się tekstury w blasze zmienia jej własności. W przypadku przeciągania element metalowy umacnia się w kierunku przeciągania, natomiast dla krążków wyciętych w kierunku prostopadłym do kierunku przeciągania, wykazujących anizotropię normalną, zwiększa się wartość współczynnika Lankforda  $R$ , a zmniejsza się wartość współczynnika  $P$ , który określa zdolność materiału do przeciwstawiania się lokalizacji odkształceń w postaci szyjkowania. Początkowo izotropowe blachy poddane walcowaniu stają się ortotropowe. Przewidywane jest powstawanie czterech *uch* technologicznych w płaszczyźnie blachy, których maksima położone są pod kątem  $45^\circ$  do kierunku walcowania. Z wysoką wartością współczynnika Lankforda  $R_\phi$ , korzystną z punktu widzenia formowania blachy, mamy do czynienia dla kąta  $\phi = 45^\circ$  do kierunku walcowania. W przypadku procesu ścinania, powierzchnia  $\bar{F}^{(1)}$  przewiduje powstawanie sześciu *uch* technologicznych oraz zwiększanie się wartości średniej współczynnika  $R_\phi$ . Dla każdego z procesów własności materiału określone na podstawie warunków fenomenologicznych odbiegały od określonych na podstawie powierzchni  $\bar{F}^{(1)}$  szczególnie jeżeli chodzi o wartość współczynnika Lankforda  $R_\phi$ . Ponieważ powierzchnia ta dobrze przybliża zachowanie się metali opisywane przez model Bishopa-Hilla zarówno dla blach izotropowych jak i blach o silnej anizotropii, mamy podstawy przypuszczać, że lepiej opisuje ona zjawiska zachodzące w procesach rzeczywistych niż powierzchnie fenomenologiczne Hilla oraz Barlata i Liana.

W przyszłości należałoby przede wszystkim dokonać weryfikacji doświadczalnej proponowanego modelu. Kolejnym krokiem powinna być jego aplikacja do programów stosowanych do obliczeń związanych z rzeczywistymi procesami obróbki plastycznej. Przedstawiona ewolucja anizotropii dotyczy modelu sztywno-idealnie plastycznego. Opisany model pozwala na uwzględnienie wpływu odkształceń sprężystych i wzmocnienia. Choć wstępna analiza wykazała, że mają one drugorzędny wpływ na rozwój anizotropii plastycznej materiału, to należałoby bliżej przyjrzeć się rozwojowi plastycznej anizotropii w przypadku zastosowania modelu kryształu sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem. Pozwoliłoby to na określenie kierunków głównych i wartości naprężeń resztkowych powstających przy obróbce plastycznej metali.

# Literatura

- [1] Andrade E. N. da C., *Slip bands with Hg, Pb, Sn.*, Phil. Mag. **27**, 869, 1914.
- [2] Arminjon M., Bacroix B. *On plastic potentials for anisotropic metals and their derivation from the texture function*, Acta Mech. **88**, 219-243, 1990.
- [3] Arminjon M., *A regular form of the Schmid law. Application to the ambiguity problem.*, Textures and Microstructures **14-18**, 1121-1128, 1991
- [4] Arminjon M., Bacroix B., Imbaut D., Raphanel J.L. *A fourth-order plastic potential for anisotropic metals and its analytical calculation from texture data*, Acta Mech. **107**, 33-51, 1994.
- [5] Asaro R. J., Rice J. R., *Strain localization in ductile crystals*, J. Mech. Phys. Solids **25**, 309-338, 1977.
- [6] Asaro R.J. *Crystal plasticity*, J. of Applied Mechanics **50**, 921-934, 1983.
- [7] Asaro R.J. *Micromechanics of crystals and polycrystals*, Advances in Applied Mechanics **23**, 1983.
- [8] Asaro R.J., Needleman A. *Textured Development and Strain Hardening in Rate Dependent Polycrystals*, Acta metall. **33**, 6, 923-953, 1985.
- [9] Batdorf S. B., Budiansky B., *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*, NACA, Tech. Notes 1871, April 1941.
- [10] Batdorf S. B., Budiansky B., *Polyaxial stress-strain relations of strain hardening metals*, J. Appl. Mech. **21**, 323-326, 1954.
- [11] Budiansky B., T. Wu T.T. *Theoretical Prediction of Plastic Strains of Polycrystals*, Proc. 4<sup>th</sup> U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1175-1185, ASME, New York, 1962.
- [12] Barlat F. *Crystallographics texture, anisotropic yield surfaces and forming limits of sheet metals*, Materials Science and Engineering **91**, 55-72, 1987.
- [13] Barlat F., Chung K., Richmond O. *Strain Rate Potential for Metals and its Application to Minimum Work Path Calculations*, Int. J. Plasticity **9**, 51-63, 1993.

