

**INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN**

**ZAKŁAD MECHANIKI MATERIAŁÓW I BIOMECHANIKI**

**PRACOWNIA METOD WARIACYJNYCH I BIOMECHANIKI**

Eleonora Kruglenko

**ANALIZA FUNKCJONAŁÓW NIEWYPUKŁYCH  
CHARAKTERYZUJĄCYCH MIKROMAGNETYKI**

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor:

Doc. dr hab. Kazimierz Piechór

Warszawa, 2006

# Spis treści

<b>1 Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1 Cel i zakres rozprawy.....	5
<b>2 Mikromagnetyzm: podstawy fizyczne i modelowanie</b>	<b>7</b>
2.1 Wstęp.....	7
2.2 Materiały magnetyczne.....	8
2.2.1 Magnesowanie.....	9
2.2.2 Struktura krystaliczna.....	10
2.2.3 Diamagnetyki i paramagnetyki.....	12
2.3 Materiały magnetouporządkowane .....	13
2.4 Domeny ferromagnetyczne i ścianki domenowe.....	16
2.4.1 Domeny ferromagnetyczne.....	16
2.4.2 Energia anizotropii magnetycznej.....	19
2.4.3 Obszar przejściowy między domenami.....	21
2.4.4 Cząsteczki jednodomenowe.....	23
2.5 Materiały magnetosprężyste.....	24
2.5.1 Magnetostrykcja.....	24
2.5.2 Zjawisko pamięci kształtu.....	25
2.5.3 Ferromagnetyki wykazujące pamięć kształtu.....	28
2.6 Elementy teorii mikromagnetyzmu.....	31
2.7 Zasada minimum dla mikromagnetyków nieodkształcalnych.....	33
2.8 Modelowanie materiałów magnetosprężystych.....	35
<b>3 Elementy teorii miar Younga</b>	<b>38</b>
3.1 Wybrane pojęcia podstawowe.....	38
3.1.1 Kwaziwypukłość, poliwyypukłość i wypukłość pierwszego rzędu.....	40
3.1.2 Dolna półciągłość funkcjonałów a wypukłość.....	44
3.2 Metoda bezpośrednia rachunku wariacyjnego.....	46
3.3 Miary Younga.....	50
3.4 Miary Younga generowane przez gradient.....	55
<b>4 Matematyczne zagadnienia związane z mikromagnetykami nieodkształcalnymi</b>	<b>58</b>
4.1 Relaksacja zagadnienia (P) przez uwypuklenie.....	59
4.2 Relaksacja problemu (P) z wykorzystaniem miar Younga.....	60
4.3 Numeryczna dyskretyzacja zagadnienia mikromagnetyzmu zrelaksowanego przy pomocy miar Younga.....	63
4.3.1. Deskrytyzacja zagadnienia przy pomocy uzgodnionej metody elementów skończonych .....	65
4.3.2. Schemat $(R^d/P_Q)_{j \in N}$ na podstawie zbioru aktywnego.....	67
<b>5 Przykład numeryczny</b>	<b>72</b>

<b>6 Nieściśliwe i prawie nieściśliwe sprężyste ciała magnetyczne</b>	<b>81</b>
6.1 Energia deformowanego ciała magnetycznego.....	81
6.2 Magnetyki nieściśliwe i prawie nieściśliwe.....	85
<b>7 Podsumowanie i wnioski końcowe</b>	<b>102</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>103</b>
<b>Dodatek 1</b>	<b>106</b>

*Chciałam serdecznie podziękować promotorowi doc. dr hab. Kazimierzowi Piechórowi za opiekę, okazaną pomoc i poświęcony czas podczas realizacji pracy doktorskiej.*



# Rozdział 1

## Wstęp

W pracy przedstawiono w sposób zwarty zarówno podstawy fizyczne zjawiska pojawiania się mikrostruktury domen magnetycznych jak i próbę teorii wyjaśniającej powstawanie mikrostruktury w ciałach magnetycznych.

Modelowanie materiałów magnetycznych wymaga określenia poziomu, na którym odbywa się opis zachowania danego materiału. Podział na pięć takich poziomów jest pokazany w tabeli 1.1. Zagadnienia związane z magnetyzmem można w pełni opisać tylko na gruncie mechaniki kwantowej (tak nazywany „poziom atomowy”). Dla praktycznych zastosowań materiałów magnetycznych w technice często wykorzystana jest klasyczna teoria magnetyzmu z wielkościami „makroskopowymi” takimi jak namagnesowanie, indukcja, przyłożone pole magnetyczne („poziom makroskopowy”). W obecnej pracy zostały wybrane poziomy 2 i 3 (por. tab.1.1), gdy badamy „makroskopowe” własności materiałów magnetycznych w zależności od ich „mikrostruktury”. Będziemy posługiwać się teorią mikromagnetyzmu, która opisuje procesy namagnesowania w pewnej skali: wystarczająco dużej dla możliwości wykorzystania ciągłego wektora magnetyzacji, a nie indywidualnych spinów atomów, i wystarczająco małej, żeby analizować elementy struktur przejściowych pomiędzy domenami magnetycznymi [14].

Teoria mikromagnetyzmu bazuje na zasadzie wariacyjnej: poszukiwany jest rozkład wektora magnetyzacji  $\mathbf{m}$  wewnątrz ferromagnetycznego ciała  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , ( $d = 2, 3$ ), minimalizujący energię całkowitą.

Wówczas stosując teorie mikromagnetyzmu mamy następujące zagadnienie minimalizacji jego energii całkowitej:

Znaleźć minimum funkcjonału

$$E(\mathbf{m}) = \int_{\mathbb{R}^d} (e_A + e_K + e_H + e_\sigma) dV + E_S + E_{MS} \quad (1.1)$$

określonego w odpowiedniej przestrzeni funkcji dopuszczalnych.

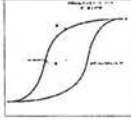


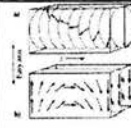

nazwa	rysunek	skala	obiekt	opis
<b>5. Poziom makroskopowy</b>		<b>W zależności od zastosowań</b>	<i>Uśredniony wektor namagnesowania próbki jako funkcja od zewn. pola magnetycznego</i>	Magnetyzm klasyczny, histereza magnetyczna, krzywa namagnesowania
<b>4. Poziom mezo/makroskopowy</b>		<b>&gt;0,1mm</b>	<i>Grupa domen z jednakowymi kierunkami namagnesowania jako "faza"</i>	Teoria przejść fazowych Funkcja rozkładu faz kierunków namagnesowania
<b>3. Poziom mezoskopowy</b>		<b>1-1000 μm</b>	<i>Domena magnetyczna, ścianka domenowa</i>	Teoria domenowa, bazująca na teorii mikromagnetyzmu i opisująca mikrostrukturę magnetyczną próbki czy ciała
<b>2. Poziom mikroskopowy</b>		<b>1-1000 nm</b>	<i>Struktura ścianki domenowej i domen magnetycznych</i>	Teoria mikromagnetyzmu, kontynualna teoria klasycznego wektorowego pola magnetycznego
<b>1. Poziom atomowy</b>		<b>&lt;1 nm</b>	<i>Spiny atomowe, elementarny moment magnetyczny</i>	Mechanika kwantowa. Pojawienie się elementarnych momentów magnetycznych, ich konfiguracja oraz wzajemne oddziaływanie

Tabela 1.1. Różne podejścia do opisu materiałów magnetycznych.

Przy rozpatrywaniu energii całkowitej (1.1) bierze się pod uwagę następujące człony: energię wymiany  $e_A$  nazywaną tak przez jej pochodzenie od elementarnych oddziaływań wzajemnych, odpowiadających za ferromagnetyzm; energię magnetyczną anizotropii  $e_K$ , opisującą oddziaływanie magnetyzacji z siecią krystaliczną materiału; energię zewnętrzną  $e_H$  powstającą pod wpływem przyłożonego pola magnetycznego; energię magnetostatyczną albo energię rozproszenia  $E_S$ , wynikająca z faktu, że sam „magnes” wytwarza pole magnetyczne; energię naprężeń magnetostrykcyjnych  $E_{MS}$ , która powstaje wtedy, gdy pomiędzy strukturą magnetyczną a deformacjami sieci krystalicznej ciała występuje oddziaływanie „magnetosprężyste”, które przejawia się w zjawisku magnetostrykcji; energię  $e_\sigma$  wzajemnego oddziaływania magnetyzacji z naprężeniami pochodzenia niemagnetycznego.

Postać energii całkowitej zależy od typu materiału. W rozdziałach 4,5 rozważamy energię całkowitą dla materiału ferromagnetycznego nieodkształcalnego, w rozdziale 6 - dla

odkształcalnych mikromagnetyków, w rozdziale 7 - dla nieściśliwych i prawie nieściśliwych ciał magnetoelastycznych.

Jeżeli istnieje rozwiązanie  $\mathbf{m}$  zagadnienia (1.1), wtedy mówimy, że minimum energii jest osiągalne, a rozwiązanie  $\mathbf{m}$  nazywamy *minimizerem*. Dowód istnienia minimizerów dla materiałów ferromagnetycznych można znaleźć w pracach [24,52], dla poszczególnych przypadków materiałów magnetoelastycznych w [25,55,63]. W rozdziale 7 pokazujemy istnienie minimizerów dla ciała magnetoelastycznego nieściśliwego i prawie nieściśliwego. W teorii mikromagnetyzmu, jak i w rachunku wariacyjnym oraz w mechanice ośrodków ciągłych, fundamentalną rolę odgrywają funkcjonały całkowite typu

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \mathbf{m}), \quad (1.2)$$

określone w pewnej przestrzeni funkcyjnej. Jeżeli rozważany funkcjonal jest funkcjonalem energii, to mówimy wtedy o problemie minimum energetycznego.

Jedną z podstawowych metod badania zagadnień istnienia oraz znajdowania minimizerów jest metoda bezpośrednia rachunku wariacyjnego. Metoda ta polega na badaniu minimum funkcjonału bez potrzeby analizowania równań Eulera-Lagrange'a i wywodzi się z przypadku skończonego wymiarowego. Stosowanie tej metody wymaga, aby funkcjonal  $J(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  określony na odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, np. przestrzeni Sobolewa  $\mathbf{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ ,  $\mathbf{m} \in W^{2,2}(\Omega)$  był dolnie półciągły względem zmiennych  $\mathbf{u}, \mathbf{m}$  w odpowiedniej topologii. Topologia ta musi dopuszczać istnienie zbiorów relatywnie zwartych. Tak określony funkcjonal przy dodatkowych założeniach koercyjności funkcji podcałkowej  $f$  posiada minimum.

Okazuje się, że wypukłość funkcji podcałkowej (a nawet pewne jej uogólnienia, takie jak poliwyypukłość, kwaziwyypukłość, wypukłość rzędu 1, (definicje podane w rozdziale 2)) gra tutaj kluczową rolę. Jeśli funkcja nie spełnia odpowiedniego warunku wypukłości, mogą nie istnieć minimizery w sensie klasycznym, tj. należące do odpowiednich przestrzeni Sobolewa.

Problem braku minimum dla pewnych zagadnień teorii sterowania był zauważony przez Younga. Metoda pochodząca od niego polegała na rozszerzeniu klasy rozwiązań. Young wprowadził pojęcie krzywej uogólnionej, tj. takiej, która jest uogólnionym rozwiązaniem przy braku rozwiązania klasycznego. Jest to para  $(\mathbf{u}, \nu)$ , gdzie  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  jest trajektorią, a  $\nu = (\nu_{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , jest miarą probabilistyczną (rodziną miar parametryzowaną zmienną  $\mathbf{x} \in \Omega$ ).

Przyjęcie i rozwój idei rozwiązań uogólnionych w sensie Younga doprowadziły do rozwoju miar probabilistycznych zwanych też miarami Younga. W rozdziale 2 podano definicję i niektóre własności miar Younga.

Inne alternatywne podejście do zagadnień minimalizacji funkcjonałów, które nie posiadają klasycznego minimum, polega na zastosowaniu tzw. relaksacji funkcjonału. Taką metodą jest np. relaksacja kwaziwypukła, polegająca na tym, że problem znalezienia  $\inf J(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  nie mający rozwiązania zastępuje się problemem wyznaczania  $\inf QJ(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ , czyli „zadaniem kwaziwypukłym”, a następnie udowadnia się, że

$$\inf J(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \inf QJ(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \min QJ(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \quad (1.3)$$

Tutaj  $QJ$  oznacza kwaziwypukłą relaksację funkcjonału  $J$ . Okazuje się, że dwa ostatnie zagadnienia są równoważne zagadnieniu wyznaczania minimum odpowiedniego funkcjonału zrelaksowanego przez miary Younga.

Pierwotnie miary Younga, znane wcześniej jako miary probabilistyczne, służyły jako aparat do znajdowania uogólnionych rozwiązań w przypadku, gdy problem minimizacyjny nie spełniał odpowiedniego warunku zwartości, tzw. *inf-compactness*. Rozwiązania klasyczne nie istniały, natomiast graniczne zachowanie minimizerów stawało się coraz bardziej oscylujące. Rozwój teorii miar Younga nastąpił w latach siedemdziesiątych i był związany z równaniami różniczkowymi cząstkowym [4,9,13,28]. Późniejszy rozwój teorii tych miar związany jest z optymalizacją i sterowaniem, z zagadnieniami ewolucyjnymi z przejściami fazowymi [13,26,33,36,41,44,48,55]. Miary Younga znalazły zastosowania w zagadnieniach aproksymacyjnych i obliczeniach numerycznych [17-19,26,38,39,51,54,57,58,59].

W zastosowaniach, w szczególności do mechaniki nieliniowej, w bardzo szerokiej klasie tzw. materiałów inteligentnych, jak np. stopów metali z pamięcią kształtu, gęstość energii wewnętrznej jest funkcją niewypukłą; nie jest nawet funkcją kwaziwypukłą. Jest to matematyczna przyczyna nieistnienia klasycznych rozwiązań. Oznacza to, że niewypukłe zagadnienie minimalizacji nie posiada minimum w klasie funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue’a. Minimizery mają wówczas charakter oscylacyjny. Takie zjawisko, nazywane „mikrostrukturą”, objawia się w postaci szybkich przestrzennych oscylacji gradientu  $\nabla \mathbf{m}$ . Fizycznie dla zagadnienia mikromagnetyzmu oznacza to istnienie domen magnetycznych, w każdej z których zmienia się kierunek magnetyzacji. Z matematycznego punktu widzenia te szybkie oscylacje gradientów mogą być opisane przez miary probabilistyczne, w szczególności przez miary Younga. W pracy korzystamy z zagadnienia mikromagnetyzmu

zrelaksowanego przez miary Younga, tzn. poszukujemy rozwiązania zagadnienia minimalizacji funkcjonału energii wewnętrznej w sensie miar Younga.

Stosując analizę numeryczną do zagadnień mikromagnetyzmu okazują się, że lepiej korzystać z relaksacji zagadnienia przez miary Younga, a nie z uwypuklenia zadania minimum (zob. rozdział 4). Wynika to z dwóch powodów: po pierwsze, uwypuklając funkcję gęstości energii gubimy mikrostrukturę, którą można „odzyskać” dopiero w postprocesorowym kroku, a nie wyznaczyć wprost z zagadnienia zrelaksowanego z wykorzystaniem miar Younga; po drugie, zagadnienie zrelaksowane przez uwypuklenie jest ograniczone do przypadków, kiedy funkcja, opisująca energię anizotropii magnetycznej jest znana *explicite*, co nie zawsze jest praktycznie możliwe [59].

W pracy są rozpatrywane różne metody numeryczne rozwiązania tak zrelaksowanego zagadnienia mikromagnetyzmu. W rozdziale 5 podano przykład obliczeniowy dla zagadnienia minimalizacji sztywnego ferromagnetyka.

### **1.1. Cel i zakres rozprawy**

Celem rozprawy jest analiza funkcjonałów niewypukłych charakteryzujących mikromagnetyki oraz podanie podstawowych faktów dotyczących fizycznych i matematycznych zagadnień teorii mikromagnetyzmu.

Podstawy fizyczne zjawiska magnetyzmu omówiono na 24 stronach na podstawie 4 monografii, w tym jednej z 2000 roku, zawierających aktualną wiedzę o mikrostrukturze magnetycznej (rozdział 2). Najnowsze rezultaty teoretyczne dotyczące opisu magnetyków i mikromagnetyków odkształcalnych zabrano w rozdziale 2.

Rozdział 3 zawiera wprowadzenie do teorii miar Younga. W nim również podano aproksymację numeryczną zagadnienia niewypukłego z wykorzystaniem tych miar.

W rozdziale 4 zebrano najważniejsze twierdzenia i rezultaty dotyczące modelowania mikromagnetyków nieodkształcalnych poprzez relaksację funkcjonałów energetycznych miarami Younga.

W rozdziale 5 wykorzystano twierdzenia podane w rozdziale 4 do wykonania numerycznej realizacji przy założeniu konkretnej postaci energii wewnętrznej. Opracowano własny algorytm numeryczny i wykonano obliczenia ilustrujące pojawienie się mikrostruktury pod wpływem przyłożonego pola zewnętrznego.

W rozdziale 6 sformułowano i udowodniono twierdzenia o istnieniu minimizera energii modelu ciała nieściśliwego magnetosprężystego.

Własnym wkładem autorki jest:

- 1) zdefiniowanie nowego modelu ciała magnetoelastycznego prawie nieściśliwego;
- 2) pokazanie istnienia rozwiązań zagadnienia minimalizacji energii wewnętrznej dla ciał magnetoelastycznych prawie nieściśliwych;
- 3) sformułowanie i udowodnienie twierdzeń o istnieniu granicznego modelu nieściśliwego dla ciągu zagadnień prawie nieściśliwych.

## Rozdział 2

### Mikromagnetyzm: podstawy fizyczne i modelowanie

#### 2.1. Wstęp

Mikromagnetyzm jest klasyczną fenomenologiczną makroskopową (pomimo nazwy) teorią, w której nie wyjaśnia się pojawienia namagnesowania, anizotropii magnetycznej, magnetostrykcji ani innych efektów właściwych magneto-uporządkowanym materiałom. W teorii mikromagnetyzmu wzajemne oddziaływania, które powodują te efekty są postulowane. Zagadnieniem mikromagnetyzmu jest znaleźć zależności wektora magnetyzacji od współrzędnych i czasu, korzystając ze wzorów dla energii swobodnej i ogólnych równań równowagi i ruchu magnetyzacji. Często w literaturze materiały magnetyczne, do opisu których stosuje się teorię mikromagnetyzmu, nazywane są mikromagnetykami.

Historia takiego podejścia zaczyna się od artykułu Landau i Lifshitz z 1935 roku [47], dotyczącego obliczenia ścianek domen magnetycznych. W tej pracy po raz pierwszy sformułowano zasadę minimalizacji energii całkowitej jako metodę poszukiwania rozkładu magnetyzacji oraz podano równanie opisujące namagnesowanie. Praca zawiera wyniki, które nie straciły na znaczeniu do dziś: na przykład, rozmiary domen magnetycznych i charakter zmiany magnetyzacji w domenie. Ważny wkład do teorii, która potem otrzymała nazwę teorii mikromagnetyzmu, wniósł Kittel (1947), który uwzględnił wpływ formy próbki i anizotropii magnetycznej na rezonans ferromagnetyczny. A także Kondorskij (1950,1952) pracując nad teorią cząsteczek jednodomenowych. Herring i Kittel (1951) opracowali makroskopową teorię fal spinowych, a Walker (1957) podał teorię drgań niejednorodnych namagnesowania. W pracach [14,15] Brown sformułował zasady ogólne i podstawowe równania teorii dla przypadku statycznego, rozwijając równania teorii trójwymiarowej. Teoria mikromagnetyzmu znalazła zastosowanie do modelowania bardzo szerokiej klasy tzw. materiałów inteligentnych (ang. smart materials). Do takich materiałów należą materiały ferromagnetyczne wykazujące pamięć kształtu. Istnieją inne podejścia do opisu takich materiałów. Na przykład, w pracy [26] teoria, którą autorzy nazwali „Constrained theory of magnetoelasticity”, wykorzystuje również zasady mikromagnetyzmu, a magnetyzacja i deformacja są sprzężone.

Interesująca nas teoria mikromagnetyzmu bazuje na zasadzie wariacyjnej: poszukiwany jest rozkład magnetyzacji minimalizujący energię całkowitą. Zasada

wariacyjna prowadzi do równań różniczkowych, nazywanych równaniami mikromagnetyzmu. W pracy [47] są one rozpatrywane w przypadku jednowymiarowym. Równania mikromagnetyzmu są równaniami skomplikowanymi, są to równania nieliniowe i nielokalne. Dlatego trudno jest znaleźć rozwiązanie analityczne takich równań (oprócz przypadków, kiedy możliwa jest linearyzacja). Pomimo tego, liczba zagadnień, dla których konieczne jest zastosowanie teorii mikromagnetyzmu rośnie, na przykład przy badaniu zachowania się małych cząstek magnetycznych, większych od domeny, ale małych dla opisu przez jednorodną magnetyzacją, dla opisywania i obliczenia struktury ścianek domenowych oraz dla modelowania materiałów magnetosprężystych, ferromagnetyków wykazujących pamięć kształtu [2,26,29,32,33]

Z powodu trudności obliczeniowych istotne jest poszukiwanie rozwiązań numerycznych. Jednakże zastosowanie mikromagnetyzmu struktur domenowych o dużej skali wydaje się nierealne: różnica pomiędzy rozmiarem próbki (około mikrona sześciennego), dla której jest możliwe 3-wymiarowe obliczenie metodą elementów skończonych a rozmiarem struktury domenowej, znajdującej się w przedziale od milimetrów do centymetrów jest bardzo duża [59].

Z szybkim wzrostem możliwości obliczeniowych wzrosło zainteresowanie mikromagnetyzmem jako istotnym instrumentem dla charakterystyki materiałów magnetycznych, możliwości porównania wyników teorii z eksperymentem, projektowania nowych materiałów magnetycznych, które są wykorzystywane w nowoczesnych urządzeniach zapisu magnetycznego, magneto-elektronowych przyrządów, nośników informacji z ultra wysoką gęstością zapisu itd.

W dalszej części tego rozdziału rozpatrzono fizyczne podstawy teorii mikromagnetyzmu, materiały magnetyczne, ich strukturę oraz metody opisu.

## **2.2. Materiały magnetyczne**

„Materiałem magnetycznym” – nazywa się wszystkie substancje wykazujące jakiegokolwiek właściwości magnetyczne. Niektóre z nich, takie jak diamagnetyki czy paramagnetyki, wykazują te własności w niezwykle słabym stopniu i są wtedy traktowane jako „niemagnetyczne”. W pracy będziemy rozpatrywać materiały, wykazujące właściwości magnetyczne w stopniu znaczącym, do nich należą ferromagnetyki, antyferromagnetyki i ferrimagnetyki.

Właściwości magnetyczne materiałów są wynikiem istnienia momentów magnetycznych atomów. Pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego w większości



pierwiastków wypadkowe momentów magnetycznych elektronów atomu są zerowe gdyż różne kierunki kompensują się nawzajem. Jednak istnieje szereg pierwiastków (żelazo, kobalt, nikiel), których atomy mają niecałkowicie wypełnione wewnętrzne powłoki elektronowe. Moment magnetyczny takich atomów, nazywanych magnetycznymi, nie jest zerem. W temperaturze wyższej temperatury krytycznej (tzw. „temperatury Curie”) momenty magnetyczne są skierowane chaotycznie, jednak w niższej temperaturze otrzymują pewny przeważający kierunek i podczas ruchu cieplnego wahają się około tego kierunku. Materiały, w których istnieją taki kierunki, nazywano materiałami magnetouporządkowanymi.

### 2.2.1. Magnesowanie

Materiały, w których powstaje moment magnetyczny pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego nazywają się magnetykami, a proces nabycia momentu magnetycznego – namagnesowaniem materiału. Do opisywania materiałów magnetycznych wprowadzono wektor namagnesowania  $\mathbf{J}$ , równy momentowi magnetycznemu  $\mathbf{M}$  jednostki objętości  $V$ :

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{M}}{V} \quad (2.1)$$

W magnetykach, w których momenty magnetyczne zlokalizowane tylko na atomach, moment magnetyczny całej próbki  $\mathbf{M}$  składa się z momentów magnetycznych atomów  $\mu_i$  ( $i$ - numer atomu):

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mu_i, \quad (2.2)$$

a sumowanie odbywa się po wszystkim atomach magnetycznych, gdzie  $N$  jest ilością atomów.

Namagnesowanie nazywa się jednorodnym, jeżeli wektor namagnesowania  $\mathbf{J}$  ma tą samą długość niezależnie od jego kierunku. Indukcja pola magnetycznego w magnetyku w układzie MKS jest sumą:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}, \quad (2.3)$$

w jednostkach CGS:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{J}, \quad (2.4)$$

gdzie :

$\mathbf{H}$  - jest natężeniem doprowadzonego pola magnetycznego, wyrażonym w amperach na metr (A/m), w układzie CGS w erstedah ( $1\text{Oe} = (1/4\pi) \cdot 10^3 \text{ A/m}$ );

**B** - jest wytworzona przez pole indukcją magnetyczną lub gęstością strumienia magnetycznego, wyrażoną w weberach na metr kwadratowy ( $\text{Wb/m}^2$ ) ( $1 \text{ Wb/m}^2 = 1 \text{ Tl} = 10^4 / 4\pi \text{ Gs} = 7,93 \cdot 10^3 \text{ Gs}$ );

**J** - jest natężeniem magnetyzacji, wyrażonym w tych samych jednostkach;

$\mu_0$  - jest pierwotną stałą magnetyczną lub przenikalnością magnetyczną próżni; wartość  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$  (henrów na metr).

W pracach z zakresu magnetyzmu często stosowano zarówno układ jednostek MKS (metr-kilogram-sekunda), jak i CGS (centymetr-gram-sekunda), co bywa dogodniejszym. Przejście z jednego układu do drugiego można wykonać z pomocą następujących zależności:

$1 \text{ Wb/m}^2 = 10000 \text{ Gs}$  (gausów),

$100 \text{ A/m} = 1 \text{ A/cm} = 1,257 \text{ Oe}$  (ersteda),

$1 \text{ Oe} = 1,8 \text{ A/cm}$  (w przybliżeniu).

Zauważmy, że do formuły (2.3) wchodzi nie mikroskopowe wartości **B**, **M**, **H**, które bardzo zmieniają się na odległościach rzędu odległości międzyatomowych, a tylko ich uśrednione wartości makroskopowe.

## 2.2.2. Struktura krystaliczna

Pierwiastki i stopy ferromagnetyczne, podobnie jak i metale, mają budowę krystaliczną. Ich własności są wywołane złożonym działaniem wszystkich kryształów składowych. Dlatego też ważne jest poznanie indywidualnych własności pojedynczych kryształów.

Idealny kryształ jest zbudowany z powtarzających się w przestrzeni identycznych jednostek strukturalnych. Strukturę wszystkich kryształów można opisać za pomocą sieci, w której z każdym punktem jest związana grupa atomów. Tę grupę atomów nazywamy bazą; dzięki powtarzaniu się jej w przestrzeni powstaje struktura krystaliczna.

Sieć jest zdefiniowana przez trzy podstawowe wektory translacji sieci  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  takich, że ułożenie atomów wygląda tak samo z punktu  $\mathbf{r}$  jak i z punktu

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2 + u_3 \mathbf{a}_3, \quad (2.5)$$

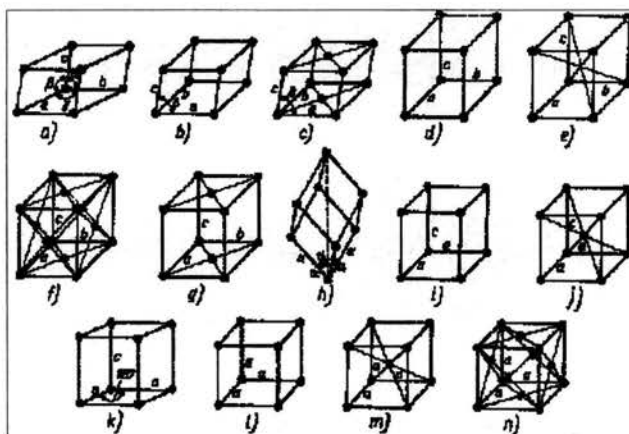
gdzie  $u_1, u_2, u_3$  są dowolnymi liczbami całkowitymi. Zbiór punktów  $\mathbf{r}'$ , określonych przez wzór (2.5) dla wszystkich wartości  $u_1, u_2, u_3$  definiuje sieć. Sieć jest periodycznym układem punktów w przestrzeni. (Analogiczny zbiór w dwóch wymiarach jest nazywany siatką). Sieć

jest abstrakcją matematyczną; strukturę krystaliczną otrzymujemy wtedy, gdy baza atomów jest jednoznacznie przyporządkowana każdemu węzłowi. Mamy więc logiczny związek:

Sieć + baza = struktura krystaliczna.

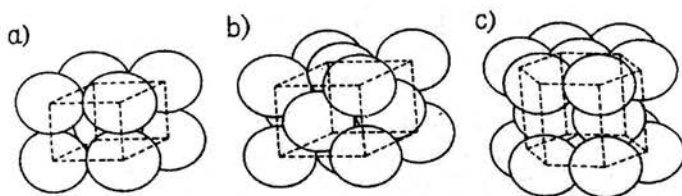
Sieć nazywamy *prostą*, a wektory translacji  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  *podstawowymi*, jeśli dowolne dwa wektory  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{r}'$  opisujące położenie punktów, z których układ atomów wygląda tak samo, spełniają zależność (2.5) dla odpowiednie dobranych liczb całkowitych  $u_1, u_2, u_3$ . Komórka zbudowana na tak zdefiniowanych podstawowych wektorach translacji jest elementem składowym struktury krystalicznej o najmniejszej objętości.

Podstawowe wektory translacji służą często do definiowania osi krystalicznych. Stosowane są również inne osie krystaliczne, które można łatwo powiązać z symetrią struktury. Osie krystaliczne  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  tworzą trzy sąsiednie krawędzie równoległoscianu. Jeśli węzły są tylko w wierzchołkach równoległoscianu, mówimy o równoległoscianie elementarnym.



Rys. 2.1. Typy sieci trójwymiarowych (sieci Bravais'go) (14 różnych typów), [45].

W temperaturze pokojowej żelazo krystalizuje w sieci przestrzennie centrycznej układu regularnego, nikiel w płasko centrycznej układu regularnego, a kobalt w układzie heksagonalnym. Struktura tych kryształów pokazana na rysunku 2.2.



Rys.2.2. Budowa sieci krystalicznej a) żelaza, sc ang. simple cubic- prosta, b) niklu, bcc- body centered cubic- przestrzennie centrowana, c) kobaltu, fcc- face centered cubic- powierzchniowo centrowana. [11].

W podrozdziale 2.4.2 będzie pokazano, jak budowa sieci krystalicznej wpływa na własności magnetyczne materiału, gdy omówimy istnienie tzw. kierunków łatwego i trudnego namagnesowania materiałów oraz energii anizotropii magnetycznej.

### 2.2.3. Diamagnetyki i paramagnetyki.

Rozpatrzmy materiały, w których nie występuje uporządkowanie momentów magnetycznych atomów, to znaczy, że atomy nie mają momentów magnetycznych albo momenty te są nieuporządkowane.

Zagadnienia związane z magnetyzmem można w pełni opisać tylko na gruncie mechaniki kwantowej. Czysto „klasyczny” układ w stanie równowagi termodynamicznej może nie wykazywać momentu magnetycznego nawet w obecności pola magnetycznego. Źródłami momentu magnetycznego swobodnego atomu są: spin elektronów, orbitalny moment pędu elektronów związany z ich ruchem wokół jądra oraz zmiana momentu orbitalnego spowodowana zewnętrznym polem magnetycznym. Pierwsze dwa czynniki związane są z paramagnetycznym wkładem do namagnesowania, trzeci - z wkładem diamagnetycznym. W stanie podstawowym 1s atomu wodoru moment orbitalny jest równy zeru i na moment magnetyczny składa się tylko moment związany ze spinem oraz niewielki indukowany moment diamagnetyczny. W stanie 1s<sup>2</sup> atomu helu zarówno moment spinowy, jak i orbitalny są równe zeru i wkład do momentu magnetycznego daje tylko moment indukowany. Atomy o zapełnionych powłokach elektronowych mają zerowe momenty spinowe i orbitalne; tylko w przypadku nie zapełnionych powłok momenty te mogą być różne od zera.

Jeżeli namagnesowanie  $J$  definiujemy jako moment magnetyczny jednostki objętości,  $H$  oznacza natężenie pola magnetycznego, wtedy podatność magnetyczną jednostki objętości definiujemy w następujący sposób:

$$\chi = \frac{J}{H},$$

gdzie  $\chi$  jest wielkością bezwymiarową.

Substancje o ujemnej podatności magnetycznej nazywamy diamagnetykami, a o dodatniej - paramagnetykami. Jądrowe momenty magnetyczne są źródłem paramagnetyzmu jądrowego. Są one około 1000 razy mniejsze od momentu magnetycznego elektronu.

W diamagnetykach wektor magnetyzacji skierowany jest przeciwnie do magnesującego pola i nie występuje własny moment magnetyczny, który pojawia się tylko w rezultacie działania pola zewnętrznego. W paramagnetykach wektor magnetyzacji skierowany jest wzdłuż pola przyłożonego, momenty magnetyczne atomów i molekuł nie są równe zero, ale skierowane są chaotycznie. Przy działaniu pola zewnętrznego odbywa się zmiana tych kierunków. Ilość momentów magnetycznych z kierunkami bliskimi do kierunku pola magnetycznego staje się przeważającą, co prowadzi do pojawienia się niezerowego namagnesowania, skierowanego wzdłuż wektora indukcji pola.

### **2.3. Materiały magnetouporządkowane**

Rozpatrzmy teraz materiały magnetouporządkowane. Uporządkowanie to może być ferromagnetyczne, ferrimagnetyczne, antyferromagnetyczne, może być również spiralne lub jeszcze bardziej złożone [45].

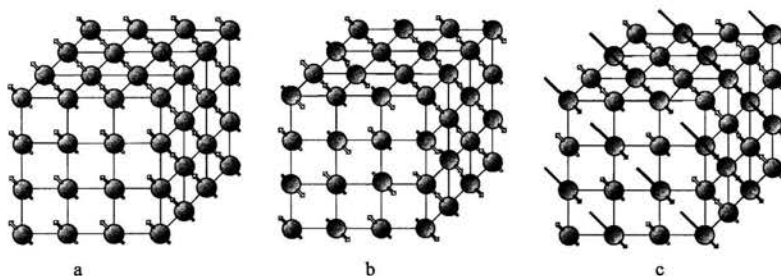
Uporządkowanie magnetyczne czuły uporządkowane przestrzenne rozmieszczenie momentów magnetycznych występuje w pewnych materiałach, np. w ciele stałym mającym daleki rząd położenia atomów oraz siatkę krystaliczną, w której węzłach są rozmieszczone periodycznie atomy z momentami magnetycznymi. Występuje również w materiałach amorficznych, dla których istnieje tylko bliski rząd rozmieszczenia atomów. Mechanizmy odpowiedzialne za uporządkowane rozmieszczenie atomowych momentów magnetycznych są następujące:

- posiadanie przez atomy własnych momentów magnetycznych, dzięki czemu możliwe jest pojawienie się spontanicznego momentu magnetycznego nawet pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego;
- istnienie w ciałach stałych wzajemnego oddziaływania wymiany. Jest ono częścią oddziaływania elektrostatycznego i zależy od orientacji spinów oddziałujących elektronów. Takie oddziaływanie pojawia się w wyniku efektów kwantowo-mechanicznych i zależy od odległości pomiędzy jonami magnetycznymi i ich położeniem geometrycznym.

Ferromagnetyk ma spontaniczny moment magnetyczny, tzn. taki, który występuje nawet w nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego. Istnienie spontanicznego momentu wskazuje na to, że spiny elektronów i momenty magnetyczne ustawione są w jakiś regularny sposób. Takie uporządkowanie nie musi być proste: wszystkie ustawienia spinów przedstawione na rys. 2.3 cechuje spontaniczny moment magnetyczny nazywany momentem magnetycznym nasycenia.

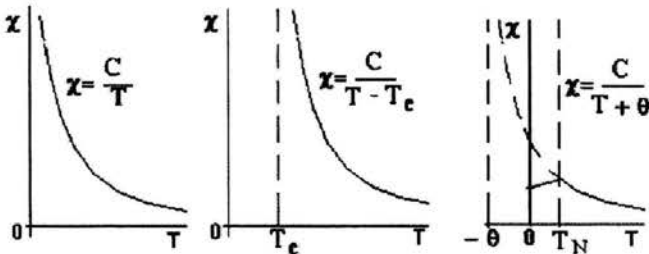
Wcześniej termin „ferromagnetyki” oznaczał wszystkie materiały wykazujące własności magnetyczne w dużym stopniu. Momenty magnetyczne atomów takich materiałów rozmieszczają się równoległe do siebie, co powoduje „duże” namagnesowanie, a spontaniczne namagnesowanie występujące nawet pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego. Jest to możliwe nie tylko przy równoległym ustawieniu momentów magnetycznych (patrz rys. 2.3a), ale także przy antyrównoległym (rys.2.3b) i antyrównoległym z niejednakowymi momentami magnetycznymi dwóch typów atomów (rys.2.3c). Takie uporządkowania momentów magnetycznych nazywają się odpowiednio ferromagnetyzmem, antyferromagnetyzmem i ferrimagnetyzmem.

Z punktu widzenia teorii mikromagnetyzmu nie ma żadnej różnicy pomiędzy ferromagnetyzmem i ferrimagnetyzmem. Kluczowym jest istnienie magnetyzacji spontanicznej, tzn. wektora, który opisuje stan makroskopowy materiału. Oprócz tego, nie ma znaczenia przy zagadnieniu mikromagnetyzmu czy magnetyzacja na poziomie atomowym jest zadana równoległymi czy antyrównoległymi spinami. Dlatego teoria mikromagnetyzmu może być zastosowana do materiałów ferromagnetycznych, również do innych materiałów „magnetycznych”, por.[15,70].



