Włodzimierz Laprus

METODA FAL BIEGNĄCYCH DLA RÓWNAŃ QUASI-LINIOWYCH DYSPERSYWNYCH

WARSZAWA 1981

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych
Praca nr 185

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 grudnia 1980r.

Zarejestrowana pod nr 3/1981

IPPT PAN

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 150 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark. druk. 1.
Oddano do drukarni w lutym 1981 r.
Nr zamówienia WDN zam.97/o/81 n.150

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Włodzimierz Laprus

Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

3.31 - pobudzanie i propagacja fal elektromagnetycznych

1.11 - równania różniczkowe

METODA FAL BIEGNĄCYCH DLA RÓWNAŃ QUASI-LINIOWYCH DYSPERSYWNYCH

1. WPROWADZENIE

Rozwinięcie typu fali biegnącej zastosowane do równań hiperbolicznych liniowych ma tę własność, że funkcje $S_\nu(\varphi)$, względem których dokonuje się rozwinięcia, mogą być dowolne. Jedyny warunek, żeby $S'_\nu = S_{\nu-1}$, gdzie "prim" oznacza różniczkowanie względem funkcji fazowej $\varphi(t,x)$. Dla każdego ciągu funkcji $\{S_\nu\}$ współczynniki rozwinięcia spełniają ten sam rekurencyjny ciąg równań transportu na promieniach.

W pracy [1] zastosowano rozwinięcie typu fali biegnącej do równań quasi-liniowych. Funkcje $S_\nu(\varphi)$ są w tym przypadku ustalone, gdyż równania transportu są zależne od wyboru ciągu $\{S_\nu\}$. Również zastosowanie tego rozwinięcia do równań liniowych dyspersywnych /patrz [2]/ pokazuje, że równania transportu są zależne od ciągu $\{S_\nu\}$.

Zastosowanie rozwinięcia typu fali biegnącej do równań quasi-liniowych dyspersywnych, co zostanie zrobione w tej pracy, powoduje dalsze komplikacje. Mianowicie w równaniach transportu pojawia się explicite parametr p, który występuje w funkcjach $S_\nu(\varphi)$ i w rozważanym układzie równań cząstkowych dyspersywnych.

2. UKŁAD RÓWNAŃ I ROZWINIĘCIE ROZWIĄZANIA

Rozważmy układ równań dyspersywnych i quasi-liniowych postaci

$$/2.1/ \qquad L_i[u] = \frac{\partial u_i}{\partial t} + A^{\varkappa}_{ik}(u)\frac{\partial u_k}{\partial x_{\varkappa}} + p\,B_i(u) = 0$$

gdzie $i,k=1,2,\ldots,n$ oraz $\varkappa=1,2,\ldots,m$. Zakładamy, że $A_{ik}^{\varkappa}$ i B_i są dostatecznie regularnymi funkcjami zmiennych u_k w rozważanym obszarze zmienności U , a także funkcjami dostatecznie regularnymi zmiennych t , $x_{\varkappa}$ w obszarze D /zależność współczynników równań od $t, x_{\varkappa}$ nie została w równaniach /2.1/ uwidoczniona/. p jest dodatnim parametrem.

Zakładamy, że układ /2.1/ jest symetrycznie hiperboliczny, tj. że macierze $A_{ik}^{\varkappa}$ są symetryczne dla $u_k \in U$, $t, x_{\varkappa} \in D$. Ponadto zakładamy, że macierz $B_i^k = \partial B_i / \partial u_k$ jest antysymetryczna dla $u_k \in U$, $t, x_{\varkappa} \in D$.

Zakładamy wreszcie, że istnieje rozwiązanie $\overset{o}{u}_k$ układu /2.1/ w obszarze D. W ogólności $\overset{o}{u}_k$ jest funkcją parametru p . Jeśli jednak $B_i(\overset{o}{u})=0$, to $\overset{o}{u}_k$ nie zależy od p. W takim przypadku $\overset{o}{u}_k$ = const jest rozwiązaniem stałym układu /2.1/.