- [14] Barlat F., Lian J. *Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions*, Int. J. Plasticity **5**, 51-66, 1989.
- [15] Barlat F., Lege D.J., Brem J.C. *A six-component yield function for anisotropic materials*, Int. J. Plasticity **7**, 693-712, 1991.
- [16] Barlat F., Panchanadeeswaran S., Richmond O. *Earing in Cup Drawing Face-Centered Cubic Single Crystals and Polycrystals*, Metallurgical Transactions A, **22A**, 1525-1534, 1991.
- [17] Bishop J.F., Hill R. *A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses*, Philosophical Magazine **42**, ser. VII, 414-427, 1951.
- [18] Bishop J.F., Hill R. *A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centred metal*, Philosophical Magazine **42**, ser. VII, 1298-1307, 1951.
- [19] Boehler J. P. *A simple derivation of representation for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy*, ZAMM **59**, 157-167, 1979.
- [20] Boehler J. P. *Applications of tensor functions in solid mechanics*, CISM Courses and Lectures, No. 292, Springer-Verlag, Wien-NewYork 1987.
- [21] Bunge H.J. *Texture Analysis in Material Science. Mathematical Methods*, London: Butterworths 1982.
- [22] Cao M.L., Teodosiu C. *Numerical Simulation of Drawbeads for Axisymmetric Deep-drawing processes*, Proceedings 4th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes - NUMIFORM'92, Valbonne/France/14-18 September 1992, A. A. Balcem (eds), Rotterdam, 1992.
- [23] Chung K., Lee S.Y., F. Barlat, Y. T. Keum, J. M. Park *Finite Element Simulation of Sheet Forming Based on Planar Anisotropic Strain Rate Potential*, Int. J. Plasticity **12**, 1, 93-115, 1996.
- [24] Clement A. *Prediction of Deformation Texture Using a Physical Principle of Conservation*, Mater. Sci. Eng. **55**, 203-210, 1982.
- [25] Cuitino A.M., Ortiz M. *Review article: Computational modelling of single crystals*, Modelling Simull. Mater. Sci. Eng. **1**, 225-263, 1992.
- [26] Curnier A., Rakotomanana L., *Generalised Strain and Stress Measures: Critical Survey and New Results*, Enging. Trans. **39**, 3-4, 461-538, 1991.
- [27] Darrieulat M., Montheillet F. *Extension of the Hill (1948) yield criterion to the case of prismatic monoclonic symmetry*, Int. J. Mech. Sci. **38**, 12, 1273-1284, 1995.



- [28] Darrieulat M., Piot D. *A method of generating analytical yield surfaces of crystalline materials*, Int. J. Plasticity **12**, 5, 575-610, 1996.
- [29] Donadille C., Valle R., Dervin P. i Penelle R. *Development of texture and microstructure during cold-rolling and annealing of F.C.C. alloys: Example of austenitic stainless steel*, Acta metall. **37**, 6, 1547-1571, 1989.
- [30] Duszek-Perzyna M. K., Perzyna P. *Analysis of anisotropy and plastic spin effects on localization phenomena*, Archive of Applied Mechanics **68**, 352-374, 1998.
- [31] English A. T., Chin G.Y. *On the variation of wire texture with stacking fault energy in F.C.C. metals and alloys*, Acta Metallurgica **13**, 1013, 1965.
- [32] Erbel S., Kuczyński K., Marciniak M. *Obróbka plastyczna*, PWN Warszawa 1986.
- [33] Eshelby J. D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*, Proc. Roy. Soc. London, **A241**, 376-296, 1957.
- [34] Gambin W. *Plastyczność a obrót sieci w kryształach*, Prace IPPT, Warszawa, 10/1988.
- [35] Gambin W., *A simplified model of rigid ideally-plastic crystal*, Journal of Technical Physics **29**, 2, 155-176, 1988.
- [36] Gambin W. *Crystal plasticity based on yield surface with rounded-off corners*, ZAMM **71**, 4, T265-T268, 1991.
- [37] Gambin W. *Plasticity of crystals with interacting slip systems*, Enging. Trans. **39**, 3-4, 303-324, 1991.
- [38] Gambin W. *Refined Analysis of Elastic-Plastic Crystals*, Int. J. Solids Structures **29**, 16, 2013-2021, 1992.
- [39] Gambin W. *Phenomenological model of deformation textures development*, MECA-MAT'91, Teodosiu, Raphanel&Sidoroff (eds), Balkema, Rotterdam, 1993.
- [40] Gambin W. *Finite Element Analysis of Textured Materials*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, **4**, **34**, 1996.
- [41] Gambin W., Barlat F. *Deformation Texture Development Based on Rate-Independent Crystal Plasticity*, Proc. 4th Int. Symp. on Plasticity and Its Current Applications - PLASTICITY'93, Baltimore/USA, July 1993.
- [42] Gambin W., Barlat F. *Modelling of Deformation Texture Development Based on Rate Independent Crystal Plasticity*, Int. J. Plasticity **13**, 1/2, 75-85, 1997.

