Józef Bejda

ROZWIĄZANIE PROBLEMU PROPAGACJI PŁASKICH DWUWYMIAROWYCH FAL NAPRĘŻENIA

34/1968

WARSZAWA

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

D o   u ż y t k u   w e w n ę t r z n e g o

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd.1,6. Ark. druk.2,25.
Oddano do drukarni w grudniu 1968 r.
Wydrukowano w lutym 1969 r. Nr zam. 1081/0

Warszawska Drukarnia Naukowa , Warszawa ,
ul.Śniadeckich 8

ROZWIĄZANIE PROBLEMU PROPAGACJI PŁASKICH DWUWYMIAROWYCH FAL NAPRĘŻENIA W OŚRODKU SPRĘŻYSTO/LEPKOPLASTYCZNYM PRZY ZAŁOŻENIU ALLENA-SOUTHWELLA[1]

1. Wstęp

W ostatnich latach odczuwa się duże zapotrzebowanie praktyki na rozwiązania złożonych zagadnień brzegowych dynamiki ośrodków ciągłych. Wymaga się jak najmniej założeń upraszczających oraz coraz dokładniejszego matematycznego opisu zachowania się materiałów rzeczywistych, uwzględnienia obciążeń o dużych intensywnościach - takich, że brane są pod uwagę odkształcenia plastyczne. Uzyskanie rozwiązań w tych przypadkach jest z reguły niemożliwe. Wiele otrzymanych dotąd rozwiązań propagacji fal bazuje na założeniu cylindrycznej, lub sferycznej symetrii ośrodka, bądź na założeniu, że obciążenie rozłożone jest równomiernie na brzegu. Szeroki przegląd tych zagadnień i ich krytyczną ocenę można znaleźć w pracy [12]. W rzeczywistości rzadko realizuje się równomierny rozkład obciążenia. Przy wszelkiego rodzaju wybuchach lub gwałtownych i nagłych uderzeniach obciążenia o dużej intensywności występują na małej powierzchni, poza którą ich intensywność maleje, lecz nie może być zaniedbywalna.

[1] Praca została wygłoszona na Konferencji ZMOC w Bielsku-Białej w 1967r.

Celem niniejszej pracy jest uzyskanie rozwiązania propagacji płaskich fal w półprzestrzeni wywołanych nierównomiernym, dowolnie zmieniającym się w czasie obciążeniem. Przyjmuje się, że odkształcenia są małe. Materiał jest izotropowy i posiada własności mechaniczne sprężyste, lepkie i plastyczne. W konsekwencji przyjętego obciążenia realizuje się płaski stan deformacji. Przyjęto założenie poczynione przez Southwella i Allena, że część sprężysta i część lepkoplastyczna prędkości odkształcenia ϵ_z są jednocześnie równe zeru. Założenie to nie zmniejsza ani ogólności, ani stopnia trudności rozwiązania. Uzyskuje się jednakże przy tym założeniu równania, które jednocześnie w zakresie odkształceń sprężystych i plastycznych posiadają jednakowe własności charakterystyczne takie jak: prędkości propagacji ~~propagacji~~ fal, stożki charakterystyczne, bicharakterystyki i wektory własne. Dla wygody obliczeń wyjściowy układ równań wyprowadzono w wielkościach bezwymiarowych. Matematycznie problem został sprowadzony do układu pięciu równań różniczkowych prawie liniowych typu hiperbolicznego o trzech zmiennych niezależnych x,y.t. Układ ten rozwiązano metodą różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk stosowaną przez D.S. Butlera i D. Richardsona w dynamice cieczy i gazów i uogólnionej przez R.J. Cliftona dla sprężystych ośrodków ciągłych. Dokonano liniowej extrapolacji punktów przecięcia bicharakterystyk stożka wewnętrznego z płaszczyzną t = const. do odpowiednich punktów stożka zewnętrznego.

W literaturze matematycznej istnieje niewiele opracowań dotyczących metod rozwiązywania takich równań, chociaż zainteresowanie nimi matematyków szybko wzrasta. Wymienić tu należy przedewszystkim prace Butlera [3] , Cliftona [4], Laxa i Wendroffa [8], oraz cykl prac zawartych w monografii "Methods in computational physics" , a w szczególności prace Maenchena i Sacka [10] oraz Richardsona [13] .

Uwzględnienie efektów niesprężystych w równaniach konstytutywnych znacznie komplikuje zagadnienie. Przy obciążeniach o dużych intensywnościach tworzą się obszary plastyczne. Znalezienie powierzchni rozdzielającej obszar odkształceń sprężystych i niesprężystych możliwe jest tylko w sposób przybliżony. Uzyskane równania różnicowe w obszarze odkształceń niesprężystych są nieliniowe i w postaci uwikłanej. Dlatego też prawidłowy dobór kroku całkowania jest tu bardzo istotny.

Problem posiada aspekt bezpośrednich zastosowań praktycznych.

2. Wyprowadzenie równań wyjściowych

W układzie współrzędnych kartezjańskich x,y,z rozważmy półprzestrzeń $y = 0$. W chwili $t = 0$ wzdłuż osi Oz przyłożone zostało obciążenie $p/t,x/$. Problem taki występuje na przykład w inżynierii wojskowej przy nagłym wybuchu leżącego na powierzchni bardzo długiego lontu. W konsekwencji przyjętego obciążenia realizuje się płaski symetryczny stan deformacji, co przy przyjęciu małych odkształceń i izotropii materiału określa nam wektor przemieszczenia

$$/2.1/ \quad u_x = u(x,y,t), \; u_y = u_y(x,y,t), \; u_z = 0,$$

oraz tensor odkształcenia

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \epsilon_x(x,y,t), \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \epsilon_y(x,y,t),$$

$$/2.2/ \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \gamma_{xy}(x,y,t),$$

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Analogicznie wyrażają się składowe tensora prędkości odkształcenia. Wystarczy w równaniach /2.2/ nad występującymi wielkościami postawić kropki oznaczające różniczkowanie

po czasie.
Stan naprężenia reprezentowany jest przez

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,y,t),\ \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x,y,t),$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x,y,t),\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y,t); \qquad /2.3/$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,\ \text{przy czym}\ \tau_{zx} = \tau_{xz},\ \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Równania konstytutywne opisujące dynamiczne zachowanie się materiału sprężysto/lepkoplastycznego przyjęto w formie wiążącej dewiator prędkości odkształcenia, dewiator prędkości naprężenia i dewiator naprężenia [11]

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\dot{s}_{ij} + \gamma < \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k_0} - 1\right) > \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}},$$
$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{3K}\dot{\sigma}_{kk}, \qquad /2.4/$$

gdzie μ, K są stałymi sprężystymi określającymi odpowiednio stałą Lamego i moduł objętościowy, γ oznacza współczynnik lepkości, k - granicę plastyczności przy czystym ścinaniu, $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}$ jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia, a symbol $<\Phi(F)>$ oznacza

$$/2.5/ \qquad <\Phi(F)> = \begin{cases} \Phi(F) & \text{dla} \quad F \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla} \quad F < 0, \end{cases}$$