Rys. 2.3. Różne typy uporządkowania spinów elektronowych: a) struktura magnetyczna atomowa ferromagnetyka, b) struktura magnetyczna atomowa antyferromagnetyka, c) struktura magnetyczna atomowa ferrimagnetyka, [70].

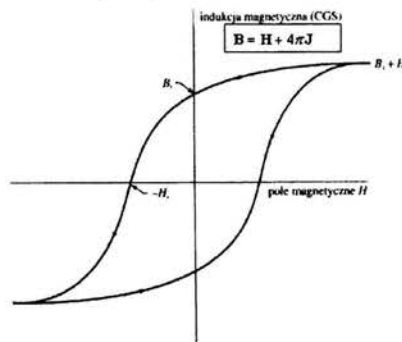
Temperatura Curie  $T_C$  jest to taka temperatura, powyżej której zanika spontaniczne namagnesowanie. Oddziela ona obszar występowania nieuporządkowanej fazy paramagnetycznej, w temperaturach  $T > T_C$ , od obszaru występowania uporządkowanej fazy ferromagnetycznej w temperaturach  $T < T_C$ .



Rys.2.4. Temperaturowa zależność podatności magnetycznej paramagnetyku, ferromagnetyka, antyferromagnetyka.

Temperaturowa zależność podatności magnetycznej paramagnetyka, ferromagnetyka oraz antyferromagnetyka pokazano na rys.2.4. Tutaj  $C$  oznacza stałą Curie.

Na rysunku 2.5 pokazano pętlę histerezy z zaznaczonymi parametrami ważnymi z punktu widzenia zastosowań praktycznych.



Rys. 2.5. Krzywa magnesowania [45].

Pole koercji  $H_C$  jest to pole magnetyczne, które należy przyłożyć do próbki pewnego materiału magnetycznego, aby zmniejszyć namagnesowanie  $J$  lub indukcję  $B$  do zera. Jest ono skierowane przeciwnie do kierunku pola, w którym uprzednio osiągnięto namagnesowania nasycenia. Dla materiałów o dużej koercji definiuje się pole koercji  $H_{ci}$  jako pole, które redukuje namagnesowanie do zera. Wartość pola koercji może zmieniać się o siedem rzędów wielkości; jest to najczulszy parametr charakteryzujący własności materiału

ferromagnetycznego, który możemy kontrolować. Materiały o małym polu koercji nazywamy materiałami magnetycznie *miękkimi*, o dużej – *twardymi* (na przykład, magnesy stałe).

W rdzeniu transformatora chcemy mieć małą koercję, a także dużą przenikalność magnetyczną materiału. Użycie materiału czystego, jednorodnego, o dobrze zorientowanych ziarnach ułatwia przemieszczanie się domen, a tym samym zapewnia dużą przenikalność magnetyczną. Z drugiej strony, magnesy stałe powinny cechować duża koercja, którą uzyskujemy utrudniając przemieszczanie się granic domen (o których mowa będzie w następnym podrozdziale), najlepiej przez usunięcie w ogóle granic domen z materiału. Można to zrealizować wykorzystując bardzo małe jednodomenowe kryształy.

Kontrolując w procesie technologicznym wytrącanie się jednej z faz metalicznych, można otrzymać próbkę wielofazową o bardzo małych obszarach jednej fazy. Istnieje pewien krytyczny rozmiar, poniżej którego wytrącenia stają się jednodomenowe.

## **2.4. Domeny ferromagnetyczne i ścianki domenowe**

### **2.4.1. Domeny ferromagnetyczne**

W temperaturach znacznie niższych od temperatury Curie momenty magnetyczne elektronów w ferromagnetyku, w skali mikroskopowej, są równoległe do siebie. Jednakże, jeżeli rozpatrujemy próbkę jako całość, to stwierdzamy, że jej wypadkowe namagnesowanie może być dużo mniejsze od namagnesowania nasycenia. W celu otrzymania namagnesowania nasycenia może być konieczne przyłożenie zewnętrznego pola magnetycznego. Pod tym względem podobnie zachowują się zarówno monokryształy, jak i próbki polikrystaliczne.

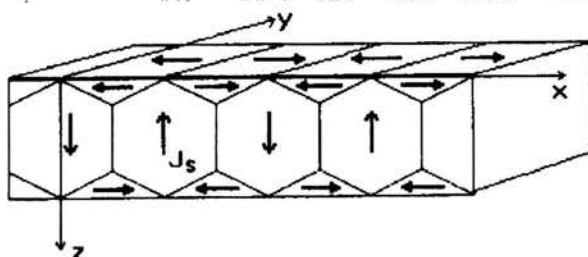
Dokładniej rzecz biorąc, próbki składają się z małych obszarów nazywanych domenami. W każdej domenie lokalne namagnesowanie odpowiada stanowi nasycenia. Jednak kierunki namagnesowania różnych domen nie muszą być równoległe do siebie. Domeny tworzą się także w antyferromagnetykach, ferroelektrykach, antyferroelektrykach, kryształach ferrosprężystych, nadprzewodnikach.

Istnienie domen ferromagnetycznych po raz pierwszy było postulowane przez P.Weissa w 1907 roku. Wprowadził on to pojęcie, aby wytłumaczyć stan rozmagnesowania realnych próbek ferromagnetycznych. Zgodnie z hipotezą Weissa, jeżeli próbka nie jest pod wpływem pola zewnętrznego, to ona jest podzielona na domeny, z których każda jest namagnesowana do nasycenia. Sąsiadujące dwie domeny mają różne kierunki namagnesowania oraz oddzielone jedna od drugiej granicą, nazywaną ścianką domenową



(ścianką Blocha). W sąsiadujących domenach wektory namagnesowania są w różnych kierunkach, dlatego namagnesowanie całej próbki może być mniejsze od namagnesowania nasycenia, a nawet równe zero. W przejściu granicznym pomiędzy domenami wektor namagnesowania z pierwszej domeny odwraca się do kierunku wektora namagnesowania w drugiej domenie.

Hipoteza istnienia domen magnetycznych w ferromagnetykach otrzymała potwierdzenie w eksperymentach G.Barkhauzena w 1919 roku. Przy pomocy wynalezionej wtedy elektronowej wzmacniacza sygnałów zauważono, że namagnesowanie przy namagnesowaniu ferromagnetyka zmienia się (przy wzmocnieniu słychać było dźwięki). Te sygnały dźwiękowe odpowiadają za namagnesowanie jednego albo niektórych grup domen; nazwano je skokami Barkhauzena.



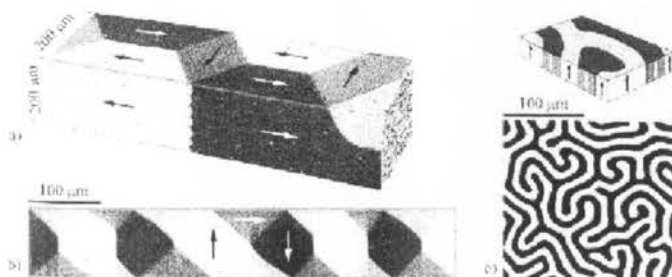
Rys.2.6. Idealna struktura domenowa ferromagnetyka. Oś z jest osią łatwego namagnesowania, [70].

Landau i Lifszyc [47] wykazali, że występowanie struktury domenowej jest konsekwencją istnienia różnych wkładów do energii całkowitej ferromagnetyka: energii wymiany, energii anizotropii i energii magnetycznej. Bezpośrednim dowodem istnienia struktury domenowej są fotografie granic domen otrzymane metodą obrazów proszkowych lub techniką badań optycznych wykorzystujących zjawisko Faradaya. Metoda obrazów proszkowych zastała rozwinięta przez F.Bittera [29]. Polega ona na umieszczeniu kropli koloidalnej zawiesiny bardzo drobno sproszkowanego materiału ferromagnetycznego na powierzchni kryształu ferromagnetycznego. Cząsteczki koloidalne w zawieszynie gromadzą się w pobliżu granic między domenami, gdzie istnieje silny gradient pola magnetycznego, a więc na cząstki działa duża siła przyciągająca. Odkrycie przezroczystych związków ferromagnetycznych było zachętą do badań domen metodą optyczną [45].

Po raz pierwszy bezpośrednio przez mikroskop domeny obserwowali w 1932 roku F.Bitter, L.V.Hamos i P.A.Tissen [11].

Obecnie dla obserwacji struktur domenowych wykorzystuje się metodę magnetooptyczną, metodę mikroskopii elektronowej, rentgenowską oraz neutronograficzną.

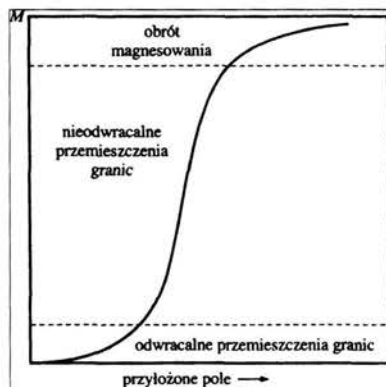
Przy ich pomocy są otrzymywane obrazy domen magnetycznych zarówno na powierzchni próbki, jak i w objętości. Domeny w ferromagnetykach można teraz bezpośrednio obserwować i fotografować (rys.2.7).



**Rys. 2.7.** Domeny magnetyczne, zaobserwowane przy pomocy metody magneto-optycznej oraz symulacji komputerowej: a) próbka żelaza, b) cienka warstwa NiFe (grubość 130nm), c) monokryształ granatu z schematycznie pokazaną magnetyzacją [29].

Wzrost wypadkowego namagnesowania ferromagnetyka pod wpływem pola magnetycznego (rys.2.8) jest związany z dwoma niezależnymi procesami:

1. w słabych zewnętrznych polach magnetycznych objętość domen, których namagnesowanie jest skierowane wzdłuż kierunku przyłożonego pola, zwiększa się kosztem objętości domen zorientowanych w innym kierunku;
2. w silnych polach namagnesowanie domen obraca się w kierunku zewnętrznego pola.



**Rys.2.8.** Typowa krzywa namagnesowania. W różnych częściach krzywej zaznaczono dominujący proces namagnesowania.

Struktura domenowa ferromagnetyka zależy od trzech następujących czynników:

1. geometrii próbki, to znaczy przez jej kształt i skierowanie osi krystalograficznych wobec powierzchni próbki;

2. energii anizotropii, to znaczy od istnienia energetycznie ekwiwalentnych kierunków namagnesowania, patrz.2.4.2;
3. w realnych próbkach od różnych defektów sieci krystalicznej.

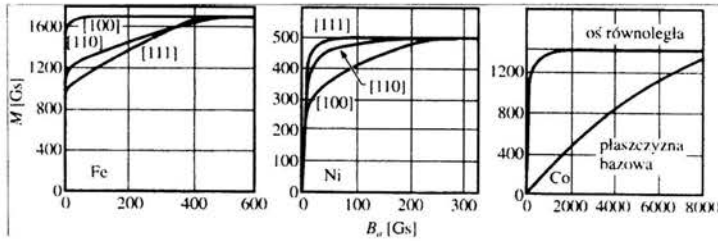
Często struktury domenowe są bardziej skomplikowane niż przedstawione proste przykłady, lecz zawsze przyczyną pojawienia się struktury domenowej jest możliwość obniżenia energii układu w wyniku przejścia od konfiguracji o wyższej energii magnetycznej odpowiadającej nasyceniu do konfiguracji domenowej o niższej energii. Współczesna teoria ciała stałego przewiduje, że nie tylko metale ferromagnetyczne (żelazo, kobalt, nikiel), ale także pięć metali z grupy lantanowców i liczne stopy i związki chemiczne, w tym niektóre złożone z samych pierwiastków nieferromagnetycznych, składają się z makroskopowych domen (o rozmiarach rzędu paru tysięcznych części centymetra), w których spiny są ustawione zgodnie. W nienamagnesowanej próbce domeny są zorientowane chaotycznie względem siebie. W procesie namagnesowywania domeny ustawiają się zgodnie przez ruch granic domen. Domeny zorientowane korzystnie względem pola rosną kosztem pozostałych domen.

Domeny ferromagnetyczne są oddzielone jedna od drugiej warstwą przejściową nazywaną granicą domenową albo ścianką Blocha. Jej grubość jest znacznie większa od odległości międzyatomowej. W następnych podrozdziałach rozpatrzemy bardziej szczegółowo energię anizotropii ferromagnetyków i granicy pomiędzy domenami.

#### **2.4.2. Energia anizotropii magnetycznej**

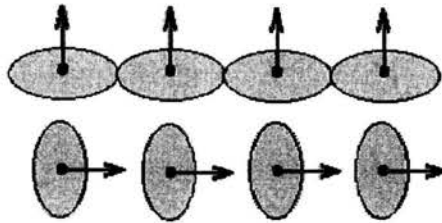
W kryształach ferromagnetycznym możemy wyróżnić energię, która powoduje, że magnesuje się on łatwiej wzdłuż pewnych wyróżnionych kierunków krystalograficznych, nazywanych kierunkami łatwego magnesowania. Energię tę nazywamy energią magnetokrystaliczną lub energią anizotropii. Jeżeli przy tym kierunki  $\mathbf{J}$  i  $\mathbf{H}$  są jednakowe, to materiały nazywają się magnetykami izotropowymi. Jeśli kierunek wektora magnetyzacji  $\mathbf{J}$  zależy od kierunku pola względem osi krystalograficznych, to takie materiały nazywają się magnetykami anizotropowymi.

W kryształach mogą być kierunki łatwego i trudnego magnesowania. Na rys.2.9 na podstawie krzywej dla żelaza widzimy, że kryształ żelaza ma oś łatwego magnesowania [100], a trudnego [111].



Rys.2.9. Anizotropia namagnesowania żelaza, niklu i kobaltu [45].

Jednym ze źródeł anizotropii magnetokrystalicznej jest asymetria w przekrywaniu się rozkładów elektronów sąsiednich jonów (rys.2.10). W rezultacie spin-orbitalnego oddziaływania rozkład ładunku ma kształt elipsoidalny, a nie kulisty. Asymetria jest związana z kierunkiem spinu, tak więc obrót spinu względem osi kryształu zmienia energię wymiany, a także zmienia energię oddziaływania elektrostatycznego pomiędzy rozkładami ładunku par atomów. Energia w konfiguracji (a) jest inna niż w konfiguracji (b) (patrz rys.2.10).



Rys.2.10. Asymetria przekrycia rozkładów elektronów [45].

Wektor namagnesowania  $\mathbf{J}$  kryształu oddziałuje z siecią kryształu w wyniku przekrywania się orbitali elektronowych, a ruch orbitalny elektronu wpływa na jego spin za pośrednictwem sprzężenia spin- orbita.

Energia anizotropii w jednoosiowym kryształach może być zapisana jako szereg:

$$e_K = \sum_n K_n \alpha^{2n} \quad (2.6)$$

gdzie  $\alpha = \cos \theta$  jest kosinusem kierunkowym momentu magnetycznego  $\mathbf{M}$  względem pewnej osi, a  $K_i$  - są stałymi anizotropii krystalograficznej wyznaczanymi eksperymentalnie.

Często bierze się tylko trzy pierwsze składowe:

$$e_K = K_0 + K_1 \cos^2 \theta + K_2 \cos^4 \theta. \quad (2.7)$$

Przy  $K_1 < 0$ ,  $K_2 = 0$  otrzymujemy ferromagnetyk z łatwą osią (minimum energii anizotropii odpowiada  $\theta = 0$ ).

Najczęściej wykorzystuje się następujące formy zapisu gęstości energii anizotropii: dla kryształu regularnego (kubicznego):

$$e_{Kc} = K_{c1} (m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2) + K_{c2} m_1^2 m_2^2 m_3^2, \quad (2.8)$$

dla kryształu heksagonalnego:

$$e_{Kh} = K_{h1} (m_1^2 + m_2^2) + K_{h2} (m_1^2 + m_2^2)^2 + \dots \quad (2.9)$$

dla kryształu jednoosiowego:

$$e_{Ku} = K_{u1} \sin^2 \theta + K_{u2} \sin^4 \theta, \quad (2.10)$$

gdzie  $\theta$  jest kątem pomiędzy osią anizotropii a wektorem magnetyzacji. Stałe materiałowe w zależności od materiału są rzędu  $\pm(10^2 - 2 \cdot 10^7) J/m^3$ . Na przykład, stałe anizotropii magnetoelastycznej (w jednostkach  $\text{erg/cm}^3$ ) stanowią: dla żelaza  $K_1 = 4.6 \cdot 10^5$ ,  $K_2 = 1.5 \cdot 10^5$ , dla niklu  $K_1 = -5 \cdot 10^4$ ,  $K_2 = 2.3 \cdot 10^4$ , oraz kobaltu  $K_1 = 4.1 \cdot 10^6$ ,  $K_2 = 1.0 \cdot 10^6$ .

Kierunki, które można wyznaczyć z równań (2.8-2.10) nazywają się kierunkami łatwego magnesowania. Wzdłuż takich kierunków kryształ może być namagnesowany przy mniejszych przyłożonych polach zewnętrznych. Jeżeli wektor magnetyzacji zostaje obrócony do innego położenia, jak to może zaistnieć przy doprowadzeniu pola magnetycznego pod odpowiednim kątem, to wykonana zostanie praca przeciw siłom kryształu, które usiłują utrzymać osie spinów elektronowych równoległe do kierunku łatwego magnesowania, a w związku z tym zostaje zmagazynowana w domenie dodatkowa energia.

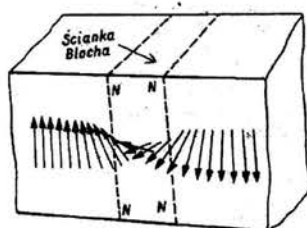
Energia anizotropii magnetycznej w teorii mikromagnetyzmu odgrywa ważną rolę. Mianowicie, wchodząc jako składowa do równania energii całkowitej (zob.(2.17)), może skomplikować poszukiwanie rozwiązania zagadnienia minimalizacji funkcjonału (2.17) czy (2.18), powodując jego niewypukłość (patrz rozdział 4).

### 2.4.3. Obszar przejściowy między domenami

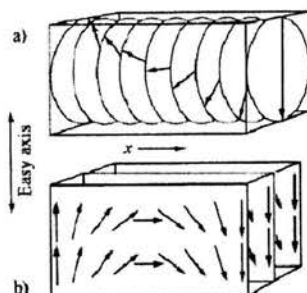
Ścianką Blocha w kryształach nazywamy warstwę przejściową, która rozdziela sąsiadujące ze sobą domeny namagnesowane w różnych kierunkach. Całkowita zmiana kierunku spinu między domenami nie ma charakteru skoku w obszarze jednej płaszczyzny atomowej, lecz następuje w sposób stopniowy na przestrzeni wielu płaszczyzn atomowych.

Ścianka mogłaby się rozszerzać bez ograniczeń, gdyby nie energia anizotropii, która ogranicza jej szerokość. Kierunki spinów znajdujących się wewnątrz ścianki są istotnie odchyłone od kierunku łatwego namagnesowania. Z istnieniem ścianki jest więc związana pewna energia anizotropii, w przybliżeniu proporcjonalna do grubości ścianki.

Grubość ścianki Blocha wynosi około  $(J/Ka^3)^{1/2}$  stałych sieci, a energia na jednostkę powierzchni- około  $(KJ/a)^{1/2}$ , gdzie  $J$  oznacza całkę wymiany,  $K$  - gęstość energii anizotropii,  $a$  - stałą sieci. [45]. W żelazie grubość obszaru przejściowego wynosi około 300 stałych sieci



Rys. 2.11. Struktura ściany Blocha rozdzielającej domeny. [45].



Rys.2.12. Dwa różne sposoby rotacji wektora magnetyzacji w  $180^\circ$ -ściance domenowej: a) ścianka Blocha, b) ścianka Neela [29].

Teoria mikromagnetyzmu pozwala na obliczenia kształtu i rozmiarów zarówno samych domen magnetycznych, jak i ścianek międzydomenowych (ścianek Blocha). Tym samym można mówić o obliczeniu mikrostruktury pewnej próbki materiału magnetycznego. W rozdziale 5 mamy przykład obliczenia numerycznego dwuwymiarowego zagadnienia związanego z mikromagnetykami nieodkształcalnymi, mianowicie jednoosiowego ferromagnetyka.

#### 2.4.4. Cząsteczki jednodomenowe

Materiały ferromagnetyczne znajdują bardzo szerokie zastosowanie przede wszystkim jako magnetyczne nośniki informacji. Do wytwarzania pamięci magnetycznych używa się materiału, który zawiera cząsteczki jednodomenowe lub większe jednodomenowe obszary. Do magnetycznych urządzeń wykorzystywanych do zapisu informacji należą m.in. twarde dyski w komputerach, taśmy magnetofonowe i video.

Idealną cząsteczką jednodomenową jest mała cząsteczka, zazwyczaj o wydłużonym kształcie, która ma moment magnetyczny zwrócony w kierunku jednego z końców cząsteczki. Dwie możliwe orientacje momentu magnetycznego w takiej cząsteczce- moment skierowany „w górę” lub „w dół”, możemy oznaczyć przez + i -, lub zapisie cyfrowym jako 0 i 1. By wykorzystać cząsteczkę ferromagnetyczną do zapisu informacji, musi ona być wystarczająco mała, rzędu 10-100 nm, tak by zawierała tylko jedną domenę. Jeśli cząsteczka ma kształt wydłużony lub ma jednoosiową symetrię krystaliczną, to są możliwe tylko dwie wartości momentu magnetycznego takiej jednodomenowej cząsteczki, co odpowiada wymaganiom, które muszą być spełnione przy zapisie cyfrowym w systemie dwójkowym.

Pierwszym materiałem, który z powodzeniem wykorzystano do zapisu magnetycznego, były cząsteczki  $\tau$ - $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , o długości mniejszej od 1nm i stosunku długości do szerokości w przybliżeniu równym 5:1, ich koercja wynosi ok. 200 Oe.

Jeszcze lepszymi materiałami okazały się materiały na bazie dwutlenku chromu  $\text{CrO}_2$ , bardzo wydłużone (20:1), z koercją bliską 500Oe.

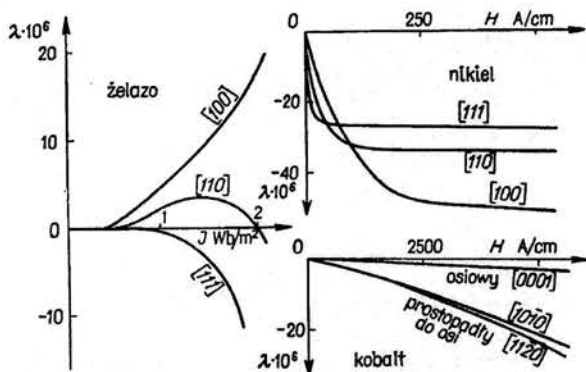
Jednodomenowe cząsteczki ferromagnetyczne odgrywają dużą rolę w badaniu własności skał osadowych. Namagnesowanie szczątkowe tych skał zawiera informacje na temat kierunku ziemskiego pola magnetycznego w momencie ich powstawania; jest to jednocześnie informacja na temat geograficznego położenia tych skał w danej epoce.

Również w biologii duże znaczenie mają małe jednodomenowe cząsteczki magnetyczne, np. cząsteczki  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ . Pozwalają one zwierzętom orientować się względem pola magnetycznego Ziemi. Odgrywa to istotną rolę w migracji ptaków, locie gołębi pocztowych i pszczół, a nawet w ruchach bakterii. Efekt polega na oddziaływaniu jednodomenowych cząsteczek (lub aglomeracji takich cząsteczek) w organizmie z polem magnetycznym Ziemi [45].

## 2.5. Materiały magnetostrykcyjne

### 2.5.1. Magnetostrykcja

Podczas magnesowania materiału ferromagnetycznego zachodzą zmiany jego wymiarów. Zaobserwowano szereg zjawisk tego rodzaju i nazwano je nazwiskami ich odkrywców. Wszystkie te zjawiska objęto wspólną nazwą magnetostrykcji. Zjawisko Joule'a, czyli zmianą długości – tak wydłużeniem, jak i kurczeniem- występującą w kierunku zgodnym z indukowaną magnetyzacją. Zwiększeniu długości towarzyszy zmniejszenie przekroju poprzecznego i przeciwnie, podczas gdy związana z tym zmiana objętości ma znaczenie zupełnie drugorzędne. Zaobserwowano również zjawisko odwrotne – efekt Villariego, w którym odkształcenie na długości prowadzi do zmian przenikalności magnetycznej w kierunku zaistniałego odkształcenia. Na ogół można stwierdzić, że materiał, który w czasie magnesowania wydłuża się, wykaże zwiększoną przenikalność magnetyczną, jeżeli poddany zostanie rozciąganiu. Jeżeli natomiast jego współczynnik magnetostrykcji jest ujemny, przyłożona do niego zewnętrzna siła rozciągająca zmniejszy jego przenikalność magnetyczną.



Rys.2.13. Magnetostrykcja monokryształów żelaza, niklu i kobaltu [11].

Wyniki pomiarów magnetostrykcji żelaza, niklu i kobaltu dla głównych kierunków krystalograficznych podano na rys.2.13. Widoczne jest, że nikiel i kobalt kurczą się niezależnie od kierunku magnesowania, magnetostrykcja żelaza jest zjawiskiem bardziej złożonym: żelazo wydłuża się w czasie magnesowania w kierunku [100], czyli w kierunku najłatwiejszego magnesowania, kurczy się w kierunku [111], czyli najtrudniejszym, podczas gdy w kierunku [110] początkowo wydłuża się, a następnie przy większych wartościach indukcji- kurczy.



Magnetoelastycznym (albo magnetostrykcyjnym) ciałem nazywa się takie, w którym odbywa się odwracalna deformacja pod działaniem pola magnetycznego.

### 2.5.2. Zjawisko pamięci kształtu

Zjawisko powracania ciała do początkowego kształtu w wyniku odwracalnej przemiany martenzytycznej przy nagraniu nazywa się zjawiskiem pamięci kształtu.

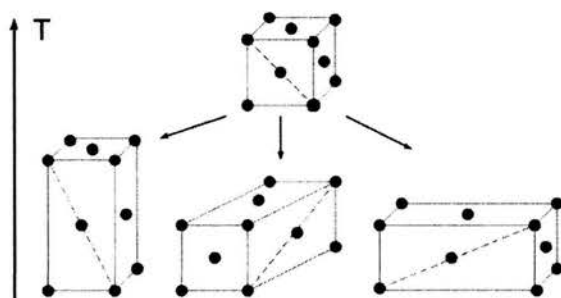
Możliwość kierowania kształtem i rozmiarami pewnych materiałów przy pomocy naprężenia mechanicznego, pola elektrycznego czy magnetycznego pozwala wszystkie takie materiały odnieść do klasy materiałów funkcyjnych. Do takiej klasy należą materiały magnetostrykcyjne, piezoelektryczne oraz materiały wykazujące pamięć kształtu. Deformacje odwracalne w kryształach za rachunek magnetostrykcji (MS), piezoeffectu (PE) oraz pamięci kształtu (SM) następująca:

$$\frac{\Delta L_{MS}}{L} \sim 10^{-3}, \quad \frac{\Delta L_{PE}}{L} \sim 10^{-2}, \quad \frac{\Delta L_{SM}}{L} \sim 10^{-1}.$$

Każdy z zaznaczonych sposobów działania na rozmiary geometryczne ciała ma swoje zalety i wady, oraz swój obszar zastosowania w praktyce. Zaletami materiałów magnetostrykcyjnych jest mały czas odpowiedzi, a materiałów z pamięcią kształtu – duża wartość odkształcenia odwracalnego [67]. Materiały magnetostrykcyjne stosowane są jako nadajniki oraz odbiorniki dźwięku, stabilizatory częstotliwości, siłowniki. Materiały z pamięcią kształtu umożliwiają budowę urządzeń, przyrządów i aparatury w oparciu o nowe zasady konstrukcyjne. Pozwalają na znaczne uproszczenia konstrukcji, miniaturyzację wyrobów oraz obniżenie kosztów produkcji. Obok techniki materiały wykazujące pamięć kształtu mają szerokie zastosowanie w medycynie jako różnego rodzaju implanty stosowane w chirurgii i ortopedii oraz w technice medycznej [73]. Materiały z pamięcią kształtu wykorzystuje się również do budowy silników, termoregulatorów, jako różnego rodzaju złącza rur, złącza elektryczne i optyczne [73]. Pierwszym i najpopularniejszym ze stopów metali wykazujących pamięć kształtu jest Ni-Ti, jego własności do praktycznego zastosowania stwierdzono w latach 1960-65 w USA w Naval Ordnance Laboratory. Efekt pamięci kształtu stwierdzono w wielu stopach, wśród których można wymienić następujące: Fe-Ni, Cu-Zn, In-Tl, Au-Cd, Cu-Al., Cu-Zn-Al., Cu-Al.-Ni.

Zjawisko pamięci kształtu w metalach związane jest z odwracalną przemianą martenzytyczną. Przemiana martenzytyczna nie wymaga dyfuzji atomów na duże odległości. Martenzyt posiada ten sam skład chemiczny, stopień uporządkowania atomowego oraz zdefektowania sieci krystalicznej jak faza austenitu. Przemiana martenzytyczna przejawia się

przesunięciem atomów drogą odkształcenia sieci krystalicznej i niewielkich przesunięć w obrębie komórki elementarnej. Jednocześnie zachodzi ścinanie poprzez poślizg lub bliźniakowanie w połączeniu z niewielką sztywną rotacją. Po raz pierwszy przemianę martenzytyczną zaobserwowano w stopach na bazie żelaza. Na początku uważano ją za przejście strukturalne od wysoko temperaturowej powierzchniowo centrowanej fazy (austenit) do nisko temperaturowej regularnej przestrzennie centrowanej fazy (martenzyt). Teraz wiadomo, że przemiana podobna do przemiany martenzytycznej może zachodzić nie tylko w metalach, również w dielektrykach, półprzewodnikach, związkach organicznych oraz jest jedną z podstawowych przemian spośród przejść fazowych w ciele stałym.

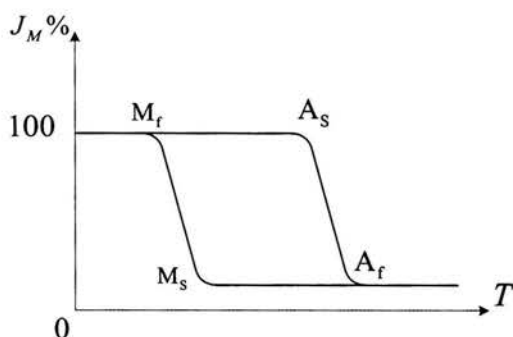


**Rys.2.14.** Schematyczny przebieg odkształceń podczas przemiany martenzytycznej: od wysokotemperaturowej fazy macierzystej (austenitu) do niskotemperaturowej fazy martenzytu.

Na rys.2.14 schematycznie pokazano przejście fazowe od wysokotemperaturowej fazy regularnej powierzchniowo centrowanej do fazy przestrzennie centrowanej tetragonalnej. Takie przejścia zachodzą w różnych materiałach z pamięcią kształtu: Fe-Ni-C, Fe-Pd, In-Tl, Ni-Al., Ni-Mn oraz  $Ni_2MnGa$ .

Termodynamiczną siłą napędową przemiany martenzytycznej jest zmiana energii swobodnej układu. Warunkiem odwracalności przemiany martenzytycznej jest termosprężysty charakter tej przemiany. Przebieg odwracalnej przemiany martenzytycznej przedstawia krzywa histerezy zmian ilości fazy martenzytycznej od temperatury (rys.2.15.)[73].

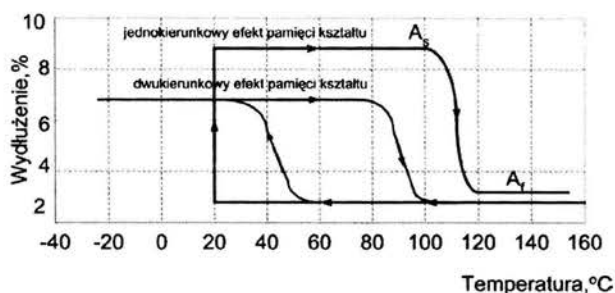
Termosprężysty charakter tej przemiany oznacza, że martensyt tworzy się i wzrasta w sposób ciągły w miarę obniżenia temperatury i zanika z jej wzrostem. Przemiana odwracalna zachodzi więc zasadniczo w warunkach równowagi pomiędzy energią swobodną jako siłą napędową przemiany a energią sprężystą związaną z naprężeniami przemiany [73].



**Rys.2.15.** Zmiany natężenia linii dyfrakcyjnej fazy martenzytycznej w funkcji temperatury dla odwracalnej przemiany martenzytycznej.  $M_s$  - temperatura początku przemiany martenzytycznej,  $M_f$  - temperatura końca przemiany martenzytycznej,  $A_s$  - temperatura początku tworzenia fazy macierzystej,  $A_f$  - temperatura końca przemiany w fazę macierzystej.

Opis jednokierunkowego efektu pamięci kształtu jako funkcji zmian odkształcenia od temperatury jest pokazany na rys.2.16. Mamy odzysk kształtu podczas nagrzewania próbki odkształconej w stanie martenzytycznym. Podczas chłodzenia nie występują żadne zmiany kształtu. Próbką w stanie martenzytycznym odkształconą w temperaturze otoczenia wraca podczas nagrzewania w zakresie temperatur  $A_s$ - $A_f$  do swego pierwotnego kształtu. Odzysk ten nie jest w pełni idealny, niewielka część odkształcenia nie jest odzyskiwana. Wielkość odzyskiwanego odkształcenia uzależniona jest od wielkości zadawanego odkształcenia. Wynika stąd, że istnieje ograniczona wielkość odkształcenia, której przekroczenie powoduje znaczny spadek odzyskiwanego kształtu. Ta wielkość granicznego odkształcenia w zależności od stopu waha się w granicach 5-10%. Istnienie granicznej wielkości odkształceń wynika z faktu że odkształcenie nie może przekroczyć odkształcenia odpowiadającego granicy sprężystości. W jednokierunkowym efekcie pamięci kształtu odzysk pierwotnej geometrii przedmiotu następuje podczas nagrzewania, a w czasie chłodzenia nie występuje zmiana kształtu. Stop „pamięta” jedynie kształt wysokotemperaturowej fazy macierzystej. W dwukierunkowym efekcie pamięci kształtu stop zachowuje się jakby pamiętał zarówno kształt wysokotemperaturowej fazy macierzystej jak i niskotemperaturowej fazy martenzytycznej [73].

W niektórych przypadkach praktycznego wykorzystania efektu pamięci kształtu istnieje potrzeba odzysku naprężenia a nie odkształcenia.



Rys.2.16. Schematyczne przedstawienie jedno- i dwukierunkowego efektu pamięci kształtu [73].

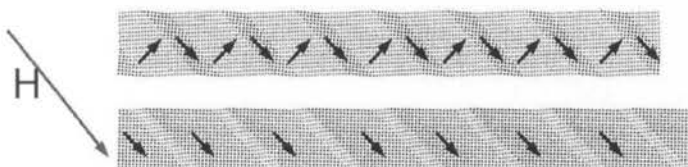
Pośród materiałów z pamięcią kształtu są materiały ferromagnetyczne. Będziemy w dalszej części pracy używać do nazwy materiałów ferromagnetycznych wykazujących efekt pamięci kształtu nazwy skróconej FMSMA (z ang. ferromagnetic shape memory alloys).

### 2.5.3. Ferromagnetyki wykazujące pamięć kształtu

Rozpatrzmy własności ferromagnetyków, które wykazują pamięć kształtu oraz pozwalają na sterowanie tymi efektami za pomocą pola magnetycznego. Własności FMSMA są badane w nasz czas na całym świecie w laboratoriach [2,32,67,69], oraz teoretykami, szukającymi najodpowiedniejszy model zachowania tych materiałów [2,25,26,33,63,69]. Szczególną cechą oddziaływania magnetosprężystego w FMSMA jest to, że obiektem oddziaływania są duże ansamble domen strukturalnych oraz ferromagnetycznych. Pamięć kształtu w takich materiałach jest związana z przejściem martenzytycznym fazowym, a wpływ pola magnetycznego na parametry fazy martenzytycznej uwarunkowane jest oddziaływaniem magnetosprężystym.

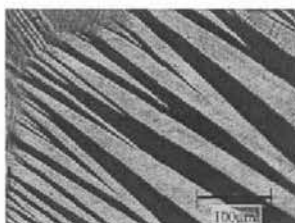
Oprócz temperatury przejścia austenit –martenzyt (por.rys.2.15) ważnymi parametrami są temperatury Curie  $T_c$  (patrz rozdział 2.3) dla austenitu i martenzytu.

Stopy FMSMA mogą podlegać dużym deformacjom odwracalnym w skutek przebudowy martenzytycznej struktury domenowej w pole magnetycznym. Namagnesowanie systemu wskutek przemieszczenia się ścianek domen strukturalnych jest możliwe w materiałach z wysoką anizotropią magnetokrystalicznej, gdy przebudowa struktury martenzytycznej jest energetycznie wygodniejsza niż preorientacja momentów magnetycznych. Anizotropia magnetokrystaliczna jest głównym parametrem, od którego zależy możliwość otrzymania dużych deformacji odwracalnych w ferromagnetycznych materiałach z pamięcią kształtu.



**Rys.2.17.** Pod wpływem pola magnetycznego  $H$  wzrasta ilość strukturalnych domen martenzytycznych, mających ten sam kierunek namagnesowania.