- [43] Gambin W., Kowalczyk K. *Generalised plastic anisotropy tensor for materials with orthotropic and cubic symmetry*, Volume of abstracts, 32<sup>nd</sup> Solid Mechanics Conference, Zakopane, September 1-5, 1998.
- [44] Gambin W., Kowalczyk K. *Evolution of plastic anisotropy due to deformation texture development*, Mat. VII Inter. Symp. *Plasticity'99*, Mexico, Cancun, January 5-13 1999.
- [45] Gotoh M. *A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state) - I/II*, Int. J. mech. Sci. **19**, 505-512, 513-520, 1977.
- [46] Havner K.S. *Finite Plastic Deformation of Crystalline Solids*, Cambridge University Press, 1992.
- [47] Hill R. *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc., London, Ser.A, **193**, 281-297, 1948.
- [48] Hill R. *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford: Clarendon Press, 1950.
- [49] Hill R. *Continuum Micro-Mechanics of Elastoplastic Polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids **13**, 89-101, 1965.
- [50] Hill R. *The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids **15**, pp 79-95, 1967.
- [51] Hill R. *Theoretical plasticity of textured aggregates*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **85**, 179-191, 1979.
- [52] Hill R. *On macroscopic effects of heterogeneity in elastoplastic media at finite strain*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **95**, 481-494, 1984.
- [53] Hill R. *Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals*, J. Mech. Phys. Solids **38**, 3, 405-417, 1990.
- [54] Hill R., Rice J.R. *Constitutive Analysis of Elastic-Plastic Crystals at Arbitrary Strain*, J. Mech. Phys. Solids **20**, 401-413, 1972.
- [55] Hill R., Rice J.R. *Elastic Potential and the Structure of Inelastic Constitutive Laws*, SIAM J. Appl. Math. **25**, 3, 1973.
- [56] Honeycomb R.W.K. *The Plastic Deformation of Metals*, E. Arnold Ltd, 1984.
- [57] Van Houtte P. *Application of Plastic Potentials to Strain Rate Sensitive and Insensitive Anisotropic Materials*, Int. J. Plasticity **10**, 7, 719-748, 1994.
- [58] Hull D. *Introductions to dislocations*, Pergamon Press, Oxford, 1984.