Równania /2.4/ dla stanu odkształcenia /2.2/ i stanu naprężenia /2.3/ mogą być zapisane w jawnej postaci

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{2\mu}\dot{s}_x + \frac{1}{3K}\dot{\sigma}_m + < D > s_x,$$
$$\dot{\epsilon}_y = \frac{1}{2\mu}\dot{s}_y + \frac{1}{3K}\dot{\sigma}_m + < D > s_y, \qquad /2.6/$$

/2.6/
$$0 = \frac{1}{2\mu}\dot{s}_z + \frac{1}{3K}\dot{\sigma}_m + \langle D \rangle s_z ,$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2\mu}\dot{\tau}_{xy} + 2\langle D \rangle \tau_{xy} ,$$

przy czym

$$D = \begin{cases} \gamma\, \Phi\left(\frac{\sqrt{J_2}}{k_0} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{J_2}} & \text{dla } J_2 \geqslant k_0 , \\ 0 & \text{dla } J_2 < k_0 , \end{cases}$$

$$s_x = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z),$$

$$s_y = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z),$$

$$s_z = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y),$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

$$J_2 = \frac{1}{3}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3\tau_{xy}^2\right).$$

Równania /2.6/ wraz z równaniami ruchu stanowią podstawowy układ równań

/2.7/
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \varrho \frac{\partial v_x}{\partial t} ,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \varrho \frac{\partial v_y}{\partial t} ,$$

gdzie ϱ jest gęstością materiału.

W obszarze odkształceń sprężystych w równaniach /2.6/ należy położyć $\sqrt{J_2}/k_0 = 0$, co jest równoważne $\gamma = 0$.

W dalszym ciągu korzystając z fizykalnych przesłanek przyjętego modelu ciała wyrazimy σ_z jako funkcję $\sigma_x + \sigma_y$. Prędkość tensora odkształceń całkowitych jest sumą części sprężystej i części lepkoplastycznej.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{c} = \dot{\epsilon}_{ij}^{e} + \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} ,$$

/2.8/
$$\dot{\epsilon}_{ij}^{e} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_m \delta_{ij} ;$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \langle D \rangle s_{ij} .$$

Przyrównując do zera oddzielnie część sprężystą i część lepkoplastyczną składowej tensora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_z$ z równania /2.63/ mamy

/2.9/
$$\dot{\epsilon}_z^{e} = 0 = \lambda_2 (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) - \lambda_1 \dot{\sigma}_z ,$$

/2.10/
$$\dot{\epsilon}_z^{vp} = 0 = \frac{1}{3} \langle D \rangle (2 \sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) ,$$

gdzie
$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \frac{3K+\mu}{3K\mu} , \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \frac{-2\mu+3K}{2 \cdot 3K\mu} .$$

Z równania /2.9/ znajdujemy, że w zakresie odkształceń sprężystych

/2.11/
$$\dot{\sigma}_z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) = \frac{(-2\mu+3K)(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)}{2(3K+\mu)} = \nu (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) ,$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (1+\nu) (\sigma_x + \sigma_y) ,$$

oraz

w zakresie odkształceń plastycznych z /2.10/

/2.12/
$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) .$$

Porównując równania /2.11/ i /2.12/ łatwo zauważyć, że σ_z nie jest jednoznacznie określone. Związek /2.12/ pokrywa się z /2.11/ tylko przy przyjęciu $\mu = 0$. Nadmienić należy, że σ_z jest jednoznacznie określone przy przyjęciu nieściśliwości materiału i warunku plastyczności Hubera-Misesa i ma postać /2.12/.

Założenie przyrównania do zera oddzielnie części sprężystej i części plastycznej odkształcenia ε_z było przyjmowane i szeroko przedyskutowane przez Southwella i Allena [14] i później stosowane w literaturze np. [6]. Jak wynika z dyskusji przeprowadzonej przez Southwella i Allena założenie to w zakresie małych deformacji nie prowadzi do dużych błędów.

Wykorzystując związek /2.12/ drugi niezmiennik dewiatora naprężenia przyjmie teraz postać:

$$J_2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 - \tau_{xy}^2 . \tag{2.13}$$

3. Bezwymiarowa postać wyjściowego układu równań

W dalszym ciągu wprowadźmy za Cliftonem [4] dla wygody późniejszych obliczeń numerycznych bezwymiarową postać podstawowego układu równań. Bezwymiarowe prędkości u i v, bezwymiarowy czas t, bezwymiarowe współrzędne kartezjańskie x, y, bezwymiarowa granica plastyczności przy czystym ścinaniu k_o, oraz bezwymiarowy współczynnik lepkości γ są określone następująco przez odpowiednie wielkości wymiarowe:

$$u = v_x = \frac{\hat{u}}{c_1}, \quad v = v_y = \frac{\hat{v}_y}{c_1}, \quad t = \frac{\hat{t}\,c_1}{b}, \quad x = \frac{\hat{x}}{b},$$

$$y = \frac{\hat{y}}{b}, \quad k_o = \frac{\hat{k}_o}{\rho c_1^2}, \quad \gamma = \frac{b}{c_1}\hat{\gamma},$$

gdzie daszek oznacza odpowiednią wielkość wymiarową, c_1 jest prędkością fali podłużnej, a b jest wielkością charakterystyczną dla rozważanego zagadnienia. Bezwymiarowe naprężenie p, q, τ są określone przez

$$p = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma_x + \sigma_y}{\varrho c_1^2}\,, \qquad q = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\varrho c_1^2}\,,$$

/3.2/
$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\varrho c_1^2}\,, \qquad r = \frac{\sigma_z}{\varrho c_1^2}\,,$$

Zastępując dwa pierwsze równania odpowiednio ich sumą i różnicą oraz określając σ_z w części sprężystej i plastycznej odpowiednio z równań /2.11/ i /2.12/ można wypisać ostateczną bezwymiarową postać podstawowego układu równań określającego pięć szukanych wielkości u, v, p, q, τ :

/3.3a/
$$u_t - q_x - p_x - \tau_y = 0\,,$$

/3.3b/
$$v_t + q_y - p_y - \tau_x = 0\,,$$

/3.3c/
$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 - 1}\, p_t - u_x - v_y = 0\,,$$

/3.3d/
$$\Gamma^2 q_t - u_x + v_y = -2Dq\,,$$

/3.3e/
$$\Gamma^2 \tau_t - u_y - v_x = -2D\tau.$$

W równaniach /3.3/ wskaźniki u dołu oznaczają teraz różniczkowanie cząstkowe względem odpowiednich zmiennych. Dwa pierwsze równania są równaniami ruchu, trzecie i czwarte odpowiednio sumą i różnicą dwóch pierwszych równań /2.6/ , ostatnie - czwartym równaniem /2.6/. Γ oznacza stosunek

$$\Gamma = \frac{c_1}{c_2}\,,$$

gdzie c_2 oznacza sprężystą prędkość fali ścinania , przy czym c_1 i c_2 są określone odpowiednio:

$$/3.4/ \qquad c_1 = \left[\frac{3K+4\mu}{3\varrho}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad c_2 = \left[\frac{\mu}{\varrho}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Drugi niezmiennik dewiatora naprężenia w wielkościach bezwymiarowych ma postać :

$$\sqrt{J_2} = \varrho c_1^2 \sqrt{p^2 - q^2} .$$

Zauważmy, że lewa strona układu /3.3/ reprezentująca część sprężystą zagadnienia jest identyczna z równaniami Cliftona [4] dla sprężystego zagadnienia p.s.o.