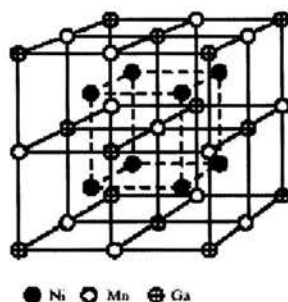
Wpływ pola magnetycznego otwiera nowe możliwości sterowania kształtem oraz rozmiarami ferromagnetyka. Posługując się polem magnetycznym można zmieniać temperatury strukturalnych przejść fazowych, działać na topologię fazy martenzytycznej. Ważną rolę odgrywają przy tym parametry podsystemu magnetycznego. Różnica w namagnesowaniu austenitu i martenzytu ma wpływ na wielkość zmiany temperatury przejścia fazowego pod wpływem pola magnetycznego. Stałe magnetosprężyste oraz anizotropii magnetokrystalicznej wpływają na przebudowę wariantów martenzytycznych w polu magnetycznym.



**Rys.2.18.** Mikrostruktura stopu  $\text{Co}_2\text{Ni}_{0.85}\text{Ga}_{1.15}$  przy temperaturze pokojowej [67].

Pośród materiałów FMSMA można wymienić następujące: Co-Ni, Fe-Pd, Fe-Pt, Fe-Ni-Co-Ti. Najszerszej wiadome i stosowane są stopy typu Heuslera  $\text{Ni}_{2+x}\text{Mn}_{1-x}\text{Ga}$ , w których osiągnięto wielkość zadawanych dla odzysku odkształceń do 6%, co odpowiada teoretycznej granicy deformacji przemiany martenzytycznej dla tego materiału [69]. Stopy Heuslera są potrójnymi intermetalowymi związkami (nikiel, mangan, gal), jak pokazano na rys. 2.19. w temperaturze pokojowej mają układ regularny przestrzennie centrowany.

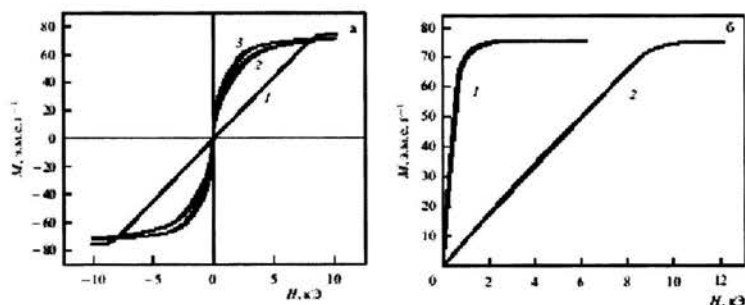
W ferromagnetycznych stopach Heuslera  $\text{Ni}_{2+x}\text{Mn}_{1-x}\text{Ga}$  temperatura Curie przewyższa temperaturą przejścia martenzytycznego. Temperatury przejść fazowych w takich stopach są bliski do temperatury pokojowej, co daje możliwość praktycznego wykorzystania kierowania kształtem i rozmiarami magnetyków w fazie martenzytycznej przy użyciu pola magnetycznego. Na monokryształach  $\text{Ni}_{2+x}\text{Mn}_{1-x}\text{Ga}$  w polach  $\sim 1$  Tl była osiągnięta deformacja odwracalna  $\sim 6\%$ .



Rys.2.19. Struktura krystaliczna  $L_{21}$  fazy austenitycznej  $Ni_2MnGa$  [69].

Na podstawie danych doświadczalnych wiadomo, że osią łatwego magnesowania w fazie regularnej jest oś wzdłuż kierunku krystalograficznego [100] i stała anizotropii magnetokrystalicznej  $K_1$  jest nie duża. Z przejściem do fazy martenzytycznej anizotropia magnetokrystaliczna znacznie zmienia się.

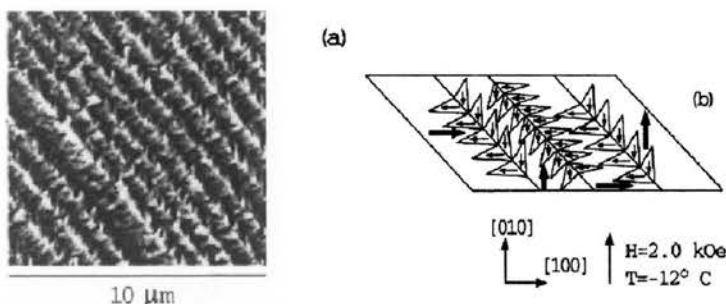
Na rysunku 2.20 są pokazane krzywe namagnesowania dla  $Ni_{51,3}Mn_{24,0}Ga_{24,7}$  w fazie martenzytycznej. W fazie macierzystej strukturalne domeny stopy Heuslera tworzą się  $180^\circ$ -domenami magnetycznymi z wektorami namagnesowania  $\mathbf{m} \parallel [100]$ .



Rys.2.20. a) Zależności magnetyzacji monokryształu 1-H|| [100], 2-H|| [110], 3-H|| [111], b) Zależności magnetyzacji dla monowariantnego martenzytycznego stanu, 1-oś łatwego namagnesowania, 2-oś trudnego namagnesowania [67].

Podczas przejść martenzytycznych zmienia się struktura domen magnetycznych. Niskotemperaturowa faza martenzytyczna składa się z kilku  $180^\circ$ -domen magnetycznych. Szerokość domen magnetycznych znajduje się w przedziale  $5-40 \mu m$ . Podczas przyłożenia zewnętrznego pola magnetycznego odbywa się przebudowa zarówno domen magnetycznych jak i strukturalnych. W niewielkich polach magnetycznych zmienia się topologia domen ferromagnetycznych, które nabywają kształt „choinek” ze wspólną ścianką domenową (patrz rys.2.21). Przy zwiększaniu pola magnetycznego procesy zmiany kierunków wektorów

namagnesowania w domenach ferromagnetycznych i przemieszczenia granic domen martenzytycznych konkurują pomiędzy sobą [69].



Rys.2.21 (a) Eksperymentalna obserwacja domen magnetycznych i strukturalnych w stopie  $\text{Ni}_2\text{MnGa}$  metodą siłowej mikroskopii magnetycznej (b), schematycznie pokazano strukturę domen [69].

Bardzo szerokie zastosowanie w technice otrzymał ferromagnetyczny materiał z pamięcią kształtu pod nazwą handlową Terfenol-D. Jest to stop  $\text{Tb}_{0,3}\text{Dy}_{0,7}\text{Fe}_{1,95}$  (terb, dysproz, żelazo) [24,26,32,33].

Do modelowania materiałów magnetycznych nieodkształcalnych oraz materiałów magnetosprężystych stosuje się teorię mikromagnetyzmu [2,14,15,25,26,29,31,32,33,37,38,39,46,47,52,53,55,60,61,63,72].

## 2.6. Elementy teorii mikromagnetyzmu

Wyjściowym punktem teorii mikromagnetyzmu jest istnienie w ferromagnetyku spontanicznej magnetyzacji, która jest opisana przez klasyczne pole wektorowe:

$$\mathbf{J} = J_s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}), \quad \sum_{i=1}^3 m_i^2 = 1. \quad (2.11)$$

Zwykle poniżej punktu Curie i przy oddziaływaniu niezbyt wielkich zewnętrznych pól można przyjąć założenie, że wielkość wektora  $J_s$ , nazywaną magnetyzacją nasycenia, nie zależy od współrzędnych przestrzennych i przy pewnej temperaturze jest wielkością stałą. Wówczas rozkład magnetyzacji można opisywać wektorem jednostkowym  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $|\mathbf{m}| = 1$ . Równomierny rozkład wektora  $\mathbf{m}$  wyznaczamy z teorii mikromagnetyzmu, stosując przy tym zasadę wariacyjną: całkowita energia układu, składająca się z różnych składowych powinna być minimalną.

Przy rozpatrywaniu energii całkowitej bierze się pod uwagę następujące człony [14,15,29]:

1. *energię wymiany*  $e_A$ , nazywaną tak przez jej pochodzenie od elementarnych wzajemnych oddziaływań, odpowiadających za ferromagnetyzm. Może być ona przedstawiona jako dodatnio określona forma kwadratowa pochodnych cząstkowych składowych namagnesowania względem zmiennych przestrzennych. Wielkość ta definiuje „sztywność” wektora magnetyzacji w stosunku do gwałtownych zmian przestrzennych. W wypadku kryształów kubicznych lub materiałów izotropowych energia wymiany jest izotropowa i gęstość energii ma następującą postać:

$$e_A = A \sum_{i,k=1}^3 \left( \frac{\partial m_i}{\partial x_k} \right)^2, \quad (2.12)$$

gdzie stała A jest rzędu  $10^{-12} - 2 \cdot 10^{-11}$  J/m. Jeżeli symetria kryształu jest heksagonalna lub niższa, to należałoby wziąć pod uwagę ogólniejszą postać [29]:

$$e_A = \int_V \left( \sum_{i,k,l=1}^3 A_{kl} \frac{\partial m_i}{\partial x_k} \frac{\partial m_l}{\partial x_i} \right) dV; \quad (2.13)$$

2. *energię magnetyczną anizotropii*  $e_K$  opisującą oddziaływanie magnetyzacji z siecią krystaliczną. Różne osi krystalograficzne nie są równoważne pod względem magnetyzacji. Energię anizotropii zwykle opisuje się przy pomocy współrzędnych sferycznych, (por.2.6-2.10);

3. *energię zewnętrzną*  $e_H$ . Magnetyzacja przy działaniu pola zewnętrznego  $\mathbf{H}$  ma energię magnetostatyczną, gęstość której można zapisać jako:

$$e_H = -\mathbf{H} \cdot \mathbf{J}; \quad (2.14)$$

4. *energię magnetostatyczną* albo *energię rozproszenia*  $E_S$ . Jest to energia rozproszenia uwzględniająca fakt, że sam „magnes” stwarza pole magnetyczne. Namagnesowanie i pole magnetyczne zadają razem indukcję magnetyczną:  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{J}$ , dla której jest prawdziwe równanie Maxwella  $\text{div}\mathbf{B} = 0$ . Stąd wynika, że

$$\text{div}\mathbf{H} = -4\pi\text{div}\mathbf{J}. \quad (2.15)$$

Jeżeli dywergencja namagnesowania  $\mathbf{J}$  nie jest równa zero, to jest ono źródłem pola magnetycznego, tzw. pola rozproszenia, którego energię można zapisać w dwóch różnych formach albo całkując po całej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , albo po objętości próbki P:

$$E_S = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} H_S^2 dV = -\frac{1}{2} \int_P \mathbf{H}_S \cdot \mathbf{J} dV. \quad (2.16)$$

W niektórych przypadkach należy uwzględnić energię powiązania magnetyzacji z mechanicznymi odkształceniami sieci krystalicznej. Taką energię rozkładamy na dwie części:



5. *energię naprężeń magnetostrykcyjnych*  $E_{MS}$ . Pomiędzy strukturą magnetyczną a deformacjami sieci krystalicznej ciała występuje oddziaływanie „magnetosprężyste”, które przejawia się w zjawisku magnetostrykcji i jest rzędu  $(10^{-6} - 10^{-3}) J/m^3$ ;

6. *energię wzajemnego oddziaływania magnetyzacji z naprężeniami pochodzenia niemagnetycznego*  $e_\sigma$ . Często wykorzystujemy się przy tym liniową sprężystość (prawo Hooke’a).

W teorii mikromagnetyzmu stosuje się zasadę wariacyjną, mówiącą, że rozkład wektora magnetyzacji  $\mathbf{m}$  wewnątrz ferromagnetycznego ciała  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , ( $d = 2, 3$ ) minimalizuje energię całkowitą. Zasada wariacyjna mikromagnetyzmu może być zapisana następująco [14]:

$$\delta_m \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (e_A + e_K + e_H + e_\sigma) dV + E_S + E_{MS} \right\} = 0, \quad (2.17)$$

gdzie symbol  $\delta_m$  oznacza wariację po wektorze magnetyzacji  $\mathbf{m}$ , przy ograniczeniu:

$$\sum_{i=1}^3 m_i^2 = 1.$$

W pracy będziemy korzystać z zagadnienia minimalizacji energii całkowitej dla ciał magnetosprężystych w postaci (1.1). Szczegółowo rozpatrzmy to sformułowania w następujących rozdziałach stosownie mikromagnetyków nieodkształcalnych oraz magnetosprężystych.

## **2.7. Zasada minimum dla mikromagnetyków nieodkształcalnych**

Rozpatrzmy sformułowanie zagadnienia mikromagnetyzmu dla statycznego i sztywnego ośrodka. Takie zagadnienie wykorzystywane jest dla modelowania materiałów ferromagnetycznych [18,24,30,52,59], mających bardzo szerokie zastosowanie w współczesnych urządzeniach jak magnesy trwałe, sensory magnetyczne czy magnetyczne nośniki zapisu informacji. Pośród nich znajdują się materiały z kubiczną (regularną) strukturą jak w przypadku żelaza, i jednoosiowe materiały magnetyczne podobne do kobaltu, mające tylko jeden kierunek łatwego namagnesowania i wykazujące efekt histerezy, który też wykorzystuje się w zastosowaniach.

Stosując teorię mikromagnetyzmu zapiszemy funkcjonal energii całkowitej (sztywnego) ferromagnetyka dla rozpatrywanego przypadku, który będzie mieć wtedy cztery składowe: energię wymiany, energię anizotropii, energię zewnętrzną i energię magnetostatyczną:

$$E(\mathbf{m}) = \alpha \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}|^2 dx + \int_{\Omega} \phi(\mathbf{m}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx. \quad (2.18)$$

Parametr  $\alpha > 0$  jest parametrem wymiany. Niewypukła, dodatnia funkcja  $\phi$  jest gęstością energii anizotropii i jest równa zero przy  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{e}_i$ , dla  $i \in I$ ,  $\phi(\pm \mathbf{e}_i) < \phi(\mathbf{m})$ ,  $\forall \mathbf{m} \neq \mathbf{e}_i$ . Wówczas wektory  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^d$  definiują osie łatwego namagnesowania. Funkcja  $\mathbf{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  opisuje przyłożone zewnętrzne pole magnetyczne. Skalarny potencjał magnetyczny  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  jest związany z wektorem magnetyzacji  $\mathbf{m}$  przez równanie Maxwella:

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \chi_{\Omega} \mathbf{m}) = 0 \quad \text{w } \mathbb{R}^d, \quad (2.19)$$

gdzie  $\chi_{\Omega}$  jest funkcją charakterystyczną zbioru  $\Omega$ :

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{przy } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{przy } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases}$$

Zakładamy, że materiał jest nasycony magnetycznie, to znaczy natężenie magnetyzacji  $\mathbf{m}$  osiąga wartość nasycenia (saturacji) i  $|\mathbf{m}| = 1$  prawie wszędzie w  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

Definiujemy zbiór funkcji dopuszczalnych

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{m} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^d) : |\mathbf{m}| = 1, \text{ p.w. w } \Omega \right\}.$$

Wtedy mamy następujące zagadnienie minimalizacji:

Znaleźć

$$\inf \{ E(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in \mathcal{A} \}. \quad (2.20)$$

Jeżeli istnieje rozwiązanie  $\mathbf{m}$  takiego zagadnienia, to mówimy, że minimum energii jest osiągnięte. Poniżej rozpatrujemy problem istnienia rozwiązania zagadnienia (2.20). Parametr wymiany  $\alpha$  w równaniu funkcyjonału energii całkowitej  $E(\mathbf{m})$  (patrz (2.18)) odgrywa tu ważną rolę. Jeżeli  $\alpha > 0$  problem (2.20) ma rozwiązanie, zob. [13,14], ale gdy  $\alpha = 0$  zagadnienie (2.20) nie ma rozwiązania w klasycznym sensie, jak to zachodzi dla przypadku jednoosiowego ferromagnetyka. Przy numerycznym modelowaniu zagadnienia energię wymiany pomija się, bowiem wartość energii wymiany waha się zazwyczaj pomiędzy  $10^{-12} J/m^3$  i  $2 \cdot 10^{-11} J/m^3$ . Wówczas energia anizotropii i energia magnetostatyczna mają wartości odpowiednio  $10^2 J/m^3 - 2 \cdot 10^7 J/m^3$  i  $0 - 3 \cdot 10^7 J/m^3$ , por. [29]. Ponadto obliczenia dla przypadku kiedy  $\alpha = 0$  w (2.18) są bardziej skomplikowane. Właśnie ten przypadek jest rozpatrywany w pracy w rozdziale 4. Wówczas

gęstość energii wewnętrznej materiału (2.18) jest funkcją niewypukłą, co jest przyczyną nieistnienia klasycznych rozwiązań. Minimizery mają wówczas charakter oscylacyjny. Mamy tutaj do czynienia ze zjawiskiem zwanym „mikrostrukturą”, które objawia się w postaci szybkich przestrzennych oscylacji gradientu  $\nabla m$ . Fizycznie oznacza to istnienie domen magnetycznych, w których zmienia się kierunek magnetyzacji.

Dla rozwiązania takiego niewypukłego zagadnienia minimalizacji (2.20) stosuje się różne metody relaksacji: głównie relaksację wypukłą oraz relaksacją przy pomocy miar Younga, definicje i własności której podano w następnym rozdziale.

## 2.8. Modelowanie materiałów magnetosprężystych

Rozpatrzmy teorie magnetosprężystości przedstawionej w [26,33], której podstawą służy teoria mikromagnetyzmu. Ta teoria opisuje zachowanie magnetosprężystych materiałów takich jak Terfenol-D.

Niech niezdeformowane ciało krystaliczne w konfiguracji odniesienia zajmuje gładki, regularny obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Zakładamy, że istnieje wektor namagnesowania  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  oraz przy pewnej temperaturze poniżej temperatury Curie:

$$|\mathbf{m}(\mathbf{x})| \equiv m_s, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

gdzie  $m_s$  jest saturacją magnetyczną. Zakładamy, że  $\mathbf{m} \in L^2(\Omega, m_s S^2)$ , gdzie  $m_s S^2$  jest 3-wymiarową sferą o promieniu  $m_s$ . Oraz, zakładając  $\mathbf{m} = 0$  poza obszarem  $\Omega$ , rozszerzamy na całą przestrzeń  $\mathbb{R}^3$ . Niech  $\mathcal{M}$  będzie przestrzeń dopuszczalnych wektorów namagnesowania. Deformacja jest opisana przez funkcję  $\mathbf{y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  taką, że przemieszczenie jest  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ , wtedy infinityzmalne odkształcenie:

$$\mathbf{E}[\mathbf{y}](\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}))^T) - \mathbf{I} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T),$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową. Zakładamy, że  $\mathbf{y} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Dla powiązania wektorów namagnesowania z odkształceniem korzystamy się z faktu, że w każdym punkcie istnieją preferowane kierunki siatki krystalicznej. Powiązanie jest funkcją parzystą:

$$\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{E}_0(\mathbf{m}) \in M_{sym}^{3 \times 3}$$

gdzie  $M_{sym}^{3 \times 3}$  jest macierzą symetryczną  $3 \times 3$ . Uważamy, że  $\mathbf{E}_0(\mathbf{m})$  jest odkształceniem w nieobciążonym stanie, któremu odpowiada wektor namagnesowania  $\mathbf{m}$ .

Gęstość energii anizotropii magnetycznej jest funkcją parzystą, nieujemną  $\varphi: m_s S^2 \rightarrow [0, +\infty)$  (zob. rozdział 2.4.2). Jeżeli wektor  $\tilde{\mathbf{m}}$  leży na osi łatwego namagnesowania oraz  $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0(\tilde{\mathbf{m}})$  jest odpowiadającym mu odkształceniem bezobciążeniowym, wtedy para  $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{m}})$  minimalizuje (całkowitą) gęstość energii anizotropii  $\Phi: M_{sym}^{3 \times 3} \times m_s S^2 \rightarrow [0, +\infty)$ , które jest zdefiniowana jako:

$$\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{m}) = \varphi(\mathbf{m}) + \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0(\mathbf{m})) \cdot \mathbb{C}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_0(\mathbf{m})),$$

gdzie  $\mathbb{C}$  jest dodatnio- określonym tensorem 4 walencji stałych sprężystych. Gęstość energii anizotropii jest inwariantem względem transformacji symetrycznej materiału:

$$\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{m}) = \Phi(\mathcal{Q}\mathbf{E}\mathcal{Q}^T, \mathcal{Q}\mathbf{m}), \quad \forall \mathcal{Q} \in P,$$

gdzie  $P \subset O(3)$  jest grupą punktową skończoną niedeformowanej sieci krystalicznej związanej z obszarem  $\Omega$ . Wówczas, jeżeli  $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{m}})$  zeruje funkcję  $\Phi$ , to również i  $(\mathcal{Q}\tilde{\mathbf{E}}\mathcal{Q}, \mathcal{Q}\tilde{\mathbf{m}})$  dla  $\forall \mathcal{Q} \in P$ . Zakładamy, że wszystkie minimizery funkcji  $\Phi$  składają się z pojedynczych symetrycznych transformacji. Wtedy zbiór zerowych poziomów gęstości energii  $\Phi$  ma strukturę:

$$\mathbb{K} = \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{E}_i, \pm \mathbf{m}_i),$$

oraz dla każdego  $j = 1, \dots, n$  istnieje symetryczna transformacja  $\mathcal{Q} \in P$  taka, że  $(\mathbf{E}_j, \mathbf{m}_j) = (\mathcal{Q}\mathbf{E}_j\mathcal{Q}^T, \mathcal{Q}\mathbf{m}_j)$ . Każda para  $(\mathbf{E}, \mathbf{m}) \in \mathbb{K}$  nazywa się *studnią energetyczną*, liczba wszystkich studni energetycznych  $N = 2n$ .

Rozwiązując równania Maxweell'a (2.15) zapiszemy energię magnetostatyczną (por. (2.16)) w postaci:

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{H}_m(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \zeta_m(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

gdzie  $\mathbf{H}_m = \nabla \zeta_m$ .

Niech ciało będzie pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego  $\mathbf{H}$ , wtedy energia zewnętrzna (por.(2.14)) dana jest wzorem:

$$\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Energię obciążeń mechanicznych, związaną z przyłożonym naprężeniem powierzchniowym  $\mathbf{S}\mathbf{n}(\mathbf{x})$  zapiszemy jako:

$$-\int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{y}](\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

gdzie  $\mathbf{S}$  jest stałą (niezależną od  $\mathbf{y}$ ) macierzą  $3 \times 3$ .

Sformułujemy zagadnienie minimalizacji energii swobodnej po to, by opisać makroskopowe zachowanie ciała magnetosprężystego w obszarze  $\Omega$  pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego  $\mathbf{H}$  oraz przyłożonego naprężenia  $\mathbf{S}$  (por.(1.1),(2.17):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{E}[\mathbf{y}], \mathbf{m}) &= \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{E}[\mathbf{y}](\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{y}](\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \zeta_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Definiujemy zbiór funkcji dopuszczalnych w sposób naturalny:

$$\mathcal{A} := \{(\mathbf{E}, \mathbf{m}) : \mathbf{E} = \mathbf{E}[\mathbf{y}] \text{ dla } \mathbf{y} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ oraz } \mathbf{m} \in \mathcal{M}\}.$$

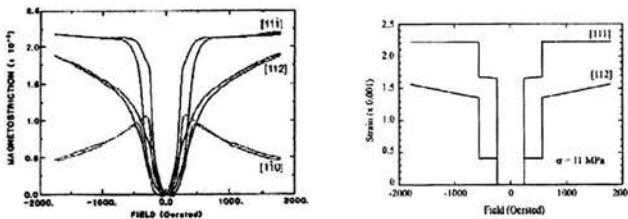
Dla rozwiązania tego zagadnienia wykorzystywana jest relaksacja przez miary Younga, definicję której podano w rozdziale 3. W pracy [26] wykorzystano następujące założenia: obszar  $\Omega$  ma kształt elipsoidalny, wykorzystano energie anizotropii magnetokrystalicznej dla kryształów regularnych.

Energia zrelaksowana wygląda następująco:

$$\mathcal{E}^*(\theta_1, \dots, \theta_N) = |\Omega| \left[ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \theta_i \theta_j \cdot 4\pi \mathbf{D} \theta_i \theta_j - \sum_{i=1}^N \theta_i (\mathbf{h} \cdot \mathbf{m}_i + \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_i) \right],$$

gdzie  $\theta_i, i=1, \dots, N$  są udziałami objętościowymi stanów w  $i$ -tej studni energetycznej.

Praca [26] zawiera przykład stosowania teorii do obliczenia numerycznego magnetostrykcji na przykładzie materiału Terfenol-D. Na rys.2.22 pokazano zależności odkształcenia od przyłożonego pola magnetycznego w stopie Terfenol-D: eksperymentalne wyniki oraz wyniki obliczeniowe.



Rys. 2.22. Magnetostrykcja stopu Terfenol-D pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego wzdłuż różnych osi krystalograficznych wyznaczone eksperymentalnie i obliczone numerycznie [26].

## Rozdział 3

### Elementy teorii miar Younga

W zagadnieniach minimalizacji funkcjonałów energetycznych, gdy funkcjonal ten nie jest dolnie półciągły, tzn. gdy nie są spełnione odpowiednie warunki wypukłości, metoda bezpośrednia rachunku wariacyjnego nie daje się zastosować. W takim przypadku zagadnienie minimalizacji rozwiązuje się przy pomocy miar Younga.

W tym rozdziale omówimy podstawowe definicje poliwyypukłości, kwaziwyypukłości oraz wypukłości rzędu 1 oraz klasyczne rezultaty związane z odpowiednim rodzajem wypukłości i dolną półciągłością funkcjonałów. Podamy proste przykłady zagadnień minimalizacyjnych, które nie mają klasycznych minimizerów. W podrozdziale 3.3 wprowadzimy ogólne pojęcie miar probabilistycznych, zwanych też miarami Younga, w ujęciu Balla [9], Tartara [68], Kinderlehrera i Pedregala [40] oraz w podrozdziale 3.4 omawiamy miary Younga generowane przez ciągi gradientów.

#### 3.1. Wybrane pojęcia podstawowe

Podstawowymi pojęciami w tym rozdziale będą pojęcia takie jak: dolna półciągłość funkcjonału, funkcje kwaziwyypukłe, funkcje poliwyypukłe.

Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie otwartym, ograniczonym podzbiorem o mierze Lebesgue'a skończonej. Załóżmy, że

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

i niech  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{M}^{m \times n}$  będą funkcjami mierzalnymi; symbolem  $\mathbb{M}^{m \times n}$  oznaczamy tu zbiór macierzy o wymiarach  $m \times n$ .

**Definicja 3.1.** Funkcja  $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  jest *funkcją Carathéodory'ego*, jeśli:

- (a)  $f(\cdot, u, \xi)$  jest mierzalna dla każdego  $u \in \mathbb{R}^m$  i  $\xi \in \mathbb{M}^{m \times n}$ ,
- (b)  $f(x, \cdot, \cdot)$  jest ciągła dla prawie każdego  $x \in \Omega$ .

**Definicja 3.2.** Niech  $(X, \tau)$  będzie dowolną przestrzenią topologiczną, gdzie symbol  $\tau$  będzie oznaczać tutaj silną, słabą lub słabą\* topologię. Mówimy, że funkcja  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  jest  $\tau$ -*dolnie półciągłą*, jeżeli dla każdego  $t \in \mathbb{R}$  zbiór  $\{x \in X : f(x) \leq t\}$  jest domknięty w  $X$ .

Powiemy, że  $f$  jest *ciągowo  $\tau$ -dolnie półciągła* w punkcie  $u \in X$ , jeśli dla dowolnego ciągu  $(u_k) \subset X$  zbieżnego do  $u$  w topologii  $\tau$  mamy

$$f(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_k)$$

Będziemy mówić, że  $f$  jest *dolnie półciągła w  $X$* , jeśli jest ona dolnie półciągła dla wszystkich  $u \in X$ .

W dowodzie twierdzenia o istnieniu miar probabilistycznych wykorzystuje się twierdzenia Banacha-Alaoglu [64].

**Twierdzenie 3.1.** *Niech  $V$  będzie otoczeniem zera w przestrzeni liniowo topologicznej  $X$  i niech*

$$V^\circ = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle \leq 1 \text{ dla każdego } x \in V\},$$

gdzie  $X^*$  oznacza przestrzeń sprzężoną do  $X$ , a  $\langle x^*, x \rangle$  jest skalarnym iloczynem  $x^*$  i  $x$ .

Wówczas  $V^\circ$  jest słabo\* zwarty.

Ponieważ miary Younga są podzbiorem przestrzeni miar, przypomnijmy pojęcie słabej zbieżności miar.

Niech  $X$  będzie przestrzenią metryczną lokalnie zwartą i ośrodkową. Niech

$$C_0(X) = \{u : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \exists K \subseteq X; |u(x)| < \varepsilon \text{ dla } x \in X \setminus K\},$$

gdzie odwzorowanie  $u$  są ciągłe, a zbiór  $K$  jest zwarty. Wówczas przestrzeń miar ograniczonych  $\mathcal{M}_b(X)$  jest przestrzenią sprzężoną do przestrzeni funkcji ciągłych o zwartym nośniku, tj.  $(C_0(X))^* \simeq \mathcal{M}_b(X)$  w sensie takim, że dla wszystkich  $L \in (C_0(X))^*$  istnieje  $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$  taka, że

$$L(u) = \int_X u d\mu$$

dla wszystkich  $u \in C_0(X)$ .

Rozważamy przestrzeń miar  $\mathcal{M}_b(X)$  wyposażoną w słabą\* topologię  $\sigma(\mathcal{M}_b(X), C_0(X))$ . Wprowadźmy pojęcie słabej\* zbieżności w zbiorze miar.

**Definicja 3.3.** Niech  $\{\nu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem miar Borela. Mówimy, że *ciąg jest słabo\**

zbieżny do  $\nu$  (co zapisujemy jako  $\nu_j \xrightarrow{*} \nu$ ), jeżeli

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f d\nu_j = \int_X f d\nu$$

dla wszystkich  $f \in C_0(X)$ .

Z twierdzenia Banacha-Steinhaus'a i twierdzenia Banacha-Alaoglu wynika następujący rezultat:

**Twierdzenie 3.2.** Ciąg  $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  jest słabo\* zbieżny do miary  $\nu$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sup_j \nu_j(X) < \infty$  oraz istnieje gęsty podzbiór  $D \subset C_0(X)$  taki, że

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X u dv_j = \int_X u d\nu \quad \forall u \in D.$$

Ponadto, każdy ciąg  $\{v_j\}$  taki, że  $(v_j(X))$  jest ograniczony, zawiera podciąg słabo\* zbieżny, a odwzorowanie  $\nu \mapsto \nu(X)$  jest dolnie półciągłe względem słabej\* zbieżności.

Ostatnie stwierdzenie wynika z równości

$$\nu(X) = \sup \left\{ \int_X u d\nu \mid u \in C_0(X), |u| \leq 1 \right\}$$

oraz z faktu, że supremum rodziny funkcji półciągłych jest funkcją półciągłą.

**Definicja 3.4.** Funkcja  $f: \mathbb{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła jeżeli dla dowolnych  $A, B \in \mathbb{M}^m$  oraz  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  zachodzi

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B).$$

Jeżeli funkcja  $f: \mathbb{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$  jest niewypukła, wtedy istnieją takie  $A, B \in \mathbb{M}^m$  oraz pewne  $\lambda$ , że ma miejsce nierówność

$$\lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) < f(\lambda A + (1-\lambda)B).$$

### 3.1.1. Kwaziwypukłość, poliwyypukłość i wypukłość pierwszego rzędu

Założenie wypukłości funkcji podcałkowej  $f(x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$  względem trzeciej zmiennej jest warunkiem zbyt silnym dla zagadnień istnienia minimizerów w nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych i ogólnie w rachunku wariacyjnym. Okazuje się w szczególności, że warunek wypukłości jest sprzeczny z jedną z podstawowych zasad mechaniki – zasadą obiektywności materiałowej (por.[20]). Założenie o wypukłości gęstości energii wewnętrznej jest wystarczające dla problemów liniowych mechaniki oraz dla niektórych zagadnień jednowymiarowych. W związku z tym pojawiły się w literaturze pojęcia znacznie rozszerzające klasę funkcji i funkcjonałów wypukłych. Wprowadzimy teraz odpowiednie uogólnienia pojęcia wypukłości funkcji. Pojęcia te są rozważane w pracach Balla, Dacorogni i innych [ 5,8,7,20,22,50]



**Definicja 3.5.** Funkcja  $f : \mathbb{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$  jest kwaziwypukła, jeżeli

$$\int_D (f(\mathbf{A} + \nabla \phi(y)) - f(\mathbf{A})) dy \geq 0 \quad (3.1)$$

dla dowolnego ograniczonego zbioru  $D \subset \mathbb{R}^m$ , dla dowolnej macierzy  $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^m$  i dla każdej funkcji  $\phi \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^m)$ , tj. dla  $\phi = 0$  na  $\partial D$  (brzeg obszaru  $D$ ).

Jeżeli funkcja podcałkowa  $f$  będzie dodatkowo zależeć od  $x$  oraz  $\mathbf{u}(x)$ , tj. jeśli  $f = f(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}(x))$ , wówczas mówimy, że  $f(x, \mathbf{s}, \mathbf{A})$  jest kwaziwypukła względem  $\mathbf{A}$ , jeżeli zamiast (3.1) spełniona jest nierówność

$$\int_D (f(x_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{A} + \nabla \phi(y)) - f(x_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{A})) dy \geq 0$$

dla prawie każdego  $x_0 \in \Omega$  oraz dla każdego  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(x_0) \in \mathbb{R}^m$ . W podobny sposób należy rozumieć obie poniższe definicje.

**Definicja 3.6.** Funkcja  $f : \mathbb{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją wypukłą rzędu 1 (ang. rank-one convex), jeżeli

$$f(\lambda \mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) \leq \lambda f(\mathbf{A}) + (1-\lambda)f(\mathbf{B}) \quad (3.2)$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$ , dla wszystkich macierzy  $m \times n$  takich, że  $\text{rz}\{\mathbf{A} - \mathbf{B}\} \leq 1$ , gdzie  $\text{rz}\{\mathbf{A}\}$  oznacza rząd macierzy  $\mathbf{A}$ .

**Definicja 3.7.** Funkcja  $f : \mathbb{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją poliwywukłą, jeżeli istnieje funkcja wypukła  $g$  taka, że

$$f(\mathbf{A}) = g(T(\mathbf{A})), \quad (3.3)$$

gdzie  $T(\mathbf{A})$  jest wektorem złożonym ze wszystkich minorów  $s \times s$ ,  $1 \leq s \leq \inf\{n, m\}$  macierzy  $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^m$ .

**Przykład 3.1.** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $n = m = 1$ ,  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Funkcja

$$f(\nabla \mathbf{u}) = |\nabla \mathbf{u}|^2 - (\text{tr} \nabla \mathbf{u})^2$$

jest kwaziwypukła (a nawet poliwywukła) i nieograniczona z dołu. Symbol  $\text{tr}$  oznacza operator śladu macierzy.

**Przykład 3.2.** Niech  $m = n = 2$ ; wówczas ostatnią definicję można rozumieć jako  $T(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}, \det \mathbf{A})$  oraz

$$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}, \det \mathbf{A}).$$

Tak więc, na przykład, funkcja

$$f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}, \det \mathbf{A}) = |\mathbf{A}|^2 + (\det \mathbf{A})^2$$

jest poliwypukła ale nie wypukła. Tutaj  $|\mathbf{A}|$  oznacza normę macierzy  $\mathbf{A}$ .

**Przykład 3.3.** Niech  $m = n$  i niech

$$f(x, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = g(\det \nabla \mathbf{u}),$$

gdzie  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją wypukłą; wówczas  $f$  jest poliwypukła. W szczególności funkcja  $f(\nabla \mathbf{u}) = \det \nabla \mathbf{u}$  jest funkcją poliwypukłą.

**Przykład 3.4.** W zagadnieniach geometrycznie nieliniowej sprężystości mamy do czynienia z gęstością energii wewnętrznej daną wzorem (por. [20])

$$W(\mathbf{F}) = C_1 \left( (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^2 - 3 \right) + C_2 \left( \text{adj} \mathbf{F} \text{adj} \mathbf{F}^T - 3 \right) + C_3 \left( (\det \mathbf{F})^2 - 1 \right),$$

gdzie  $C_i > 0$  są pewnymi stałymi materiałowymi (tzn. materiał jest jednorodny), zaś  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u}$  jest gradientem deformacji. Jeżeli dodatkowo przyjąć w powyższym wzorze, że  $\det \mathbf{F} = 1$ , wówczas materiał jest nazywany nieściśliwym. Można pokazać, że  $W(\mathbf{F})$  jest funkcją poliwypukłą (por.[5]). Dokładniej, funkcja  $W(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}, \text{adj} \mathbf{F}, \det \mathbf{F})$  jest funkcją wypukłą względem wszystkich trzech argumentów. Podkreślimy, że rozkład taki na ogół nie jest jednoznaczny.

Przypomnijmy, że  $\text{adj} \mathbf{F}$  oznacza zbiór wszystkich dopełnień algebraicznych macierzy  $\mathbf{F}$  (czasami w literaturze oznaczano jako  $\text{cof} \mathbf{F}$ ).

**Uwaga 3.1.** Niech  $f = f(\mathbf{F})$ , gdzie  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u}$ . Wówczas zachodzą implikacje:

$$f \text{ wypukła} \Rightarrow f \text{ poliwypukła} \Rightarrow f \text{ kwaziwypukła} \Rightarrow f \text{ wypukła rzędu 1.}$$

Gdy  $m = 1$  lub  $n = 1$ , wszystkie te pojęcia są równoważne. W ogólnym przypadku implikacje odwrotne nie są prawdziwe, np. funkcja  $f(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$  jest funkcją poliwypukłą (i oczywiście kwaziwypukłą), ale nie jest funkcją wypukłą. Ponadto, jeżeli  $f \in C^2$  (względem gradientu), to

$$f(\nabla \mathbf{u}) \text{ jest wypukła rzędu 1} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u_{,\alpha}^i \partial u_{,\beta}^j} \lambda_\alpha \lambda_\beta \xi^i \xi^j \geq 0,$$

$$\text{dla } \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \text{ oraz } u_{,\alpha}^i = \frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}.$$

Ostatnią nierówność nazywamy warunkiem Legendre'a-Hadamarda. Oznacza ona eliptyczność równań Eulera-Lagrange'a, lub silną eliptyczność, gdy nierówność jest ostra.

