

2.2. — mechanika ośrodków ciągłych

**Andrzej Blinowski**

**OBROTY CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH**

**CZĘŚĆ I**

**GEOMETRIA I KINAMATYKA**

**7/1994**

**WARSZAWA 1994**

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 stycznia 1994 r.



56642



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 5,70 Ark.druk.7,00  
Oddano do drukarni w marcu 1994 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.  
Warszawa, ul.Jasna 1

<http://rcin.org.pl>

Andrzej Blinowski

## OBROTY CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH

### Część I Geometria i kinematyka

#### Streszczenie

Opracowanie zawiera opis geometryczny i kinematyczny obrotu obiektów materialnych i niematerialnych, związanych z odkształcanym ośrodkiem materialnym. Obroty brył sztywnych i ich kinematyka rozpatrywane są jako przypadek szczególny ruchów ciał odkształcalnych. W celu ujednolicenia języka opisu obrotów i dużych odkształceń ośrodka opis prowadzony jest konsekwentnie przy pomocy tensorów ortogonalnych i ich pochodnych czasowych. Dla ułatwienia lektury tekst zaopatrzone w liczne odnośniki przypominające, reinterpretujące, i komentujące ważne zależności szeroko rozumianego rachunku tensorowego, niektóre z nich są wyprowadzane od podstaw. Rozdział pierwszy, obok dwóch wstępnych podrozdziałów, zawiera opis geometrii przestrzeni orientacji (zbioru tensorów obrotu) jako trójwymiarowej podrozmaitości dziewięciowymiarowej przestrzeni liniowej tensorów drugiego rzędu. Badane są zarówno lokalne, jak i globalne własności przestrzeni orientacji, funkcje określone na tej przestrzeni oraz operatory różniczkowe. Rozdział drugi, poświęcony kinematyce zawiera opis pochodnych czasowych tensorów obrotu oraz ich usytuowanie w przestrzeni stycznej do rozmaitości obrotów. Rozpatrywana jest także kinematyka w przestrzeni orientacji, w szczególności wyprowadza się lokalne prawo bilansu dla funkcji rozkładu orientacji. Trzeci rozdział poświęcony jest geometrii i kinematyce obrotów obiektów związanych z deformującym się ośrodkiem ciągłym, takich jak: włókna i powierzchnie materialne oraz tzw. repery Mandela, wprowadzone w celu opisu obrotów w teorii plastyczności. Rozważane są także prędkości obrotów układów kierunków głównych tensorów symetrycznych, dla których wyprowadzono zamknięte wzory. Ostatni podrozdział poświęcony jest opisowi ewolucji krzywizn włókien i powierzchni materialnych (zginaniu i prędkości zginania) przez charakterystyki ruchu ośrodka (drugie gradienty pól deformacji i prędkości). Układ i dobór materiału oraz sposób jego wyłożenia mają na względzie raczej interpretację i pogładowość, niż rygorystyczną ścisłość matematyczną.

#### Wstęp

Proponowany czytelnikowi tekst stanowi, zgodnie z zamierzeniem Autora, pierwszą część opracowywanej (średnio obszernej) monografii, pomyślanej jako krytyczny przegląd wymienionych w tytule aspektów mechaniki ośrodka ciągłego i jej zastosowań inżynierskich (m.in. tych, które umownie nazywane są niekiedy mechaniką konstrukcji). Autor, zdając sobie sprawę z kontrowersyjności niektórych interpretacji, do których doszedł, zarówno w wyniku dyskusji ze znawcami przedmiotu<sup>1</sup>, jak i własnych przemyśleń, zdecydował się przedłożyć pierwszą zakończoną już (przynajmniej w

<sup>1</sup>Wymieniając tu z wdzięcznością m.in. J.Rychlewskiego, B.Ranieckiego, J.Sławianowskiego, J.Ostrowską-Maciejewską, W.Gambina i P.Dłużewskiego, Autor bynajmniej nie sugeruje, że jego punkt widzenia jest przez nich całkowicie i bez reszty akceptowany.

obecnej wersji) część pracy do publikacji na prawach rękopisu w Pracach IPPT PAN. Autor ma nadzieję, że ewentualna krytyka i dyskusja, którą może wywołać niniejsza publikacja pozwoli na wyjaśnienie przynajmniej części wątpliwości i mylnych, być może, interpretacji, pozwalając na uniknięcie ich w przygotowywanej książkowej wersji. Wydaje się również, że niektóre z przytoczonych nowych (lub mało znanych, przypomnianych) wyników mogą okazać się pomocne przy praktycznych zastosowaniach metod mechaniki ośrodków ciągłych np. do opisu plastyczności materiałów polikrystalicznych lub zachowania się kompozytów.

Ambicją Autora jest dotarcie do różnych kręgów czytelników, zarówno do specjalistów–teoretyków w dziedzinie mechaniki kontinuum, jak i do badaczy zajmujących się inżynierskimi zastosowaniami tej dyscypliny wiedzy i praktycznym konstruowaniem algorytmów obliczeniowych. Z tego właśnie powodu sposób wykładu materiału, zwłaszcza w pierwszych rozdziałach, jest dwupoziomowy: specjalista może pominąć informacje zawarte w przypisach, przeznaczone w zasadzie dla czytelnika, który na codzień nie operuje wprowadzanymi pojęciami, ale stykał się już z nimi.

Czytelnik, który, nawet w ogólnych zarysach nie stykał się dotąd z niektórymi z nich znajdzie wskazówki, w jakim kręgu literatury ma ich poszukiwać.