W zapisie macierzowym układ równań /3.3/ ma postać :

$$/3.6/ \qquad \mathbb{L}[w] = A^t w_t + A^x w_x + A^y w_y - B = 0 ,$$

gdzie wektory u i B oznaczają

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ q \\ \tau \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2Dq \\ -2D\tau \end{bmatrix} ,$$

a macierze A^t , A^x , A^y są:

$$A^y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma^2 \end{bmatrix}$$

4. Charakterystyczne własności układu równań

Układ równań /3.6/ jest prawie liniowym, symetrycznym układem równań różniczkowych cząstkowych pirwszego rzędu i charakteryzuje się stałymi współczynnikami przy pochodnych. Toeria takich równań jest dana np. w [5]. Do rozwiązania układu równań /3.6/ posłużono się metodą różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk. Metoda ta stosowana najpierw w zagadnieniach dynamiki cieczy i gazów m. inn. przez Butlera [3], Richardsona [13], Burnata, Kiełbasińskiego i Wakulicza [2] została następnie adoptowana do rozwiązywania zagadnień brzegowych mechaniki ośrodków ciągłych przez Cliftona [4] i Bałtowa [1]. Przed wyprowadzeniem równań różniczkowych wzdłuż bicharakterystyk niezbędna jest analiza geometrii powierzchni charakterystycznych związanych z równaniem /3.6/. Warunkiem, aby powirzchnia $\Phi(x,y,t)$ = const była powierzchnią charakterystyczną dla równania /3.6/ jest znikanie wyznacznika macierzy charakterystycznej A określonej jako

$$/3.7/ \qquad A = A^t\,\Phi_t + A^x\,\Phi_x + A^y\,\Phi_y\,.$$

Równanie charakterystyczne Det A = 0 może być zapisane

$$/3.8/ \qquad \left[\Phi_t^2 - \Phi_x^2 - \Phi_y^2\right]\left[\Phi_t^2 - \frac{1}{\Gamma^2}\left(\Phi_x^2 + \Phi_y^2\right)\right]\Phi_t^2 = 0.$$

Każde z równań zawartych w nawiasach kwadratowych jest równaniem falowym powierzchni rozprzestrzeniających się odpowiednio z prędkościami fal ± 1 i $\pm 1/\Gamma$, odpowiadających wymiarowym prędkościom fal $\pm c_1$ i $\pm c_2$. Prędkości te wyznaczamy z przyrównania do zera wyznacznika macierzy A'

$$A' = A^t c + A^x + A^y\,.$$

Stożki charakterystyczne będące obwiednią wszystkich rozwiązań równania /3.8/ i przechodzące przez punkt $/t_0, x_0, y_0/$ mają postać:

$$c^2(t-t_0)^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2; \quad c=1, \; c=\frac{1}{r}. \qquad /3.9/$$

Mogą one być przedstawione w postaci parametrycznej

$$\begin{aligned} x-x_0 &= c\,(t-t_0)\cos\alpha\,, \quad c=1, \frac{1}{r} \\ y-y_0 &= c\,(t-t_0)\sin\alpha\,, \\ t-t_0 &= t-t_0\,. \end{aligned} \qquad /3.10/$$

wprowadzając współrzędne sferyczne. Parametr α jest kątem w płaszczyźnie t_0 = const.

Bicharakterystykami równań /3.3/ są linie styczności wspomnianych wyżej rozwiązań przedstawiających płaszczyzny charakterystyczne

$$c(t-t_0) - (x-x_0)\cos\alpha - (y-y_0)\sin\alpha\,, \quad c=1, \frac{1}{r} \qquad /3.11/$$

i stożków charakterystycznych /3.9/. Są one jednocześnie tworzącymi stożków charakterystycznych danych równaniami /3.10/. Równania /3.10/ w połączeniu z kierunkiem normalnym do powierzchni charakterystycznej

$$\Phi_t = c\,; \quad c=1, \frac{1}{r}\,;$$

$$\Phi_x = -\cos\alpha\,,$$

/3.12/
$$\Phi_y = -\sin\alpha\,,$$

określają wstęgę bicharakterystyczną przechodzącą przez punkt $/t_0, x_0, y_0/$.
Jeśli Φ jest powierzchnią charakterystyczną równań /3.3/, to istnieje zerowy wektor l taki, że

/3.13/
$$lA = 0.$$

Zerowe wektory l związane ze wstęgą bicharakterystyczną określoną równaniami /3.10/,/3.12/ mają postać:

/3.14a/
$$l = \begin{bmatrix} -r^2\cos\alpha \\ -r^2\sin\alpha \\ r^2-1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix} \quad \text{dla } c=1,$$

/3.14b/
$$l = \begin{bmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \\ -\sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad \text{dla } c=\frac{1}{r}.$$

Trzeci czynnik występujący w wyrażeniu /3.8/, $\Phi_t = 0$, można uważać jako powierzchnię rozprzestrzeniającą się z prędkością równą zeru. Odpowiada jej stożek charakterystyczny zdegenerowany do prostej

/3.15/ $\qquad x = x_0, \quad y = y_0,$

o normalnej $[\,0\,, \cos\alpha\,, \sin\alpha\,]$. Zerowy wektor l związany ze wstęgą bicharakterystyczną określoną równaniem /3.15/ oraz

/3.16/
$$\Phi_t = 0\,, \qquad \Phi_x = \cos\alpha\,, \qquad \Phi_y = \sin\alpha\,,$$

ma postać:

$$l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

Jeśli l jest zerowym wektorem dla powierzchni charakterystycznej Φ, to równanie różniczkowe na powierzchni Φ otrzymamy z