Układ równań /2.1/ można także zapisać inaczej:

$$A_{ik}^{K}(u)\,\frac{\partial u_k}{\partial x_K} + p\,B_i(u) = 0 \qquad /2.2/$$

dla $K = 0,1,\ldots,m$ przy czym $x_0 = t$, $\overset{o}{A}_{ik} = I_{ik}$

Zastosujemy rozwinięcie typu fali biegnącej postaci

$$u_i = \overset{o}{u}_i + \sum_{\nu=1}^{M} \overset{\nu}{g}_i S_\nu + R_i \qquad /2.3/$$

Współczynniki rozwinięcia $\overset{\nu}{g}_i$, reszta rozwinięcia R_i i funkcja $\overset{o}{u}_i$ są z założenia dostatecznie regularne. Potem pokażemy, że są one rzeczywiście regularne, jeśli tylko spełnione są odpowiednie warunki.

Funkcje S_ν są tutaj równe $e^{ip\varphi}(ip)^{\nu}$, gdzie φ jest funkcją fazową zależną od $t, x_{\varkappa}$. Widać, że

/2.4/ $$S_\nu' = S_{\nu-1}\,, \qquad p S_\nu = -i S_{\nu-1}\,,$$

/2.5/ $$S_\nu S_\mu = e^{ip\varphi} S_{\nu+\mu}\,.$$

Własność /2.5/ w przypadku liniowych równań dyspersywnych nie jest wykorzystywana.

Oznaczmy sumę występującą w rozwinięciu /2.3/ przez Σ_i . Rozwinięcia potęgowe funkcji $A^{\varkappa}_{ik}(u)$, $B_i(u)$ w otoczeniu punktu $\overset{\circ}{u}_k$ można zapisać /z pominięciem wskaźników/ jako

/2.6/ $$A^{\varkappa}(u) = A^{\varkappa}(u^\circ) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} A^{\varkappa(n)} \Sigma^n + \widetilde{R}^{\varkappa},$$

/2.7/ $$B(u) = B(u^\circ) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} B^{(n)} \Sigma^n + \widetilde{R}\,,$$

gdzie $\widetilde{R}^{\varkappa}$, $\widetilde{R}$ oznaczają reszty $\widetilde{R}^{\varkappa}_{ik}$, $\widetilde{R}_i$ napisane z pominięciem wskaźników. $A^{\varkappa(u)}$, $B^{(u)}$ oznaczają n-te pochodne funkcji $A^{\varkappa}_{ik}(u)$, $B_i(u)$ w punkcie $u_k = \overset{\circ}{u}_k$. Σ^n jest iloczynem n wyrażeń Σ_i .

Rozwinięcia /2.6/ i /2.7/ nie są rozwinięciami Taylora, gdyż zamiast przyrostu $\Delta u_i = u - \overset{\circ}{u}_i$ występuje w nich $\Sigma_i = \Delta u_i - R_i$ Podstawowa własność tych rozwinięć: Jeśli R_i jest regularne, to $\widetilde{R}^{\varkappa}_{ik}$ i $\widetilde{R}_i$ są regularne.

Po wstawieniu rozwnięć /2.3/, /2.6/ i /2.7/ do równań /2.1/ otrzymujemy

$$/2.8/ \quad L_i[u] = \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_i + R_i) + A^{\varkappa}_{ik}(u^\circ)\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}(\Sigma_i + R_i) + $$
$$+ (\tilde{\Sigma}^{\varkappa}_{ik} + \tilde{R}^{\varkappa}_{ik})\frac{\partial u_k}{\partial x_\varkappa} + p(\tilde{\Sigma}_i + \tilde{R}_i),$$

gdzie przez $\tilde{\Sigma}^{\varkappa}_{ik}$, $\tilde{\Sigma}_i$ oznaczono sumy występujące w /2.6/, /2.7/. Wyrażenia mnożone przez S_ν , wyodrębnione z czterech kolejnych składników sumy /2.8/ i zawierające funkcje g^{α}_i o wskaźniku α nie większym niż $\nu+1$, mają postać

$$\partial g^{\nu}_i/\partial t + g^{\nu+1}_i \varphi_t \quad ,$$

$$A^{\varkappa}_{ik} g^{\nu+1}_k \varphi_\varkappa + A^{\varkappa}_{ik}\, \partial g^{\nu}_k/\partial x_\varkappa \; ,$$