**Uwaga 3.2.** Kwaziwypukłość gęstości energii wewnętrznej ma następującą interpretację w dziedzinie mechaniki: deformacje jednorodne minimalizują energię wewnętrzną ciała przy braku sił powierzchniowych i przy założeniu, że materiał jest jednorodny. Z drugiej strony nie znaleziono jak do tej pory interpretacji fizycznej funkcji poliwy pukłej (Ball [5] wprowadził to pojęcie do nieliniowej teorii sprężystości w roku 1977), chociaż wiele gęstości funkcji energii ma tę własność.

Niech teraz symbole  $Cf$ ,  $Pf$ ,  $Qf$  oraz  $Rf$  oznaczają kolejno następujące regularyzacje funkcji  $f$ : wypukłą, poliwy pukłą, kwaziwypukłą oraz wypukłą rzędu 1, zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} Cf &= \sup \{ g : g \leq f, g \text{ jest funkcją wypukłą} \}, \\ Pf &= \sup \{ g : g \leq f, g \text{ jest funkcją poliwy pukłą} \}, \\ Qf &= \sup \{ g : g \leq f, g \text{ jest funkcją kwaziwypukłą} \}, \\ Rf &= \sup \{ g : g \leq f, g \text{ jest funkcją wypukłą rzędu 1} \}. \end{aligned}$$

Wówczas mamy następujący ciąg nierówności charakteryzujący relacje pomiędzy odpowiednimi relaksacjami [22]:

$$Cf \leq Pf \leq Qf \leq Rf \leq f. \quad (3.4)$$

Jeśli  $f$  jest wypukłą, to w (3.4) mamy równość, ponieważ  $f = Cf = f^{**}$ , gdzie podwójna gwiazdka oznacza drugie sprzężenie funkcji  $f$  (tzw. bipolara funkcji  $f$ ),  $f^{**} = (f^*)^*$ ,  $f^*(u) = \sup \{ \langle u, u^* \rangle - f(u) : u \in X \}$ ,  $u^* \in X^*$ .

Ponadto, jeśli  $n = 1$  lub  $m = 1$ , to pojęcia te pokrywają się. Wówczas mamy

$$Cf = Pf = Qf = Rf (= f, \text{ jeżeli } f \text{ jest wypukłą}).$$

Następująca nierówność, zwaną nierównością Jensena, odgrywa dużą rolę w teorii miar Younga. Nierówność ta jest równoważna wypukłości w sensie, który wynika z poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 3.3.** Niech  $f$  będzie funkcją wypukłą. Wówczas prawdziwa jest następująca nierówność dla wszystkich przestrzeni probabilistycznych  $(\Omega, \mu)$  i wszystkich funkcji mierzalnych  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\int_{\Omega} f(g(x)) d\mu \geq f \left( \int_{\Omega} g(x) d\mu \right). \quad (3.5)$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w księdze Braidesa [16], str. 197. Klasyczna wersja tej nierówności jest następująca: jeżeli  $f$  jest wypukła, to spełniona jest nierówność Younga:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u(x)) dx \geq f \left( \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx \right).$$

Zwróćmy uwagę, że powyższa nierówność jest wykorzystana do określenia funkcji kwaziwypukłej (por.(3.1)).

### 3.1.2. Dolna półciągłość funkcjonalów a wypukłość

Następujące klasyczne już rezultaty charakteryzują związki pomiędzy dolną półciągłością i odpowiednią wypukłością funkcji podcałkowych dla funkcjonalów całkowych.

I. *Przypadek przestrzeni  $L^{\infty}$ .* Niech  $\Omega$  będzie otwartym podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  i niech  $\mathbf{u} \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Twierdzenie 3.4** (Ball [6]). *Niech  $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją taką, że  $\phi(\mathbf{u}(\cdot)) \in L^1(\Omega)$  dla  $\mathbf{u} \in L^{\infty}(\Omega)^m$ . Wówczas*

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{u}(x)) dx$$

*jest funkcjałem ciągowo słabo\* dolnie półciągłym na przestrzeni  $L^{\infty}(\Omega)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi$  jest funkcją wypukłą.*

Następująca uwaga charakteryzuje wszystkie funkcje ciągłe.

**Uwaga 3.3.** Niech  $\phi$  będzie funkcją taką jak w powyższym twierdzeniu. Niech  $L^{\infty}$  będzie wyposażona w topologię słabą\*, zaś  $L^1$  w topologię słabą. Wówczas odwzorowanie  $\phi: L^{\infty}(\Omega)^m \rightarrow L^1(\Omega)$  jest ciągowo ciągle wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi$  jest funkcją afiniczną, tzn.  $\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$ , gdzie  $\mathbf{a}$  i wektor  $\mathbf{b}$  są stałe. Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu nie było konieczne wymaganie ciągłości funkcji  $\phi$ .

II. *Przypadek przestrzeni  $W^{1,\infty}$ .* Rozważmy teraz funkcję  $\psi: \mathbb{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $\psi(\mathbf{F}(\cdot)) \in L^1(\Omega)$  dla  $\mathbf{F} \in L^{\infty}(\Omega)^{m \times m}$ .

**Twierdzenie 3.5** (Morrey [50]; Ball [6]). *Niech  $\psi: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}^m \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą. Rozpatrzmy funkcjonal*

$$J(u) = \int_{\Omega} \psi(x, u(x), \nabla u(x)) dx.$$

*Wówczas funkcjonal  $J$  jest ciągowo słabo\* dolnie półciągły w  $W^{1,\infty}(\Omega)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\psi$  jest kwaziwypukła.*

Twierdzenia te ukazują rolę wypukłości lub kwaziwypukłości w zależności od tego, czy funkcja podcałkowa zależy od gradientu, czy też nie.

W zagadnieniach mechaniki i w rachunku wariacyjnym ważne jest formułowanie problemów minimalizujących raczej w przestrzeniach  $W^{1,p}$  ( $1 \leq p < \infty$ ) niż  $W^{1,\infty}$ , ponieważ gęstości energii wewnętrznych (funkcje podcałkowe) wielu materiałów hipersprężystych zachowują się jak wielomiany o ustalonej potędze względem gradientów deformacji lub kombinacji odpowiednich minorów gradientu deformacji.

Badanie minimizerów funkcjonałów niewypukłych w zastosowaniu do nieliniowej teorii sprężystości zostało rozpoczęte w pracy Balla [5]. Ball zauważył, że rezultaty Morreya [50] nie mogą być stosowane do nieliniowej sprężystości, gdyż nie uwzględniają warunku niepenetracji materiału ( $\det \mathbf{F} > 0$ ); również brak w nich warunków typu: energia rośnie, gdy wyznacznik gradientu deformacji maleje do zera. Ball uzupełnił te braki, wprowadzając m.in. pojęcie funkcji poliwywukłej, uogólniając w ten sposób pojęcie wypukłości. Twierdzenia Balla o istnieniu minimizerów funkcjonałów całkowych dotyczą funkcji poliwywukłych spełniających odpowiedni warunek koercywności. Ten rodzaj wypukłości nie ma interpretacji fizycznej, choć można pokazać, że funkcje gęstości energii wewnętrznej dla ciał hipersprężystych są często poliwywukłe. Ważnym rezultatem dotyczącym funkcji kwaziwypukłych jest następujące twierdzenie.

Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  będzie dowolnym zbiorem mierzalnym i niech

$$F(\mathbf{u}, \Omega) = \int_{\Omega} f(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}(x)) dx.$$

**Twierdzenie 3.6** (Acerbi-Fusco[3]). *Niech  $1 \leq p < +\infty$ ; ponadto założmy, że funkcja  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm}$  spełnia następujące założenia:*

- (a)  *$f$  jest funkcją Carathéodory'ego;*
- (b)  *$f$  jest funkcją kwaziwypukłą;*
- (c)  *$0 \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \xi) \leq a(\mathbf{x}) + C(|\mathbf{s}|^2 + |\xi|^p)$  dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^m, \xi \in \mathbb{M}^{nm}$ , gdzie*

*$C > 0$  jest stałą oraz  $a = a(\mathbf{x})$  jest nieujemną, lokalnie całkowną funkcją na  $\mathbb{R}^n$ .*

*Wówczas dla każdego zbioru otwartego  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  funkcjonal  $\mathbf{u} \mapsto F(\mathbf{u}, \Omega)$  jest (ciągowo) słabo dolnie półciągły w przestrzeni  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ .*

Dowód tego twierdzenia przy użyciu miar Younga podany został w pracy [34].

### 3.2. Metoda bezpośrednia rachunku wariacyjnego

Stosując metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego, można udowodnić istnienie minimizerów, jeśli funkcja podcałkowa spełnia odpowiednie założenia. W pierwszym przykładzie tego punktu pokażemy, stosując metodę bezpośrednią, że klasyczne minimizery mogą nie istnieć. Warunek koercywności jest tu spełniony, ale brak wypukłości odpowiada za brak dolnej półciągłości badanego funkcjonału. Tego typu problemy prowadzą do miar Younga. Znanym przykładem jest tzw. zagadnienie nawigacyjne Zermelo.

**Przykład 3.5.** Rozpatrzmy funkcjonał

$$I(u) = \int_0^1 f(u, \dot{u}) dx, \quad (3.6)$$

$$\text{gdzie } f(u, \dot{u}) = \left[ u^2 + (\dot{u} - 1)^2 \right]$$

oraz następujące zagadnienie minimizacji:

**Zadanie (P).** Znaleźć minimum funkcjonału

$$\inf \{ I(u) : u \in \mathcal{A} \},$$

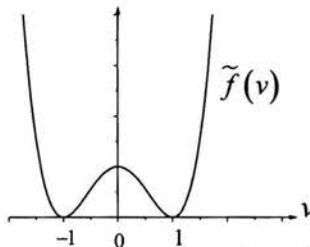
gdzie

$$\mathcal{A} = \{ u \in W^{1,4}(0,1) : u(0) = u(1) = 0 \}.$$

Funkcjonały, które są opisane przez niewypukłe funkcje podcałkowe  $f$ , które w mechanice przedstawiają gęstość energii wewnętrznych, nazywamy potencjałami dwu- lub wielostudniowymi. Prosty przykład potencjału dwustudniowego, takiego że

$$f(u, v) = \tilde{f}(v) = (v^2 - 1)^2,$$

tzn. niezależnego od zmiennej  $u$  pokazano na rys.3.1.



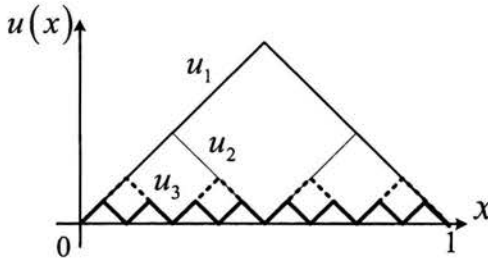
Rys.3.1. Potencjał dwustudniowy niewypukły typu  $\tilde{f}(v) = (v^2 - 1)^2$ .

Zauważmy, że  $I(u) \geq 0$  dla dowolnej funkcji  $u \in W^{1,4}(0,1)$ , wobec czego istnieje infimum funkcjonału  $I(u)$  określonego na przestrzeni Sobolewa  $W^{1,4}(0,1) \cap W^{1,2}(0,1)$ .

Zauważmy, że ciąg oscylujący postaci (por.rys.3.2)

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{n}, & \text{jeśli } x \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n} \right], \\ -x + \frac{k+1}{n}, & \text{jeśli } x \in \left[ \frac{2k+1}{2n}, \frac{k+1}{n} \right], \end{cases}$$

dla  $k=0,1,\dots,n-1$  oraz  $n=1,2,\dots$  jest ciągiem zbieżnym jednostajnie (a więc także i punktowo) do funkcji  $u_\infty(x) = 0$ .



Rys.3.2. Ciąg minimizerów dla zadania (P)

Z kolei

$$\left| \frac{du_n(x)}{dx} \right| \equiv |\dot{u}_n(x)| = 1 \quad \text{p.w. na odcinku } (0,1), \quad (3.7)$$

Mamy więc

$$0 \leq \inf P \leq \frac{1}{4n^2}.$$

Stąd  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = 0$ , czyli  $\inf P = 0$ , natomiast

$$u_\infty(x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

nie jest rozwiązaniem zadania (P), gdyż  $I(u_\infty) = 1 \geq 0 = \inf(P)$ . Oznacza to, że ciąg minimalizujący nie jest zbieżny do minimizera funkcjonału  $I(u)$ :

$$I(u_n) \rightarrow 0, \text{ ale } I(u_\infty) = 1.$$

Nie mamy zatem spełnionego warunku dolnej półciągłości funkcjonału  $I$ :

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n) \neq I(u_\infty) = 1.$$

Wobec tego zadanie (P) nie posiada klasycznego minimizera. Zobaczmy później, jak zrelaksować ten problem, używając miar probabilistycznych (miar Younga).

Pokażemy teraz, na czym polega metoda relaksacji kwaziwypukłej. Zadanie zrelaksowane (QP) dla zadania (P) ma następującą postać.

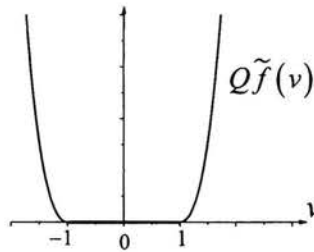
**Zadanie (QP).** Znaleźć

$$\inf \left\{ \int_0^1 Qf(u(x), \dot{u}(x)) dx : u \in W^{1,4}(\Omega), u(0) = u(1) = 0 \right\}, \quad (3.8)$$

gdzie

$$Qf(u, \xi) = \begin{cases} f(u, \xi), & \text{jeśli } |\xi| > 1, \\ u^2, & \text{jeśli } |\xi| \leq 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

Zadanie (QP) ma co najmniej jeden minimizer  $u \equiv 0$ . Zauważmy tutaj, że zadanie (QP) jest wypukłe (zagadnienie jednowymiarowe). Wypuklenie funkcji  $\tilde{f}(v)$  przedstawione na rys.3.3.



Rys.3.3. Wypuklenie funkcji  $f(u, v) \equiv Qf(u, v) = Q\tilde{f}(v)$ .

Zauważmy, że:

(a)  $f(u, \dot{u}) = u^2 + (\dot{u}^2 - 1)^2$  jest funkcją niewypukłą względem  $\dot{u}$  ( $f$  jest wypukła względem  $u$ , ale ten fakt jest bez znaczenia).

(b) Brak wypukłości względem  $\dot{u}$  jest odpowiedzialny za brak dolnej półciągłości funkcjonału  $I$  (por. Ball [6]). Z kolei problem (QP) spełnia warunki:  $Qf(u, \xi)$  jest wypukła względem  $\xi$  oraz  $Qf$  jest dolnie półciągła.

Zatem problem (QP) posiada minimum. Zwróćmy uwagę na to, że ta metoda gubi niektóre istotne informacje o np. oscylującym zachowaniu się minimizerów.

Przejdźmy teraz do problemu sterowania optymalnego, który nie posiada klasycznego rozwiązania.



**Przykład 3.6.** Zminimalizować funkcjonal kosztów (por.[68])

$$J(u) = \int_0^T (|y|^2 - |u|^2) dt \quad (3.10)$$

przy następujących założeniach:  $u$  jest takie, że  $|u(t)| \leq 1$  dla prawie każdego  $t \in (0, T)$ , oraz spełnione jest równanie:

$$y'(t) = u(t), \quad y(0) = 0.$$

Zauważmy, że funkcjonal  $J$  jest niewypukły, a więc nie wiadomo, czy minimizer istnieje.

Ponieważ  $J(u) \geq -T$  dla każdego  $u$ , tzn. funkcjonal  $J$  jest ograniczony z dołu. Jeśli

$$J(u) = \int_0^T (|y|^2 - |u|^2) dt = -T,$$

to  $y = 0$  oraz  $|u|^2 = 1$  p.w. na odcinku  $(0, 1)$ . Ponadto,  $y = 0$  implikuje  $u = 0$  p.w. w zbiorze  $(0, 1)$ . Zatem mamy sprzeczność. Pomimo to twierdzimy, że  $\inf J(v) = -T$ . W tym celu konstruujemy następujący ciąg:

$$u_n(t) = \begin{cases} +1 & \text{dla } 0 \leq t \leq T/(2n), n=1, 2, \dots, \\ -1 & \text{dla } 0 \leq t \leq T/n, \end{cases}$$

a następnie przedłużamy ten ciąg w sposób okresowy na cały odcinek  $[0, T]$ . Jak widać, wtedy

$$y_n \rightarrow 0 \quad \text{silnie oraz } u_n^2 = 1.$$

Stąd  $\inf J(v) = -T$ . Jednak para  $(u, y)$  taka, że  $y = 0$  i  $u^2 = 0$ , nie może być rozwiązaniem rozpatrywanego zadania, tak więc minimum jest nieosiągalne.

Rozważmy zadanie uogólnione, tzw. zagadnienie zrelaksowane. Weźmy dwie funkcje  $u$  i  $v$  takie, że

$$(u(t))^2 \leq v(t) \leq 1 \quad \text{p.w. w } (0, T).$$

Określamy zbiór  $K$  następująco:

$$K = \{(u, v) : v = u^2 \text{ i } v \leq 1\}.$$

Widzimy, że

$$(u, v) \in \overline{\text{co}}(K) \quad \text{p.w.,}$$

gdzie  $\overline{\text{co}}(K)$  oznacza domknięcie uwypuklenia zbioru  $K$ .

Określmy uogólniony funkcjonal kosztu następująco:

$$\tilde{J}(u, v) = \int_0^T (|u|^2 - v) dt.$$

Zrelaksowany funkcjonal  $\tilde{J}(u, v)$  jest funkcjonalem wypukłym względem obu argumentów i jest określony na zbiorze wypukłym i domkniętym. Stąd wniosek, że  $\tilde{J}$  osiąga swoje minimum, które jest realizowane w punkcie  $(u, v) = (0, 1)$ . Ponadto istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy  $J$  i  $\tilde{J}$  określona przez  $u \mapsto (u, u^2)$  oraz  $J(u) = \tilde{J}(u, u^2)$ . Jeśli mamy ciąg minimalizujący  $\{u_n\}$  taki, że

$$J(u_n) \rightarrow J(u),$$

oznacza to, że  $(u_n, u_n^2)$  jest ciągiem minimizerów dla  $\tilde{J}$ . Ciąg ten jest zbieżny do rozwiązania  $(0, 1)$  będącego minimizerem funkcji  $\tilde{J}$ . Te spostrzeżenia umożliwiają nam wprowadzenie miar Younga.

### 3.3. Miary Younga

Niech będzie dany ciąg  $\{u_j\}$  taki, że  $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  oraz  $u_j(x) \in K$  dla p. k.  $x \in \Omega$ , gdzie zbiór  $K \subset \mathbb{R}^m$ . Wiemy, że jeżeli  $u_j \rightharpoonup u_\infty$ , wówczas  $u_\infty(x) \in \overline{\text{co}}(K)$  p.w. w  $\Omega$ , i wynik ten jest optymalny. Przypuśćmy, że chcemy znać relacje pomiędzy  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j$  oraz  $\lim_{j \rightarrow \infty} F(u_j)$ , gdzie  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  są funkcjami ciągłymi, niekoniecznie afinicznymi.

Konstruujemy nową funkcję (por.[68])

$$U_j : x \mapsto U_j(x) = (u_j(x), F(u_j(x))).$$

Wówczas

$$U_j(x) \in K' := \{(z, F(z)) : z \in K\} \text{ p.w. w } \Omega.$$

Założmy, że

$$U_j \rightharpoonup U = (u, \ell), \text{ tzn. } \begin{cases} u_j \rightharpoonup u, \\ F(u_j) \rightharpoonup \ell. \end{cases}$$

Wówczas na mocy poprzednich rozważań mamy  $U(x) \in \overline{\text{co}}(K')$  dla prawie każdego  $x \in \Omega$ .

Dochodzimy do następującego zagadnienia: co można powiedzieć o granicach wszystkich ciągów  $F(u_j)$  dla wszystkich funkcji ciągłych  $F$ , niekoniecznie wypukłych?

Najpierw odpowiemy na pytanie, jak zachowuje się powyższy ciąg dla funkcji wypukłych. Otóż jeżeli  $F$  jest funkcją wypukłą, wówczas

$$F(u_j(x)) - \ell(x) \geq F(u(x)) \quad \text{dla p.k. } x \in \Omega.$$

W ogólnym przypadku odpowiedź na powyższe pytanie daje następujące twierdzenie, które jest fundamentalnym twierdzeniem o istnieniu miar Younga, stowarzyszonych z ciągiem funkcji zbieżnych w sensie miary. Poniżej prezentujemy wersje tego twierdzenia z prac [27,28]; por. również Ball [9], Tartar [68], Dacorogna [21].

**Twierdzenie 3.7.** Niech  $\Omega$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{R}^n$ , mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Niech  $K \subset \mathbb{R}^m$  będzie zbiorem domkniętym i niech  $u_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $j=1,2,\dots$ , będzie ciągiem funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a i takich, że  $u_j(\cdot)$  jest zbieżny w zbiorze  $K$  według miary, gdy  $j \rightarrow \infty$ , tzn. dla dowolnego otwartego otoczenia  $U$  zbioru  $K$  w  $\mathbb{R}^m$  istnieje

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{meas} \{x \in \Omega : u_j(x) \notin U\} = 0.$$

Wówczas istnieje podciąg  $\{u_{j_k}\}$  ciągu  $\{u_j\}$  oraz rodzina probabilistycznych miar Radona  $\nu_x$ ,  $x \in \Omega$ , o mierze dodatniej na  $\mathbb{R}^m$  zależąca w sposób słabo\* mierzalny od  $x$  nazywana **miarą Younga**, taka, że

$$(a) \|\nu_x\| := \int_{\mathbb{R}^m} d\nu_x \leq 1 \text{ dla prawie każdego } x \in \Omega,$$

$$(b) \text{supp } \nu_x \subset K \text{ dla prawie każdego } x \in \Omega,$$

$$(c) f(u_j) \rightharpoonup \langle \nu_x, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \text{ w przestrzeni } L^\infty(\Omega) \text{ dla każdej funkcji ciągłej}$$

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ spełniającej warunek } \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0.$$

Zalóżmy ponadto, że ciąg  $\{u_j\}$  spełnia następujący warunek ciasności:

$$\forall r > 0 \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} \text{meas} \{x \in \Omega \cap B_r : |u_j(x)| \geq L\} = 0, \quad (3.11)$$

gdzie  $B_r = B_r(0)$  jest kulą o promieniu  $r$  i środku w zerze. Wówczas

$$\|\nu_x\| = 1 \text{ dla p.k. } x \in \Omega, \quad (3.12)$$

tzn.  $\nu_x$  jest miarą probabilistyczną i zachodzi następujący warunek (3.13):

dla dowolnego zbioru  $A \subset \Omega$  i dowolnej funkcji  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że ciąg  $\{f(u_j)\}$  jest ciągowo słabo relatywnie zwarty w przestrzeni

$$L^1(A), \text{ mamy następującą zbieżność: } f(u_j) \rightharpoonup \langle v_x, f \rangle \text{ w } L^1(A). \quad (3.13)$$

**Uwaga 3.7.** Ball [9] udowodnił, że warunek ciasności (3.11) jest równoważny warunkowi:

dla danego  $r > 0$  istnieje ciągła niemalejąca funkcja  $g_r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  taka, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g_r(t) = \infty \quad \text{oraz} \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega \cap B_r} g_r(|u_k(x)|) dx < \infty. \quad (3.14)$$

Ponadto okazuje się, że przy założeniu (3.11) dla dowolnego zbioru mierzalnego  $A \subset \Omega$  mamy zbieżność

$$f(\cdot, \mathbf{u}_j) \rightharpoonup \langle v_x, f(x, \cdot) \rangle \text{ w przestrzeni } L^1(A),$$

dla każdej funkcji Carathéodory'ego  $f: A \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że ciąg  $\{f(\cdot, \mathbf{u}_j)\}$  jest ciągowo słabo relatywnie zwarty w  $L^1(A)$ . Stąd fakt ten jest równoważny warunkom (3.11), (3.12) i (3.13).

W tej samej pracy [9] Ball pokazał, że jeśli ciąg  $\mathbf{u}_k$  generuje miarę Younga  $v_x$ , wówczas dla  $\psi \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$  zachodzi równość

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi(x, \mathbf{u}_k(x)) dx = \int_{\Omega} \langle v_x, \psi(x, \cdot) \rangle dx.$$

Intuicyjnie możemy myśleć o mierze Younga jako o granicznym rozkładzie prawdopodobieństwa, gdy  $k \rightarrow 0$ , wartości ciągu  $u^{(k)}$  blisko punktu  $x$ . Precyzyjniej można powiedzieć tak: niech  $B(x, \delta)$  będzie kulą otwartą o środku w punkcie  $x$  i promieniu  $\delta > 0$ . Niech  $x, k$  będą ustalone, podczas gdy  $v_{x, \delta}^{(k)}$  jest rozkładem prawdopodobieństwa wartości funkcji  $u^{(k)}(y)$ , gdy  $y$  jest wybrane losowo z kuli  $B(x, \delta)$ . Oznacza to, że

$$v_x = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} v_{x, \delta}^{(k)} \quad (3.15)$$

prawie wszędzie.

W zastosowaniach znaczną rolę odgrywają następujące fakty dotyczące silnej zbieżności ciągów lub zbieżności według miary oraz miar produktowych.

**Lemat 3.1.** [12] Załóżmy, że  $\Omega$  ma miarę skończoną i niech  $\nu_x$  będzie miarą Younga generowaną przez ciąg  $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Wówczas zachodzi równoważność:

$$u_j \rightarrow u \text{ wg miary} \Leftrightarrow \nu_x = \delta_{u(x)} \text{ dla p.k. } x \in \Omega. \quad (3.16)$$

**Lemat 3.2.** [12] Niech  $\Omega$  ma miarę skończoną,  $|\Omega| < \infty$ . Jeśli ciągi  $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  oraz  $v_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  generują odpowiednio miary Younga  $\delta_{u(x)}$  oraz  $\nu_x$ , wówczas ciąg  $(u_j, v_j)$  generuje miarę Younga  $\delta_{u(x)} \otimes \nu_x$ .

Podamy jeszcze wersję Tartara [68] lematu 3.1. Tartar pokazał, że miara Younga redukuje się do rodziny miar Diraca wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg  $u_j$  jest silnie zbieżny w przestrzeni  $L^p(\Omega)$  dla pewnego  $p > 1$ .

**Lemat 3.3.** [68] Niech  $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$  w  $L^\infty(\Omega)$ . Wówczas  $u_j \rightarrow u$  silnie w  $L^p(\Omega)$  ( $p < \infty$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\nu_x = \delta_{u(x)}$  (miara Diraca skupiona w  $u(x)$ ).

**Przykład 3.7.** Niech  $u_j \rightarrow u$  w  $L^\infty(\Omega)$  i niech  $f$  będzie identycznością, tj.  $f(x) = x$ . Wówczas na mocy twierdzenia 3.7. mamy następującą fundamentalną własność miar Younga stowarzyszonych z ciągiem  $\{u_j\}$ :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda dv_x(\lambda).$$

**Przykład 3.8.** Niech  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą i periodyczną o okresie 1. Wówczas dla  $u_j(x) = u(jx)$  mamy

$$f(u_j(x)) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu, f(\lambda) \rangle = \int_0^1 f(u(x)) dx, \quad j \rightarrow \infty.$$

W tym przypadku mamy  $\nu_x = \nu$  (miara jednorodna).

**Przykład 3.9.** Rozważmy ciąg  $\{\sin(jx)\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Można pokazać, że odpowiadająca temu ciągowi miara Younga wyraża się następująco (por.[71]):

$$dv_x(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \chi_{(-1,1)}(\lambda),$$

gdzie  $\chi_{(-1,1)}$  jest funkcją charakterystyczną odcinka  $(-1, 1)$ . Wobec tego dla wszystkich funkcji  $f \in C(\mathbb{R})$  mamy

$$f(\sin jx) \xrightarrow{*} \bar{f} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda, \text{ gdy } j \rightarrow \infty.$$

Całka po prawej stronie jest równa

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin y) dy.$$

Przyjmijmy, że  $f = \text{id}$ . Wówczas otrzymujemy

$$\sin jx \xrightarrow{*} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = 0, \text{ gdy } j \rightarrow \infty.$$

Niech teraz  $f(z) = z^2$ . Wówczas

$$(\sin(jx))^2 \xrightarrow{*} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} d\lambda = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że dwie ostatnie granice pokrywają się z wyrażeniem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin y) dy$$

odpowiednio dla  $f = \text{id}$  oraz  $f(y) = y^2$ .

**Przykład 3.10.** Niech  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie okresowym rozszerzeniem następującej funkcji:

$$h(x) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } 0 \leq x < \lambda, \\ b, & \lambda \leq x < 1. \end{cases}$$

Określamy ciąg funkcji  $z_j: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  następująco:

$$z_j(x) = h(jx).$$

Ponieważ funkcja  $h$  jest okresowa, to mamy następujący rezultat (por. przykład 3.8):

$$z_j \xrightarrow{*} \int_0^1 h(y) dy = \lambda a + (1-\lambda)b.$$

Złożenie  $f \circ h$  jest funkcją okresową (por. przykład 3.8), wobec tego zachodzi zbieżność

$$f(z_j) \xrightarrow{*} \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b), \text{ gdy } j \rightarrow \infty.$$

Stąd wniosek, że ciąg  $\{z_j\}$  generuje miarę Younga  $\nu = \{\nu_x\}$  taką, że

$$\nu_x = \lambda \delta_a + (1-\lambda)\delta_b.$$

W tym przypadku rodzina miar  $\{\nu_x\}$  jest niezależna od parametru  $x$ , zatem indeks  $x$  możemy opuścić. Taką miarę  $\nu$  nazywamy *jednorodną miarą Younga* (por. przykład 3.8).

### 3.4. Miary Younga generowane przez gradient.

W zagadnieniach wariacyjnych mechaniki ośrodków ciągłych wszędzie tam, gdzie poszukujemy rozwiązań ścisłych bądź przybliżonych, mamy na ogół do czynienia z funkcjami zależnymi od gradientu deformacji (może też wystąpić gradient wyższego rzędu). Będziemy wtedy mówić, że miara Younga jest generowana nie przez ciąg funkcji, lecz przez ciąg gradientów (krótko: przez gradient).

**Definicja 3.8.** (Sychev [65]). Miara Younga  $(\nu_x)_{x \in \Omega}$  jest gradientową  $p$ -miarą Younga, gdzie  $p \in [1, \infty)$ , jeśli jest ona generowana przez gradienty  $\{\nabla \mathbf{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ciągu  $\{\mathbf{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  takiego, że ciąg  $\{\mathbf{u}_j\}$  jest słabo zbieżny w przestrzeni  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , a funkcje  $|\nabla \mathbf{u}_j|^p$  są jednakowo całkowalne.

Niech będzie dany funkcjonal

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \Omega) = \int_{\Omega} W(x, \mathbf{u}(x), \nabla \mathbf{u}(x)) dx \quad (3.17)$$

określony na przestrzeni Sobolewa  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  i niech ciąg  $\{\mathbf{u}_j\}$  będzie ograniczony w tej przestrzeni. Ponieważ interesuje nas zachowanie się funkcjonału  $\mathcal{F}$  na przestrzeni Sobolewa  $W^{1,p}$ , a nie tylko na  $W^{1,\infty}$ , konieczny jest odpowiedni wzrost funkcji podcałkowej  $W(x, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ . Mianowicie, będziemy żądać, żeby wzrost funkcji  $W$  był typu:

$$C_1 \leq W(x, \mathbf{u}, \mathbf{A}) \leq C(1 + |\mathbf{A}|^p), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{mn}. \quad (3.18)$$

W przestrzeniach funkcji całkowalnych wraz z  $p$ -tą potęgą, jeśli ciąg  $\{|\nabla \mathbf{u}_j|^p\}$  jest ograniczony w  $L^1(\Omega)$ , to generalnie nie możemy zagwarantować jego ograniczoności w  $L^\infty(\Omega)$  (dla pewnego  $p \in [1, \infty)$ ). Jeśli jednak  $\nabla \mathbf{u}^j \in L^p(\Omega; \mathbb{M}^{mn})$  oraz

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^j(x)|^p dx \leq M \quad (3.19)$$

dla pewnego  $M \in \mathbb{R}$ , wówczas istnieje rodzina  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  oraz podciąg danego ciągu (oznaczymy tak samo) o tej własności, że jeśli

$$\varphi(\nabla \mathbf{u}_j) \rightarrow \bar{\varphi} \quad \text{w } L^1(\Omega) \quad \text{dla } \varphi \in C(\mathbb{R}^m), \quad (3.20)$$

to

$$\bar{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{M}^{mn}} \varphi(\mathbf{A}) d\nu_x(\mathbf{A}) \quad \text{p.w. w } \Omega. \quad (3.21)$$

Funkcja  $\varphi$  musi spełniać zależność

$$\lim_{|\mathbf{A}| \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(\mathbf{A})|}{1 + |\mathbf{A}|^p} = 0. \quad (3.22)$$

W celu precyzyjnego opisanego miar Younga generowanych przez gradienty funkcji całkowalnych z  $p$ -tą potęgą wprowadza się następującą przestrzeń Banacha (dla ustalonego  $p > 1$ ):

$$E^p = \left\{ \psi \in C(\mathcal{M}^{mn}) : \sup_{\mathcal{M}^{mn}} \frac{|\psi(\mathbf{A})|}{1 + |\mathbf{A}|^p} < \infty \right\}. \quad (3.23)$$

Wówczas  $p$ -miarami Younga będą elementy przestrzeni sprzężonej  $(E^p)^*$ .

Mamy następującą charakteryzację gradientowych  $p$ -miar Younga.

**Twierdzenie 3.8.** (Kinderlehrer-Pedregal [43]; Sychev [65]). Rodzina miar probabilistycznych  $(\nu_x)_{x \in \Omega}$  jest gradientową  $p$ -miarą Younga, gdzie  $p \in [1, \infty)$ , wtedy i tylko wtedy, gdy

(a) istnieje  $\mathbf{u}_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  takie, że

$$\int_{\mathcal{M}^{mn}} \Lambda dv_x(\Lambda) = \nabla \mathbf{u}_0(x) \quad \text{dla p.k. } x \in \Omega, \quad (3.24)$$

(b) nierówność

$$f(\nabla \mathbf{u}_0(x)) \leq \int_{\mathcal{M}^{mn}} f(\Lambda) dv_x(\Lambda) \quad (3.25)$$

zachodzi dla dowolnej kwaziwypukłej funkcji  $f$  takiej, że

$$C_1 \leq f(\Lambda) \leq C_2(1 + |\Lambda|^p) \quad \text{dla p.k. } x \in \Omega,$$

(c) oraz 
$$\int_{\Omega} \int_{\mathcal{M}^{mn}} (1 + |\Lambda|^p) dv_x(\Lambda) dx < \infty, \quad \text{dla p.k. } x \in \Omega. \quad (3.26)$$

**Uwaga 3.5.** W przypadku skalarnym, tj. gdy  $\min\{n, m\} = 1$ , kwaziwypukłość redukuje się do wypukłości. Zatem każda rodzina miar probabilistycznych spełniająca własności (a) oraz (c) jest gradientową  $p$ -miarą Younga. Warunek (c) twierdzenia gwarantuje, że tzw. moment rzędu  $p$  jest skończony. Jest to konsekwencją przyjętego założenia o wzroście funkcji podcałkowej.

W zagadnieniach geometrycznie nieliniowej teorii sprężystości rozważa się ciągi ograniczone w  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . Wówczas z dokładnością do podciągu mamy

$$\mathbf{u}_j \rightarrow \mathbf{u}_\infty \text{ silnie w } L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \text{ oraz } \nabla \mathbf{u}_j \rightharpoonup \nabla \mathbf{u}_\infty \text{ słabo w } L^p(\Omega; \mathcal{M}^{mn}).$$



Jak wiemy (lemat 3.3), zbieżność silna w  $L^p$  gwarantuje, że miara Younga generowana przez ten ciąg jest miarą atomową, natomiast słabo zbieżny ciąg gradientów  $\nabla u_j$  generuje miarę  $\nu_x$  taką, że

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} W(x, \mathbf{u}_j(x), \nabla \mathbf{u}_j(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{M^m} W(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{A}) d\nu_x(\mathbf{A}) dx.$$

Ostatnia równość będzie mieć znaczenie przy formułowaniu problemów wariacyjnych za pomocą miar probabilistycznych.

Problemy wariacyjne wyższego rzędu pojawiają się często w literaturze matematycznej, inżynierskiej i fizycznej. Są one głównie powiązane z zagadnieniami dotyczącymi tzw. gradientowej teorii przejść fazowych i z nieliniową teorią powłok. Zagadnienia równowagi materiałów mikromagnetycznych wymagają wprowadzenia drugiego gradientu.

Zwyczajowo, w literaturze matematycznej *Miarą Younga* nazywa się rodzinę miar probabilistycznych  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  stowarzyszona z ciągiem funkcji  $u_j : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$  taką, że nośnik miary  $\text{supp}(\nu_x) \subset \mathbb{R}^m$  zależy od  $x \in \Omega$  w taki sposób, że dla każdej funkcji ciągłej  $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(u_j(x)) \rightharpoonup \bar{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \text{ w } L^\infty(\Omega),$$

gdzie słaba granica  $\bar{f}(x)$  jest mierzalna.

Nazwa tej miary jako probabilistyczna bierze się z stąd, że całkowita norma miary  $\nu_x$  jest (por. (3.12))

$$\|\nu_x\| = \int_{\text{suup} \nu_x} d\nu_x = 1 \text{ dla p.k. } x \in \Omega,$$

gdzie  $\text{suup} \nu_x$  jest nośnikiem miary  $\nu_x$  (por. 3.12).

Fundamentalna własność takiej rodziny miar probabilistycznych następująca: jeżeli ciąg  $\{\varphi(f_j)\}$  jest słabo zbieżny w  $L^p(\Omega)$ , wtedy słaba granica tego ciągu jest funkcją  $\bar{\varphi}$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(f_j) h(x) dx = \int_{\Omega} h(x) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx$$

dla wszystkich  $h \in L^1(\Omega)$ .