/3.18/ $\qquad l \cdot L[W] = 0\,.$

Ponieważ równanie to nie zawiera pochodnych normalnych do powierzchni Φ, może być w każdym punkcie wyrażone za pomocą pochodnych w dwóch kierunkach na powierzchni Φ. W szczególności mogą być wzięte kierunki bicharakterystyczne i kierunek wzdłuż której t jest constant. Pochodna funkcji f w kierunku bicharakterystycznym jest dana przez

$$\frac{df}{dt} = f_t + f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} \tag{/3.19/}$$

gdzie $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ wzdłuż bicharakterystyk są otrzymane przez zróżniczkowanie równań /3.10/. Na podstawie /3.6/, /3.14a/, /3.14b/, /3.18/ oraz zamiany dla wygody kierunku liczenia kąta α zamieniając go na $\alpha + \pi$ równanie $1^{\bullet}L[w] = 0$ można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} &\cos\alpha \, du + \sin\alpha \, dv + dp + \cos 2\alpha \, dq + \sin 2\alpha \, d\tau = \\ &= -S_1(\alpha)\, dt \; ; \; \text{dla} \;\; c = 1, \end{aligned} \tag{/3.20/}$$

$$\begin{aligned} &-\Gamma \sin\alpha \, du + \Gamma \cos\alpha \, dv - \Gamma^2 \sin 2\alpha \, dq + \Gamma^2 \cos 2\alpha \, d\tau = \\ &= -S_2(\alpha)\, dt \; ; \; \text{dla} \;\; c = \frac{1}{\Gamma} , \end{aligned} \tag{/3.21/}$$

gdzie

$$\begin{aligned} S_1(\alpha) = {} & \left[-\sin^2\alpha + \frac{1}{\Gamma^2}(1 - \cos 2\alpha) \right] u_x + \Big(\frac{1}{2} \sin 2\alpha - \\ & - \frac{1}{\Gamma^2} \sin 2\alpha \Big) u_y + (\cos 2\alpha - 1) \cos\alpha \, q_x + \big(\sin\alpha + \\ & \sin \cos 2\alpha \big) q_y + (\sin 2\alpha \cos\alpha - \sin\alpha) \tau_x + \big(\sin 2\alpha \sin\alpha - \\ & - \cos\alpha \big) \tau_y + \Big(\frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{\Gamma^2} \sin 2\alpha \Big) v_x + \Big(1 - \cos^2\alpha + \\ & + \frac{1}{\Gamma^2} (1 + \cos 2\alpha) \Big) v_y + \frac{1}{\Gamma^2} 2D (q \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(\alpha) = {} & \Big(\frac{1}{2} \sin 2\alpha \, u_x - \cos^2\alpha \, u_y + \gamma (\sin\alpha - \sin 2\alpha \cos\alpha) q_x \\ & + \Gamma \cos\alpha (1 - 2\sin^2\alpha) q_y + \Gamma \sin\alpha \, p_x - \Gamma \cos\alpha \, p_y + \\ & + \Gamma \cos\alpha (-1 + \cos 2\alpha) \tau_x + \Gamma \sin\alpha (1 + \cos 2\alpha) \tau_y + \\ & + \sin^2\alpha \, v_x - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, v_y - 2D \sin 2\alpha \, q + \\ & + 2D \cos 2\alpha \, \tau . \end{aligned}$$

Trzeci związek łączący przyrosty szukanych funkcji otrzymamy z równań /3.6/, /3.17/, /3.18/ oraz zastępując $\frac{\partial}{\partial t}$ przez $\frac{d}{dt}$.

$$/3.22/ \quad -\frac{r^2}{r^2-1}dp + r^2\cos 2\alpha\, dq + r^2 \sin 2\alpha\, d\tau = -S_3(\alpha)dt,$$

gdzie

$$S_3(\alpha) = (1-\cos 2\alpha)u_x + \sin 2\alpha\, u_y - \sin 2\alpha\, v_x +$$
$$+(1+\cos 2\alpha)v_y + 2D\cos 2\alpha\, q + 2D\sin 2\alpha\, \tau.$$

Identyczna analiza powierzchni charakterystycznych ma miejsce w przypadku odpowiednich zagadnień sprężystych /patrz Clifton [4]/. Różnią się jedynie równania różniczkowe wzdłuż bicharakterystyk.

5. Wyprowadzenie różnic skończonych

W celu wyprowadzenia równań różnicowych obszar zmienności x, y, t dzielimy płaszczyznami $t = const$ o odstępach równych k. Do znalezienia rozwiązania w dowolnym punkcie t_0, x_0, y_0, przy założeniu, że mamy rozwiązanie na całej płaszczyźnie $t = t_0-k = const$, posłużymy się równaniami wzdłuż bicharakterystyk /3.20/-/3.21/ oraz równaniami wzdłuż osi t, /3.22/, zastępując różniczki odpowiednimi przyrostami. Wybieramy cztery bicharakterystyki dla zewnętrznego i wewnętrznego stożka charakterystycznego przyjmując następujące wartości parametru α: $\alpha_i = \frac{(i-1)\pi}{2}$. Ponadto przyrosty w równaniach /3.2o/-/3.21/, np. między punktem (t_0-k, x_0, y_0) i punktem (t_0, x_0, y_0) tzn. wzdłuż bicharakterystyki 3, zastępujemy odpowiednio przez:

$$\Delta W = W_0(t_0,x_0,y_0) - W_i(t_0-k, x_0-ck, y_0) = \bar{W}(t_0-k, x_0, y_0)$$
$$-W_i(t_0-k, x_0-ck, y_0) + W_0(t_0,x_0,y_0) -$$
$$-\bar{W}(t_0-k, x_0, y_0)\ ; \quad c = 1, \ \frac{1}{r}.$$

Różniczki w równaniu /3.22/ zastępujemy różnicami

$$\Delta W = W_0(t_0, x_0, y_0) - \bar{W}(t_0-k, x_0, y_0),$$

Całkowanie równań /3.21/-/3.22/ od punktu "O": t_0, x_0, y_0 do punktu przecięcia się bicharakterystyki z płaszczyzną $t = t_0-k$ daje:

/4.1a/
$$\cos\alpha_i\,\delta u + \sin\alpha_i\,\delta v + \delta p + \cos 2\alpha_i\,\delta q + \sin 2\alpha_i\,\delta\tau = -\frac{k}{2}\left[(S_1(\alpha_i))_i + (S_1(\alpha_i))_0 - W_1(\alpha_i)\right];$$

/4.1b/
$$-\Gamma\sin\alpha_i\,\delta u + \Gamma\cos\alpha_i\,\delta v - \Gamma^2\sin 2\alpha_i\,\delta q + \Gamma^2\cos 2\alpha_i\,\delta\tau = -\frac{k}{2}\left[(S_2(\alpha_i))_i + (S_2(\alpha_i))_0\right] - W_2(\alpha_i);$$

/4.1c/
$$-\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2-1}\,\delta p + \Gamma^2\cos 2\alpha_i\,\delta q + \Gamma^2\sin 2\alpha_i\,\delta\tau = -\frac{k}{2}\left[\overline{S_3(\alpha_i)} + (S_3(\alpha_i))_0\right];$$

gdzie
$$W_1(\alpha_i) = \cos\alpha_i(\bar{u}-u_i) + \sin\alpha_i(\bar{v}-v_i) + \bar{p} - p_i + \cos 2\alpha_i(\bar{q}-q_i) + \sin 2\alpha_i(\bar{\tau}-\tau_i),$$

$$W_2(\alpha_i) = -r \sin\alpha_i (\bar{u} - u_i) + r\cos\alpha_i (\bar{v} - v_i) - r^2 \sin 2\alpha_i (\bar{q} - q_i) + r^2 \cos 2\alpha_i (\bar{\tau} - \tau_i).$$