- [59] Hutchinson J. W. *Bounds and Self-Consistent Estimates for Creep of Polycrystalline Materials*, Proc. R. Soc. Lond. **A348**, 101-127, 1976.
- [60] Jemioło S. *Warunki plastyczności oraz hipotezy wyężeniowe materiałów ortotropowych i transversalnie izotropowych. Przegląd literatury, niezmiennicze sformułowanie relacji konstytutywnych*, Prace Naukowe PW, Budownictwo z. 131, 5-52, 1996.
- [61] Jemioło S., Telega J.J. *Representations of tensor functions and applications in continuum mechanics*, Prace IPPT, Warszawa, 3/1997.
- [62] Jemioło S., Kowalczyk K. *Niezmiennicze sformułowanie i rozkład spektralny ortotropowego warunku plastyczności Hilla*, VI rosyjsko-polskie seminarium *Teoretyczne podstawy budownictwa*, Moskwa•Irkuck•Ułan-Ude 2-5.07.1997, Warszawa, 1997.
- [63] Jemioło S., Kowalczyk K. *Sformułowanie niezmiennicze i postać kanoniczna anizotropowej hipotezy wyężeniowej Hoffmana*, Proc. 5-th Ukrainian-Polish seminar *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, Oficyna Wydawnicza PW, Warsaw, 1997.
- [64] Jemioło S., Kowalczyk K. *Uogólnione hipotezy wyężeniowe i warunki plastyczności materiałów ortotropowych w płaskim stanie napężenia*, Proc. 6-th Polish-Ukrainian seminar *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, Oficyna Wydawnicza PW, Warsaw, 1998.
- [65] Jemioło S., Kowalczyk K. *Sformułowanie niezmiennicze i rozkład spektralny anizotropowego warunku plastyczności Hilla*, Prace Naukowe PW, Budownictwo z. 133, pp. 87-123, 1999.
- [66] Karnop K., Sachs G. *Crystallographic glide strain*, Z. Physics **41**, 116, 1927.
- [67] Kleiber M. *Metoda Elementów Skończonych w Nieliniowej Mechanice Kontinuum*, PWN Warszawa-Poznań, 1985.
- [68] Kocks U.F. *Constitutive Behaviour Based on Crystal Plasticity*, Reprinted from *United Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, A. K. Miller ed., Elsevier 1987.
- [69] Kowalczyk K., Gambin W. *Evolution of yield surface due to texture development*, Volume of abstracts, 33<sup>nd</sup> Solid Mechanics Conference, Zakopane, September 5-9, 2000.
- [70] Kowalczyk K. *Evolution of plastic anisotropy of the polycrystalline materials in large deformation processes*, Engng. Trans. (praca przyjęta do druku).
- [71] Kröner E. *Zur plastischen Verformung des Vielkristalls*, Acta Met. **9**, 155-161, 1961.
- [72] Lehmann Th., Liang H. *The Stress Conjugate to Logarytmic Strain In V*, ZAMM - Z. Angew. Math. Mech. **73**, 12, 357-363, 1993.

- [73] Lee E.H. *Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains*, J. Appl. Mech. **36**, 1, 1969.
- [74] Lequeu Ph., Gilormini P., Montheillet F., Bacroix B., Jonas J.J. *Yield Surface for Textured Polycrystals - I. Crystallographic Approach*, Acta metall. **35**, 2, 439-451, 1987.
- [75] Lequeu Ph., Gilormini P., Montheillet F., Bacroix B., Jonas J.J. *Yield Surface for Textured Polycrystals - II. Analytical Approach*, Acta metall. **35**, 2, 439-451, 1987.
- [76] Lian J., Barlat F., Baudalet B. *Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part II: Effect of yield surface shape on sheet forming limit*, Int. J. Plasticity **5**, 131-147, 1989.
- [77] Mandel J. *Generalization de la théorie de plasticité de W. T. Koiter*, Int. J. Solids Structures **1**, 273-295, 1965.
- [78] Marciniak Z., Kuczyński K. *Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal*, Int. J. Mech. Sci. **9**, 609, 1968.
- [79] Marciniak Z., Kuczyński K., Pokora T. *Influence of the Plastic Properties of a Material on the Forming Limit Diagram for Sheet Metal in Tension*, Int. J. Mech. Sci. **15**, 789, 1973.
- [80] Mark H., Polanyi M., Schmid E., *Vorgänge bei der Dehnung von Zinkkristallen. I,II,III*, Z. Phys. **12**, 58-77, 78-110, 111-16, 1923.
- [81] Mathur K.K., Dawson P.R. *On modelling the Development of the Crystallographic Texture in a Bulk Forming Processes*, Int. J. Plasticity **5**, 67-94, 1989.
- [82] McMeeking R.M., Rice J.R. *Finite-Element Formulation for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation*, Int. J. Solids Structures **11**, 601-616, 1975.
- [83] Méric L., Cailletaud G. *Single crystal modeling for structural calculations: Part 2 - Finite element implementation*, Journal of Engineering Materials and Technology **113**, 171-182, January 1991.
- [84] Méric L., Cailletaud G. *Finite element implementation of a model for single crystals at finite strain*, Eur. Conf. on New Advances in Computational Structural Mechanics, Giers (France), 2-5 April 1991.
- [85] Mises, R. von *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanics **8**, 161, 1928.
- [86] Montheillet F., Cohen M., Jonas J. J., *Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu and  $\alpha$ -Fe*, Acta metall. **32**, 11, 2077-2089, 1984.
- [87] Mróz Z. *On the Description of Anisotropic Workhardening*, J. Mech. Phys. Solids, **15**, 163-175, 1967.