W rozdziałach 4, 5 pokażemy zastosowanie teorii miar Younga do zagadnień związanych z mikromagnetykami nieodkształcalnymi.

## Rozdział 4

### Matematyczne zagadnienia związane z mikromagnetykami nieodkształcalnymi

Rozpatrzmy w ramach teorii mikromagnetyzmu zagadnienie poszukiwania minimum energii całkowitej (minimalizacji odpowiedniego funkcjonału) dla magnetyków nieodkształcalnych. Zgodnie z zasadą minimum rozpatrywaną w rozdziale 2.6, poszukujemy rozkładu wektora magnetyzacji  $\mathbf{m}$  wewnątrz sztywnego ciała ferromagnetycznego poniżej temperatury Curie, zajmującego obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n=2,3$  pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego. Zakładamy ograniczenia na wektor namagnesowania (por.2.6):

$$|\mathbf{m}(\mathbf{x})| = 1 \text{ prawie wszędzie w } \Omega. \quad (4.1)$$

Funkcjonał energii całkowitej sztywnego ferromagnetyka składa się w tym przypadku z trzech składowych: energii anizotropii, energii zewnętrznej i energii magnetostaticznej (por.(2.17-2.19)):

$$E(\mathbf{m}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{m}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.2)$$

Niewypukła, dodatnia funkcja  $\phi$  jest gęstością energii anizotropii i jest równa zero przy  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{e}_i$ , dla  $i \in I$ , oraz wektory  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $n=2,3$  definiują osie łatwego namagnesowania materiału:

$$\phi(\pm \mathbf{e}_i) < \phi(\mathbf{m}), \forall \mathbf{m} \neq \mathbf{e}_i \quad (4.3)$$

Dla tzw. jednoosiowych ferromagnetyków funkcja  $\phi$  osiąga minimum tylko wzdłuż jednego kierunku łatwego namagnesowania, w tzw. kubicznych ferromagnetykach takich kierunków liniowo-niezależnych jest trzy. Wektor  $\mathbf{H} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  opisuje przyłożone zewnętrzne pole magnetyczne. Skalarny potencjał magnetyczny  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  związany jest z wektorem magnetyzacji  $\mathbf{m}$  przez równanie Maxwella:

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \chi_{\Omega} \mathbf{m}) = 0 \text{ w } \mathbb{R}^n, \quad (4.4)$$

gdzie  $\chi_{\Omega}$  jest funkcją charakterystyczną obszaru  $\Omega$  i zdefiniowaną jako:

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{przy } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{przy } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

Definiujemy zbiór funkcji dopuszczalnych

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{m} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) : |\mathbf{m}| = 1, \text{ p.w. w } \Omega \right\} \quad (4.6)$$

Zagadnienie minimalizacji energii całkowitej sztywnego ciała magnetycznego sprowadza się do poszukiwania rozwiązania zagadnienia (P) :

$$(P) \quad \inf \{ E(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in \mathcal{A} \}. \quad (4.7)$$

W pracy [30] pokazano, że może nie istnieć klasyczne rozwiązanie dla zagadnienia (P). Gdy takie rozwiązanie istnieje, mówimy, że energia osiąga minimum i magnetyk jest w stanie równowagi.

W dalszej części pracy będziemy rozpatrywać przypadki, gdy klasyczne minimum w zagadnieniu (P) nie istnieje dlatego, że funkcja podcałkowa, która jest gęstością energii wewnętrznej materiału jest funkcja nie wypukła (patrz rozdział 2.6). Oprócz tego, warunek (4.1) określa niewypukły zbiór funkcji dopuszczalnych (4.6) dla zagadnienia (P). Mówimy wtedy, że zagadnienie (P) jest niewypukłe. Dla rozwiązania niewypukłego zagadnienia minimalizacji (P) dla mikromagnetyków stosuje się różne metody relaksacji: głównie relaksację wypukłą (CP) oraz relaksacja przy pomocy miar Younga (RP).

#### 4.1. Relaksacja problemu (P) przez uwypuklenie

Niech  $\varphi(\mathbf{m}) = \phi^{**}(\mathbf{m})$  oznacza dolnie półciągłe uwypuklenie funkcji gęstości energii anizotropii magnetycznej  $\phi$  (por.(4.2)), jeżeli  $|\mathbf{m}| \leq 1$ , zaś  $\varphi(\mathbf{m}) = \infty$  w pozostałych przypadkach. Wtedy energia zrelaksowana wyjściowego zagadnienia przez uwypuklenie:

$$RE(\mathbf{m}) = \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{m}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx, \quad (4.8)$$

gdzie dla każdego  $\mathbf{m} \in L^2(\Omega)$  istnieje  $u \in H_0^1(\Omega)$ , otrzymane z równania Maxwella

$$-\Delta u + \operatorname{div}(\mathbf{m} \chi_{\Omega}) = 0 \quad \text{w } H^{-1}(\Omega).$$

Definiujemy zbiór funkcji dopuszczalnych

$$\mathcal{A}^1 = \left\{ \mathbf{m} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) : |\mathbf{m}| \leq 1, \text{ p.w. w } \Omega \right\} \quad (4.9)$$

Wówczas relaksacja wyjściowego zagadnienia przez uwypuklenie ma postać:

znaleźć

$$(CP) \quad \min \{ RE(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in \mathcal{A}^1 \}. \quad (4.10)$$

Istnienie rozwiązania zagadnienia uwypuklonego (CP) pokazano w pracy A.DeSimone [24], a więc

$$\inf_{\mathbf{m} \in A} E(\mathbf{m}) = \min_{\mathbf{m} \in A'} RE(\mathbf{m}). \quad (4.11)$$

Rozwiązanie wypukłego zagadnienia (CP) sprowadza się do rozwiązania równań Eulera-Lagranga. W pracy [17] podano algorytm numeryczny do obliczenia zagadnienia (CP) oparty na metodzie Newtona-Raphsona, policzono przykłady 2-wymiarowego zagadnienia dla jednoosiowych ferromagnetyków, tzn. takich, które mają jeden łatwy kierunek namagnesowania. Do nich należą kryształy heksagonalne, romboedryczne oraz tetragonalne z dodatnią anizotropią (por.[29]).

W zagadnieniu (CP) zrelaksowanym przez uwypuklenie oscylacje ciągów minimalizujących nie mogą być zaobserwowane, ponieważ gubimy informację o mikrostrukturze. Rozwiązanie zagadnienia (CP) opisuje poziom mezoskopowy, uśredniony, w którym możliwe gładkie pole  $\mathbf{m}$  jest poszukiwane.

Informację o mikrostrukturze można odzyskać przy pomocy miar Younga. Na przykład, dla jednoosiowego ferromagnetyka miarą Younga stowarzyszoną z ciągiem minimalizującym zagadnienia (P) jest (zob.[24]):

$$\begin{aligned} v_x &= \lambda(\mathbf{m}(\mathbf{x})) \delta_{\mathbf{m}^+(\mathbf{m}(\mathbf{x}))} + (1 - \lambda(\mathbf{m}(\mathbf{x}))) \delta_{\mathbf{m}^-(\mathbf{m}(\mathbf{x}))}, \\ \mathbf{m}^{\pm}(\mathbf{m}(\mathbf{x})) &:= \pm \left(1 - (\mathbf{m}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{\perp})^2\right)^{1/2} \mathbf{e} + (\mathbf{m}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{\perp}) \mathbf{e}_{\perp}, \\ \lambda(\mathbf{m}(\mathbf{x})) &:= \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}}{2 \left(1 - (\mathbf{m}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{\perp})^2\right)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

gdzie  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^2$  jest zgodne z osią łatwego namagnesowania,  $\lambda$  - udział objętościowy. Można znaleźć miarę Younga na etapie obliczeniowym, korzystając z równości (4.12) i tym samym dostać informację o mikrostrukturze. W pracach [58,59] pokazano przykłady numerycznego obliczenia mikrostruktury ferromagnetyka. W danej pracy pokażemy przykład obliczenia mikrostruktury magnetycznej jednoosiowego ferromagnetyka, rozwiązując zagadnienie minimalizacji energii zrelaksowanej przy pomocy miar Younga.

## 4.2 Relaksacja problemu (P) z wykorzystaniem miar Younga

Rozszerzamy klasę rozwiązań zagadnienia, które przy zastosowaniu metody bezpośredniej wykazuje oscylacje ciągów minimalizujących, do pojęcia „rozwiązania w sensie miary”. W przypadku zagadnienia związanego z mikromagnetykami będziemy mówić o *magnetyzacji w sensie miary*. Stosując definicje miary Younga, mamy: dla ciągu  $\mathbf{m}^k$  równomiernie

ograniczonego w  $L^\infty(\Omega)$  istnieje rodzina miar probabilistycznych  $\{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  oraz podciąg (tak samo nazywany)  $\mathbf{m}^k$  taki, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{m}^k(\mathbf{x}), \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\lambda, \mathbf{x}) d\nu_x(\lambda) d\mathbf{x}, \quad (4.13)$$

dla każdej funkcji  $\psi$  ciągłej względem  $\lambda$ , mierzalnej po  $\mathbf{x}$ .

Przy takim podejściu zakładamy, że oscylacje ciągów minimalizujących  $\mathbf{m}^k$  zachodzą na bardzo drobnej skali. W analizie problemu ważne są tylko kierunki wektorów namagnesowania oraz względne udziały objętościowe obszarów - domen magnetycznych, w których te kierunki są stałe. Kierunki należą do nośnika miary, a względne udziały objętościowe są wagami miary.

Niech  $\mathbf{m}^k$  będzie ciągiem wektorów magnetyzacji, a  $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$  niech będzie sparametryzowaną miarą stowarzyszoną z tym ciągiem. Ponieważ  $\mathbf{m}^k$  przyjmuje swoje wartości na jednostkowej sferze

$$S = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y}| = 1\}, \quad (4.14)$$

więc nośnik  $\nu_x$  zawarty jest w  $S$  dla prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Korzystając z (4.13) funkcję energii anizotropii  $\int_{\Omega} \phi(\mathbf{m}) d\mathbf{x}$  (por. (4.2)) zapiszemy w postaci:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{m}^k) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\lambda) d\nu_x(\lambda) d\mathbf{x} \quad (4.15)$$

Z drugiej strony, jeżeli

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lambda d\nu_x(\lambda), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{to, korzystając z (4.13):} \quad \mathbf{m}^k &\rightharpoonup \mathbf{m} \quad \text{w } L^\infty(\Omega), \end{aligned} \quad (4.16)$$

graniczna wartość energii zewnętrznej (por. (4.2)) jest równa  $-\int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} d\mathbf{x}$ .

Jednak sprawa jest bardziej skomplikowana przy przejściu do granicy z energią magnetostatyczną  $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}$  (por. (4.2)) przy  $k \rightarrow \infty$  dlatego, że magnetyzacja  $\mathbf{m}$  i potencjał  $u$  jest związane są przez relację  $\operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m}\chi_{\Omega}) = 0$ . Poniższe twierdzenie wyjaśnia sprawę przejścia do granicy w energii magnetostatycznej.

**Twierdzenie 4.1.** (Pedregal [53]). Dla ciągu magnetyzacji  $\{\mathbf{m}^k\}$ ,  $k \in N$  takiego, że  $\{\operatorname{div} \mathbf{m}^k\}$  jest zbiorem zwartym w  $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^n)$  mamy

$$u^k \rightarrow u \quad (\text{silnie}) \quad \text{w } H^1(\mathbb{R}^n), \quad (4.17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-\nabla u^k + \mathbf{m}^k \chi_\Omega) &= 0 \quad \text{w } H^{-1}(\mathbb{R}^n), \\ \mathbf{m}^k &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{m} \quad \text{w } L^\infty(\Omega), \quad \text{słabo-*,} \\ \operatorname{div}(-\nabla u + \mathbf{m} \chi_\Omega) &= 0 \quad \text{w } H^{-1}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (4.18)$$

W szczególności, granica energii magnetostaticznej jest osiągalna gdy namagnesowanie  $\mathbf{m}$  jest słabą granicą  $\mathbf{m}^k$  przy  $k \rightarrow \infty$ , ponieważ  $\{\operatorname{div} \mathbf{m}^k\}$  jest zbiorem zwartym w  $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

Rozpatrzmy definicję magnetyzacji w sensie miary przez rodzinę miar probabilistycznych z nośnikiem na jednostkowej sferze  $S$  dla prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \Omega$  oraz takiej, która może być generowana przez ciąg magnetyzacji klasycznej  $\mathbf{m}^k$ , dla której jest spełniony warunek:  $\{\operatorname{div} \mathbf{m}^k\}$  jest zbiorem zwartym w  $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Dla takiej uogólnionej magnetyzacji  $\nu = \{\nu_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \Omega}$  definiujemy energię całkowitą następująco:

$$\bar{E}(\nu) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda) d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m} d\mathbf{x}, \quad (4.19)$$

gdzie  $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda)$  i zachodzi  $\operatorname{div}(-\nabla u + \chi_\Omega \mathbf{m}) = 0$ , w  $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ .

Ciąg  $\{\operatorname{div} \mathbf{m}^k\}$  jest zbiorem zwartym w  $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$  oraz

$$\bar{E}(\nu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{E}(\mathbf{m}^k),$$

zgodnie z twierdzeniem 4.1. Chcemy osłabić warunek nałożony na dywergencję  $\{\operatorname{div} \mathbf{m}^k\}$ : ponieważ  $\nu = \{\nu_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \Omega}$  jest miarą probabilistyczną związaną z ciągiem magnetyzacji  $\{\mathbf{m}^k\}$ , to korzystając ze słabej ciągłości odwzorowania rozwiązań dla równania (4.4) i wypukłości funkcji  $|\nabla u|^2$  mamy:

$$\bar{E}(\nu) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \bar{E}(\mathbf{m}^k). \quad (4.20)$$

Rozpatrzmy zbiór funkcji dopuszczalnych

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}} &:= \{\nu = \{\nu_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in \Omega} : \nu_{\mathbf{x}} \text{ jest miarą probabilistyczną} \\ &\text{oraz } \operatorname{supp} \nu_{\mathbf{x}} \subset S^{n-1} \text{ dla p.k. } \mathbf{x} \in \Omega\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wówczas możemy sformułować zagadnienie zrelaksowane problemu (P):  
znaleźć:

$$(RP) \quad \min \{ \bar{E}(v) \mid v \in \bar{\mathcal{A}} \}, \quad (4.22)$$

gdzie  $\mathbf{m}(x) = \int_{S^{n-1}} \lambda v_x(d\lambda)$ , dla prawie wszystkich  $x \in \Omega$ , oraz

$$\operatorname{div}(-\nabla u + \chi_\Omega \mathbf{m}) = 0 \quad \text{w } W^{-1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Istnienie rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia wynika z sekwencyjnej słabej\* półciągłości dolnej  $\bar{E}$  oraz ze słabej\* sekwencyjnej kompaktności zbioru  $\bar{\mathcal{A}}$ , [53].

W pracy [52] pokazano, że

$$\min_v \bar{E}(v) = \min_{\mathbf{m}} RE(\mathbf{m}) = \inf_{\mathbf{m}} E(\mathbf{m}). \quad (4.23)$$

Oznacza to, że rozwiązanie zagadnienia zrelaksowanego przez miary Younga (RP) lub uwypuklenie (CP) będzie rozwiązaniem zagadnienia (P).

Korzystając z zagadnienia zrelaksowanego przez miary Younga znajdujemy magnetyzację  $\mathbf{m}$  w punkcie makroskopowym  $x \in \Omega$  jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej o zadanej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa. Wynik ten można zinterpretować jako pojawienie się na mikroskali domen o różnych kierunkach namagnesowania. Udział objętościowy jednakowo zorientowanych domen określony jest przez intensywności miar Diraca, zaś orientacja tych domen dana jest przez punkty (zadane punkty na sferze) koncentracji tych miar.

### **4.3. Numeryczna dyskretyzacja zagadnienia mikromagnetyzmu zrelaksowanego przy pomocy miar Younga**

Stosując analizę numeryczną lepiej jest korzystać z relaksacji zagadnienia (P) przez miary Younga, a nie uwypuklenia. Wynika to z dwóch powodów:

1) uwypuklając funkcję gęstości energii  $\phi$  gubimy mikrostrukturę, którą można „odzyskać” dopiero w wyniku obróbki otrzymanych danych,

2) zagadnienie (CP) jest ograniczone do przypadków, kiedy funkcja  $\phi$  jest znana explicite, co nie zawsze jest praktycznie możliwe. Na przykład, dla funkcji

$$\phi(\mathbf{m}) = c_1 m_1^2 + c_2 m_1^4, \quad c_1, c_2 > 0,$$

nie znaleziono dotychczas uwypuklenia [24]. W takich przypadkach mówimy o rozwiązaniu zagadnienia (P) w sensie miar Younga, (zob. [17,18,19,31,36,37,38,52,54,58, 61]).

Do rozwiązywania zrelaksowanych przy pomocy miary Younga zagadnień związanych z mikromagnetykami szeroko wykorzystane są metody numeryczne. Po raz

pierwszy numeryczną aproksymację takich zagadnień zaproponował Kruzik [38]. Użył on regularnej triangulacji obszaru  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  oraz trzy-punktowych miar Younga, stałych na każdym elemencie. Później Kruzik i Prohl [37] zaproponowali i przeanalizowali uzgodnioną metodę elementów skończonych bazującą na aktywnej strategii efektywnego wyboru dyskretnego rozwiązania uogólnionego zagadnienia minimalizacji. Przy tym była wykorzystana tzw. wielopunktowa miara Younga, której nośnik  $S^{n-1}$  jest związany z triangulacją obszaru  $\mathbb{R}^d$ . W pracy [37] zagadnienie (P) sprowadza się do zagadnienia optymalizacyjnego programowania kwadratowo-liniowego.

Podstawy matematyczne metod numerycznych do rozwiązania zagadnień mikromagnetyzmu stacjonarnego zostały podane w pracy Luskina, Ma [48], w której dyskretyzację numeryczną wykonano używając kawałkami-stałych funkcji namagnesowania. Dla obszaru  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  badamy

$$\min_{\mu_h \in \mathcal{A}_h} E(\mu_h), \quad (4.24)$$

gdzie  $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$  wybieramy następująco:

$$\mathcal{A}_h = \left\{ \mu_h \in \mathcal{A}: \mu_h|_K \in [P_0(K)]^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \quad (4.25)$$

dla triangulacji kartezjańskiej  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^c$ , która jest powiązana z łatwą osią namagnesowania ferromagnetyka i kawałkami stałym namagnesowaniem  $m_h|_{K \in \mathcal{T}} \in [P_0(K)]^2$ . Głównym ograniczeniem takiego podejścia jest warunek powiązania triangulacji  $\mathcal{T}^c$  z osią łatwego namagnesowania  $e \in \mathbb{R}^d$ . Dla zwiększenia użyteczności analizy numerycznej różni autorzy proponują swoje schematy i algorytmy, wykorzystując dyskretyzowane namagnesowania z różną dokładnością. Takie algorytmy dla rozwiązań zagadnień dotyczących jednoosiowych oraz regularnych ferromagnetyków znajdują się w pracach Kruzika, Prohla [37,59], gdzie przy pomocy metody bezpośredniej zostały zbudowane adaptatywne algorytmy dla obliczenia struktury magnetycznej. Słabą cechą takiego podejścia jest złożoność obliczeniowa oraz możliwość pojawiania się minimum lokalnego i nietrywialnych rozwiązań. We wszystkich pracach [17,24,36,37,38,48, 52,58,89] dotyczących numerycznego obliczenia zagadnień związanych z mikromagnetykami zależność namagnesowania  $\mathbf{m}$  i potencjału magnetycznego  $u_m$  podana została przez równanie Maxwella. Dla przypadku dwuwymiarowego to równanie jest rozwiązywane jawnie przy pomocy formuł Greena. Dla trójwymiarowego zagadnienia rozwiązywania równania Maxwella z wykorzystaniem sztucznych warunków brzegowych znajduje się w [72]. W pracy do rozwiązania



numerycznego zagadnienia zrelaksowanego przez miary Younga, będziemy stosować dyskretyzację zaproponowaną w [59].

### 4.3.1. Dyskretyzacja zagadnienia przy pomocy uzgodnionej metody elementów skończonych.

Rozważymy uzgodnioną metodę elementów skończonych dla zagadnienia mikromagnetyzmu zrelaksowanego przez miarę Younga. Korzystamy z definicji i głównych rezultatów prac Kruzika i Prohla [37,59].

Zakładamy, że funkcja  $h(\mathbf{x}, \mathbf{A})$  jest taka, że  $h(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{A})$  dla prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \Omega$  oraz dla wszystkich  $\mathbf{A} \in S^{n-1}$ , gdzie funkcje  $g \in L^1(\Omega)$  i  $f \in C(S^{n-1})$ .

Niech  $T_{d_1}^1$  będzie jednorodną triangulacją obszaru  $\Omega$ , rozmiary elementów której nie przekraczają  $d_1 > 0$ . Jeżeli  $\tilde{d}_1 < d_1$ , wtedy mamy siatkę  $T_{\tilde{d}_1}^1 \subset T_{d_1}^1$ , tzn.  $T_{\tilde{d}_1}^1$  jest drobniejsza niż  $T_{d_1}^1$ . Analogicznie zdefiniujemy inną triangulację  $T_{d_2}^2$  na  $S^{n-1}$ , której elementy nie przekraczają  $d_2$ . Tak samo mamy, że  $T_{\tilde{d}_2}^2$  jest drobniejszym rozbiem niż  $T_{d_2}^2$ . Wtedy można otrzymać triangulację  $T_{\mathbf{d}} = T_{d_1}^1 \times T_{d_2}^2$  na obszarze  $\Omega \times S^{n-1}$  z rozbiem  $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$

Następnie określamy operator  $P_{d_1}^1 : L^1(\Omega; C(S^{n-1})) \rightarrow L^1(\Omega; C(S^{n-1}))$ :

$$[P_{d_1}^1 h](\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \frac{1}{|K|} \int_K h(\mathbf{x}, \mathbf{A}) d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in K \in T_{d_1}^1, \quad (4.26)$$

$[P_{d_1}^2 h](\mathbf{x}, \cdot)$  jest operatorem, który każdej funkcji  $h(\mathbf{x}, \cdot)$  przyporządkowuje jej kawałkami afiniczną interpolację

$$[P_{d_2}^2 h](\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{L_{d_2}} h(\mathbf{x}, \mathbf{A}_i) v_i(\mathbf{A}), \quad (4.27)$$

gdzie funkcje bazy  $v_i$  są nieujemne, spełniające warunek

$$\sum_{i=1}^{L_{d_2}} v_i(\mathbf{A}) = 1 \quad (4.28)$$

dla wszystkich  $\mathbf{A} \in S^{n-1}$ , oraz  $L_{d_2} = \mathcal{O}(d_2^{1-n})$ .

Konstruujemy operator

$$P_{\mathbf{d}} = P_{(d_1, d_2)} = P_{d_1}^1 P_{d_2}^2 = P_{d_2}^2 P_{d_1}^1 \quad (4.29)$$

taki, który prowadzi do następującej uzgodnionej aproksymacji: na obszarze  $\Omega$  jest ona kawałkami stała zaś na sferze  $S^{n-1}$  jest kawałkami afiniczna. Zgodnie z (4.21) mamy następujący zbiór funkcji dopuszczalnych

$$\bar{\mathcal{A}} := \left\{ v = \{v_x\}_{x \in \Omega} : v_x \text{ jest miarą probabilistyczną oraz } \text{supp } v_x \subset S^{n-1} \text{ dla p.k. } x \in \Omega \right\}. \quad (4.30)$$

Operator sprzężony  $P_h^* : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}$  jest zdefiniowany następująco

$$\langle v, P_d h \rangle = \langle P_d^* v, h \rangle \quad (4.31)$$

oraz  $\bar{\mathcal{A}}_d = P_d^* \bar{\mathcal{A}} \subset \bar{\mathcal{A}}$ .

Roubicek [61] pokazał, że dla  $\forall h \in L^1(\Omega; C(S^{n-1}))$  ma miejsce równość

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|P_d h - h\| = 0 \quad (4.32)$$

Zatem

$$\left| \langle v - P_d^* v, h \rangle \right| = \left| \langle v, h - P_d h \rangle \right| \leq \|v\|_{L^1(\Omega, C(S^{n-1}))} \|h - P_d h\|_{L^1(\Omega, C(S^{n-1}))} \rightarrow 0, \quad (4.33)$$

dla  $d \rightarrow 0$ , a więc  $\lim_{d \rightarrow 0} P_d^* v = v$  (stała\*) na  $L^1(\Omega; C(S^{n-1}))^*$ .

W pracy Roubicka [61] również pokazano, że  $v \in \bar{\mathcal{A}}_h$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$v_x = \sum_{i=1}^{L_{d_1}} \lambda_i(x) \delta_{A_i}, \quad x \in \Omega \quad (4.34)$$

przy tym

$$\lambda_i : \Omega \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{i=1}^{L_{d_1}} \lambda_i = 1,$$

oraz  $\lambda_i|_{K_i} \equiv \lambda_{K,i}$  są kawałkami stałe dla siatki  $T_{d_1}^1$  dla każdego  $1 \leq i \leq L_{d_1}$ , oraz  $A_i \in S^{n-1}$  dla każdego  $1 \leq i \leq L_{d_1}$ . Tak więc mamy zbiór funkcji dopuszczalnych dyskretyzowany:

$$\bar{\mathcal{A}}_d := \left\{ v^d = \{v_K^d\}_{K \in T_{d_1}^1}, v_K^d = \sum_{i=1}^{L_{d_1}} \lambda_{K,i} \delta_{A_i}, \quad \forall K \in T_{d_1}^1 \right\}. \quad (4.35)$$

Teraz zrelaksowane zagadnienia w dyskretnym przypadku zapiszemy jako:

$$(\mathbf{R}^h\mathbf{P}) \quad \min_{\mu^d \in \bar{\mathcal{A}}_d} \left\{ \int_{\Omega} \int_{S^{n-1}} \varphi(\mathbf{A}) \mu^d(d\mathbf{A}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{m_d}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}_d d\mathbf{x} \right\}, \quad (4.36)$$

gdzie

$$\mathbf{m}_d|_{K \in T_{d_1}^1} = \int_{S^{n-1}} \mathbf{A} \mu_K^d(d\mathbf{A}),$$

oraz spełnione jest równanie

$$\operatorname{div}(-\nabla u_d + \chi_\Omega \mathbf{m}_d) = 0 \text{ w } \mathbb{R}^n.$$

Zagadnienie  $(R^dP)$  jest dyskretyzacją jednorodną zagadnienia  $(RP)$ . Poprawność postawienia tego zagadnienia i jego własności aproksymacyjne są rozpatrywane w pracy [38].

**Lemat 4.1.** Zagadnienie  $(R^dP)$  ma rozwiązanie w  $\overline{\mathcal{A}}_d$ .

**Lemat 4.2.** Niech  $\phi \in C^0(S^{n-1})$ ,  $\mathbf{H} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Jeżeli  $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \rightarrow 0$  wraz z  $d_2/d_1^{n/2} \rightarrow 0$ , to

$$\min_{\mathcal{A}_d} (R^dP) \rightarrow \min_{\mathcal{A}} (RP). \quad (4.37)$$

Następny wynik o zbieżności jest ważny dla wystarczająco gładkich wielkości takich jak rozwiązanie  $\mathbf{m}$ .

**Wniosek 4.1.** Niech  $\phi$  będzie funkcją Lipschitzowską,  $\mathbf{H} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , a wektor namagnesowania  $\mathbf{m} \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Rozwiązanie zagadnienia  $(R^dP)$  oznaczamy jako  $v^d = \arg \min_{\overline{\mathcal{A}}_d} \overline{E}$ , gdzie  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ . Oprócz tego, rozwiązanie zagadnienia  $(RP)$  oznaczono jako  $v = \arg \min_{\overline{\mathcal{A}}} \overline{E}$ . Wtedy istnieje stała  $C > 0$  nie zależna od  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$  taka, że

$$|\overline{E}(v) - E(v^d)| \leq C \left\{ d_1 + d_2 + \frac{d_2}{d_1^{n/2}} \right\}. \quad (4.38)$$

Dowód wynika z oszacowania w dowodzie lematu 4.2, z gładkości  $\phi$  i  $\mathbf{H}$  oraz z standardowych wyników aproksymacji dla odwzorowań Sobolewa w  $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  [20].

### 4.3.2. Schemat $(R^{d'} P_Q)_{j \in \mathbb{N}}$ na podstawie zbioru aktywnego.

Zagadnienie  $(R^dP)$  jest wypukłym zagadnieniem optymalizacji, w którym poszukiwane są  $\{\lambda_{K,j}\}$ . Zagadnienie to ma liniowo-kwadratową strukturę oraz liczba niewiadomych jest rzędu  $O((d_1^n))$ , co oznacza, że niewiadomych jest dużo więcej, niż elementów podziału  $T_{d_1}^1$ . Oprócz tego, z wniosku 4.1 wynika konieczność wykorzystania dużej liczby punktów na każdym elemencie  $K \in T_{d_1}^1$  po to, żeby dostać sensowną aproksymację minimum energii. Wobec tego ma sens wykorzystanie metody adaptacyjnej, zaproponowanej w [37] na podstawie tak zwanego zbioru aktywnego, tzn. niedużego zbioru pewnych punktów na każdym elemencie  $K \in T_{d_1}^1$ , które są wykorzystywane do poszukiwania rozwiązania. Metoda

ta bazuje na optymalnym warunku, który po raz pierwszy był wykorzystany w pracy [19] dla wariacyjnego zagadnienia skalarnego albo jednowymiarowego. Do rozwiązania zagadnienia dyskretnego zrelaksowanego przez miary Younga zwykle wykorzystuje się niewielką ilość punktów (czasami nazywanych atomami). Twierdzenie Caratheodory'ego [36] prowadzi do hipotezy, że jeżeli istnieje rozwiązanie  $\nu \in \overline{\mathcal{A}}$  zagadnienia (RP) dla prawie każdego  $\mathbf{x} \in \Omega$ , wtedy miara  $\nu_{\mathbf{x}}$  skupiona jest nie więcej jak w  $(n+1)$  punktach. Zasada maksimum Weierstrass'a uzasadnia to.

**Lemat 4.3.** (Zasada maksimum Weierstrass'a) [37]. Niech  $\mathbf{H} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,

$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą, oraz niech  $(\nu^d, \mathbf{m}_d) \in \overline{\mathcal{A}}_d \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  będzie

rozwiązaniem zagadnienia  $(R^d P)$ . Wtedy

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{H}_{\ell_d}^d(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \nu_K^d(d\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{A} \in S^{n-1}} \mathcal{H}_{\ell_d}^d(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{x} \in K \in \mathcal{I}_{d_1}^1, \quad (4.39)$$

gdzie Hamiltonian z definicji ma postać

$$\mathcal{H}_{\ell_d}^d := P_d(\ell_d \otimes \mathbf{id} - \phi), \quad (4.40)$$

dla  $\ell_d = \mathbf{H} - \nabla \mathbf{u}_d$ , oraz  $\mathbf{u}_d$  jest rozwiązaniem równania  $\operatorname{div}(-\nabla u + \chi_{\Omega} \mathbf{m}) = 0$  w  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemat 4.4.**[37] Niech  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$  będzie parametrem dyskretyzacji, niech  $\nu^{(d_1, 0)} \in \overline{\mathcal{A}}$  będzie rozwiązaniem zagadnienia  $(R^{(d_1, 0)} P)$ , oraz niech  $\nu^d \in \overline{\mathcal{A}}_d$  będzie rozwiązaniem zagadnienia

$(R^d P)$ . Niech  $\mathbf{m}_{(d_1, 0)} = \nu^{(d_1, 0)} \bullet \mathbf{id}$ , oraz  $\mathbf{m}_d = \nu^d \bullet \mathbf{id}$ , z odpowiednimi rozwiązaniami  $u_{(d_1, 0)}$  i

$u_d$  równania Poissona. Wtedy  $\lim_{d_2 \rightarrow 0} \ell_{(d_1, d_2)} = \ell_{(d_1, 0)}$  prawie wszędzie w  $\Omega$ , gdzie  $\ell_d$  oraz  $\ell_{(d_1, 0)}$

są mnożnikami Lagrange'a odpowiednio dla zagadnień  $(R^d P)$  i  $(R^{(d_1, 0)} P)$ .

Podobnie jak w [61], zdefiniujemy następująco nośnik miary Younga  $\nu \in \overline{\mathcal{A}}$ :

$$\operatorname{supp} \nu = \{(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \in \Omega \times S^{n-1}; \mathbf{A} \in \operatorname{supp} \nu_{\mathbf{x}}\} \quad (4.41)$$

oraz zdefiniujemy inne zagadnienie, nazywane  $(R^d P_Q)$ , w którym zawężamy nośnik miary

Younga z  $\overline{\mathcal{A}}_d$  do zbioru  $Q \subset \Omega \times S^{n-1}$ , gdzie zbiór  $Q$  jest złożony z wybranych punktów  $\{\mathbf{A}_i\}_K$  na każdym elemencie  $K \in \mathcal{T}_{d_1}^1$ , patrz (4.43). Zgodnie z [19], mamy zrelaksowane

zagadnienie  $(R^d P_Q)$  dyskretyzowane przy użyciu aktywnego zbioru  $Q$ :

$$(R^d P_Q) \quad \min_{\mu^d \in \overline{\mathcal{A}}_d} \left\{ \int_{\Omega} \int_{S^{n-1}} \varphi(\mathbf{A}) \mu^d(d\mathbf{A}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{\mathbf{m}_d}|^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{m}_d d\mathbf{x} \right\}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{m}_d \Big|_{K \in \mathcal{T}_d^1} = \int_{S^{n-1}} \mathbf{A} \mu_K^d(d\mathbf{A}), \text{ dla } \text{supp } \mu^d \subset Q,$$

$$\text{div}(-\nabla u_d + \chi_\Omega \mathbf{m}_d) = 0 \text{ w } \mathbb{R}^n.$$

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  definiujemy następujący zbiór:

$$Q = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \in \Omega \times S^{n-1}; h(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \geq \max_{\mathbf{B} \in S^{n-1}} h(\mathbf{x}, \mathbf{B}) - \varepsilon \right\}. \quad (4.43)$$

**Lemat 4.5.** [37] Niech zbiór  $Q \subset \Omega \times S^{n-1}$  będzie taki, że

$$\left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \in \Omega \times S^{n-1}; \mathbf{A} \text{ jest węzłem siatki rozbicia } T_{d_2}^1 \right\} \subset Q \quad (4.44)$$

$$\mathcal{H}_\ell^d(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \max_{\tilde{\mathbf{A}} \in S^{n-1}} \mathcal{H}_\ell^d(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{A}}) \Big\} \subset Q,$$

oraz niech  $\ell_d$  będzie odpowiednim mnożnikiem Lagrange'a zagadnienia  $(R^d P)$ .

Wtedy każde rozwiązanie zagadnienia  $(R^d P_Q)$  jest rozwiązaniem zagadnienia  $(R^d P)$ .

Następujące lematy dotyczą zastosowania aproksymacji hamiltonianu w schemacie aktywnego doboru.

**Lemat 4.6.** [37] Niech  $\|h - \mathcal{H}_\ell^d\|_{L^\infty(\Omega, \Sigma)} \leq \varepsilon/2$  dla pewnych rozwiązań zagadnienia  $(R^d P)$  z mnożnikiem Lagrange'a  $\ell_d$  i dla pewnych  $\Sigma \subset S^{n-1}$  takich, że dla prawie wszystkich  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\arg \max \mathcal{H}_\ell^d(\mathbf{x}, \cdot) \Big| \cup \arg \max h(\mathbf{x}, \cdot) \subset \Sigma. \quad (4.45)$$

Niech zbiór  $Q$  będzie zdefiniowany jak wcześniej. Wtedy każde rozwiązanie zagadnienia  $(R^d P_Q)$  będzie rozwiązaniem zagadnienia  $(R^d P)$ .

**Lemat 4.7.** [37] Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje takie  $\tilde{d}_2 > 0$ , że jeżeli  $d_2 < \tilde{d}_2$ , to

$$\left\| \mathcal{H}_{\ell_{(d_1, d_2)}}^{(d_1, d_2)} - \mathcal{H}_{\ell_{(d_1, \tilde{d}_2)}}^{(d_1, \tilde{d}_2)} \right\|_{L^\infty(\Omega \times S^{n-1})} \leq \varepsilon/2 \quad (4.46)$$

**Lemat 4.8.** [37] Niech

$$Q = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{A}) \in \Omega \times S^{n-1}; \mathcal{H}_{\ell_s^b}^b(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \geq \max_{\tilde{\mathbf{A}} \in S^{n-1}} \mathcal{H}_{\ell_s^b}^b(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{A}}) - \varepsilon \right\}. \quad (4.47)$$

Dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\mathbf{b} = (d_1, \tilde{d}_2)$  takie, że dla wszystkich  $d_2 > \tilde{d}_2$  każde rozwiązanie zagadnienia  $(R^d P_Q)$  z parametrem dyskretyzacji  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$  jest rozwiązaniem zagadnienia  $(R^d P)$ .

Warunek optymalny z lematu 4.3 sprawdzamy kolejno dla każdego elementu  $K \in T_{d_1}^1$  po to, by w procesie minimalizacji otrzymywać punkty aktywne na każdym z tych elementów. Takie działanie prowadzi do tak zwanego *schematu*  $\left\{ \left( R^{d^j} P_Q \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}$  *na podstawie zbioru aktywnego*: wybieramy ciąg  $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ , początkowy parametr dyskretyzacji  $\mathbf{d}^1 = (d_1^1, d_2^1)$ , oraz kryteria zatrzymania  $TOL > 0$ . Dalej oznaczamy  $v^j \in \bar{A}_{d^j}$  jako rozwiązanie zagadnienia  $(R^{d^j} P_Q)$  dla każdego  $\mathbf{d}^j = (d_1^j, 2^{j-1} d_2^1)$  oraz  $\mathcal{H}^j := \mathcal{H}_{\varepsilon_j}^{d^j}$  z mnożnikami Lagrange'a  $\ell_{d^j}$  odpowiadającym  $v^j$ .