Układ równań /4.1a/-/4.1b/ służy do określenia przyrostów δu, δv, δq, δp, $\delta \tau$ oraz pochodnych $u_x, u_y, \ldots, \tau_y$ w punkcie "0": t_o, x_o, y_o. Dysponujemy ośmioma równaniami /4.1a/-/4.1b/. Pozostałe niezbędne równania uzyskamy z równań /4.1c/. Wygodniej jednak będzie wyrugować pochodne u_x, $u_y, \ldots, \tau_y$. Otrzymamy w rezultacie układ pięciu równań do znalezienia pięciu przyrostów $\delta u, \ldots, \delta \tau$.
Wypiszmy w tym celu równania /4.1a/-/4.1c/ w postaci jawnej:

a₁/
$$\delta u + \delta p + \delta q = -\frac{k}{2}\Big[\Big(-\tau_y - v_y + \frac{2}{r^2} v_y + \frac{2}{r^2} Dq\Big)_1 + \Big(-\tau_y - v_y + \frac{2}{r^2} v_y + \frac{2}{r^2} Dq\Big)_o\Big] - \Big[\bar{u} - u_1 + \bar{p} - p_1 + \bar{q} - q_1\Big];$$

a₂/
$$\delta v + \delta p - \delta q = -\frac{k}{2}\Big[\Big(-\tau_x - u_x + \frac{2}{r^2} u_x - \frac{2}{r^2} Dq\Big)_2 + \Big(-\tau_x - u_x + \frac{2}{r^2} u_x - 2/r^2 Dq\Big)_o\Big] - \Big[\bar{v} - v_2 + \bar{p} - p_2 - (\bar{q} - q_2)\Big];$$

a₃/
$$-\delta u + \delta p + \delta q = -\frac{k}{2}\Big[\Big(\tau_y - v_y + \frac{2}{r^2} v_y + \frac{2}{r^2} Dq\Big)_3 + \Big(\tau_y - v_y + \frac{2}{r^2} v_y + \frac{2}{r^2} Dq\Big)_o\Big] - \Big[-(\bar{u} - u_3) + \bar{p} - p_3 + \bar{q} - q_3\Big];$$

a₄/
$$-\delta v + \delta p - \delta q = -\frac{k}{2}\Big[\Big(\tau_x - u_x + \frac{2}{r^2} u_x - \frac{2}{r^2} Dq\Big)_4 + \Big(\tau_x - u_x + \frac{2}{r^2} u_x - \frac{2}{r^2} Dq\Big)_o\Big] - \Big[-(\bar{v} - v_4) + \bar{p} - p_4 - (\bar{q} - q_4)\Big];$$

b1/ $$r\delta v + r^2\delta\tau = -\frac{k}{2}\left[(rg_y - rp_y - u_y + 2D\tau)_{\bar 1} + (rg_y - rp_y - u_y + 2D\tau)_0\right] - \left[r(\bar v - v_{\bar 1}) + r^2(\bar\tau - \tau_{\bar 1})\right],$$

b2/ $$-r\delta u - r^2\delta\tau = \frac{k}{2}\left[(rg_x + rp_x + v_x - 2D\tau)_{\bar 2} + (rg_x + rp_x + v_x - 2D\tau)_0\right] - \left[-r(\bar v - v_{\bar 3}) + r^2(\bar\tau - \tau_{\bar 3})\right],$$

b3/ $$-r\delta v + r^2\delta\tau = -\frac{k}{2}\left[(-rg_y + rp_y - u_y + 2D\tau)_{\bar 3} + (-rg_y + rp_y - u_y + 2D\tau)_0\right] - \left[-r(v - v_{\bar 3}) + r^2(\bar\tau - \tau_{\bar 3})\right],$$

b4/ $$r\delta u - r^2\delta\tau = -\frac{k}{2}\left[(-rg_x - rp_x + v_x - 2D\tau)_{\bar 4} + (-rg_x - rp_x + v_x - 2D\tau)_0\right] - \left[r(\bar u - u_{\bar 4}) - r^2(\bar\tau - \tau_{\bar 4})\right].$$

Równania /4.1c/ dla ustalonych poprzednio parametrów dają dwie pary jednakowych równań

$$-\frac{r^2}{r^2-1}\delta p + r^2\delta q = -\frac{k}{2}\left\{\left[2v_y + 2Dg\right]_0 + \left[\overline{2v_y + 2Dq}\right]_{\bar 0}\right\};$$

$$-\frac{r^2}{r^2-1}\delta p - r^2\delta q = -\frac{k}{2}\left\{\left[2u_x - 2Dg\right]_0 + \left[2u_x - 2Dg\right]_{\bar 0}\right\}.$$

Przyjmując inne wartości parametru α można uzyskać dalsze potrzebne równania. Jednakże w celu wyrugowania pochodnych funkcji w szukanym punkcie t_0, x_0, y_0 korzystniej będzie otrzymać równania wzdłuż prostej $x = x_0$, $y = y_0$ bezpośrednio

z równań /3.3/ zamieniając $\frac{\partial}{\partial t}$ przez d/dt. Oznaczając równania te przez $c_1,\dots,c_5$ mamy:

$$c_1:\quad \delta u = \frac{1}{2}k\left[\left(g_x + p_x + \tau_y\right)_0 + \left(g_x + p_x + \tau_y\right)_{\bar{0}}\right];$$

$$c_2:\quad \delta v = \frac{1}{2}k\left[\left(p_y - g_y + \tau_x\right)_0 + \left(g_x - g_y + \tau_x\right)_{\bar{0}}\right];$$

$$c_3:\quad \frac{r^2}{r^2-1}\,\delta p = \frac{1}{2}k\left[\left(u_x + v_y\right)_0 + \left(u_x + v_y\right)_{\bar{0}}\right];$$

$$c_4:\quad r^2\delta q = \frac{1}{2}k\left[\left(u_x - v_y - 2Dq\right)_0 + \left(u_x - v_y - 2Dq\right)_{\bar{0}}\right];$$

$$c_5:\quad r^2\delta\tau = \frac{1}{2}k\left[\left(u_y + v_x - 2D\tau\right)_0 + \left(u_y + v_x - 2D\tau\right)_{\bar{0}}\right].$$

Tu i dalej wykorzystywane są dla uproszczenia następujące oznaczenia:

$$f_0 = f(t_0, x_0, y_0), \qquad f_{\bar{0}} = f(t_0 - k, x_0, y_0) = \bar{f},$$

$$f_1 = f(t_0 - k, x_0 + k, y_0); \qquad f_{\bar{1}} = f(t_0 - k, x_0 + \tfrac{k}{r}, y_0);$$

$$f_2 = f(t_0 - k, x_0, y_0 + k), \qquad f_{\bar{2}} = f(t_0 - k, x_0, y_0 + \tfrac{k}{r}),$$

$$f_3 = f(t_0 - k, x_0 - k, y_0), \qquad f_{\bar{3}} = f(t_0 - k, x_0, y_0 + \tfrac{k}{r}),$$

$$f_4 = f(t_0 - k, x_0, y_0 - k); \qquad f_{\bar{4}} = f(t_0 - k, x_0, y_0 - \tfrac{k}{r}),$$

$$\delta f = f(t_0, x_0, y_0) - f(t_0 - k, x_0, y_0) \; ;$$

$$\Delta f = f(t_0, x_0 \pm ck) - f(t_0 - k, x_0 \pm ck, y_0 \pm ck)$$

$$c = \pm 1 \, , \; \pm \frac{1}{r}$$

Kombinując równania a_i, b_i, c_i. w następujący sposób

$$a_1 - a_3 - \frac{1}{r}(b_2 - b_4) - 2c_1 \, ,$$

$$a_2 - a_4 + \frac{1}{r}(b_1 - b_3) - 2c_2 \, ,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2\left(1 - \frac{2}{r^2}\right)c_3 \, ;$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + 2\left(1 - \frac{2}{r^2}\right)c_4 \, ,$$