$$A^{\varkappa l}_{ik} g^{\nu}_l\, \partial u^{\circ}_k/\partial x_\varkappa + A^{\varkappa l}_{ik} g^{\nu}_l g^{1}_k e^{ip\varphi}\varphi_\varkappa + A^{\varkappa l}_{ik} g^{1}_l g^{\nu}_k e^{ip\varphi}\varphi_\varkappa + \dots$$

$$- i B^{k}_{i} g^{\nu+1}_k - i B^{kl}_{i} g^{1}_l e^{ip\varphi} + \dots$$

Kropkami oznaczono wyrażenia zawierające funkcje g^{α}_i dla $\alpha < \nu$. $A^{\varkappa l}_{ik}$, B^{k}_{i} są pierwszymi pochodnymi, a B^{kl}_{i} drugą pochodną względem u_k /dla $u_k = u^{\circ}_k$ /. φ_t , $\varphi_\varkappa$ są pochodnymi funkcji fazowej względem t , $x_\varkappa$. Ostatecznie współczynnik przy S_ν można zapisać w postaci

$$/2.9/ \quad E^{\nu}_i = (D_{ik}\varphi) g^{\nu+1}_k - i B^{k}_{i} g^{\nu+1}_k + D_{ik} g^{\nu}_k + H^{(\nu)}_{ik} g^{\nu}_k + G^{(\nu)}_i .$$

$D_{ik} = I_{ik}\partial/\partial t + A^{\varkappa}_{ik}(u^0)\partial/\partial x_{\varkappa}$ jest operatorem różniczkowym, $G^{(1)}_i = 0$
$G^{(\nu)}_i$ dla $\nu = 2,\dots,N$ jest jednorodną funkcją zmiennych
$g^1_i,\dots,g^{\nu-1}_i$ i zawiera także $\partial u^0_i/\partial x_{\varkappa}$ oraz $\varphi_{\varkappa}$,

/2.10/ $$H^{(1)}_{ik} = A^{\varkappa k}_{il}(\partial u^0_l/\partial x_{\varkappa} + g^1_l e^{ip\varphi}\varphi_{\varkappa}) - iB^{kl}_i g^1_l e^{ip\varphi},$$

/2.11/ $$H^{(\nu)}_{ik} = A^{\varkappa k}_{il}(\partial u^0_l/\partial x_{\varkappa} + g^1_l e^{ip\varphi}\varphi_{\varkappa}) - iB^{kl}_i g^1_l e^{ip\varphi} + A^{\varkappa l}_{ik} g^1_l e^{ip\varphi}\varphi_{\varkappa}$$

dla $\nu = 2,\dots,N$. Zatem

/2.12/ $$L_i[u] = \sum_{\nu=0}^{N} E^{\nu}_i S_{\nu} + N_i[R],$$

gdzie $N_i[R]$ stanowi resztę powstałą przez zgrupowanie tych wyrażeń, które zawierają albo funkcje S_{ν} dla $\nu > N$, albo reszty R_i, $\tilde{R}^{\varkappa}_{ik}$, $\tilde{R}_i$.

Warunkiem wystarczającym na to, by równanie $L_i[u] = 0$ było spełnione, jest spełnienie równań $E^{\nu}_i = 0$ dla $\nu = 0,1,\dots,N-1$ oraz równania $E^N_i S_N + N_i[R] = 0$. Stąd mamy rekurencyjny ciąg równań

/2.13/ $$\mathcal{A}_{ik} g^1_k = 0$$

/2.14/ $$\mathcal{A}_{ik} g^{\nu+1}_k + D_{ik} g^{\nu}_k + H^{(\nu)}_{ik} g^{\nu}_k + G^{(\nu)}_i = 0, \qquad \text{dla } \nu = 1,\dots,N-1$$

/2.15/ $$N_i[R] + E_i^N S_N = 0,$$

gdzie $\mathcal{A}_{ik} = A_{ik} - iB_i^k$ jest macierzą dyspersyjną, przy czym $A_{ik} = D_{ik}\varphi$ oznacza macierz charakterystyczną układu równań /2.1/. Wyrażenie E_i^N dane jest przez /2.9/, gdzie położono $g_k^{N+1} = 0$.