**Algorytm 4.1.**[59]

1. Zadać  $j := 1, h := 0, \varepsilon := \varepsilon_j$ .
2. Zbudować rozbitcie  $T_{d_1}^1$  i obliczyć  $Q \subset T_{d_1}^1$ .
3. Obliczyć  $v^j := \arg \min_{\bar{A}_{d^j}} (R^{d^j} P_Q)$ .
4. Sprawdzić czy zachodzi zasada maksimum dla  $v^j$ , jeżeli tak, wtedy iść do punktu 6, jeżeli nie- kontynuować.
5. Zwiększyć wskaźnik tolerancyjny ( tzn. ilość rozpatrywanych atomów) zakładając  $\varepsilon := 2\varepsilon$  i iść do punktu 2.
6. Jeżeli  $j = 1$ , wtedy iść do punktu 8., jeżeli nie - kontynuować.
7. Jeżeli spełniona jest nierówność  $\bar{E}(v^{j-1}) - \bar{E}(v^j) < TOL$ , wtedy koniec, jeżeli nie, to kontynuujemy.
8. Położyć  $j := j + 1$ , oraz zbiór  $h: \mathcal{H}^{j-1}, \mathbf{d}^j := (d_1, d_2^{j-1}/2), \varepsilon := \varepsilon_j$ , iść do punktu 2.

**Uwaga 4.1.** Liczba  $\varepsilon > 0$  jest parametrem dopasowania w schemacie iteratywnym. Parametr ten jest dobierany w zależności od parametru dyskretyzacji podstawowego  $d_1$  (por. lemat 4.8). Mała liczba  $\varepsilon$  ogranicza wzbogacenie  $Q$  na  $j$ -tym kroku iteracyjnym.

**Uwaga 4.2.** Porównanie zasady maksimum Weierstrassa dla zbioru  $Q$ , który jest złożony z elementów i punktów rozbitcia  $T_{d^j}$  oznacza rozwiązanie dyskretnego zagadnienia optymalizacyjnego dla każdego  $K \in T_{d_1}^1$ .

Na każdym kroku  $j \in \mathbb{N}$  w zagadnieniu  $\left\{ \left( R^{d^j} P_Q \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}$  zbiór atomów aktywnych na każdym elemencie  $K \in \mathcal{T}_{d_1}^1$  jest złożony z węzłów, które są wydzielone z rozbicia  $\mathcal{T}_{d_2}^2$ . W kroku 4 algorytmu 4.1, który zabezpiecza optymalność zbioru  $Q$  dla istniejącej triangulacji  $\mathcal{T}_{d^j}$ , tzn.

$$v^j := \arg \min_{\mathcal{A}_{d^j}} \left( R^{d^j} P_Q \right) = \arg \min_{\mathcal{A}_{d^j}} \left( R^{d^j} P \right) \quad (4.48)$$

Korzystamy z lematu 4.3. dla potwierdzenia następującego rezultatu.

**Wniosek 4.2.** [59] Niech zachodzą warunki z wniosku 4.1. Wtedy w  $j$ -tym kroku przedstawionego algorytmu mamy dla  $v^j := \arg \min_{\mathcal{A}_{d^j}} \left( R^{d^j} P_Q \right)$

$$\bar{E}(v^{j-1}) - \bar{E}(v^j) \leq C \left\{ d_1^1 + 2^{1-j} d_2^1 + \frac{2^{1-j} d_2^1}{(d_1^1)^{n/2}} \right\} \quad (4.49)$$

W następnym rozdziale pokażemy przykład numeryczny rozwiązania dwuwymiarowego zagadnienia mikromagnetyzmu dla magnetyków nieodkształcalnych zrelaksowanego przez miary Younga.

## Rozdział 5.

### Przykład numeryczny.

Rozpatrzmy przykład dwuwymiarowego zagadnienia mikromagnetyzmu przy założeniu, że ferromagnetyk ma jedną oś łatwego namagnesowania. Energia anizotropii magnetycznej ferromagnetyka zadana jest przy pomocy funkcji (por.(2.17)):

$$\varphi(\mathbf{m}) = 10^{-2} \left( m_1^2 + (m_2^2 - 1)^2 \right). \quad (5.1)$$

Taka postać funkcji  $\varphi$  była rozważana w pracy [48]. W tym przypadku potencjał posiada dwie studnie w  $(0,1)$  i  $(0,-1)$ , co oznacza, że  $\varphi(0,1) = \varphi(0,-1) = 0$ . Funkcjonał energii wewnętrznej jest wtedy niewypukły. W tym przypadku również nie znana jest postać dolnego półciągłego uwypuklenia  $\varphi(\mathbf{m})$  (por. rozdział 4.1), a więc nie można poszukiwać minimum funkcyjonału metodą bezpośrednią rachunku wariacyjnego.

Niech obszar  $\Omega = (0,1)^2$ . Przyjmujemy zewnętrzne pole magnetyczne w postaci

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (ax_2(x_2 - 1), bx_2 - c), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (5.2)$$

gdzie  $a = 3.5 \times 10^{-2}$ ,  $b = 2 \times 10^{-3}$ ,  $c = 10^{-3}$ .

Energia całkowita wyraża się wzorem (por.(4.1)):

$$E(\mathbf{m}) = \int_0^1 \int_0^1 \left( 10^{-2} \left( m_1^2 + (m_2^2 - 1)^2 \right) - (ax_2(x_2 - 1)m_1 + (bx_2 - c)m_2) \right) dx_2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_{\mathbf{m}}|^2 dx. \quad (5.3)$$

W celu znalezienia minimum energii danej tym wzorem stosujemy relaksację funkcyjonału przez wprowadzenie miar Younga i dyskretyzację. Stosując dyskretyzację używać będziemy oznaczeń przyjętych w rozdziale 4.3.

Dyskretyzując zagadnienie, przyjmujemy, że  $\mathbf{d} = (N; K)$ . Oznacza to rozbiecie  $\mathcal{T}_{d_1}^1$  które dyskretyzuje obszar  $\Omega$  na  $N$  równych warstw  $T \in \mathcal{T}_{d_1}^1$  dla  $d_1 = N = 6$ , a rozbiecie  $\mathcal{T}_{d_2}^2$  dla  $d_2 = K = 3$  oznacza wybór punktów  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  odpowiadającym kątom  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  na okręgu  $S$ .

Mianowicie, poszukujemy wektora namagnesowania  $\mathbf{m}$  w postaci

$$\mathbf{m} = \int_S \mathbf{A} dv_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}) \quad \text{dla p.w. } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.4)$$

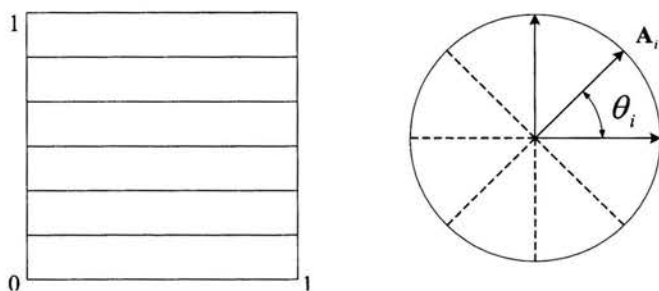
gdzie  $S$  oznacza okrąg jednostkowy, który jest nośnikiem miary Younga.

Stąd



$$dv_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}) = \sum_i^K \lambda_i(\mathbf{x}) \delta_{\lambda_i}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \lambda_i: \Omega \rightarrow [0,1], \quad \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1, \quad (5.5)$$

oraz  $\lambda_i|_T \equiv \lambda_{T,i}$  jest kawałkami stałe na warstwach (patrz rys.5.1)  $T_i \in \mathcal{T}_N^1$  dla każdego  $1 \leq i \leq N$ , oraz  $\mathbf{A}_i \in S$  dla każdego  $1 \leq i \leq K$ .



Rys.5.1. Dyskretyzacja obszaru  $\Omega$  oraz okręgu  $S$  dla dwuwymiarowego zagadnienia.

Parametryzując okrąg  $S$  kątem  $\theta$  możemy (5.4) zapisać jako:

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\theta) dv_{\mathbf{x}}(\theta), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5.6)$$

gdzie

$$dv_{\mathbf{x}}(\theta) = \sum_i^K \lambda_i(\mathbf{x}) \delta_{\lambda_i}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \lambda_i: \Omega \rightarrow [0,1], \quad \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1, \quad (5.7)$$

oraz  $\lambda_i|_T \equiv \lambda_{T,i}$  są kawałkami stałe dla  $1 \leq i \leq K$ ,  $\mathbf{A}_i \in S$  dla każdego  $1 \leq i \leq K$ .

Wektor namagnesowania zapiszemy jako:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{h}}|_{T \in \mathcal{T}_N^1} = \sum_{i=1}^N \lambda_i(\mathbf{x}) (\cos \theta_i, \sin \theta_i) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K \lambda_{ij} (\cos \theta_i, \sin \theta_i), \quad (5.8)$$

gdzie  $\sum_{i=1}^K \lambda_{ij} = 1$  dla każdego  $j = 1, \dots, N$ , oraz  $\lambda_{ij}: \Omega \rightarrow [0,1]$ . Oznaczmy  $\mathbf{m}_{\mathbf{h}}|_T = (m_{1j}; m_{2j})$  na każdej warstwie  $T_j$ , gdzie  $j = 1, \dots, 4$ , wtedy

$$m_{1j} = \sum_{i=1}^K \lambda_{ij} \cos \theta_i, \quad m_{2j} = \sum_{i=1}^K \lambda_{ij} \sin \theta_i. \quad (5.9)$$

W  $j$ -tej warstwie zadajemy miarę Younga skoncentrowaną w  $K$  punktach "i" o różnych intensywności  $\lambda_{ij}$ .

Zapiszemy energię całkowitą  $E$  jako sumę „liniowej”- $E_1$  względem miary Younga, oraz części „kwadratowej”- $E_2$  względem tej miary.

„Liniowy” człon energii całkowitej po dyskretyzacji ma postać:

$$E_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \lambda_{ij} \int_{(i-1)/N}^{i/N} \left( 10^{-2} (\cos^2 \theta_j + \cos^4 \theta_j) - (ax(x-1) \cos \theta_j + (bx-c) \sin \theta_j) \right) dx. \quad (5.10)$$

Rozpatrzmy część  $E_2$  energii całkowitej

$$E_2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_m|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{m}_h \cdot \nabla u_m dx, \quad (5.11)$$

którą aproksymujemy w następujący sposób

$$E_2 = \frac{1}{2} \sum_T \mathbf{m}_T \cdot \langle \nabla u_m \rangle_T. \quad (5.12)$$

Przez  $\langle \cdot \rangle$  rozumiemy uśrednienie po pojedynczej warstwie.

Celem naszym jest wyznaczenie  $\langle \nabla u_m \rangle_T$  przy pomocy przyjętych miar Younga. W tym celu poszukujemy rozwiązania równania Maxwella:

$$\operatorname{div}(-\nabla u_h + \chi_{\Omega} \mathbf{m}_h) = 0 \quad \text{w } \mathbb{R}^2. \quad (5.13)$$

Rozwiązanie w płaskim przypadku wyraża się wzorem:

$$u_h(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \operatorname{div}_y \mathbf{m}(\mathbf{y}) dy = \frac{1}{2\pi} \operatorname{div}_x \int_{\Omega} \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \mathbf{m}(\mathbf{y}) dy \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.14)$$

Całkę po  $\Omega$  zastępujemy sumą po warstwach:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^1} \mathbf{m}_h|_T G_T(\mathbf{x}), \quad (5.15)$$

gdzie

$$G_T(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \ln(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \mathbf{n} dS, \quad (5.16)$$

oraz  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$  jest jednostkowym wektorem normalnym, skierowanym na zewnątrz brzegu obszaru  $\partial T$ .

Obliczamy

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N (m_{1i} G_{1i} + m_{2i} G_{2i})(x_1, x_2), \quad (5.17)$$

gdzie  $G_{1i}$  i  $G_{2i}$  obliczamy z wykorzystaniem całkowania symbolicznego programu „Maple”:

$$\begin{aligned}
 G_{1i} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} dy_2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y_1} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} dy_1 \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \left[ \ln \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - y_2)^2} - \ln \sqrt{(x_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \right] dy_2.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Dokonując zamiany zmiennych  $y_2 - x_2 = v$ ,  $dy_2 = dv$ , mamy:

$$G_{1i} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{i-1}{N}-x_2}^{\frac{i}{N}-x_2} \left[ \ln \sqrt{(x_1 - 1)^2 + v^2} - \ln \sqrt{x_1^2 + v^2} \right] dv. \tag{5.19}$$

Niech  $\int_0^v \ln \sqrt{u^2 + v^2} dv = S(u, v)$ , wtedy

$$\begin{aligned}
 G_{1i} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ S\left(x_1 - 1, \frac{i}{N} - x_2\right) - S\left(x_1 - 1, \frac{i-1}{N} - x_2\right) - S\left(x_1, \frac{i}{N} - x_2\right) \right. \\
 &\quad \left. + S\left(x_1, \frac{i-1}{N} - x_2\right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned}
 G_{2i} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} dy_2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y_2} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} dy_1 = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \left[ \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \left(x_2 - \frac{i}{N}\right)^2} - \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \left(x_2 - \frac{i-1}{N}\right)^2} \right] dy_1 \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} y_1 - x_1 = u \\ dy_1 = du \end{array} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-x_1}^{1-x_1} \left[ \ln \sqrt{\left(x_2 - \frac{i}{N}\right)^2 + u^2} - \ln \sqrt{\left(x_2 - \frac{i-1}{N}\right)^2 + u^2} \right] du \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \left[ S\left(x_2 - \frac{i}{N}, 1 - x_1\right) - S\left(x_2 - \frac{i-1}{N}, -x_1\right) - S\left(x_2 - \frac{i-1}{N}, 1 - x_1\right) + S\left(x_2 - \frac{i-1}{N}, -x_1\right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Wstawiając (5.20) i (5.21) do wzoru(5.15) otrzymujemy jawną zależność  $u_n$  od zmiennych  $(x_1, x_2)$ .

Następnie obliczamy

$$\nabla u_n|_r = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\rangle_r, \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\rangle_T &= \frac{1}{N} \int_0^1 dx_1 \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \sum_j \left( m_{1j} \frac{\partial G_{1j}}{\partial x_1} + m_{2j} \frac{\partial G_{2j}}{\partial x_1} \right) dx_2 = & (5.23) \\
&= \frac{1}{N} \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \left[ \sum_{j=1}^K (m_{1j} G_{1j}(1, x_2) + m_{2j} G_{2j}(1, x_2)) - \sum_{j=1}^K (m_{1j} G_{1j}(0, x_2) + m_{2j} G_{2j}(0, x_2)) \right] dx_2 \\
&= \frac{1}{N} \int_0^1 dx_1 \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_2 = \frac{1}{N} \int_0^1 dx_1 [u(1, x_2) - u(0, x_2)], \\
\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\rangle_T &= \frac{1}{N} \int_0^1 dx_1 \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = \frac{1}{N} \int_0^1 dx_1 \left[ u\left(x, \frac{i}{N}\right) - u\left(x, \frac{i-1}{N}\right) \right]. & (5.24)
\end{aligned}$$

Tutaj  $T$  oznacza  $i$ -tą warstwę podziału,  $i = 1, \dots, N$ .

W opisie procedury numerycznej funkcje  $\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\rangle_i$  i  $\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\rangle_i$  oznaczamy odpowiednio przez  $u1[i]$  i  $u2[i]$ , gdzie  $i$  – jest numerem warstwy (patrz Dodatek1).

Podstawiając (5.9) i (5.22) do (5.12) otrzymujemy

$$E_2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left( m_{i1} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\rangle_i + m_{i2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\rangle_i \right), \quad (5.25)$$

gdzie gradienty na poszczególnych warstwach są funkcjami wektora

$$\mathbf{m} = \left( \sum_{i=1}^K \lambda_j \cos \theta_j, \sum_{i=1}^K \lambda_j \sin \theta_j \right), \quad i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, N. \quad (5.26)$$

Stąd widać, że  $E_2$  jest funkcją kwadratową od  $\lambda_j$ . W celu uproszczenia zapisu nie podajemy tych zależności explicite.

Zatem otrzymujemy zagadnienie minimalizacji funkcjonału

$$\min_{\lambda_j} F(\lambda_j), \quad (5.27)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
F(\lambda_j) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K \lambda_j \int_{\frac{(i-1)}{N}}^{\frac{i}{N}} \left( 10^{-2} (\cos^2 \theta_j + \cos^4 \theta_j) - (ax_2(x_2 - 1) \cos \theta_j + (bx_2 - c) \sin \theta_j) \right) dx_2 \\
&\quad + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \left( m_{i1} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\rangle_i + m_{i2} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\rangle_i \right), & (5.28)
\end{aligned}$$

przy ograniczeniu

$$\sum_{i=1}^K \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} : \Omega \rightarrow [0,1]. \quad (5.29)$$

W procedurze numerycznej  $\lambda_{ij}$  oznaczamy jako  $X[i, j]$ .

Wprowadzając mnożniki Lagrange'a  $L[j]$ ,  $j=1, \dots, N$ , zastępujemy zagadnienie (5.27) następującym zadaniem poszukiwania punktu ekstremalnego funkcjonału:

$$\tilde{F}(\lambda_{ij}, L[j]), \quad (5.30)$$

czyli

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda_{ij}} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial L[j]} = 0,$$

gdzie  $\tilde{F}(\lambda_{ij}, L[j]) = F(\lambda_{ij}) + L[j]$ , oraz  $\lambda_{ij} : \Omega \rightarrow [0,1]$ .

Otrzymaliśmy zagadnienie, w którym funkcjonał jest funkcją kwadratową względem niewiadomych  $\lambda_{ij}$ , a więc również funkcją wypukłą.

Tak więc zagadnienie nieliniowe i niewypukłe dzięki wprowadzeniu miar Younga zostało zastąpione zagadnieniem wypukłym i kwadratowym. Trudność polega jedynie na konieczności wprowadzenia dużej liczby niewiadomych. Aproksymacja przez dyskretyzację odtwarzająca obraz mikrostruktury wymaga drobnej siatki i dostatecznie bogatego zbioru punktów koncentracji miar Younga.

Takie zagadnienie można zapisać jako:

$$\min f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle, \quad (5.31)$$

gdzie  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $1 \leq i \leq N$ , oraz

$$\mathbf{Cx} + \mathbf{d} = 0, \quad (5.32)$$

gdzie  $N$  jest liczbą niewiadomych (w naszym przykładzie jest  $N \times K + N = N(K+1)$  niewiadomych). Tutaj  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  jest macierzą, otrzymaną z obliczenia energii magnetostatycznej  $E_2$ , wektor  $\mathbf{b}$  wyznaczamy z obliczenia  $E_2$ - sumy energii anizotropii magnetycznej oraz energii zewnętrznej.

Numeryczna realizacja zagadnienia w „Maple” podano w Dodatku 1.

Zadajemy w procedurze: >

```
mi6:=proc(N::integer,K,theta::array(1..3),alpha::array(1..3))
```

```
    Ilość warstw, na które podzielono obszar  $\Omega$ :  $N = 6$ .
```

```
    Ilość wybieranych kątów na każdej warstwie:  $K = 3$ .
```

```
    Zadajemy kąty  $\theta_i, i=1,2,3$  na każdej warstwie: theta =  $-\pi/6; 2\pi/3; -2\pi/3$ ,
```

```
alpha =  $-\pi/6; 2\pi/3; -2\pi/3$ .
```

Wybór kątów ma duży wpływ na rozwiązanie. W rozdziale 4.3. znajdowano właściwe kąty dzięki wprowadzeniu do procedury zasady maksimum Weierstrassa. Tutaj przy wyborze różnych kątów wśród rozwiązań szukamy optymalnych, tzn. takich, aby poszukiwane  $\lambda_j$  (w procedurze  $X[i,j]$ ) były dodatnie, oraz aby energia całkowita była minimalna. Tego wyboru dokonujemy porównując rezultaty różnych kombinacji.

Wprowadzamy następujące dane:

```
M:=evalf(eval(mi6(6,3,vector(3,[-Pi/6,2*Pi/3,-
2*Pi/3]),vector(3,[-Pi/6,2*Pi/3,-2*Pi/3])));
evalf(Ec);
eval(X);
```

Wykonując procedurę numeryczną znajdziemy najpierw intensywności  $\lambda_j$ . Zauważmy, że wielkości te muszą być z przedziału  $[0,1]$  oraz suma ich w każdej z warstw równa 1.

.3579557306	.4237533620	.2182909074
.3437098152	.4269783974	.2293117874
.3406909877	.4278708239	.2314381885
.3406909881	.4281362218	.2311727901
.3437098152	.4277527417	.2285374431
.3579557302	.4249567449	.2170875249

Rozwiązując to zagadnienie otrzymamy poszukiwany dyskretyzowany wektor namagnesowania  $\mathbf{m}$  (w sensie miary) na każdej z 6 warstw:

```
M:=table([1 = [-.0110233785, -.0010421600], 2 = [-.0304836608, -.0006706018],
3 = [-.0346074560, -.0002298412], 4 = [-.0346074554, .0002298416],
5 = [-.0304836608, .0006706017] ,
6 = [-.0110233789, .0010421601]).
```

Energia całkowita przy takim wektorze namagnesowania osiąga wartości:

0.001100981308.

Powyższy przykład ilustruje jakościowo ułożenie się wektorów namagnesowania zgodne z kierunkami przyłożonego pola zewnętrznego, (por. Rys.5.2).

Zauważmy, że wypadkowy wektor  $\langle \mathbf{m} \rangle_T = \langle (m_1, m_2) \rangle_T = \sum_{i=1}^K \lambda_j (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$  na każdym przedziale  $T$  nie jest jednostkowy, ale jest kombinacją liniową wektorów jednostkowych.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\langle \mathbf{m} \rangle_j = \sum_{i=1}^3 \lambda_{ij} (\cos \theta_i, \sin \theta_i) \text{ dla } j=1, \dots, 6, \quad (5.33)$$

na 1-j warstwie  $\langle \mathbf{m} \rangle_1 = (-0.110233785e-1, -0.10421600e-2)$ ,

na 2-j -  $\langle \mathbf{m} \rangle_2 = (-0.304836608e-1, -0.6706018e-3)$ ,

na 3-j -  $\langle \mathbf{m} \rangle_3 = (-0.346074560e-1, -0.2298412e-3)$ ,

na 4-j -  $\langle \mathbf{m} \rangle_4 = (-0.346074554e-1, 0.2298416e-3)$ ,

na 5-j -  $\langle \mathbf{m} \rangle_5 = (-0.304836608e-1, 0.6706017e-3)$ ,

na 6-j -  $\langle \mathbf{m} \rangle_6 = (-0.110233789e-1, 0.10421601e-2)$ .

Mikrostrukturą są wektory :

na warstwie  $T_1$ :  $0.3579557306(\cos(-\pi/6); \sin(-\pi/6))$ ,

$0.4237533620(\cos(2\pi/3); \sin(2\pi/3))$ ,  $0.2182909074(\cos(-2\pi/3); \sin(-2\pi/3))$ ;

na warstwie  $T_2$ :  $0.3437098152(\cos(-\pi/6); \sin(-\pi/6))$ ,

$0.4269783974(\cos(2\pi/3); \sin(2\pi/3))$ ,  $0.2293117874(\cos(-2\pi/3); \sin(-2\pi/3))$ ;

na warstwie  $T_3$ :  $0.3406909877(\cos(-\pi/6); \sin(-\pi/6))$ ,

$0.4278708239(\cos(2\pi/3); \sin(2\pi/3))$ ,  $0.2314381885(\cos(-2\pi/3); \sin(-2\pi/3))$ ;

na warstwie  $T_4$ :  $0.3406909881(\cos(-\pi/6); \sin(-\pi/6))$ ,

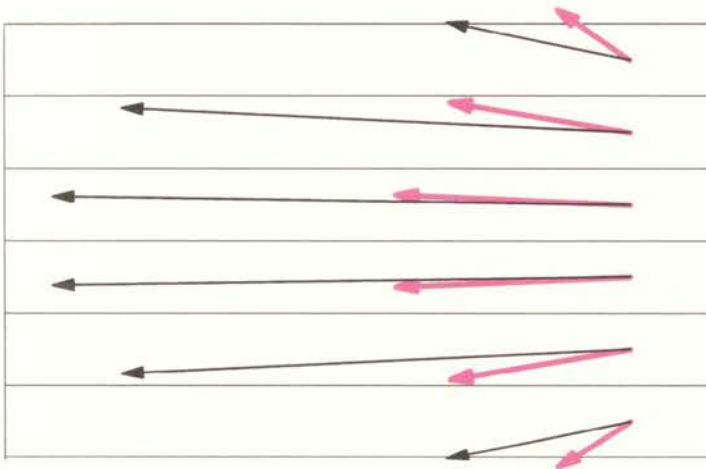
$0.4281362218(\cos(2\pi/3); \sin(2\pi/3))$ ,  $0.2311727901(\cos(-2\pi/3); \sin(-2\pi/3))$ ,

na warstwie  $T_5$ :  $0.3437098152(\cos(-\pi/6); \sin(-\pi/6))$ ,

$0.4277527417(\cos(2\pi/3); \sin(2\pi/3))$ ,  $0.2285374431(\cos(-2\pi/3); \sin(-2\pi/3))$ ,

na warstwie  $T_6$ :  $0.3579557302(\cos(-\pi/6); \sin(-\pi/6))$ ,

$0.4249567449(\cos(2\pi/3); \sin(2\pi/3))$ ,  $0.2170875249(\cos(-2\pi/3); \sin(-2\pi/3))$ .



**Rys.5.2.** Porównanie kierunków wektorów namagnesowania  $\langle \mathbf{m} \rangle_r$  (cienkie) oraz przyłożonego pola magnetycznego  $\mathbf{H}$  (grube) na warstwach.

Na rysunku 5.2 przedstawiono wypadkowy wektor namagnesowania  $\langle \mathbf{m} \rangle_r$  na poszczególnych warstwach w porównaniu do uśrednionego wektora pola zewnętrznego. Pomimo małej liczby elementów dyskretyzacji oraz geometrii dyskretyzacji (tj. warstwy zamiast kwadratów jak w rozdziale poprzednim) widoczny jest jakościowo poprawny charakter układania się wektorów magnetyzacji zgodnie z przyłożonym polem zewnętrznym. Oznacza to, że zastosowana procedura numeryczna została poprawnie napisana i można ją odpowiednio rozbudować do konkretnych, bardziej skomplikowanych zagadnień.



## Rozdział 6

### Nieściśliwe i prawie nieściśliwe ciała magnetoelastyczne

W niniejszym rozdziale rozpatrujemy zagadnienie nieliniowo sprężystego magnetyka, zakładając że ciało jest nieściśliwe albo prawie nieściśliwe. Wyznacznik gradientu deformacji dla nieściśliwego i prawie nieściśliwego ośrodka równy jest odpowiednio 1, tzn.  $\det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 1$ , albo prawie 1. Wykorzystując model zaproponowany przez Rybkę – Luskina w pracy [63], pokażemy istnienie rozwiązania zagadnienia minimum energii nieściśliwego ciała magnetoelastycznego oraz udowodnimy, że to rozwiązanie jest granicą rozwiązań zagadnienia minimum energii dla ciał prawie nieściśliwych.

Model matematyczny dla materiałów magnetoelastycznych, w którym deformacja i namagnesowanie są sprzężone, jest opisany w pracach [15,25,26,33,39,55,60,69]. W pracy [63] udowodniono istnienie minimizerów deformacji oraz namagnesowania dla magnetoelastycznej energii swobodnej. W opisie energii istotne jest w jakiej konfiguracji opisujemy funkcje gęstości energii. Namagnesowanie opisujemy często w konfiguracji aktualnej, zaś energię sprężystą w konfiguracji odniesienia. W celu ujednoczenia zapisu należy wyznaczyć Jacobian deformacji. Deformacja jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny prawie wszędzie, ciągłym oraz o dodatnim wyznaczniku z gradientu deformacji.

#### 6.1. Energia deformowanego ciała magnetycznego

Zakładamy, jak i wcześniej, że poniżej temperatury Curie materiał magnetyczny jest opisywany przez wektor namagnesowania  $\mathbf{m} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Ciało magnetyczne w zewnętrznym polu magnetycznym  $\mathbf{H}_{ext}$  podlega deformacji. Konfiguracją odniesienia jest obszar otwarty  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  oznacza wektor deformacji, zaś  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u}$  gradient deformacji.

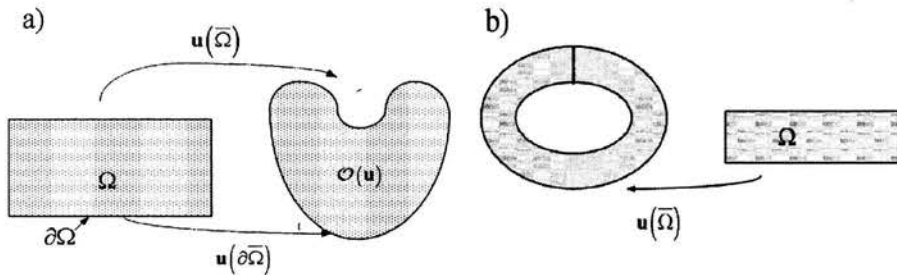
Energia ciała magnetoelastycznego zapiszemy jako, (por. [60]):

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{m}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{H}_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^2 d\mathbf{x}. \quad (6.1)$$

Ta energia zawiera człon z poliwy pukłą funkcją  $\Phi$ , rozpatrywaną przez Rogersa w pracy [60], dotyczącej magnetoelastyczności, por. (1.1). Człon  $\Phi$  jest sumą energii wymiany,

energii anizotropii magnetycznej oraz energii magnetosprężystej. W niektórych szczególnych przypadkach przyjmuje się, że energia (6.1) nie zależy od  $\nabla \mathbf{m}$ , (por.[25]).

Analogicznie jak w pracy [63] rozpatrujemy kryształ magnetosprężysty znajdujący się w obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  z lipchitzowskim brzegiem  $\partial\Omega$ . Deformację kryształu opisuje wektor  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , który jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny o regularności  $\mathbf{u} \in W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  i zachowujący orientację, tzn.  $\det \mathbf{u}(x) > 0$  prawie wszędzie w  $\Omega$ , (rys.6.1)



Rys. 6.1. a) Wzajemnie jednoznaczna deformacja obszaru  $\Omega$ , zajmowanego przez kryształ w konfiguracji odniesienia; b) deformacja, która nie jest jednoznaczna.

Regularność  $\mathbf{u} \in W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  implikuje, że obraz  $\mathbf{u}(\overline{\Omega})$  domkniętego zbioru  $\Omega$  oraz  $\mathbf{u}(\partial\overline{\Omega})$  brzegu obszaru  $\Omega$  są zbiorami domkniętymi, natomiast deformowany obszar  $\mathcal{O}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\overline{\Omega}) \setminus \mathbf{u}(\partial\overline{\Omega})$  jest zbiorem otwartym (por.rys.6.1). Założymy, że rozpatrywane ciało deformuje się w sposób zgodny z zadaną na niepustej części brzegu  $\Gamma \subset \partial\Omega$  deformacją:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \text{ dla wszystkich } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (6.2)$$

Jeżeli wektor namagnesowania  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  kryształu jest w naturalny sposób zdefiniowany w konfiguracji aktualnej,  $\mathbf{m} : \mathcal{O}(\mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , por.[6], oraz  $\mathbf{m} \in W^{1,2}(\mathcal{O}(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3)$ , to mamy następującą równość:

$$\int_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} (|\nabla_z \mathbf{m}(\mathbf{z})|^2 + |\mathbf{m}(\mathbf{z})|^2) dz = \int_{\Omega} (|\nabla_x \mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2 + |\mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2) \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) dx < \infty. \quad (6.3)$$

Warunkiem nasycenia magnetycznego ciała poniżej temperatury Curie jest następująca relacja w konfiguracji odniesienia

$$|\mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))| \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \tau \text{ w } \Omega, \quad (6.4)$$

gdzie  $\tau$  jest parametrem konstytutywnym, stałym przy ustalonej temperaturze i jest w literaturze nazywany saturacją magnetyczną, (w poprzednich rozdziałach 2,4,5 w rozpatrywanych zagadnieniach dla sztywnych magnetyków  $|\mathbf{m}(\mathbf{u}(x))|=1$ ).

Rybka i Luskin w swojej pracy [63] wykorzystali następującą postać energii dla przypadku kryształu magnetosprężystego:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \int_{\Omega} \kappa |D^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} W(\mathbf{F}, \mathbf{m} \circ \mathbf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \alpha |\nabla_z \mathbf{m}(z)|^2 dz - \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \mathbf{H}_{ext}(z) \cdot \mathbf{m}(z) dz + e_{mag}(\mathbf{u}, \mathbf{m}). \quad (6.5)$$

Parametry  $\kappa$  oraz  $\alpha$  w równaniu (7.5) są dodatnimi stałymi materiałowymi zależnymi od temperatury.

Ponadto w (6.5) przyjęto następującą definicję:

$$\int_{\Omega} |D^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,j}^3 \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 \right] d\mathbf{x}, \quad (6.6)$$

gdzie  $\chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})}(z)$  oznacza funkcję charakterystyczną obszaru  $\mathcal{O}(\mathbf{u})$ .

Energia ciała magnetosprężystego w równaniu (6.5) składa się z energii opisującej efekt oddziaływań powierzchniowych, która z kolei jest opisana przy pomocy operatora zdefiniowanego w (6.6), energii anizotropii magnetycznej, energii wymiany, powstałej w wyniku działania przyłożonego zewnętrznego pola magnetycznego  $\mathbf{H}_{ext}$  oraz energii magnetostatycznej.

Ostatni człon w energii oznacza nielokalną część energii magnetostatycznej

$$e_{mag}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_z \zeta(z)|^2 dz, \quad (6.7)$$

gdzie  $\zeta$  spełnia równania Maxwella

$$\operatorname{div}_z (\nabla_z \zeta - \chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \mathbf{m}) = 0, \quad z \in \mathbb{R}^3. \quad (6.8)$$

Mając wektor namagnesowania  $\mathbf{m}$  w konfiguracji aktualnej możemy przedstawić ten wektor w konfiguracji odniesienia jako  $\mathbf{m} \circ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wówczas (6.5) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}, \mathbf{m}) &= \int_{\Omega} \kappa |D^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} W(\mathbf{x}, \nabla \mathbf{u}, \mathbf{m} \circ \mathbf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \alpha |\nabla_z \mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2 \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{H}_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_z \zeta|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Energię magnetostatyczną  $e_{mag}(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
e_{mag}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_z \zeta(z)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} |\nabla_u \zeta(\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}(\mathbf{u})} |\nabla_z \zeta(z)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_z \zeta(\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2 \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) dx + 0.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Energia anizotropii magnetycznej  $W(\mathbf{F}, \mathbf{m})$  jest funkcją ciągłą gradientu deformacji  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$  oraz namagnesowania  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ . Tutaj  $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$  oznacza grupę macierzy o wymiarach 3 na 3 mających wyznaczniki dodatnie. Ponieważ zakładamy, że temperatura jest stała, to gęstość energii anizotropii  $W(\mathbf{F}, \mathbf{m})$  nie zależy od temperatury.

W pracy [63] przyjęte zostało następujące założenie: gęstość energii anizotropii  $W \in C^2(\mathbb{R}_+^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  jest rozłożona na dwie części, a mianowicie:

$$W(\mathbf{F}, \mathbf{m}) = W_1(\mathbf{F}, \mathbf{m}) + \psi(\det \mathbf{F}), \tag{6.11}$$

gdzie funkcje  $W_1$  i  $\psi$  spełniają następujące warunki:

1. funkcja  $\psi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą, wypukłą, oraz spełnia następujący warunek wzrostu przy  $q > 2$  oraz  $c_L > 0$

$$c_L (a^{-q} + a^q) \leq \psi(a) \text{ dla każdego } 0 < a < +\infty \tag{6.12}$$

2. funkcja  $W_1: \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą oraz spełnia następujące warunki wzrostu:

istnieją stałe  $C_L$  oraz  $C_U$  takie, że  $0 < C_L < C_U$ , oraz

$$C_L (|\mathbf{F}|^2 - 1) \leq W_1(\mathbf{F}, \mathbf{m}) \leq C_U (|\mathbf{F}|^r + 1) \text{ dla } 2 \leq r \leq 6 \tag{6.13}$$

Przez  $\mathcal{A}$  oznaczymy zbiór następujących funkcji, nazywanych *zbiorem funkcji dopuszczalnych*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3) \times W^{1,2}(\mathcal{O}(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3) : \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x) \right. \\
&\text{dla } \forall x \in \partial\Omega_1 = \Gamma, \quad \psi(\det \nabla \mathbf{u}) \in L^1(\Omega), \det \nabla \mathbf{u} > 0, \text{ p.w.} \\
&\left. \text{oraz } \mathbf{u} \text{ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny p.w. w } \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \right\},
\end{aligned} \tag{6.14}$$

gdzie  $\psi$  spełnia warunek (6.12).

Dla tak postawionego zagadnienia Rybka i Luskin w pracy [63] udowodnili twierdzenie o istnieniu minimizerów dla magnetyków sprężystych, tzn. pokazali, że zagadnienie

$$\min \left\{ J(\mathbf{u}, \mathbf{m}) : (\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A} \text{ oraz } |\mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))| \det \nabla \mathbf{u} = \tau \text{ dla każdego } \mathbf{x} \in \Omega \right\} \tag{6.15}$$

posiada rozwiązanie.

Metoda zastosowana w pracy [63] jest tzw. metodą bezpośrednią rachunku wariacyjnego i wymaga pokazania, że minimalizowany funkcjonal energetyczny jest funkcjonałem dolnie półciągłym w odpowiednio przyjętej topologii.