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 - 2c_5 \, ,$$

otrzymujemy ostatecznie pięć nieliniowych równań algebraicznych do określenia pięciu funkcji u, v, p, q, τ w szukanym punkcie t_0, x_0, y_0

$$\begin{aligned} 2\delta u = &-\frac{k}{2}\Big\{-\left[\tau_{y(1)} + \tau_{y(3)}\right] + \left(\frac{2}{r^2} - 1\right)\left[v_{y(1)} - \right. \\ &\left. - v_{y(3)}\right] + \frac{2}{r^2}\left[(Dq)_{(1)} - (Dq)_{(3)}\right] - \left[q_{x(\bar{2})} + \right. \\ &\left. + q_{x(\bar{4})}\right] - \Big[p_{x(\bar{2})} + p_{x(\bar{4})} + \frac{2}{r}\left[(D\tau)_{(\bar{1})} - (D\tau)_{(\bar{4})}\right] \\ /4.2_1/ \quad &+ 2\left(q_x + p_x + \tau_y\right)_{(\bar{0})}\Big\} - \Big\{\left[2u_{(\bar{0})} - u_{(1)} - u_{(3)}\right] + \\ &+ \left[2u_{(\bar{0})} - u_{(\bar{2})} - u_{(\bar{4})}\right] - \left[p_{(1)} - p_{(3)}\right] - r\left[\tau_{(\bar{2})} - \right. \\ &\left. - \tau_{(\bar{4})}\right] - \left[q_{(1)} - q_{(3)}\right]\Big\} - \frac{k}{2}\left\{-\frac{1}{r}\left[v_{x(\bar{2})} - v_{x(\bar{4})}\right]\right\}. \end{aligned}$$

$$2\,\delta v = -\frac{k}{2}\Big\{-\left[\tau_{x(2)}+\tau_{x(4)}\right]+\left(\frac{2}{r^2}-1\right)\left[-u_{x(4)}+u_{x(2)}\right]$$

$$+\frac{2}{r^2}\left[-(Dq)_{(2)}+(Dq)_{(4)}\right]+\left[q_{y(\bar 1)}+q_{y(\bar 3)}\right]-\left[p_{y(\bar 1)}+\right.$$

/4.2$_2$/
$$\left.+p_{y(\bar 3)}\right]-\frac{1}{r}\left[u_{y(\bar 1)}-u_{y(\bar 3)}\right]+2\left[p_y-q_y+\tau_x\right]_{\bar 0}$$

$$+2\left[(D\tau)_{(\bar 1)}-(D\tau)_{(\bar 3)}\right]\Big\}-\Big[\left(2v_{(\bar 0)}-v_{(\bar 2)}-v_{(4)}\right]+$$

$$+\left(q_{(2)}-q_4\right)+\left(2v_{(\bar 0)}-v_{(\bar 1)}-v_{(\bar 3)}\right)+r\left(-\tau_{(\bar 1)}+\tau_{(\bar 3)}-p_2+p_4\right]\Big),$$

$$2r^2\delta q+2k(Dq)_{(0)}=-\frac{k}{2}\Big\{\left[-\tau_{y(1)}+\tau_{y(3)}\right]+\left(\frac{2}{r^2}-1\right)\cdot$$

$$\left[u_{x(2)}+u_{x(4)}\right]+\frac{2}{r^2}\left[(Dq)_{(1)}+(Dq)_{(3)}\right]-\frac{2}{r^2}\left[-(Dq)_{(2)}-\right.$$

/4.2$_3$/
$$\left.-(Dq)_{(4)}\right]-2\left(1-\frac{2}{r^2}\right)\left[\left(u_x-v_y-2Dq\right)\right]_{(\bar 0)}\Big\}-$$

$$-\Big[-u_{(1)}+u_{(3)}-p_{(1)}+p_{(2)}-p_{(3)}+p_{(4)}+\left(2q_{(\bar 0)}-q_{(1)}-\right.$$

$$\left.-q_{(2)}\right)+2\left(q_{(\bar 0)}-q_{(3)}-q_{(4)}+v_{(2)}-v_{(4)}\right]\;;$$

/4.2$_4$/
$$\frac{2r^2}{r^2-1}\,\delta p=-\frac{k}{2}\Big\{\left[-\tau_{y(1)}+\tau_{y(3)}\right]+\left(\frac{2}{r^2}-1\right)\left[v_{y(1)}+\right.$$

$$\left.v_{y(3)}\right]\cdot\left[\tau_{x(2)}-\tau_{x(4)}\right]+\left(\frac{2}{r^2}-1\right)\left[u_{x(2)}+u_{x(4)}\right]+$$

$$+\frac{2}{r^2}\left[(Dq)_{(1)}+(Dq)_{(3)}\right]-\frac{2}{r^2}\left[(Dq)_{(2)}+(Dq)_{(4)}\right]+$$

$$2\left(1-\frac{2}{r^2}\right)\left[\left(u_x+v_y\right)_{(\bar 0)}\Big\}-\Big[-u_{(1)}+u_{(3)}+v_{(4)}-v_{(2)}+\right.$$

$$+\left(2p_{(\bar 0)}-p_{(1)}-p_{(2)}\right)+\left(2p_{(\bar 0)}-p_{(3)}-p_{(4)}\right)-q_{(1)}+q_{(2)}+$$

$$-q_{(3)}-q_{(4)}\Big],$$

$$
\begin{aligned}
& 2r^2\delta\tau + 2k(D\tau)_{(0)} = -\frac{k}{2}\Big\{\Gamma\Big[\big[q_{y(\bar 1)} - q_{y(\bar 3)}\big] - \\
& - \big[q_{x(\bar 2)} - q_{x(\bar 4)}\big] - \big[p_{y(1)} - p_{y(3)}\big] - \big[p_{x(\bar 2)} - p_{x(\bar 4)}\big]\Big] \\
& - \big[u_{y(\bar 1)} + u_{y(\bar 3)}\big] - \big[v_{x(\bar 2)} + v_{x(\bar 4)}\big] + 2\big[(D\tau)_{(\bar 1)} \\
/4.2_5/ \quad & + (D\tau)_{(\bar 3)}\big] + 2\big[(D\tau)_{(\bar 2)} + (D\tau)_{(\bar 4)}\big] + 2\big[u_y + v_x \\
& - 2D\tau\big]_{(\bar 0)}\Big\} - \Gamma\big[-v_{(1)} + v_{(3)} - u_{(2)} + u_{(4)} + \\
& + \Gamma\big(2\tau_{(\bar 0)} - \tau_{(\bar 1)} - \tau_{(\bar 3)} + 2\tau_{(\bar 0)} - \tau_{(\bar 2)} - \tau_{(\bar 4)}\big)\big].
\end{aligned}
$$

Pochodne f_x, f_y na płaszczyźnie $t_o - k$ = const wyrażamy za pomocą wartości samych funkcji w punktach siatki sąsiadującymi bezpośrednio z przodu i z tyłu rozważanego punktu x_o, y_o.