3. RÓWNANIE DYSPERSYJNE

Wprowadźmy oznaczenia: $\varphi_t = -\omega$, $\varphi_\varkappa = k_\varkappa$. Macierz dyspersyjna jest funkcją zmiennych ω i $k_\varkappa$. Warunkiem koniecznym istnienia niezerowego rozwiązania g_k^1 równania /2.13/ jest znikanie współczynnika tej macierzy $Q = \det(\mathcal{A}_{ik})$.
W ten sposób dostajemy równanie dyspersyjne

/3.1/ $$Q(-\omega, k) = 0$$

/ k oznacza zmienne $k_\varkappa$ /. Q jest wielomianem stopnia n względem ω . Zgodnie z założeniami o układzie równań /2.1/ macierz $\bar{\mathcal{A}}_{ik} = k_\varkappa A_{ik}^\varkappa - iB_{ik}$ jest hermitowska dla rzeczywistych $k_\varkappa$. Stąd wynika, że równanie dyspersyjne /3.1/ ma dla każdego rzeczywistego $k_\varkappa$ n rzeczywistych pierwiastków, które zapiszemy w postaci

/3.2/ $$\omega^{(i)} = \mathcal{H}^{(i)}(t, x, k)$$

dla $i = 1, \ldots, n$ / x oznacza zmienne $x_\varkappa$ /. Funkcję $Q(-\omega, k)$ można przedstawić jako iloczyn n czynników

/3.3/ $$Q^{(i)} = -\omega + \mathcal{H}^{(i)}.$$

Równanie /3.1/ jest spełnione, jeśli tylko spełnione ~~jest~~ jedno z równań

/3.4/ $$Q^{(i)}(-\omega, k) = 0$$

dla $i = 1, \dots, n$

Równanie /3.1/ jest równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu określającym funkcję $\varphi(t, x)$. Gałęzie tej funkcji określają równania /3.4/. Wybierzemy jedną z gałęzi i będziemy dalej opuszczać wskaźnik " (i) ".

Charakterystyki równania dyspersyjnego /3.4/ określa układ równań kanonicznych Hamiltona

/3.5/ $$\dot{x}_{\varkappa} = \partial \mathcal{H} / \partial k_{\varkappa} ,$$

/3.6/ $$\dot{k}_{\varkappa} = -\partial \mathcal{H} / \partial x_{\varkappa} ,$$

gdzie kropką oznaczono pochodną zwyczajną względem t . Krzywe $x_{\varkappa} = x_{\varkappa}(t)$ są charakterystykami równania /3.4/, ale nie są bicharakterystykami układu równań /2.1/. Będziemy je nazywać promieniami. Prędkość promieniowa $\dot{x}_{\varkappa} = \gamma_{\varkappa}$ jest z definicji prędkością grupową.

Funkcję fazową można wyznaczyć korzystając z zależności

/3.7/ $$\dot{\varphi} = -\omega + k_{\varkappa} \gamma_{\varkappa} = \mathcal{L}$$

po uprzednim znalezieniu $x_{\varkappa}, k_{\varkappa}$ z równań /3.5/-/3.6/. "Lagrangian" $\mathcal{L}(t, x, k)$ i "hamiltonian" $\mathcal{H}(t, x, k)$ są ze sobą związane równością

/3.8/ $$\mathcal{L} = -\mathcal{H} + k_{\varkappa} \partial \mathcal{H} / \partial k_{\varkappa}$$

wynikającą bezpośrednio z /3.7/. W przypadku braku dyspersji $\mathcal{L} \equiv 0$ i wtedy funkcja fazowa $\varphi(t,x)$ jest stała w promieniach. W ogólnym przypadku φ dane jest całką z funkcji $\mathcal{L}$ względem czasu.

Widać, że funkcje $x_{\varkappa}(t)$, $k_{\varkappa}(t)$, $\varphi(t,x)$ są dostatecznie regularne w pewnym otoczeniu powierzchni t = const = t_0 dla $t > t_0$, jeśli dane początkowe są dostatecznie regularne.