## 6.2. Magnetyki nieściśliwe i prawie nieściśliwe

Rozpatrzmy zagadnienie ciała magnetosprężystego nieściśliwego albo prawie nieściśliwego. Opis podejścia do materiałów prawie nieściśliwych można znaleźć w pracach [20,49,62]. Wykorzystamy rezultat [63] dla zagadnienia minimalizacji funkcjonału energii magnetosprężystej dla przypadku ciał nieściśliwych albo prawie nieściśliwych.

Założmy, że gęstość energii anizotropii magnetycznej dla ciała prawie nieściśliwego jest zapisana w postaci

$$W_\varepsilon(\mathbf{F}, \mathbf{m}) = W_1(\mathbf{F}, \mathbf{m}) + \frac{1}{\varepsilon}(\psi(\det \mathbf{F}) - \psi(1)), \quad (6.16)$$

dla  $\varepsilon \in (0,1)$ .

W dalszych rozważaniach w zapisie (6.16) pominiemy człon  $\psi(1)$  jako dodatnią stałą nieistotną w dowodzie istnienia rozwiązania.

Jeżeli w (6.9) zastąpimy  $W$  przez  $W_\varepsilon$  zgodnie z (6.16), wtedy funkcjonal energii zdefiniujemy w sposób następujący:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = & \int_{\Omega} \kappa |D^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} W_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{F}, \mathbf{m} \circ \mathbf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \alpha |\nabla_z \mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2 \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) dz - \int_{\Omega} \mathbf{H}_{ext}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6.17) \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_z \zeta| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Jeżeli  $\varepsilon = 1$  w (6.16), to  $W_\varepsilon(\mathbf{F}, \mathbf{m}) = W(\mathbf{F}, \mathbf{m})$ . Zagadnienie istnienia minimum energii prawie nieściśliwego ciała magnetosprężystego sprowadza się do zagadnienia rozpatrywanego w pracy [63].

Ostatni człon w (6.16) jest funkcją kary. Interpretacja członu kary jest następująca: gdy  $\varepsilon$  dąży do zera, wtedy energia potrzebna do zmiany objętości ciała dąży do nieskończoności, dlatego materiał jest coraz mniej ściśliwy. Jeżeli  $\det \mathbf{F}$  dąży do jedności oraz  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 1}} \frac{1}{\varepsilon} (\psi(a) - \psi(1)) = 0,$$

wtedy otrzymujemy funkcjonal energii granicznej  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon$  dla ciała nieściśliwego, która będzie rozpatrywana poniżej (por. (6.36)).

Aby udowodnić istnienie minimizerów dla ciał prawie nieściśliwych, pokażemy że funkcjonały  $J_\varepsilon$  są dolnie półciągłe dla  $\forall \varepsilon > 0$ .

Określmy, podobnie jak w [63] cechy zbioru deformacji dopuszczalnych. Ciąg  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  słabo zbiega do elementu  $(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}$  wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &\rightharpoonup \mathbf{u} \text{ w } W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ \chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} \mathbf{m}_n &\rightarrow \chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \mathbf{m} \text{ w } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

oraz

$$\chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} \nabla_z \mathbf{m}_n \rightarrow \chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \nabla_z \mathbf{m} \text{ w } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

Inna definicja: mówimy, że ciąg  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczony, jeżeli istnieje stała  $K > 0$  niezależna od  $n$  taka, że

$$\int_{\Omega} \left\{ |D^2 \mathbf{u}_n(\mathbf{x})|^2 + |\nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x})|^2 + \psi(\det \nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x})) \right\} dx + \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} |\nabla_z \mathbf{m}_n(z)|^2 dz \leq K \quad (6.18)$$

**Twierdzenie 7.1.**[63] Jeżeli ciąg  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczony, wtedy istnieje podciąg (tak samo oznaczony) oraz  $(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}$  taki, że  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)$  zbiega słabo do  $(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ .

To twierdzenie jest bardzo ważne dla naszego rozumowania, gdyż zapewnia istnienie minimizerów, które są słabymi granicami ciągów minimalizujących.

Dowód twierdzenia składa się z kilka kroków (lematy 7.1-7.6). Najpierw wprowadzono następujące zbiory:

$$\begin{aligned} A_t^n &= \{ \mathbf{x} \in \Omega : \det \nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) < t \}, \quad t < 1, \\ B_t^n &= \{ \mathbf{x} \in \Omega : \det \nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) > t \}, \quad t > 1. \end{aligned}$$

Oczywiście w poniższym rozumowaniu wszystkie stałe w szacowaniach zależą od parametru  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Dowody powtarzają rozumowanie z pracy [63] z następującą identyfikacją funkcji

$$\psi(\cdot) \rightarrow \psi^\varepsilon(\cdot) \equiv \frac{1}{\varepsilon} \psi(\cdot) + C^\varepsilon \quad (6.19)$$

gdzie  $C^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \psi(1)$  jest stałą.

**Lemat 7.1.** Jeżeli ciąg  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczony, wtedy

$$|A_t^n| \leq t^q c_L^{-1} K \quad \text{oraz} \quad |B_t^n| \leq t^{-q} c_L^{-1} K.$$

Dowód. Rozpatrzmy najpierw:

$$|A_t^n| = \int_{A_t^n} 1 d\mathbf{x} = \int_{A_t^n} \frac{t}{t} d\mathbf{x} \leq t \int_{A_t^n} \frac{1}{\det \nabla \mathbf{u}_n} d\mathbf{x} \leq t \left( \int_{A_t^n} \frac{1}{(\det \nabla \mathbf{u}_n)^q} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot |A_t^n|^{1-\frac{1}{q}}$$

Otóż, wykorzystując (6.12) mamy:

$$|A_t^n| \leq t^q \int_{A_t^n} (\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-q} d\mathbf{x} \leq t^q c_L^{-1} \int_{A_t^n} \psi(\det \nabla \mathbf{u}_n) d\mathbf{x} \leq t^q c_L^{-1} K \quad \text{dla } t < 1.$$

Szacujemy również:

$$|B_t^n| = \int_{B_t^n} 1 d\mathbf{x} = \int_{B_t^n} \frac{t}{t} d\mathbf{x} \leq t^{-1} \int_{B_t^n} \det \nabla \mathbf{u}_n d\mathbf{x} \leq t^{-1} \left( \int_{B_t^n} (\det \nabla \mathbf{u}_n)^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot |B_t^n|^{1-\frac{1}{q}}.$$

Wtedy, korzystając z (6.12) mamy:

$$|B_t^n| \leq t^{-q} \int_{B_t^n} (\det \nabla \mathbf{u}_n)^q d\mathbf{x} \leq t^{-q} c_L^{-1} \int_{B_t^n} \psi(\det \nabla \mathbf{u}_n) d\mathbf{x} \leq t^{-q} c_L^{-1} K \quad \text{dla } t > 1. \quad \square$$

Poniżej przedstawimy główny lemat o zbieżności  $\{\mathbf{u}_n\}$ . Rezultaty dotyczące zbieżności  $\{\det \nabla \mathbf{u}_n\}$  podane poniżej wynikają z twierdzeń o zanurzaniu przestrzeni Sobolewa oraz twierdzenia o zwartości [1]. Istotne są w tych rozważaniach warunki wzrostu (6.12).

**Lemat 7.2.** Jeżeli ciąg  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczony, wtedy istnieje podciąg taki, że

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ w } W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

oraz

$$\det \nabla \mathbf{u}_n \rightarrow \det \nabla \mathbf{u} \text{ w } L^p(\Omega) \text{ dla } p < q, \quad (6.20)$$

$$\det \nabla \mathbf{u}_n \rightharpoonup \det \nabla \mathbf{u} \text{ w } L^q(\Omega), \quad (6.21)$$

$$\int_{\Omega} \psi^c(\det \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{x} < \infty, \quad (6.22)$$

$$\det \nabla \mathbf{u} > 0 \text{ p.w.} \quad (6.23)$$

Dowód. Wystarczy udowodnić ograniczoność ciągu norm  $\|\mathbf{u}_n\|_{W^{2,2}}$ , żeby pokazać istnienie podciągu  $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ , który jest słabo zbieżny w  $W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Mając  $\mathcal{A}$ -ograniczoność ciągu  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\}$  wystarczy pokazać wspólną ograniczoność dla  $\|\mathbf{u}_n\|_{L^2}$ . Otóż mamy:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_n(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leq 2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + 2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq 2C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla(\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))|^2 d\mathbf{x} + 2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + 1 \right) \leq C(K+1). \end{aligned}$$

Ponieważ ciąg  $\{\mathbf{u}_n\}$  jest słabo zbieżny w  $W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , to wykorzystując twierdzenia o zanurzeniu w przestrzeniach Sobolewa wnioskujemy, że istnieje podciąg  $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$  silnie zbieżny w  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  dla  $p \leq 6$  oraz zbieżny w  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  dla  $0 < \alpha < 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

Dla tego podciągu mamy:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}_n &\rightarrow \nabla \mathbf{u} \quad \text{p.w.} \\ \det \nabla \mathbf{u}_n &\rightarrow \det \nabla \mathbf{u} \quad \text{p.w.} \\ \det \nabla \mathbf{u}_n &\rightarrow \det \nabla \mathbf{u} \quad \text{w } L^p(\Omega) \quad \text{dla } p < 2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Teraz możemy poprawić zbieżność w (6.24). W tym celu pokażemy, że funkcje  $\{(\det \nabla \mathbf{u}_n)^p\}$  są jednakowo całkowalne dla każdego  $p < q$ , co oznacza, że dla każdego  $\eta$  istnieje  $\delta > 0$  takie, że jeżeli  $V \subset \Omega$  spełnia nierówność  $|V| < \delta$ , wtedy

$$\int_V (\det \nabla \mathbf{u}_n)^p \, d\mathbf{x} < \eta. \quad (6.25)$$

Otóż, dla każdego  $V \subset \Omega$  oraz  $t > 1$  mamy:

$$\int_V (\det \nabla \mathbf{u}_n)^p \, d\mathbf{x} = \left( \int_{V \setminus B_t^n} + \int_{V \cap B_t^n} \right) (\det \nabla \mathbf{u}_n)^p \, d\mathbf{x}. \quad (6.26)$$

Korzystając z definicji na  $B_t^n$  mamy:

$$\begin{aligned} \int_V (\det \nabla \mathbf{u}_n)^p \, d\mathbf{x} &\leq t^p |V \setminus B_t^n| + \left( \int_{V \cap B_t^n} (\det \nabla \mathbf{u}_n)^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{p}{q}} \cdot |B_t^n|^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq t^p |V| + c_L^{-p/q} \left( \int_{B_t^n} \psi^\varepsilon (\det \nabla \mathbf{u}_n) \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{p}{q}} \cdot (t^{-q} c_L^{-1} K)^{\left(1-\frac{p}{q}\right)} \\ &\leq t^p |V| + c_L^{-1} K t^{-q+p}. \end{aligned}$$

Możemy wybrać  $t > 1$  dostatecznie duże, tak żeby drugi człon był mniejszy od  $\eta/2$ . Wówczas dobierając  $\delta$  dostatecznie małe, żeby  $t^p \delta < \eta/2$  zachodzi (6.25), ponieważ  $|V| < \delta$ .

Ponieważ podciąg  $\mathbf{u}_n$  prawie wszędzie zbieżny, to z twierdzenia Vitaliego [63], mamy:

$$\det \nabla \mathbf{u}_n \rightarrow \det \nabla \mathbf{u} \quad \text{w } L^p(\Omega) \quad \text{dla } p < q.$$

Ponadto można wyciągnąć wniosek [63], że

$$(\det \nabla \mathbf{u}_n)^p \rightarrow (\det \nabla \mathbf{u})^p \quad \text{w } L^1(\Omega) \quad \text{dla } p < q.$$



Tak więc, (6.20) jest udowodnione.

Dla udowodnienia (6.21) korzystamy z warunku wzrostu na  $\psi^\epsilon$  z (6.12) i otrzymujemy, że ciąg  $\{\det \nabla \mathbf{u}_n\}$  jest ograniczony w  $L^q(\Omega)$ . Z drugiej strony, zawiera on podciąg słabo zbieżny do  $g$ . Jednoznaczność granicy daje nam  $g = \det \nabla \mathbf{u}$ .

Dla dowodu (6.22), zauważmy, że ponieważ  $\det \nabla \mathbf{u}_n \rightarrow \det \nabla \mathbf{u}$  w  $L^1(\Omega)$ , to istnieje podciąg (tak samo oznaczony) taki, że  $\det \nabla \mathbf{u}_n \rightarrow \det \nabla \mathbf{u}$  prawie wszędzie w  $\Omega$ . Dalej, zakładając, że ciąg  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczony oraz korzystając z lematu Fatou, mamy:

$$\int_{\Omega} \psi^\epsilon(\det \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi^\epsilon(\det \nabla \mathbf{u}_n) d\mathbf{x} \leq K < \infty.$$

Następnie pokażemy, że zachodzi (6.23). Wykorzystamy technikę rozbicia funkcji. Zdefiniujemy następujący zbiór dla  $t < 1$

$$A_t = \{\mathbf{x} \in \Omega : \det \nabla \mathbf{u} < t\}.$$

Oczywiście, że nierówność (6.23) zachodzi, jeżeli wprowadzimy następujące oszacowanie

$$|A_t| \leq ct^q, \quad (6.27)$$

gdzie  $c$  jest dodatnią stałą. Ponieważ

$$\det \nabla \mathbf{u} \equiv \det \nabla \mathbf{u}_n + (\det \nabla \mathbf{u} - \det \nabla \mathbf{u}_n)$$

oraz  $\det \nabla \mathbf{u}_n > 0$  prawie wszędzie, mamy dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$  inkluzję

$$A_t \subset A_{2t}^n \cup \{\mathbf{x} \in \Omega : |\det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \det \nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x})| \geq t\} \equiv A_{2t}^n \cup E^n.$$

Korzystając z twierdzenia Jegorowa, dla każdego  $t \in (0, 1)$  istnieje  $V \subset \Omega$  takie, że  $|V| < t^q$  oraz  $\det \nabla \mathbf{u}_n$  zbiega równomiernie do  $\det \nabla \mathbf{u}$  na  $\Omega/V$ . Wobec tego zachodzi oszacowanie

$$|A_t| \leq |A_{2t}^n| + |E^n \cap V| + |E^n/V| \leq c_L^{-1} K 2^q t^q + t^q + |E^n/V|.$$

Wówczas, dla pewnego stałego  $t$  oraz dostatecznie dużego  $n$  zbiór  $E^n/V$  jest pusty. Otóż, zachodzi (6.27) przy  $c = 1 + c_L^{-1} K 2^q$ . Wtedy, wykonuje się (6.23).  $\square$

**Lemat 7.3.** Jeżeli  $1 \leq p < q$ , wtedy  $(\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-1}$  zbiega do  $(\det \nabla \mathbf{u})^{-1}$  w  $L^p(\Omega)$ .

Dowód. Wyżej (lemat 7.2) pokazaliśmy, że ciąg  $\det \nabla \mathbf{u}_n$  jest zbieżny prawie wszędzie oraz że granica  $\det \nabla \mathbf{u}$  jest dodatnia.  $(\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-1} \rightarrow (\det \nabla \mathbf{u})^{-1}$  prawie wszędzie. Stosując

twierdzenie Vitaliego o zbieżności wystarczy pokazać, że ciąg  $(\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-p}$  jest jednakowo-  
całkowalny. Żeby to pokazać założymy, że  $\eta > 0$  jest zadane. Wtedy dla  $V \subset \Omega$  z  
 $|V| \leq \delta$  podobnie jak w dowodzie w (6.26) mamy:

$$\begin{aligned} \int_V (\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-p} d\mathbf{x} &= \left( \int_{V \setminus A_n^q} + \int_{V \cap A_n^q} \right) (\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-p} d\mathbf{x} \\ &\leq t^{-p} |V| + \left( \int_{V \cap A_n^q} (\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-q} d\mathbf{x} \right)^{\frac{p}{q}} |A_n^q|^{1-\frac{p}{q}} \\ &\leq t^{-p} |V| + c_2^{-1} K t^{q-p} \leq \eta \end{aligned}$$

dla odpowiednio dobranych  $t$  oraz  $\delta$ .

Teraz musimy upewnić się, że graniczne odwzorowanie jest prawie wszędzie  
odwzorowaniem wzajemnie-jednoznaczny.

**Lemat 7.4.** Zakładamy, że  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  jest otwartym zbiorem, odkształcenie  $\mathbf{u}_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest  
wzajemnie-jednoznaczne prawie wszędzie oraz  $\det \nabla \mathbf{u}_n > 0$  prawie wszędzie. Oprócz tego  
zakładamy, że ciąg  $\mathbf{u}_n$  jest słabo zbieżny w  $W^{2,2}(\Omega)$  do  $\mathbf{u}$ ,  $\det \nabla \mathbf{u}_n \rightarrow \theta$  w  $L^1(\Omega)$ , oraz  
 $\theta > 0$  prawie wszędzie. Wtedy  $\mathbf{u}$  jest wzajemnie-jednoznaczny odwzorowaniem prawie  
wszędzie (oraz  $\det \nabla \mathbf{u} = \theta$ ).

Dowód. Wykorzystamy definicję indykatrysy Banacha

$$N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) = \#\{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}\},$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest ciągłym odwzorowaniem. Otóż mamy:

$$\mathbf{u}(\Omega) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) \geq 1\}.$$

Stwierdzamy, że  $\mathbf{u}$  jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem wtedy i tylko wtedy,  
gdy

$$\left| \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) \geq 2\} \right| = 0.$$

Dla dowodu tej równości założymy, że  $\mathbf{u}|_G$  jest wzajemnie- jednoznaczne oraz zbiór  
 $G$  jest miary pełnej. Wtedy zgodnie z [63] wnioskujemy, że  $E = \mathbf{u}(\Omega \setminus G)$  ma miarę zero.  
To oznacza, że  $N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) \geq 2$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{z} \in E$ .

Z drugiej strony zakładamy, że  $E = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) \geq 2\}$  jest zbiorem miary zero. Zbiór  
 $G = \Omega \setminus \mathbf{u}^{-1}(E)$ . Musimy pokazać, że  $|\mathbf{u}^{-1}(E)| = 0$ . Korzystając z formuły obszaru (area) [76,  
theorem 5.11] otrzymamy:

$$\int_{\mathbf{u}^{-1}(E)} \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = 0.$$

Ponieważ  $\det \nabla \mathbf{u} > 0$  prawie wszędzie, to wnioskujemy, że  $|\mathbf{u}^{-1}(E)| = 0$ .

Teraz pokażemy, że

$$N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) \leq 1 \text{ prawie wszędzie.}$$

Niech funkcja  $\phi \in C_0(\mathbb{R}^3)$  będzie nieujemna,  $\phi \geq 0$ . Możemy uzyskać pewny ciąg wzajemnie jednoznacznych  $\mathbf{u}_n$  p.w. taki, że

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{u}_n(\mathbf{x})) \det \nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{u}_n(\Omega)} \phi(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \leq \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

Stąd

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \det \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\mathbf{z}) d\mathbf{z}.$$

Ostatnia nierówność implikuje, że  $N(\mathbf{u}, \Omega, \mathbf{z}) \leq 1$ . A to oznacza, że  $\mathbf{u}$  jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem prawie wszędzie.  $\square$

Dalej udowodnimy zbieżność ciągów wektorów namagnesowania  $\{\mathbf{m}_n\}$ .

**Lemat 7.5.** Jeżeli  $\{\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n\} \subset \mathcal{A}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczonym ciągiem, wtedy istnieje  $\mathbf{m} \in W^{1,2}(\mathcal{O}(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3)$  takie, że podciąg (tak samo oznaczony) zbiega słabo do  $(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ .

Dowód. Skorzystamy z techniki rozbicia funkcji. Zdefiniujemy zbiór

$$D_t^n = \{\mathbf{x} \in \Omega : |\nabla_t \mathbf{m}_n \circ \mathbf{u}_n(\mathbf{x})| > t\}$$

Pokażemy, że

$$|D_t^n| \leq K C_L \frac{1}{t^{q+1}} t^{-2 \frac{q}{q+1}} \quad (6.28)$$

Wykorzystamy nierówność Schwartz'a

$$\begin{aligned} |D_t^n| &= \int_{D_t^n} 1 d\mathbf{x} = \int_{D_t^n} \left( \frac{|\nabla \mathbf{m}_n| \det^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u}_n}{|\nabla \mathbf{m}_n| \det^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u}_n} \right) d\mathbf{x} \\ &\leq \left( \int_{D_t^n} |\nabla \mathbf{m}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{D_t^n} |\nabla \mathbf{m}_n|^{-2} (\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-1} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{t} K^{\frac{1}{2}} \left( \int_{D_t^n} \frac{1}{\det \nabla \mathbf{u}_n} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{t} K^{\frac{1}{2}} \left( \int_{D_t^r} \frac{1}{(\det \nabla \mathbf{u}_n)^q} dx \right)^{\frac{1}{2q}} |D_t^r|^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)} \\
&\leq \frac{1}{t} K^{\frac{1}{2}} \left( \int_{D_t^r} c_L^{-1} \psi(\det \nabla \mathbf{u}_n) dx \right)^{\frac{1}{2q}} |D_t^r|^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)} \\
&\leq \frac{1}{t} c_L^{-\frac{1}{2q}} K^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2q}} |D_t^r|^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)}.
\end{aligned}$$

Dowodzi to prawdziwość wzoru (6.28).

Przypomnijmy, że obszar  $\mathcal{O}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\overline{\Omega}) \setminus \mathbf{u}(\partial\overline{\Omega})$  jest otwarty. Zdefiniujemy dwie rodziny zbiorów

$$\mathcal{O}_\eta(\mathbf{u}) = \{z \in \mathcal{O}(\mathbf{u}) : \text{dist}(z, \partial\mathcal{O}(\mathbf{u})) > \eta\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{O}^\eta(\mathbf{u}) = \{z \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(z, \mathcal{O}(\mathbf{u})) \leq \eta\}.$$

Zapiszemy

$$\bigcup_{\eta>0} \mathcal{O}_\eta(\mathbf{u}) = \mathcal{O}(\mathbf{u}).$$

Dla pewnego  $\eta > 0$  otrzymamy, że  $\mathcal{O}_\eta(\mathbf{u}) \subset \mathcal{O}(\mathbf{u}_n)$  dla wystarczająco dużego  $n$  ponieważ mamy jednostajną zbieżność  $\mathbf{u}_n$  do  $\mathbf{u}$ . Teraz pokażemy, że dla każdego  $\eta > 0$  istnieje podciąg (tak samo oznaczony) taki, że

$$\mathbf{m}_n \rightharpoonup \mathbf{m} \quad \text{w} \quad W^{1,2}(\mathcal{O}_\eta(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3). \quad (6.29)$$

Mamy dla każdego  $\eta > 0$

$$\int_{\mathcal{O}_\eta(\mathbf{u})} |\nabla_z \mathbf{m}_n(z)|^2 dz \leq \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} |\nabla_z \mathbf{m}_n(z)|^2 dz = \int_{\Omega} |\nabla_z \mathbf{m}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n dx \leq K.$$

Korzystając z ograniczenia (6.4) otrzymamy następujący rezultat:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} |\mathbf{m}_n(z)|^2 dz &= \int_{\Omega} |\mathbf{m}_n(\mathbf{u}_n(x))|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n(x) dx = \int_{\Omega} (\det \nabla \mathbf{u}_n(x))^{-1} dx \\
&\leq \tau^2 \left( \int_{\Omega} (\det \nabla \mathbf{u}_n(x))^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} |\Omega|^{1-\frac{1}{q}} \\
&\leq \tau^2 c_L^{-\frac{1}{q}} \left( \int_{\Omega} \psi(\det \nabla \mathbf{u}_n(x)) dx \right)^{\frac{1}{q}} |\Omega|^{1-\frac{1}{q}} \leq K_1.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że istnieje podciąg (tak samo oznaczony) taki, że

$$\mathbf{m}_n \rightharpoonup \mathbf{m} \quad \text{w} \quad W^{1,2}(\mathcal{O}_\eta(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3).$$

Oprócz tego, istnieje podciąg (tak samo oznaczony) taki, że

$$\mathbf{m}_n \rightarrow \mathbf{m} \quad \text{w} \quad L^2(\mathcal{O}_\eta(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3). \quad (6.30)$$

Teraz pokażemy, że

$$\chi_{\mathcal{O}(u_n)} \mathbf{m}_n \rightarrow \chi_{\mathcal{O}(u)} \mathbf{m} \text{ w } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ oraz } \chi_{\mathcal{O}(u_n)} \nabla_z \mathbf{m}_n \rightarrow \chi_{\mathcal{O}(u)} \nabla_z \mathbf{m} \text{ w } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

Najpierw oszacujemy  $\chi_{\mathcal{O}(u_n)} \mathbf{m}_n - \chi_{\mathcal{O}(u)} \mathbf{m}$  w normie  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . W tym celu zauważamy, że

$$\chi_{\mathcal{O}(u_n)} \mathbf{m}_n - \chi_{\mathcal{O}(u)} \mathbf{m} = (\chi_{\mathcal{O}(u_n)} - \chi_{\mathcal{O}(u)}) \mathbf{m}_n + \chi_{\mathcal{O}(u)} (\mathbf{m}_n - \mathbf{m}) + (\chi_{\mathcal{O}(u)} - \chi_{\mathcal{O}(u)}) \mathbf{m}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|\chi_{\mathcal{O}(u_n)} \mathbf{m}_n - \chi_{\mathcal{O}(u)} \mathbf{m}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\mathbf{m}_n\|_{L^2(\mathcal{O}(u_n) \Delta \mathcal{O}(u))} + \|\mathbf{m}_n - \mathbf{m}\|_{L^2(\mathcal{O}(u))} + \|\mathbf{m}\|_{L^2(\mathcal{O}(u) \Delta \mathcal{O}(u_n))} \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Do oszacowania  $I$  zdefiniujemy zbiór  $\Omega_n^\eta := \mathbf{u}_n^{-1}(\mathcal{O}_\eta(\mathbf{u}))$ . Korzystając z (6.4) oraz z (6.12) dla  $t < 1$  mamy:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathcal{O}} (1 - \chi_{\Omega_n^\eta})^2 |\mathbf{m}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n \, d\mathbf{x} = \left( \int_{A_t^n} + \int_{\Omega \setminus A_t^n} \right) \frac{(1 - \chi_{\Omega_n^\eta})^2 \tau^2}{\det \nabla \mathbf{u}_n} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \tau^2 \left( \int_{A_t^n} \left( \frac{1}{\det \nabla \mathbf{u}_n} \right)^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} |A_t^n|^{\frac{1}{q}} + \frac{\tau^2}{t} |\Omega \setminus (\Omega_n^\eta \cup A_t^n)| \\ &\leq c t^{q-1} + \frac{\tau^2}{t} |\Omega \setminus (\Omega_n^\eta \cup A_t^n)|. \end{aligned}$$

Najpierw wybierzemy  $t < 1$  tak, żeby pierwszy człon był mniejszy niż  $\frac{1}{2}(\delta/3)^2$ . Wtedy pokażemy, że można wybrać takie  $\eta$ , że drugi człon będzie mniejszy od  $\frac{1}{2}(\delta/3)^2$ . To powoduje, że  $I < \delta/3$ , co i chcemy. Można to zrobić dlatego, że:

$$\begin{aligned} |\mathcal{O}^\eta(\mathbf{u}) \setminus \mathcal{O}_\eta(\mathbf{u})| &\geq |\mathbf{u}_n(\Omega \setminus \Omega_n^\eta)| \geq |\mathbf{u}_n(\Omega \setminus (\Omega_n^\eta \cup A_t^n))| \\ &= \int_{\Omega \setminus (\Omega_n^\eta \cup A_t^n)} \det \nabla \mathbf{u}_n \geq t |\Omega \setminus (\Omega_n^\eta \cup A_t^n)|, \end{aligned} \tag{6.31}$$

ponieważ  $|\mathcal{O}^\epsilon(\mathbf{u}) \setminus \mathcal{O}_\eta(\mathbf{u})|$  można zrobić dostatecznie małym dla pewnego  $t$ .

Dla pewnego  $\eta > 0$  oraz wystarczająco dużego  $n$  mamy, że  $II < \delta/3$  zgodnie z (6.30).

Dalej, dla wybranego  $\delta$  można znaleźć  $\eta > 0$ , żeby  $III < \delta/3$  dzięki temu, że  $|\mathcal{O}(\mathbf{u}) \setminus \mathcal{O}_\eta(\mathbf{u})|$  może być dostatecznie małe oraz faktu, że całka jest ciągłą na zbiorze całkowania.

Pokażemy, że zachodzi słaba zbieżność. Dla  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3 \times 3})$  rozpatrzmy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} (\chi_{\mathcal{O}(u_n)} \nabla_z \mathbf{m}_n - \chi_{\mathcal{O}(u)} \nabla_z \mathbf{m}) \varphi \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[ (\chi_{\mathcal{O}(u_n)} - \chi_{\mathcal{O}_\eta(u)}) \nabla_z \mathbf{m}_n \cdot \varphi + \chi_{\mathcal{O}_\eta(u)} (\nabla_z \mathbf{m}_n - \nabla_z \mathbf{m}) \cdot \varphi + (\chi_{\mathcal{O}_\eta(u)} - \chi_{\mathcal{O}(u)}) \nabla_z \mathbf{m} \cdot \varphi \right] dz \\ &= Y + YY + YYY. \end{aligned}$$

Oceniamy pierwszy składnik:

$$|Y| \leq \|\nabla_z \mathbf{m}_n\|_{L^2(\mathcal{O}(u_n))} \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O}(u_n), \mathcal{O}_\eta(u))}.$$

Możemy otrzymać  $|Y| < \delta/3$  przez dobór dostatecznie małego  $\eta > 0$ .

Drugi składnik będzie mały dzięki (6.29). Nierówność  $|YYY| < \delta/3$  zachodzi jeżeli wybieramy dostatecznie małe  $\eta > 0$ . □

Teraz pokażemy dolną półciągłość członu  $\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n \, dx$ .

**Lemat 7.6.** Jeżeli  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczonym ciągiem, wtedy

$$\int_{\Omega} |\nabla_z \mathbf{m}|^2 \det \nabla \mathbf{u} \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla_z \mathbf{m}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n \, dx.$$

Dowód. Dla każdego  $\delta > 0$  istnieje takie  $\eta > 0$ , że

$$\int_{\mathcal{O}_\eta(u)} |\nabla_z \mathbf{m}|^2 \, dz \geq \int_{\mathcal{O}(u)} |\nabla_z \mathbf{m}|^2 \, dz - \delta.$$

Korzystając z (6.29) mamy, że

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla_z \mathbf{m}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n \, dx &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{O}(u_n)} |\nabla_z \mathbf{m}_n|^2 \, dz \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{O}_\eta(u)} |\nabla_z \mathbf{m}_n|^2 \, dx \\ &\geq \int_{\mathcal{O}_\eta(u)} |\nabla_z \mathbf{m}|^2 \, dz \geq \int_{\mathcal{O}(u)} |\nabla_z \mathbf{m}|^2 \, dz - \delta = \int_{\Omega} |\nabla_z \mathbf{m}|^2 \det \nabla \mathbf{u} \, dx - \delta. \end{aligned}$$

Przez to, że  $\delta$  jest wybrane dowolnie otrzymujemy dowód lematu. □

Wówczas, możemy udowodnić Twierdzenie 7.1.

Dowód twierdzenia 7.1. Jeżeli  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczonym ciągiem (6.18), którego ograniczeniem jest  $K$ , wtedy wobec lematów 7.1-7.6 jego podciągi są słabo zbieżne do elementu  $(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  w  $\mathcal{A}$  oraz

$$\int_{\Omega} \left\{ |D^2 \mathbf{u}|^2 + |\nabla \mathbf{u}|^2 + \psi^\varepsilon(\det \nabla \mathbf{u}) \right\} d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} |\nabla_z \mathbf{m}|^2 dz \leq K. \quad \square$$

Teraz możemy pokazać dolną półciągłość funkcjonału energii  $J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ . Najpierw rozpatrzmy własność ciągów minimalizujących.

**Lemat 7.7.** Jeżeli  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$  jest ciągiem minimalizującym, wtedy jest on  $\mathcal{A}$ -ograniczony.

Dowód. Chcemy oszacować człon oddziaływania magnetycznego energii całkowitej, który wnosi niedodatni wkład do energii  $J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ :

$$\begin{aligned} Y_n &= \left| \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} \mathbf{H}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{m}_n(\mathbf{z}) dz \right| = \left| \int_{\Omega} \mathbf{H}(\mathbf{u}_n(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{m}_n(\mathbf{u}_n(\mathbf{x})) \det \nabla \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq C_\eta \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} \mathbf{H}^2(\mathbf{z}) dz + \eta \int_{\Omega} |\mathbf{m}_n(\mathbf{u}_n(\mathbf{x}))|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n d\mathbf{x} \\ &\leq C_\eta \|\mathbf{H}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \eta \tau^2 \int_{\Omega} (\det \nabla \mathbf{u}_n)^{-1} d\mathbf{x} \\ &\leq C_\eta \|\mathbf{H}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \eta \tau^2 c_L^{-\frac{1}{q}} \left( \int_{\Omega} \psi^\varepsilon(\det \nabla \mathbf{u}_n) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} |\Omega|^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned}$$

Wykorzystując nierówność Younga, otrzymujemy (dla ustalonego  $\varepsilon > 0$ ):

$$J_\varepsilon^n \leq C_\eta \|\mathbf{H}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \eta \tau^2 c_L^{-\frac{1}{q}} \left( \frac{1}{q} \int_{\Omega} \psi^\varepsilon(\det \nabla \mathbf{u}_n) d\mathbf{x} + \frac{q-1}{q} |\Omega| \right).$$

Dalej, korzystając z (6.13) mamy:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left[ k |D^2 \mathbf{u}_n|^2 + |\nabla \mathbf{u}_n|^2 + \psi^\varepsilon(\det \nabla \mathbf{u}_n) + |\nabla_z \mathbf{m}_n \circ \mathbf{u}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n \right] d\mathbf{x} \\ &\leq \max \left\{ 1, \frac{1}{C_L} \right\} \eta(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n) + J_n + |\Omega| \\ &\leq K + |\Omega| + C_\eta \|\mathbf{H}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \eta \tau^2 c_L^{-\frac{1}{q}} \left( \frac{1}{q} \int_{\Omega} \psi^\varepsilon(\det \nabla \mathbf{u}_n) d\mathbf{x} + \frac{q-1}{q} |\Omega| \right). \end{aligned}$$

Ponieważ  $\eta$  jest dostatecznie małym parametrem oraz możemy założyć, że  $\mathbf{H} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , wobec tego otrzymujemy tezę. □

**Twierdzenie 7.2.** (por.[63]). Niech energia swobodna dla prawie nieściśliwego ciała magnetosprężystego  $J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  zadana w postaci (6.17) spełnia warunki wzrostu (6.12) oraz (6.13). Wtedy przy założeniu ograniczenia nasycenia magnetycznego (saturacji) (6.4) energia osiąga minimum.

Dowód. Rozpatrzmy ciąg minimalizujący  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\} \subset \mathcal{A}$ . Wobec lematu 7.7.  $\{(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)\}$  jest  $\mathcal{A}$ -ograniczonym ciągiem. Jak pokazano w twierdzeniu 7.1. istnieje element  $(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}$  taki, że podciąg  $\{(\mathbf{u}_{n_i}, \mathbf{m}_{n_i})\}$  jest słabo zbieżny do  $(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ .

$$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)$$

$$k \int_{\Omega} |D^2 \mathbf{u}|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} k \int_{\Omega} |D^2 \mathbf{u}_n|^2 dx.$$

Podobnie jak w (6.11) energia anizotropii przedstawiona została w postaci sumy

$$W_\varepsilon(\mathbf{F}, \mathbf{m}) = W_1(\mathbf{F}, \mathbf{m}) + \psi^\varepsilon(\det \mathbf{F}). \quad (6.32)$$

Najpierw pokażemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} W_1(\nabla \mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n) dx = \int_{\Omega} W_1(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{m}) dx. \quad (6.33)$$

Otóż, wiemy, że  $\nabla \mathbf{u}_n \rightarrow \nabla \mathbf{u}$  w  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 3})$  dla  $p < 6$  oraz  $\mathbf{m}_n \circ \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{m} \circ \mathbf{u}$  p.w.  $\Omega$ .

Oprócz tego, korzystając z lematu 7.3, mamy, że

$$|\mathbf{m}_n \circ \mathbf{u}_n| = \frac{\tau}{\det \nabla \mathbf{u}_n} \rightarrow \frac{\tau}{\det \nabla \mathbf{u}} = |\mathbf{m} \circ \mathbf{u}| \text{ w } L^1(\Omega).$$

Korzystamy z faktu [74, Theorem1], (bez potrzeby wybierania innego podciągu) wnioskujemy, że  $\mathbf{m}_n \circ \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{m} \circ \mathbf{u}$  w  $L^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Wobec tego, z ciągłości operatora Nemytskii'ego [63], mamy

$$L^r(\Omega) \times L^1(\Omega) \ni (\nabla \mathbf{u}, \mathbf{m}) \rightarrow W_1(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{m}) \in L^1(\Omega),$$

gdzie  $r < 6$  jest wykładnikiem wzrostu dla  $W_1(\mathbf{F}, \mathbf{m})$  danym w (6.13), stąd wnioskujemy (6.33).

Teraz chcemy udowodnić, że

$$\int_{\Omega} \psi^\varepsilon(\det \nabla \mathbf{u}) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi^\varepsilon(\det \nabla \mathbf{u}_n) dx.$$

Dla energii wymiany magnetycznej mamy z lematu 7.6, że

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}|^2 \det \nabla \mathbf{u} dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{m}_n|^2 \det \nabla \mathbf{u}_n dx.$$

Wracając do energii oddziaływania magnetycznego zauważymy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\mathbf{h} \circ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{m} \circ \mathbf{u}_n) \det \nabla \mathbf{u}_n dx = \int_{\Omega} (\mathbf{h} \circ \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} \circ \mathbf{u}) \det \nabla \mathbf{u} dx.$$

Wtedy mamy:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{h} \circ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{m} \circ \mathbf{u}_n) \det \nabla \mathbf{u}_n dx = \int_{\mathcal{O}(\mathbf{u}_n)} \mathbf{m}_n(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{z}) dz = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\mathbf{u}_n(\Omega)} \mathbf{m}_n(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{z}) dz.$$



Otóż,  $\chi_{u_n(\Omega)} \mathbf{m}_n$  zbiega do  $\chi_{u(\Omega)} \mathbf{m}$  w  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , co trzeba było pokazać.