Równania różnicowe w obszarze sprężystym

Aby uzyskać równania różnicowe w obszarze odkształceń sprężystych należy w równaniach /4.2/ położyć $D = 0$. Równania te znacznie się upraszczają. Otrzymujemy zamiast nieliniowego liniowy układ równań dla określenia przyrostów $\delta u, \dots,$ $\delta\tau$. Cechą charakterystyczną otrzymanego układu jest to, że każda z wielkości $\delta u, \dots, \delta\tau$ może być wyliczona bezpośrednio z jednego równania:

/4.3₁/ dla określenia u ,
/4.3₂/ dla określenia v ,
/4.3₃/ dla określenia p ,
/4.3₄/ dla określenia q ,
/4.3₅/ dla określenia τ .

Extrapolacja wewnętrznych punktów siatki

Dla uproszczenia schematu różnicowego celowym jest dokonanie extrapolacji punktów powstałych przez przecięcie się bicharakterystyk leżących na powierzchni wewnętrznego stożka charakterystycznego z płaszczyzną t_0-k = const. Liniowa extrapolacja daje:

$$/4.4_1/ \quad f\left(x_0+\frac{k}{r}, y_0\right)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{r}\left[f(x_0+k,y_0)-f(x_0,y_0)\right],$$

$$/4.4_2/ \quad f\left(x_0-\frac{k}{r}, y_0\right)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{r}\left[f(x_0-k,y_0)-f(x_0,y_0)\right].$$

Dwa dalsze wyrażenia otrzymamy zamieniając rolami y i x .

5. Warunki początkowo-brzegowe

W pracy tej rozważamy obciążenia krótkotrwałe , zmieniające się w czasie od zera do określonej wartości a następnie malejące. Nie brane są pod uwagę obciążenia przyłożone w sposób nagły i mające wchwili t = 0 skończone wartości.
Na brzegu y = 0 mamy zatem

$$\sigma_y = f(t,x)\ , \quad \sigma_x = 0\ ,$$

co w oznaczeniach przyjętych w §3 ma postać:

$$/5.1/ \quad y=0\ , \quad p-q = \frac{1}{\varrho c_1^2}\, f(t,x)$$

W chwili początkowej zakładamy jednorodne warunki brzegowe:

$$/5.2/ \quad t=0\ , \quad p=q=\tau=u=v=0.$$

Można przyjąć bardziej ogólne warunki brzegowe zadając na powierzchni y = 0 bądź naprężenia , bądź prędkości, bądź wreszcie na części brzegu naprężenia a na pozostałej części prędkości

$$y=0\,, \qquad p=f_1(t,x)\,,\ q=f_2(t,x)\,,\ \tau=f_3(t,x)\,,$$
$$u=h_1(t,x)\,,\ v=h_2(t,x)$$

Do rozważań przyjęto ortogonalną, prostokątną siatkę dla punktów płaszczyzny x,y dla każdej wartości $t = t_0$.

Celem obliczenia szukanych wielkości w punktach siatki leżących na brzegu obszaru y = 0 należy zmodyfikować równania różnicowe oraz określić pochodne cząstkowe funkcji w puntach płaszczyzny t_0-k = const przez wartości funkcji leżących w przodzie od rozważanego punktu. Punkty siatki w których bicharakterystyki $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ wewnętrznego i zewnętrznego stożka charakterystycznego przecinają płaszczyznę t_0-k = const leżą poza rozważanym obszarem. Eliminując zatem równania a_4 i b_4 z równań a_i, b_i oraz kombinując je z c_i otrzymamy równania dla określenia przyrostów $\delta u,\ldots,\delta\tau$:

$$/5.3_1/ \quad 2\delta u+2r\,\delta\tau+\frac{2k}{r}(D\tau)_{(0)}+2k(Dq)_{(0)}= \\ =a_1-a_3-\frac{1}{r}(-b_1+2b_2-b_3)- \\ -2\left(c_1-\frac{1}{r}c_5\right),$$

$$/5.3_2/ \quad 2\delta v+\frac{2r^2}{r^2-1}\delta p+2k(D\tau)_{(0)}=a_1+2a_2+a_3+ \\ \frac{1}{r}(b_1-b_3)-2\left(1-\frac{2}{r^2}\right)(c_1-2c_2)\,;$$

$$/5.3_3/ \quad 2r^2\delta q-2\delta v+2k\left(1-\frac{2}{r^2}\right)(Dq)_{(0)} \\ -2(D\tau)_{(0)}=a_1-2a_2+a_3-\frac{1}{r}(b_1-b_3)+ \\ \cdot\, 2\left(1-\frac{2}{r^2}\right)(c_4+2c_2)\,.$$

Pozostałe przyrosty określone zostaną z warunków początkowo-brzegowych /5.1/-/5.2/. Schemat różnicowy na brzegu y=0 np. dla pochodnej f_y będzie miał teraz postać:

$$/5.4/ \quad f_y(x_0,0) = \frac{1}{h}\left(2f(x_0,h) - \frac{1}{2}f(x_0,2h) - \frac{3}{2}f(x_0,0)\right).$$

W zależności od tego, jakiego rzędu dokładności żądamy dla schematu różnicowego można uwzględnić pochodne wyższych rzędów np. w przypadku dokładności rzędu h^3 występują pochodne f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, które zastępujemy w odpowiedni sposób przez schematy różnicowe.