4. RÓWNANIA TRANSPORTU

Macierz dyspersyjna A_{ik} jest funkcją zmiennych t, $x_{\varkappa}$ oraz $-\omega$, $k_{\varkappa}$ co można krótko zapisać jako

$$A_{ik} = A_{ik}(x,k) , \tag{4.1}$$

gdzie x oznacza zmienne x_K, k oznacza zmienne k_K dla $K = 0,1,\ldots,m$ / $k_0 = -\omega$ /. Jeśli k_K spełnia równanie dyspersyjne /3.4/, to macierz dyspersyjna jest osobliwa. Niech ω będzie q-krotnym pierwiastkiem równania /3.1/ i niech $\overset{\theta}{l_i}(x,k)$ i $\overset{\theta}{r_i}(x,k)$ będą odpowiednio lewymi i prawymi wektorami zerowymi macierzy $A_{ik}(x,k)$ dla $\theta = 1,\ldots,q$, odpowiadającymi pierwiastkowi ω.

A oto "lemat o kierunkach promieniowych" w wersji dla wielokrotnych pierwiastków równania dyspersyjnego.

LEMAT. Jeżeli k_K spełnia równanie dyspersyjne $Q(k)=0$ i macierz $A_{ik}(x,k)$ ma rząd $n-q$ dla $x_K \in D$, to

$$\overset{\theta'}{l_i}\,\overset{\theta}{r_k}\,D_{ik} = \overset{\theta'}{l_i}\,\overset{\theta}{r_i}\,\frac{d}{dt} \tag{4.2}$$

dla każdego $\theta, \theta' = 1,\ldots,q$.

Dowód. Przy ustalonym x_K równość

$$\mathcal{A}_{ik}(x,k)\, \overset{\theta}{r}_k(x,k) = 0 \tag{4.3}$$

jest prawdziwa dla każdego k_K spełniającego warunek $Q(k)=0$ /dla $\theta = 1, \dots, q$ /. Różniczka tej równości daje równość

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}_{ik}}{\partial k_K} \overset{\theta}{r}_k + \mathcal{A}_{ik} \frac{\partial \overset{\theta}{r}_k}{\partial k_K} \right) dk_K = 0, \tag{4.4}$$

która jest prawdziwa dla każdego dk_K spełniającego warunek

$$\frac{\partial Q}{\partial k_K} dk_K = 0. \tag{4.5}$$

Mnożąc /4.4/ przez $\overset{\theta}{l}_i$ i wyliczając pochodną $\partial \mathcal{A}_{ik} / \partial k_K$ otrzymujemy

$$\overset{\theta'}{l}_i A^K_{ik} \overset{\theta}{r}_k\, dk_K = 0. \tag{4.6}$$

Porównanie równości /4.5/ i /4.6/ prowadzi do wniosku, że wyrażenia mnożone przez różniczkę dk_K są proporcjonalne, tj.

$$\overset{\theta'}{l}_i A^K_{ik} \overset{\theta}{r}_k = m_{\theta'\theta}\, \partial Q / \partial k_K, \tag{4.7}$$

gdzie $m_{\overset{\Theta'}{}\Theta}$ jest współczynnikiem proporcjonalności. Kładąc $K=0$ stwierdzamy, że $m_{\Theta'\Theta} = l_i^{\Theta'} r_i^{\Theta}$, a po uwzględnieniu /3.5/ mamy ostatecznie

$$/4.8/ \qquad \overset{\Theta'}{l_i} A_{ik}^{K} \overset{\Theta}{r_k} = \overset{\Theta'}{l_i} \overset{\Theta}{r_i} \dot{x}_K ,$$

skąd wynika poszukiwany związek /4.2/.

Macierz $m_{\Theta'\Theta} = \overset{\Theta'}{l_i} \overset{\Theta}{r_i}$ jest nieosobliwa, jak łatwo pokazać. Oznaczmy przez l macierz, której wiersze są lewymi wektorami zerowymi macierzy dyspersyjnej, a przez r macierz, której kolumny są prawymi wektorami zerowymi. Widać, że

$$/4.9/ \qquad \det lr = \prod_k \det [m^{(k)}_{\Theta'\Theta}] ,$$

gdzie $m^{(k)}_{\Theta'\Theta}$ oznacza macierz odpowiadającą k-temu pierwiastkowi równania dyspersyjnego /3.1/ o krotności q_k. Z drugiej strony, na mocy założenia o hiperboliczności,

$$/4.10/ \qquad \det lr = \det l \det r \neq 0$$

Zatem $m^{(k)}_{\Theta'\Theta}$ jest nieosobliwe dla każdego k.