- [88] Mróz Z. *Phenomenological Constitutive Models for Metals. Modelling Small Deformations in Polycrystals*, edited by J. Gittus and J. Zarka, Elsevier Applied Science Publishers, London, New York, 1986.
- [89] Olszak W., Urbanowski W. *The plastic potential and generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos. 8, 4, 671-694, 1956.
- [90] Olszak W., Ostrowska-Maciejewska J. *The plastic potential in the theory of anisotropic elastic-plastic solids*, Engng. Fracture Mech. 21, 4, pp.625-632, 1985.
- [91] Ostrowska-Maciejewska J. *Mechanika Ciał Odkształcalnych*, PWN Warszawa, 1994.
- [92] Pan J., Rice J. R., *Rate sensitivity of plastic flow and implication for yield-surface vertices*, Int. J. Solids Structures 19, 973-987, 1983.
- [93] Petryk H. *On the Micro-Macro Transition and Hardening Moduli in Plasticity*, Proc. IUTAM Symp. Micro- and Macrostructural Aspects of Thermoplasticity, Bochum 1997.
- [94] Petryk H. *Podstawy mikromechaniki materiałów sprężysto-plastycznych*, Materiały do wykładów, II Seminarium Zintegrowane studia podstaw deformacji plastycznej metali, Łańcut, Listopad 1998.
- [95] Pęcherski B. R., *Opis deformacji plastycznej metali z efektami mikropasm ścinania*, Prace IPPT, Warszawa, 2/1998.
- [96] Przybyłowicz K. *Podstawy teoretyczne metaloznastwa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1999.
- [97] Raniecki B., Samanta S.K. *The Thermodynamic Model of Rigid-Plastic Solid with Kinematic Hardening, Plastic Spin and Orientation Variables*, Arch. Mech. 41, 5, 747 - 758, Warszawa 1989.
- [98] Rice J.R. *On Structure of Stress-Strain Relation for Time-Dependent Deformation in Metals*, J. Appl. Mech. 37, 728-737, 1970.
- [99] Rychlewski J. „*СIIINOSSSTTUV*”. *Matematyczna struktura ciał sprężystych*, (po rosyjsku), Raport Instytutu Problemów Mechaniki Akademii Nauk ZSRR, No.217, Moskwa 1983.
- [100] Rychlewski J. *Rozkład energii sprężystej i kryteria graniczne*, (po rosyjsku), Advances in Mechanics 7, 3, 1984.
- [101] Rychlewski J. *Ewolucja anizotropii plastycznej w procesie deformacji* - notatki XII'94, II'97.

- [102] Sachs, G. *Zur Ableitung einer Fließbedingung*, Zeitschrift der Verein deutscher Ingenieur **72**, 734, 1928.
- [103] Scheidler M. *Time Rates of Generalized Strain Tensors. Part II: Approximate Basis-Free Formulas*, Mechanics of Materials **11**, 211-219, 1991.
- [104] Schmid E., Boas W., *Plasticity of Crystals*, F. A. Hughes, London, 1950.
- [105] Taylor G. I., Elam C. F., *The plastic extension and fracture of aluminium crystals*, Proc. Roy. Soc. **A108**, 28-51, 1925.
- [106] Taylor G.I. *Plastic strain in metals*, Journal of Institute of Metals **62**, 307-324, 1938.
- [107] Teodosiu C., Raphanel J.L., Tabourot L. *Finite Element Simulation of Large Elastoplastic Deformation in Multicrystals - MECAMAT'91*, Theodosiu, Raphanel&Sidoroff (eds), Balkema, Rotterdam, 1993.
- [108] Toth L. S., Gilormini P., Jonas J. J. *Effect of Rate Sensitivity on the stability of torsion textures*, Acta metall. **36**, 12, 3077-3091, 1988.