6. Określenie powierzchni oddzielającej obszar odkształceń sprężystych i lepkoplastycznych

Określenie szukanych wielkości $u,\ldots,\tau$ w obszarze sprężystym bądź lepkoplastycznym wynika bezpośrednio z równań /4.3/ i /4.2/. Trudność powstaje przy określeniu granicy obszaru sprężystego i niesprężystego. W takim granicznym punkcie między obszarami spotykają się bicharakterystyki, wzdłuż których propagowane są wielkości o intensywnościach nie przekraczających warunku plastyczności jak również te które go przekraczają. Proponuje się następujący sposób określenia granicy obszarów. Do znalezienia szukanych wielkości w punkcie t_0,x_0,y_0 wykorzystujemy dziewięć odpowiednich punktów z płaszczyzny t_0-k = const. W każdym z tych punktów sprawdzamy wartość drugiego niezmiennika J_2. Jeśli nie we wszystkich dziewięciu punktach spełniony jest jednocześnie warunek $\sqrt{J_2} \geqslant k_0$, lub $\sqrt{J_2} < k_0$, to niewiadome w punkcie t_0,x_0,y_0 określamy wykorzystując bezpośrednio równania różniczkowe wzdłuż bicharakterystyk zastępując je różnicami. Jeżeli w punkcie x_0,y_0,t_0-k spełniona jest nierówność $\sqrt{J_2} < k_0$, wykorzystujemy wzdłuż bicharakterystyki przechodzącej przez ten punkt równanie obowiązujące w obszarze sprężystym, jeśli $\sqrt{J_2} \geqslant k_0$ - równanie obowiązujące w obszarze odkształceń sprężysto/lepkoplastycznych. Łącząc na płaszczyznach t=const punkty, w których nastąpiło uplastycznienie otrzymamy w przybliżony sposób na każdej z nich krzywą oddzielającą obszar odkształceń sprężystych i plastycznych. Nakładając te krzywe na jednym rysunku otrzymamy ruch strefy plastycznej propagującej się w czasie od brzegu obszaru y=0 ,gdzie wielkość obciążenia jest największa. W czasie wzrostu obciążenia strefa plastyczna się rozszerza , przy spadku obciążenia strefa plastyczna maleje. Po wypisaniu wszystkich równań wzdłuż bicharakterystyk α_i i wzdłuż prostej $x=x_0$, $y=y_0$ możemy wyrugować pochodne w punkcie t_0,x_0,y_0 , a następnie znaleźć w tym punkcie same szukane funkcje. Procedura obliczeń jest taka, że na każdej płaszczyźnie t=const zaczynamy obliczenia od brzegu y=0 , uważając przy tym, czy znajdujemy się w obszarze odkształceń czysto sprężystych, czy w obszarze całkowicie uplastycznionym.

W szczególności obciążenie na płaszczyźnie y=0 może być zadane w postaci:

$$p = p_c\left(e^{-x} + t\, e^{-t+t_c}\right),$$

osiągające w chwili t_0 w przekroju x=0 wartość maksymalną. Można żądać również, aby obciążenie p było zadane na skończonym pasku $-L \leq x \leq +L$. W tym wypadku podobnie jak dla brzegu y=0 należy wyrugować na brzegu x=L z równań a_1, b_1, c_1 równania a_4, b_4 , a na brzegu x=-L równania a_3, b_3.

7. Uwagi końcowe

1. Uogólnienie metody różnic skończonych wzdłuż bicharakterystyk stosowanej przez Butlera i Richardsona w dynamice

cieczy i gazów oraz przez Cliftona w teorii sprężystości na przypadek ciał sprężysto/lepkoplastycznych, jak wykazano w niniejszej pracy, jest możliwe. Zamiast jak w teorii sprężystości liniowych równań określających szukane funkcje, otrzymuje się nieliniowy układ równań algebraicznych, który nie daje się rozwikłać tak, by każde równanie określało jedną wielkość niewiadomą. Dla uproszczenia schematu różnicowego dokonano liniowej ekstrapolacji punktów powstałych przez przecięcie się bicharakterystyk leżących na wewnętrznym stożku charakterystycznym z płaszczczyzną $t_o - k = const.$

2. Z nieliniowym charakterem równań różniczkowym wiąże się bardzo istotny problem zbieżności rozwiązania i stateczności metody różnicowej. Z przykładu przytoczonego przez Cliftona, [4], widać jak wielki wpływ na propagację błędu ma dobór kroku całkowania. Jeśli krok był brany taki, że warunek stateczności rozwiązania był spełniony błąd wzrastał liniowo, natomiast w przypadku naruszenia tego warunku błąd rósł niewspółmiernie szybko.

3. Rozważone zostały tylko obciążenia krótkotrwałe rosnące od zera do pewnej wielkości maksymalnej a następnie malejące. Uwzględnienie obciążenia o skończonej wartości i przyłożonego w sposób nagły wymaga dokładnej analizy propagacji fal nieciągłości występujących w równaniach funkcji. W tym celu bardziej efektywna może się okazać metoda stosowana przez Duffa [7] . Układ równań wyjściowych Duff rozpatruje w postaci

$$U_t + B^x U_x + B^y U_y = 0 \; ,$$

gdzie każde z równań jest równaniem różniczkowym na powierzchni charakterystycznej Φ_i stowarzyszonej z odpowiednią prędkością propagacji. Oczywiście metoda musi być uogólniona na semi lub kwasi liniowy układ równań różniczkowych.

4. Warunki początkowo-brzegowe mogą być bardziej ogólne niż postawiono je w niniejszej pracy. Mogą być bowiem zadane albo naprężenia albo prędkości albo wreszcie mieszane warunki naprężeniowo-prędkościowe.

5. Określenie granicy oddzielających obszar odkształceń sprężystych i sprężysto/lepkoplastycznych możliwe jest jedynie w sposób przybliżony. Porównanie krzywych odgraniczających te obszary daje poglądowy obraz formowania się w czasie obszaru odkształceń niesprężystych.

6. Interesującym będzie rozwiązanie zagadnienia postawionego w tytule bez przyjęcia założenia upraszczającego Allena-Southwella. Porównanie wyników może wyjaśnić możliwość przyjmowania tego założenia i ocenić błąd jaki to założenie powoduje.

Literatura

1. Bałtow A., Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1967.
2. Burnat M., Kiełbasiński A., Wakulicz A., The method of characteristics for a multidimensional gas flow, AMS 3, 16, 1964, 179-187.
3. Butler D.S., The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables, Proc. Roy. Soc., London , 1962, A 255, 232-252.
4. Clifton R.J., A difference method for plane problems in dynamic elasticity. Report nr 2 , August 1965, Division of Engineering, Brown University, Providence, R.I.
5. Courant R. and Hilbert D., Methods of mathematical Physics, Vol. II, Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York, 1962.
6. Dragos Jurisic', C.E., Basic equations for elastic-plastic analysis, Institut za metalne konstrukcjie, Univerze v Liubljani, 1964.
7. Duff G.F.D., Mixed problems for linear systems of first order equations, Can. J. Math., Vol.10, 1958, 127-160.
8. Lax P.D. and Wendroff B., Difference schemes with high order of accuracy for solving hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 17, August 1964, 381-398.
9. Lax P.D. and Richtmyer R.D., Survey of the stability of linear finite difference equations, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 9, 1956, 267-297.
10. Maenchen G. and Sack S., The tensor code, Methods in Computational Physics, Vol. 3., Academic Press, 1964.
11. Perzyna P., The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, Quart. Appl. Math., 20, 1963, 321-332.

12. Perzyna P., Fundamental problems in Viscoplasticity, Advances in Applied Mechanics, Vol 9, 1966.

13. Richardson D.J., The solution of two-dimensional hydrodynamic equations by the method of characteristics, Methods in Computational Physics, Vol. 3, Academic Press, 1964.

14. Southwell R.V., Allen D.N. de G., Relaxation methods applied to engineering problems XIV . Plastic straining in two-dimensional stress-systems.

15. Thomée V., A difference method for a mixed boundary problem for symmetric hyperbolic systems., Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 13, 1963, 122-136.