Równość /4.8/ pokazuje, że prędkość grupowa może być wyrażona za pośrednictwem relacji

$$/4.11/ \qquad \gamma_\varkappa I_{\Theta'\Theta} = m^{-1}_{\Theta'\Theta''} \overset{\Theta''}{l_i} A^{\varkappa}_{ik} \overset{\Theta}{r_k} ,$$

gdzie $I_{\Theta'\Theta}$ jest macierzą jednostkową.

Przechodzimy do wyznaczenia współczynników rozwinięcia $\overset{\nu}{g}$, które można otrzymać kolejno na drodze rekurencyjnej. Z równania /2.13/ wynika, że

/4.12/ $$g^{1}_{k}(x,k) = \sigma_{\Theta} \overset{\Theta}{r}_{k}(x,k).$$

Współczynnik proporcjonalności σ_{Θ} może być funkcją zmiennych x_k, k_k. Na promieniach można go wyznaczyć za pomocą równania /2.14/ przy $\tau = 1$. Istotnie, po wymnożeniu tego równania przez $\overset{\Theta'}{l}_{i}$, podstawieniu /4.12/ i skorzystaniu z Lematu dostajemy równanie transportu

/4.13/ $$\overset{\Theta'}{l}_{i} \overset{\Theta}{r}_{i} \dot{\sigma}_{\Theta} + \overset{\Theta'}{l}_{i} \bar{\mathcal{A}}^{k}_{il} \overset{\Theta}{r}_{l} \overset{\Theta''}{r}_{k} e^{ip\varphi} \sigma_{\Theta''} \sigma_{\Theta} +$$
$$+ (\overset{\Theta'}{l}_{i} D_{ik} \overset{\Theta}{r}_{k} + \overset{\Theta'}{l}_{i} A^{\varkappa k}_{il} \overset{\Theta}{r}_{k} \partial u^{0}_{l} / \partial x_{\varkappa}) \sigma_{\Theta} = 0$$

określone na promieniach.

Pokażemy, że

/4.14/ $$\overset{\Theta'}{l}_{i} \bar{\mathcal{A}}^{k}_{il} \overset{\Theta}{r}_{l} \overset{\Theta''}{r}_{k} = \overset{\Theta'}{l}_{i} \overset{\Theta}{r}_{i} a_{\Theta''} ,$$

gdzie $a_{\Theta''} = \omega^{k} \overset{\Theta''}{r}_{k}$, przy czym $\omega(u) = \mathcal{H}(u)$ jest wybranym pierwiastkiem równania dyspersyjnego /por. /3.2//, $\omega^{k} = \partial\omega / \partial u_{k}$. Różniczkujemy równość

/4.15/ $$\bar{\mathcal{A}}_{il}(u) \overset{\Theta}{r}_{l}(u) = \omega(u) \overset{\Theta}{r}_{i}(u)$$

względem u_k, co daje

$$\bar{A}^{k}_{il} r^{\theta}_{l} + \bar{A}_{il} r^{\theta k}_{l} = \omega^{k} r^{\theta}_{i} + \omega r^{\theta k}_{i} \tag{4.16}$$

gdzie $r^{\theta k}_{i} = \partial r^{\theta}_{i} / \partial u_{k}$, a po wymnożeniu przez $l^{\theta'}_{i}$ i przez $r^{\theta''}_{k}$ otrzymujemy /4.14/.

Uwzględniając /4.14/ i mnożąc równanie /4.13/ przez macierz $m^{-1}_{\eta\theta'}$ dostajemy /po odpowiedniej zamianie nazw wskaźników/

$$\dot{\sigma}_{\theta} + a_{\theta'} e^{ip\varphi} \sigma_{\theta'} \sigma_{\theta} + b_{\theta\theta'} \sigma_{\theta'} = 0 , \tag{4.17}$$

gdzie $b_{\theta\theta'}$, oznacza iloczyn macierzy $m^{-1}_{\eta\theta'}$ i macierzy będącej współczynnikiem przy σ_{θ} w równaniu /4.13/.