Dalej chcemy pokazać zbieżność energii magnetostatycznej  $e_{mag}(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ , podanej w (6.7), spełniającej warunek

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\nabla_z \zeta + \chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \mathbf{m}) \nabla_z \eta \, dz = 0 \text{ dla wszystkich } \eta \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^3), \quad (6.34)$$

gdzie

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^3) = \left\{ \zeta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) : \nabla \zeta \in L^2, \int_{\mathbb{R}^3} \zeta(\mathbf{z}) \, dz = 0 \right\}.$$

Ponieważ  $\nabla_z \zeta$  dla  $\zeta \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^3)$  jest w przestrzeni  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  odwzorowaniem  $\chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \mathbf{m}(\mathbf{z})$ , mamy:

$$\|\nabla_z \zeta\|_{L^2} \leq \|\chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \mathbf{m}\|_{L^2};$$

oraz ponieważ  $\chi_{\mathcal{O}(u_n)} \mathbf{m}_n \rightarrow \chi_{\mathcal{O}(\mathbf{u})} \mathbf{m}$  w  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_z \zeta_n|^2 \, dz = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_z \zeta|^2 \, dz.$$

Teraz pozostało udowodnić, że słabe granice również spełniają ograniczenia dotyczące saturacji magnetycznej (6.4). Jeżeli  $(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n) \subset \mathcal{A}$  jest ciągiem minimalizującym, wtedy nierówność (6.4) będzie udowodniona, jeżeli pokażemy w  $L^2$  zbieżność  $\mathbf{m}_n \circ \mathbf{u}_n$  oraz  $\det \nabla \mathbf{u}_n$ . Otóż mamy:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |(\mathbf{m}_n \circ \mathbf{u}_n) \det \nabla \mathbf{u}_n - (\mathbf{m} \circ \mathbf{u}) \det \nabla \mathbf{u}| \, dx \\ & \leq \|\mathbf{m}_n - \mathbf{m}\|_{L^2} \|\det \nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2} + \|\mathbf{m}\|_{L^2} \|\det \nabla \mathbf{u}_n - \det \nabla \mathbf{u}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Wówczas, zbierając wszystkie rezultaty, otrzymamy:

$$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n).$$

Oznacza to, że  $(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}$  jest poszukiwanym minimum energetycznym dla funkcjonału  $J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m})$ . □

Rozpatrzmy związek pomiędzy minimizerami dla ciała magnetosprężystego prawie nieściśliwego i nieściśliwego.

Zapiszmy funkcjonał energii (6.17) w postaci:

$$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}) - \psi(1)] \, dx. \quad (6.35)$$

Wiemy na mocy twierdzenia 7.2, że funkcjonał  $J_\varepsilon$  osiąga  $\forall \varepsilon > 0$  swoje minimum, które jest realizowane w zbiorze (6.14):

$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3) \times W^{1,2}(\mathcal{O}(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3) : \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x) \right.$$

dla  $\forall x \in \partial\Omega_1 = \Gamma \quad \psi(\det \nabla \mathbf{u}) \in L^1(\Omega), \det \nabla \mathbf{u} > 0$  p.w. w  $\Omega$

oraz  $\mathbf{u}$  jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznaczny p.w. w  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ },

oraz zachodzi założenie o saturacji magnetycznej (por.(7.4)):

$$|\mathbf{m}(\mathbf{u}(x))| \det \nabla \mathbf{u}(x) = \tau \quad \text{w } \Omega.$$

Przyjmijmy, że dla dowolnej lecz ustalonej liczby  $\varepsilon, \varepsilon \in (0,1)$  minimum funkcjonału

$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  jest osiągalne w punkcie  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{m}^\varepsilon) \in \mathcal{A}$ , czyli (dla ustalonego  $\varepsilon$ ):

$$\inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}} J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = J_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{m}^\varepsilon).$$

Sformułujemy następujące zadania minimalizacji funkcjonałów energetycznych.

**Zadanie ( $P_\varepsilon$ ).**

Dla dowolnej ustalonej liczby rzeczywistej  $\varepsilon \in (0,1)$  znaleźć minimum funkcjonału

$$\inf \left\{ J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \mid (\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A} \cap \left\{ |\mathbf{m}(\mathbf{u}(x))| \det \nabla \mathbf{u}(x) = \tau \quad \text{w } \Omega \right\} \right\}, \quad (6.36)$$

gdzie  $\mathcal{A}$  dane wzorem (6.14).

**Zadanie ( $P_0$ ).**

Niech  $\mathcal{A}_0 = \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3) \times W^{1,2}(\mathcal{O}(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3) : \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_0(x) \right.$

dla  $\forall x \in \partial\Omega_1 = \Gamma, \det \nabla \mathbf{u} = 1$  p.w. oraz  $\mathbf{u}$  jest odwzorowaniem

jednoznaczny p.w. w  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ }. (6.37)

Oczywiście zbiór  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ .

Znaleźć minimum funkcjonału  $J_0$

$$\inf \left\{ J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \mid (\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}_0 \cap \left\{ |\mathbf{m}(\mathbf{u}(x))| = \tau \right\} \right\}.$$

Zauważmy, że zarówno  $J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  oraz  $J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  są funkcjonałami dolnie półciągłymi.

Dolna półciągłość  $J_\varepsilon$  wynika z twierdzenia 7.2. Udowodnimy następujący lemat.

**Lemat 7.8.** Funkcjonał  $J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  określony wzorami (6.35) oraz (6.17) jest dolnie półciągły.

Dowód. Niech funkcjonał  $J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  nie będzie dolnie półciągły, wtedy

$$J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}) - \psi(1)] dx$$

też nie jest półciągły. Ale

$$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}) - \psi(1)] dx$$

jest funkcjonałem dolnie półciągłym. Mamy sprzeczność, co oznacza, że przypuszczenie o nieciągłości funkcjonału  $J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m})$  było błędne.  $\square$

Mamy następującą hipotezę o istnieniu rozwiązania dla zagadnienia magnetosprężystego nieściśliwego.

### Hipoteza H.

Problem  $(P_0)$  ma rozwiązanie w zbiorze  $\mathcal{A}_0$ , określonym wzorem (6.37), oraz wektor magnetyzacji spełnia warunek nasycenia  $|\mathbf{m}(\mathbf{u}(x))| = \tau$ .

Udowodnimy następujące twierdzenie mówiące o tym, że granica ciągu słabych rozwiązań dla zagadnienia prawie nieściśliwego jest rozwiązaniem problemu nieściśliwego.

### Twierdzenie 7.3.

Dla dowolnego ciągu  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) istnieje podciąg (oznaczamy jego identycznie  $\varepsilon_n$ ) oraz istnieje rozwiązanie  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0) \in \mathcal{A}_0$  zadania  $(P_0)$ , takich że

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup \mathbf{u}_0 \text{ w } W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ \mathbf{m}_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup \mathbf{m}_0 \text{ w } W^{1,2}(\mathcal{O}(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3), \\ \det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n} &\rightarrow 1 \text{ silnie w } L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Dowód. Najpierw pokażemy ograniczoność ciągu  $(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n})$ . Ponieważ  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ , wobec tego mamy

$$J_{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = \inf_{\mathcal{A}} J_{\varepsilon_n}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \leq \inf_{\mathcal{A}_0} J_{\varepsilon_n}(\mathbf{u}, \mathbf{m}) = J_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0). \quad (6.39)$$

Ponieważ  $J_{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n})$  jest ograniczonym z dołu, wobec tego na mocy założenia o koercywności, por. rozdział 7 lub [63], mamy:

$$\|\nabla^2 \mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{L^2} \leq C, \quad \|\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{L^2} \leq C, \quad \|\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}\|_{L^2} \leq C, \quad \|\nabla \mathbf{m}_{\varepsilon_n}\|_{L^2} \leq C, \quad (6.40)$$

gdzie  $C$  jest stałą niezależną od  $\varepsilon_n$ .

Ponieważ z każdego ciągu ograniczonego można zawsze wybrać podciąg słabo zbieżny, to

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\varepsilon_n} &\rightarrow \hat{\mathbf{u}} \quad \text{w } W^{2,2}(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ \mathbf{m}_{\varepsilon_n} &\rightarrow \hat{\mathbf{m}} \quad \text{w } W^{1,2}(\mathcal{O}(\mathbf{u}); \mathbb{R}^3), \\ \det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n} &\rightarrow \delta \quad \text{w } L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{6.41}$$

Z twierdzeń o zanurzeniu przestrzeni Sobolewa wnioskujemy, że

$$\mathbf{u}_{\varepsilon_n} \rightarrow \hat{\mathbf{u}} \quad \text{w } W^{1,s}(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad 2 \leq s \leq 6.$$

Z własności słabej ciągłości funkcji, które są znane jako tzw. zerowe lagrangiany (ang. null-Lagrangians), por. Ball [5,7], Dacorogna [23], w szczególności wyznacznika  $(\det \nabla \mathbf{u})$ , który jest szczególnym przypadkiem zerowego lagrangianu, wynika, że

$$\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \delta = \det \nabla \hat{\mathbf{u}}, \tag{6.42}$$

gdzie  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{m}}) \in \mathcal{A}$ .

Ponieważ funkcjonał energii  $J_0$  jest dolnie półciągły (zgodnie z lematem 7.8), to istnieje następująca granica oraz zachodzi nierówność

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) \geq J_0(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{m}}). \tag{6.43}$$

Niech minimum funkcjonału  $J_{\varepsilon_n}$ , por. (6.35) będzie realizowane w  $(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n})$ . Mamy wobec tego

$$J_{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) + \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}) - \psi(1)] d\mathbf{x}. \tag{6.44}$$

Mnożąc stronami powyższą relację przez  $\varepsilon_n > 0$  dostajemy

$$\varepsilon_n J^{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = \varepsilon_n J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) + \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}) - \psi(1)] d\mathbf{x}. \tag{6.45}$$

Ze związków (6.44) oraz (6.45) wynika nierówność:

$$\varepsilon_n J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) \leq \varepsilon_n J^{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) \leq \varepsilon_n J_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0), \tag{6.46}$$

por. także (6.39).

Ponieważ  $J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n})$  jest ciągiem ograniczonym z dołu, wobec tego wnioskujemy na mocy (6.46), że

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n J^{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = 0.$$

Konsekwencją tego, że  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = 0$ , jest związek

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}) - \psi(1)] d\mathbf{x} = 0.$$

Ponieważ, zgodnie z wcześniejszymi założeniami funkcjonał  $\psi(\cdot)$  jest wypukły oraz

$$\psi(a) - \psi(1) = 0 \Leftrightarrow a = 1,$$

to

$$\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n} \rightarrow 1 \text{ w } L^2(\Omega).$$

Stąd także

$$\det \nabla \hat{\mathbf{u}} = 1 \text{ p.w., czyli } \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}_0.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}_0} J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m}) &= J_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0) \geq \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J^{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) \geq \\ &\geq \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) + \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}) - \psi(1)] dx \geq \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon}, \mathbf{m}_{\varepsilon}) \geq J_0(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{m}}). \end{aligned}$$

Ponieważ  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{m}}) \in \mathcal{A}_0$  ( $\det \nabla \hat{\mathbf{u}} = 1$ ), zatem  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{m}})$ , oraz

$$\begin{aligned} J_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0) &= \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J^{\varepsilon_n}(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J_0(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) + \\ &+ \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_{\Omega} [\psi(\det \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon_n}) - \psi(1)] dx = \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J(\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = J_0(\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0). \end{aligned}$$

Czyli  $\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} (\mathbf{u}_{\varepsilon_n}, \mathbf{m}_{\varepsilon_n}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{m}_0) \in \mathcal{A}_0$  jest rozwiązaniem zagadnienia  $(P_0)$ : znaleźć

$$\inf_{(\mathbf{u}, \mathbf{m}) \in \mathcal{A}_0} J_0(\mathbf{u}, \mathbf{m}).$$

□

Znaczenie tego twierdzenia jest następujące: materiały sprężyste lub magnetosprężyste, które wykazują niski stopień ściśliwości i są w literaturze nazywane prawie nieściśliwymi, mogą być w pełni aproksymowane materiałami nieściśliwymi, których opis i związki konstytutywne są znacznie prostsze.

## Rozdział 7

### Podsumowanie i wnioski końcowe

W niniejszej pracy przedstawiono podstawowe aspekty dotyczące fizycznych i matematycznych zagadnień modelowania materiałów magnetycznych.

Rozważania w rozprawie dotyczyły materiałów magnetycznych nieodkształcalnych oraz magnetosprężystych. Do ich opisu stosowano teorię mikromagnetyzmu, główne tezy której podano w rozdziale drugim. Równania mikromagnetyzmu prowadzą do zagadnienia minimalizacji energii całkowitej materiałów magnetycznych. W pracy rozpatrzono zagadnienia minimalizacji energii dla sztywnych ferromagnetyków, które prowadzą do minimalizacji funkcjonałów niewypukłych. Takie zagadnienie nie zawsze mają rozwiązania w klasycznym sensie, tzn. w klasie funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Dla rozwiązania takich zagadnień stosowano relaksacje przy pomocy miar Younga, która została opisana w rozdziale czwartym. Poszukiwano rozwiązań zagadnienia minimalizacji energii dla materiałów magnetycznych w sensie miar Younga. Elementy teorii miar Younga podano w rozdziale trzecim. W rozdziale piątym został zrealizowany przykład obliczenia numerycznego dwuwymiarowego zagadnienia zrelaksowanego dla nieodkształcalnego ferromagnetyka jednoosiowego. Otrzymane wyniki jakościowo są zgodne z danymi o mikrostrukturze takiego ferromagnetyka. Można zatem stwierdzić, że stosując przedstawioną w rozdziale 5 metodę numeryczną do rozwiązania zrelaksowanego przez miary Younga zagadnienia możemy obliczyć i analizować mikrostrukturę magnetyczną różnorodnych materiałów magnetycznych.

Ciekawy wydaje się przypadek stosowania teorii miar Younga do modelowania materiałów magnetosprężystych. Zagadnienia te stanowiąc będą zapewne tematykę dalszych prac autorki.

Zagadnienia związane z ciałem magnetosprężystym są rozpatrywane w rozdziale szóstym i dotyczą specjalnego przypadku ciał – ciał nieściśliwych i prawie nieściśliwych. Udowodniono istnienie rozwiązania zagadnienia minimalizacji funkcjonału, opisującego takie materiały.

## Bibliografia

1. Adams R.A., *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. Aharoni A., *Micromagnetics: past, present and future*, Physica B, Elsevier, **306**,1-9, 2001.
3. Acerbi E., Fusco N., *Semicontinuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **86**, 1984,125-145.
4. Balder E.J., *Young measures techniques for existence of Carnot-Nash-Waltras equilibria*, w: Topics in Mathematical Economics and Game Theory, M. Wooders (red.), Fields Institute Communications **23**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, 31-39.
5. Ball J.M., *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch.Rat.Mech.Anal. **63**, 1977, 337-403.
6. Ball J.M., *On the calculus of variations and sequentially weakly continuous maps*, w: Ordinary and Partial Differential Equations (Dundee,1976), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1976.
7. Ball J.M., Currie J., Olver P., *Null lagrangians, weak continuity, and variational problems of arbitrary order*, J.Funct. Anal. **421**, 1981, 315-328.
8. Ball J.M., James R.D., *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Arch. Rat. Mech. Anal. **100**, 1987,13-52.
9. Ball J.M., *A version on the fundamental theorem for Young measures*, w: Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions, Springer, Berlin, 1989.
10. Ball J.M., Taheri A., Winter M., *Local minimizers in micromagnetics and related problem*, Calc. Var., **14**, 1-27, 2002.
11. Brailsford F., *Materiały magnetyczne*, PWN Warszawa, 1964.
12. Bielski W., Kruglenko E., Telega J.J., *Nonconvex minimization problems and microstructures*, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, **10**, vol. 2, Ed. by W.Szcześniak, OW PW, Warszawa, 2002, 897-912.
13. Bielski W., Kruglenko E., Telega J.J., *Miary Younga i ich zastosowania*, Matematyka Stosowana, **4** (45), PTM, Warszawa 2003 .
14. Brown W.F., *Micromagnetics*, Wiley, New York, 1963.
15. Brown W.F., *Magnetoelastic Interactions*, Springer, Berlin, 1966.
16. Braides A.,  *$\Gamma$ -convergence for beginners*, Oxford University Press, 2002.
17. Carstensen C., Prohl A., *Numerical analysis of relaxed micromagnetics by penalised finite element*, Nimerische Mathematik, **90**, no.1, 65-99, 2001, Publisher: Springer-Verlag, Gemeny.
18. Carstensen C., *Numerical analysis of microstructure*, Max-Plank-Institute, Lecture Notes no.:**10**, 2001.
19. Carstensen C., Roubiček T., *Numerical approximation of Young measures in nonconvex variational problems*, Num. Math. **84**, 395-415, 2000.
20. Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
21. Dacorogna B., *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-linear Functionals*, Lecture Notes in Math. **922**, Springer, Berlin, 1989.
22. Dacorogna B., *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1989.
23. Dacorogna B., J.-P. Haeberly, *Some numerical methods for the study of the convexity notions arising in the calculus of variation*, EPFL Technical Report no.06.95, July, 1995.
24. DeSimone A., *Energy minimizers for large ferromagnetic bodies*, Arch. Rational Mech. Anal., **125**, 1993, 99-143.
25. DeSimone A., Dolzmann, *Existence of minimizers for a variational problem in two-dimensional nonlinear magnetoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **144**, 107-120, 1998.
26. DeSimone A., James R.D., *A constrained theory of magnetoelasticity*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **50**, 2,2002, 283-320.
27. Hungerbühler N., *A refinement of Ball's theorem on Young measures*, New York J. Math. **3**, 1997, 48-53.

28. Hungerbühler N., *Young measure and nonlinear PDEs*, habilitation thesis, Birmingham, October 1999.
29. Hubert A., Schäfer R., *Magnetic Domains. The Analysis of Magnetic Microstructures*, Springer, 2000.
30. James R.D., Kinderlehrer D., *Frustration in ferromagnetic materials*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2,no.3,1990, 215-239, West Germany.
31. James R.D., Müller S., *Internal variables and fine-scale oscillations in micromagnetics*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 6,1994, 291-336.
32. James R.D., *New materials from theory: trends in the development of active materials*, International Journal of Solid and Structures, 37, 2000, 239-250.
33. James R.D., Kinderlehrer D., *Theory of magnetostriction with applications to  $Tb_xDy_{1-x}Fe_2$* , Philosophical Magazine B- Physics of Condensed Matter Structural Electronic Optical and Magnetic Properties, 68, no.2, Aug.1993, 237-74, UK.
34. Kałamajska A. , *On lower semicontinuity of multiple integrals*, Colloq. Math. 74, 1997.
35. Kałamajska A. *Between the classical theorem of Young and convergence theorem in set-valued analysis*, preprint no. 633, Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk, 2003.
36. Kružík M., Roubíček T., *Weierstrass-type maximum principle for microstructure in micromagnetics*, Max-Planck-Institut, Preprint no.40,1999, Zeitschrift für Anal. Anwendungen, 19, 2000,415-428.
37. Kružík M., Prohl A., *Young measure approximation in micromagnetics*, Numerische Mathematik, 90, no.2, Dec. 2001,291-307, Publisher: Springer-Verlag, Germany.
38. Kružík M., *Numerical solution to relaxed problems in micromagnetics*, Preprint,1997.
39. Kinderlehrer D., Ling Ma, *Computational hysteresis in magnetoelastic systems*, Akademie Verlag, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 76, suppl., no.4, 1996,269-272, Germany.
40. Kinderlehrer D., Pedregal P., *Characterization of Young measure generated by gradients*, Arch. Rat. Mech. Anal. 115, 1991,329-365.
41. Kinderlehrer D., Pedregal P., *Remarks about Young measures supported on two wells*, 1996.
42. Kinderlehrer D., Pedregal P., *Weak convergence of integrands and the Young measure representation*, SIAM J. Math. Anal. 23,1992, 1-19.
43. Kinderlehrer D., Pedregal P., *Gradient Young measure generated by sequences in Sobolev space*, J. Geom. Anal. 4, 1994.
44. Kinderlehrer D., Mason D.E., *Incoherence at heterogeneous interface*, J. Mech. Physics Solids 47, 1997, 1609-1632.
45. Kittel Ch., *Wstęp do fizyki ciała stałego*, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa, 1999.
46. Kruglenko E., *Zagadnienie minimalizacji dla mikromagnetyków nieodkształcalnych*, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, 12, vol. 2, Ed. by W.Szcześniak, OW PW, Warszawa, 2004, 873-882.
47. Landau L.D., Lifshitz E., *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*, Phys. Z. Sowjetunion, 8, 153-169, 1935.
48. Luskin M., Ling Ma, *Analysis of the finite element approximation of microstructure in micromagnetics*, SIAM J. Num. Anal., 29, 1992,320-331.
49. Le Dret H., *Incompressible limit behaviour of slightly compressible nonlinear elastic materials*, Math. Mod. Num. Anal., 20, 315-340, 1986.
50. Morrey C. B., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1965.
51. Nicolaides R.A., Walkington N.J., *Computation of microstructure utilizing Young measure representations*, J. Intelligent Materials Systems and Structures 4, 1993, 795-800.
52. Pedregal P., *Relaxation in ferromagnetism: rigid case*, J. Nonlinear Sci., 4, 1994, 105-125.
53. Pedregal P., *Parametrized Measures and Variational Principles*, Birkhäuser-Verlag, Basel, Switzerland, 1997.
54. Pedregal P., *Numerical approximation of parametrized measures*, Numer. Func. Anal. And Optimiz., 16, 1995, 1049-1066.
55. Pedregal P., *Relaxation in magnetostriction*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 10, 2000, 1-19, vol. 36,1,1997, 27-58.



56. Pedregal P., *Variational Methods in Nonlinear Elasticity*, SIAM, 2000.
57. Pedregal P., *On the numerical analysis of non-convex variational problems*, Num. Math., **74**, no.3, 325-336, 1996.
58. Prohl A., *Error analysis for the computation of microstructure in cubic ferromagnets*, Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität Kiel, 1999, preprint.
59. Prohl A., *Computational micromagnetism*, Leipzig, Teubner, 2001.
60. Rogers R.C., *Nonlocal variational problems in nonlinear elastomagneto-elastostatics*, SIAM J. Math. Anal., **19**, 1329-1347, 1988.
61. Roubiřek T., *Microstructure in ferromagnetics and its steady- state and evolution models*, Preprint 2002.
62. Rostamian R., *Internal constraints in boundary value problems of continuum mechanics*, Indiana Math., **27**, 637-659, 1978.
63. Rybka P., Luskin M., *Existence of energy minimizers for magnetostrictive materials*, SIAM J. Math. Anal. **36**, No.6, 2004-2019, 2005.
64. Rudin W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.
65. Sychev M.A., *Young measure approach to characterization of behaviour of integral functionals on weakly convergent sequences by means of their integrands*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire **15**, 1998, 755-782.
66. Sychev M.A., *A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire **16**, 1999, 773-812.
67. Tikle R., James R.D., *Magnetic and magnetomechanical properties of Ni<sub>2</sub>MnGa*, J. Magn. Magn.Mater., **195**, 627-638, 1999.
68. Tartar L., *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, w: Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot Watt Symposium, vol.IV, R. Knops (red.), Res. Notes in Math. **39**, Pitman, London, 1979.
69. Васильев А.Н., Бучельников В.Д., Такаги Т., Ховайло В.В., Эстрин Э.И., *Ферромагнетика с памятью формы*, Успехи физических наук, том **173**, 6, 2003.
70. Вонсовский С.В., *Магнетизм*, Наука, 1984.
71. Valadier M., *Young measures*, w: Method of Nonconvex Analysis, Lecture Notes in Math. **1446**, Springer, Berlin, 1990.
72. Zhiping Li, Xiaonan Wu, *Multi-atomic Young measure and artificial boundary in approximation of micromagnetics*, Applied Numerical Mathematics, **51**, 69-88, 2004.
73. *Podstawy termomechaniki materiałów z pamięcią kształtu*, z serii: Współczesne trendy w mechanice materiałów, red. W.K.Nowacki, IPPT PAN, Warszawa 1996.
74. Brezis H., Lieb E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc.Amer.Math.Soc., **88**, 486-490,1983.
75. Encyclopedia of Smart Materials, vol.1-2, ed.M. Schwartz, John Wiley&Sons,2002, <http://www.knovel.com/knovel2/Toc.jsp?BookID=965&VerticalID=0>
76. Fonseca I., Gangbo W., *Degree Theory in Analysis and Applications*, Clarendon Press, New York, 1995.

## Dodatek 1

Program numeryczny w języku „Maple” do przykładu numerycznego z rozdziału 5.

1. Obliczenie zewnętrznego pola magnetycznego  $\mathbf{H}$ , przyłożonego do jednoosiowego ferromagnetyka.

```
> restart;
> with(linalg);
> a:=3.5*10^(-2);
b:=2*10^(-3);
c:=10^(-3);
```

$$a := .03500000000$$

$$b := \frac{1}{500}$$

$$c := \frac{1}{1000}$$

```
> H:=[a*x*(x-1), b*x-c];
>
>
```

$$H := \left[ .03500000000 x (x-1), \frac{1}{500} x - \frac{1}{1000} \right]$$

```
> N:=6;
H:=array(1..N);
for i from 1 to N do
H[i]:=evalf([int(a*x*(x-1), x=(i-1)/N..i/N), int(b*x-c, x=(i-1)/N..i/N)]);
> od;
```

$$N := 6$$

$$H := \text{array}(1..6, [ ])$$

$$H_1 := [-.0004320987654, -.0001388888889]$$

$$H_2 := [-.001080246914, -.00008333333333]$$

$$H_3 := [-.001404320988, -.00002777777778]$$

$$H_4 := [-.001404320988, .00002777777778]$$

$$H_5 := [-.001080246914, .00008333333333]$$

$$H_6 := [-.0004320987654, .0001388888889]$$

2. Rozwiązanie  $u_h(x)$  równania Maxwella (5.13) dla płaskiego przypadku z wykorzystaniem całkowania symbolicznego programu „Maple”

```

> restart;
N:=6;
                                     N:=6

> S1 := proc (u, v) options operator, arrow;
1/2*u*ln(u^2+v^2)-u*v*arctan(u/v) end proc;
S2 := proc (u, v) options operator, arrow;
1/2*v*ln(u^2+v^2)-v*u*arctan(v/u) end proc;
> S1(u,v)-S2(v,u);
> G1:=array(1..N):
for i from 1 to N do
G1[i]:=unapply(-(S2(x1-1,i/N-x2)-S2(x1-1,(i-1)/N-x2)-
S2(x1,i/N-x2)+S2(x1,(i-1)/N-x2))/(2*Pi),x1,x2);
od;
> G2:=array(1..N):
for i from 1 to N do
G2[i]:=unapply(-(S1(1-x1,x2-i/N)-S1(-x1,x2-i/N)-S1(1-x1,x2-
(i-1)/N)+S1(-x1,x2-(i-1)/N))/(2*Pi),x1,x2);
od;
> i:='i';
u:=unapply(sum(m[q][1]*G1[q](x1,x2)+m[q][2]*G2[q](x1,x2),q=
1..N),x1,x2);
> U11:=limit(u(x,y),x=1);
> U10:=limit(u(x,y),x=0);
> u1:=array(1..N);
for i from 1 to N do
u1[i]:=evalf(int(U11-U10,y=(i-1)/N..i/N)):
od;
> Wu:=array(1..N);
for i from 1 to N do
Wu[i]:=limit(u(x,y),y=i/N)-limit(u(x,y),y=(i-1)/N);
od;
> u2:=array(1..N);
for i from 1 to N do
u2[i]:=evalf(int(Wu[i],x=0..1)):
od;
> u1[1] := .1649661958e-1*m[3][1]+.1037003455e-
1*m[4][1]+.5752335127e-1*m[1][1]+.3053000791e-1*m[2][1];
u1[2] := .1649661958e-1*m[4][1]+.3053000791e-
1*m[3][1]+.3053000791e-1*m[1][1]+.5752335127e-1*m[2][1];
u1[3] := .5752335127e-1*m[3][1]+.3053000792e-
1*m[4][1]+.1649661958e-1*m[1][1]+.3053000791e-1*m[2][1];
u1[4] := .1649661958e-1*m[2][1]+.1037003455e-
1*m[1][1]+.5752335127e-1*m[4][1]+.3053000791e-1*m[3][1];

```

```

u2[1] := .1924766489*m[1][2]-.3053000791e-1*m[2][2]-
.1649661969e-1*m[3][2]-.1037003440e-1*m[4][2];
u2[2] := -.3053000777e-1*m[1][2]+.1924766489*m[2][2]-
.3053000791e-1*m[3][2]-.1649661969e-1*m[4][2];
u2[3] := -.1649661969e-1*m[1][2]-.3053000777e-
1*m[2][2]+.1924766488*m[3][2]-.3053000791e-1*m[4][2];
u2[4] := -.1037003435e-1*m[1][2]-.1649661988e-1*m[2][2]-
.3053000806e-1*m[3][2]+.1924766488*m[4][2];

```

3. Program do obliczenia wektorów namagnesowania na każdej z 6 warstw.

```

>mi6:=
proc(N::integer,K,theta::array(1..3),alpha::array(1..3))
local
a,b,c,m,s,S,i,U11,U10,Wu,G1,G2,x,rw,W,A,E,E1,eq,eqs,sol,L,k
;
global u1,u2,u,Ec,X;
>a:=3.5*10^(-2);
b:=2*10^(-3);
c:=10^(-3);
X:=array(1..N,1..K);
s:='s';
for i from 1 to N/2 do
m[i]:=array(1..2,[sum(X[i,s]*cos(theta[s]),s=1..K),sum(X[i,
s]*sin(theta[s]),s=1..K)]);
od;
s:='s';
for i from N/2+1 to N do
m[i]:=array(1..2,[sum(X[i,s]*cos(alpha[s]),s=1..K),sum(X[i,
s]*sin(alpha[s]),s=1..K)]);
od;
>i:='i';
for x from 1 to N do
rw[x]:=sum(X[x,i],i=1..K)-1;
od;
>x:='x';
W:=sum(L[x]*rw[x],x=1..N);
u1:=array(1..6);
u1[1] := .2912589885e-1*m[1][1]+.1698789401e-
1*m[2][1]+.1038872267e-1*m[3][1]+.7208887381e-
2*m[4][1]+.5262927920e-2*m[5][1]+.3975424313e-2*m[6][1];
u1[2] := .1698789403e-1*m[1][1]+.2912589885e-
1*m[2][1]+.1698789404e-1*m[3][1]+.1038872285e-
1*m[4][1]+.7208887465e-2*m[5][1]+.5262927920e-2*m[6][1];
u1[3] := .1038872270e-1*m[1][1]+.1698789401e-
1*m[2][1]+.2912589880e-1*m[3][1]+.1698789401e-
1*m[4][1]+.1038872275e-1*m[5][1]+.7208887180e-2*m[6][1];

```

```

u1[4] := .7208887444e-2*m[1][1]+.1038872268e-
1*m[2][1]+.1698789404e-1*m[3][1]+.2912589880e-
1*m[4][1]+.1698789399e-1*m[5][1]+.1038872268e-1*m[6][1];
u1[5] := .5262927920e-2*m[1][1]+.7208887291e-
2*m[2][1]+.1038872264e-1*m[3][1]+.1698789401e-
1*m[4][1]+.2912589880e-1*m[5][1]+.1698789399e-1*m[6][1];
u1[6] := .3975424556e-2*m[1][1]+.5262927699e-
2*m[2][1]+.7208887159e-2*m[3][1]+.1038872275e-
1*m[4][1]+.1698789399e-1*m[5][1]+.2912589880e-1*m[6][1];
u2:=array(1..N);
u2[1] := .1375407676*m[1][2]-.1698789380e-1*m[2][2]-
.1038872242e-1*m[3][2]-.7208887555e-2*m[4][2]-.5262927920e-
2*m[5][2]-.3975424334e-2*m[6][2];
u2[2] := -.1698789410e-1*m[1][2]+.1375407676*m[2][2]-
.1698789382e-1*m[3][2]-.1038872242e-1*m[4][2]-.7208887493e-
2*m[5][2]-.5262927920e-2*m[6][2];
u2[3] := -.1038872264e-1*m[1][2]-.1698789408e-
1*m[2][2]+.1375407676*m[3][2]-.1698789401e-1*m[4][2]-
.1038872240e-1*m[5][2]-.7208887250e-2*m[6][2];
u2[4] := -.7208887402e-2*m[1][2]-.1038872246e-1*m[2][2]-
.1698789380e-1*m[3][2]+.1375407676*m[4][2]-.1698789401e-
1*m[5][2]-.1038872248e-1*m[6][2];
u2[5] := -.5262927920e-2*m[1][2]-.7208887555e-2*m[2][2]-
.1038872246e-1*m[3][2]-.1698789408e-
1*m[4][2]+.1375407676*m[5][2]-.1698789406e-1*m[6][2];
u2[6] := -.3975424467e-2*m[1][2]-.5262927920e-2*m[2][2]-
.7208887333e-2*m[3][2]-.1038872242e-1*m[4][2]-.1698789404e-
1*m[5][2]+.1375407676*m[6][2];
>i:='i';
A:=sum(m[i][1]*u1[i]+m[i][2]*u2[i],i=1..N)/N;
>x:='x';
for i from 1 to N/2 do
E[i]:=1/N*sum(X[i,j]*int(10^(-2)*
(cos(theta[j])^2+cos(theta[j])^4)-(a*x*(x-
1)*cos(theta[j])+(b*x-c)*sin(theta[j])),x=(i-
1)/N..i/N),j=1..K);
od;
for i from N/2+1 to N do
E[i]:=1/N*sum(X[i,j]*int(10^(-2)*
(cos(alpha[j])^2+cos(alpha[j])^4)-(a*x*(x-
1)*cos(alpha[j])+(b*x-c)*sin(alpha[j])),x=(i-
1)/N..i/N),j=1..K);
od;
>i:='i';
E1:=sum(E[i],i=1..N);
>eq:=array(1..N,1..K);
for m from 1 to N do

```

```

for i from 1 to K do
eq[m,i]:=diff(A/2+E1+W,X[m,i])=0;
od;
od;
eqs:=array(1..N);
> for s from 1 to N do
eqs[s]:=diff(A/2+E1+W,L[s])=0;
od;
>
sol:=solve({seq(seq(eq[k,m],k=1..N),m=1..K),seq(eqs[s],s=1..N)},
{seq(seq(X[k,m],k=1..N),m=1..K),seq(L[k],k=1..N)});
assign(sol);
>
s:='s';
for i from 1 to N/2 do
m[i]:=array(1..2,[evalf(sum(X[i,s]*cos(theta[s]),s=1..K),evalf(sum(X[i,s]*sin(theta[s]),s=1..K))]);
od;
s:='s';
for i from N/2+1 to N do
m[i]:=array(1..2,[evalf(sum(X[i,s]*cos(alpha[s]),s=1..K),evalf(sum(X[i,s]*sin(alpha[s]),s=1..K))]);
od;
Ec:=A/2+E1+W;
m;
> end proc:

```

4. Wprowadzamy dane do procedury numerycznej (mi6) i po wykonaniu jej otrzymujemy wektor namagnesowania na każdej warstwie oraz energię, która przy tym jest osiągalna. Przy tym również obliczamy intensywności  $\lambda_y$  (por.5.7-5.8 z rozdziału 5). (W procedurze  $\lambda_y$  oznaczono jako  $\mathbf{X}[i, s]$ ).

1)Wybieramy następujące kąty  $\theta, =0;2\pi/3;-2\pi/3$  do dyskretyzacji okręgu  $S$  (por.rys.5.1)

```

> M:=evalf( eval(mi6(6,3,vector(3,[0,2*Pi/3,-2*Pi/3]),vector(3,[0,2*Pi/3,-2*Pi/3]))) );
evalf(Ec);
eval(X);
M:=table([1=[-.0238051548,-.001042160076], 2=[-.0362220380,-.0006706019218],
3=[-.0405251924,-.0002298414102], 4=[-.0405251916,.0002298414102],
5=[-.0362220378,.0006706017486],
6=[-.0238051552,.001042160076]
])

```

.001409155328

```
[.3174632302 .3406666935 .3418700763
 .3091853080 .3450201738 .3457945182
 .3063165384 .3467090318 .3469744298
 .3063165390 .3469744295 .3467090315
 .3091853081 .3457945181 .3450201738
 .3174632298 .3418700765 .3406666937]
```

2) Najlepsze rozwiązanie otrzymujemy przy wyborze następujących kątów dla dyskretyzacji okręgu  $S$  (por.rys.5.1):  $\theta_i = -\pi/6; 2\pi/3; -2\pi/3$

```
> M:=evalf(eval(mi6(6,3,vector(3,[-Pi/6,2*Pi/3,-
 2*Pi/3]),vector(3,[-Pi/6,2*Pi/3,-2*Pi/3]))));
evalf(Ec);
```

```
eval(X);
```

```
M:=table([1=[-.0110233785,-.0010421600], 2=[-.0304836608,-.0006706018],
```

```
 3=[-.0346074560,-.0002298412], 4=[-.0346074554,.0002298416],
```

```
 5=[-.0304836608,.0006706017],
```

```
 6=[-.0110233789,.0010421601]
```

```
])
```

```
.001100981308
```

```
[.3579557306 .4237533620 .2182909074
 .3437098152 .4269783974 .2293117874
 .3406909877 .4278708239 .2314381885
 .3406909881 .4281362218 .2311727901
 .3437098152 .4277527417 .2285374431
 .3579557302 .4249567449 .2170875249]
```