Współczynnik

$$a_{\theta} = r^{\theta}_{k} \partial \mathcal{H} / \partial u_{k} \tag{4.18}$$

może się okazać równy zero dla $\theta = 1, \dots, q$. W takim przypadku promień odpowiadający wybranemu pierwiastkowi równania dyspersyjnego jest "wyjątkowy". Promień wyjątkowy jest uogólnieniem bicharakterystyki wyjątkowej dla układu hiperbolicznego równań niedyspersywnych.

Współczynniki rozwinięcia g^{ν}_{k} dla $\nu = 2, \dots, N$ mają postać

$$g^{\nu}_{k}(x, k) = \sigma^{\nu}_{\theta} r^{\theta}_{k}(x, k) + h^{\nu}_{k}(x, k) , \tag{4.19}$$

co wynika z równania /2.14/. Funkcja h^{ν}_{k} jest rozwiązaniem równania algebraicznego.

$$-\mathcal{A}_{ik} h_k^{\nu} = D_{ik} g^{\nu-1} + H_{ik}^{(\nu-1)} g_k^{\nu-1} + G_i^{(\nu-1)} \qquad /4.20/$$

a funkcja σ_θ^ν jest rozwiązaniem równania transportu

$$\begin{aligned} & m_{\theta'\theta}\dot{\sigma}_\theta^{\nu} + \left(l_i^{\theta'} D_{ik} r_k^{\theta} + l_i^{\theta'} H_{ik}^{(\nu)} r_k^{\theta}\right)\sigma_\theta^{\nu} + \\ & + l_i^{\theta'} D_{ik} h_k^{\nu} + l_i^{\theta'} H_{ik}^{(\nu)} h_k^{\nu} + l_i^{\theta'} G_i^{(\nu)} = 0, \end{aligned} \qquad /4.21/$$

określonego na promieniach, które otrzymuje się po wymnożeniu równania /2.14/ przez $l_i^{\theta'}$ i skorzystaniu z Lematu. Dla $\nu = N$ równanie transportu otrzymuje się z równania /2.15/ przy założeniu, że $l_i^{\theta'} N_i[R] = 0$ dla $\theta' = 1, \dots, q$.

5. KONKLUZJA

Można pokazać, że współczynniki rozwinięcia g_i^ν oraz reszta rozwinięcia R_i są dostatecznie regularne w pewnym otoczeniu powierzchni $t = t_0$ dla $t > t_0$, jeśli tylko dane początkowe są dostatecznie regularne. Dowód wynika z ogólnych twierdzeń teorii równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.

W odróżnieniu od przypadku liniowych równań postaci /2.1/, a także od przypadków równań quasi-liniowych niedyspersywnych, współczynniki rozwinięcia fali biegnącej są tu zależne od parametru p, który występuje w funkcjach S_ν . Należy jednak podkreślić, że ta zależność ma postać funkcji od $\exp(ip\varphi)$, gdyż równania transportu zależą od p za pośrednictwem takiego czynnika. Zatem moduły współczynników rozwinięcia są ograniczone przy $p \to \infty$ /dla ustalonych $t, x_\varkappa$ /.

Równania transportu dla g_k^1 są nieliniowe i ich rozwiązywanie jest w ogólności uciążliwe. Jednakże dla u_i^0 = const i dla $A_{ik}^{\varkappa}$, B_i niezależnych od t, $x_\varkappa$ równania /4.17/ upraszczają się znacznie, bo współczynnik a_Θ jest stały. Ponadto dla liniowej funkcji $\varphi(t, x)$ współczynnik $b_{\Theta\Theta'}$ jest także stały, a dla q = 1 równania /4.17/ sprowadzają się do jednego równania Riccatiego /albo Bernoulliego/.

Na promieniu wyjątkowym $a_\Theta = 0$ i wtedy /4.17/ jest liniowym układem równań zwyczajnych.

LITERATURA

[1] W. LAPRUS - Rozwiązanie typu fali biegnącej dla układu hiperbolicznego równań quasi-liniowych o wielokrotnych charakterystykach, Prace IPPT, 18/1975.

[2] W. LAPRUS - Metoda fal biegnących dla równań hiperbolicznych dyspersywnych, Prace IPPT /w druku/.