W niektórych przypadkach Czytelnik–nieszpecialista, wreszcie, może zechcieć poprzestać na tym poziomie niemal „gazetowo–encyklopedycznego” zrozumienia niektórych pojęć, który można osiągnąć na podstawie lektury przypisów. Autor (nie namawiając bynajmniej do takiego postępowania), stara się tak konstruować prezentowane rozważania, aby były one dostępne również i dla tej kategorii czytelników.

Zakładając będziemy, że Czytelnik zna podstawy algebry wektorów i rachunku macierzowego oraz potrafi operować zamiennie współrzędnymi kartezyjskimi punktu i składowymi jego wektora położenia<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Jeden ze sposobów wprowadzenia przestrzeni wektorowej polega na utożsamieniu wektorów z klasami równoważności uporządkowanych par punktów generujących równe i równoległe odcinki, procedura taka dostarcza naturalnego, wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania punktom ich wektorów położenia.

2.2. — mechanika ośrodków ciągłych

**Andrzej Blinowski**

**OBROTY CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH**

**CZEŚĆ I**

**GEOMETRIA I KINAMATYKA**

**7/1994**

**W A R S Z A W A 1 9 9 4**

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 stycznia 1994 r.



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 5,70 Ark.druk.7,00  
Oddano do drukarni w marcu 1994 r.

---

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.  
Warszawa, ul.Jasna 1

Andrzej Blinowski

## OBROTY CIAŁ ODKSZTAŁCALNYCH

### Część 1 Geometria i kinematyka

#### Streszczenie

Opracowanie zawiera opis geometryczny i kinematyczny obrotu obiektów materialnych i niematerialnych, związanych z odkształcanym ośrodkiem materialnym. Obroty brył sztywnych i ich kinematyka rozpatrywane są jako przypadek szczególny ruchów ciał odkształcalnych. W celu ujednolicenia języka opisu obrotów i dużych odkształceń ośrodka opis prowadzony jest konsekwentnie przy pomocy tensorów ortogonalnych i ich pochodnych czasowych. Dla ułatwienia lektury tekst zaopatrzone w liczne odnośniki przypominające, reinterpretujące, i komentujące ważne zależności szeroko rozumianego rachunku tensorowego, niektóre z nich są wyprowadzane od podstaw. Rozdział pierwszy, obok dwóch wstępnych podrozdziałów, zawiera opis geometrii przestrzeni orientacji (zbioru tensorów obrotu) jako trójwymiarowej podrozmierności dziewięciowymiarowej przestrzeni liniowej tensorów drugiego rzędu. Badane są zarówno lokalne, jak i globalne własności przestrzeni orientacji, funkcje określone na tej przestrzeni oraz operatory różniczkowe. Rozdział drugi, poświęcony kinematyce zawiera opis pochodnych czasowych tensorów obrotu oraz ich usytuowanie w przestrzeni stycznej do rozmierności obrotów. Rozpatrywana jest także kinematyka w przestrzeni orientacji, w szczególności wyprowadza się lokalne prawo bilansu dla funkcji rozkładu orientacji. Trzeci rozdział poświęcony jest geometrii i kinematyce obrotów obiektów związanych z deformującym się ośrodkiem ciągłym, takich jak: włókna i powierzchnie materialne oraz tzw. repery Mandela, wprowadzone w celu opisu obrotów w teorii plastyczności. Rozważane są także prędkości obrotów układów kierunków głównych tensorów symetrycznych, dla których wyprowadzono zamknięte wzory. Ostatni podrozdział poświęcony jest opisowi ewolucji krzywizn włókien i powierzchni materialnych (zginaniu i prędkości zginania) przez charakterystyki ruchu ośrodka (drugie gradienty pól deformacji i prędkości). Układ i dobór materiału oraz sposób jego wyłożenia mają na względzie raczej interpretację i pogłębienie, niż rygorystyczną ścisłość matematyczną.

#### Wstęp

Proponowany czytelnikowi tekst stanowi, zgodnie z zamierzeniem Autora, pierwszą część opracowywanej (średnio obszernej) monografii, pomyślanej jako krytyczny przegląd wymienionych w tytule aspektów mechaniki ośrodka ciągłego i jej zastosowań inżynierskich (m.in. tych, które umownie nazywane są niekiedy mechaniką konstrukcji). Autor, zdając sobie sprawę z kontrowersyjności niektórych interpretacji, do których doszedł, zarówno w wyniku dyskusji ze znawcami przedmiotu<sup>1</sup>, jak i własnych przemyśleń, zdecydował się przedłożyć pierwszą zakończoną już (przynajmniej w

<sup>1</sup>Wymieniając tu z wdzięcznością m.in. J.Rychlewskiego, B.Ranieckiego, J.Sławianowskiego, J.Ostrowską-Maciejewską, W.Gambina i P.Dłużewskiego, Autor bynajmniej nie sugeruje, że jego punkt widzenia jest przez nich całkowicie i bez reszty akceptowany.

obecnej wersji) część pracy do publikacji na prawach rękopisu w Pracach IPPT PAN. Autor ma nadzieję, że ewentualna krytyka i dyskusja, którą może wywołać niniejsza publikacja pozwoli na wyjaśnienie przynajmniej części wątpliwości i mylnych, być może, interpretacji, pozwalając na uniknięcie ich w przygotowywanej książkowej wersji. Wydaje się również, że niektóre z przytoczonych nowych (lub mało znanych, przypomnianych) wyników mogą okazać się pomocne przy praktycznych zastosowaniach metod mechaniki ośrodków ciągłych np. do opisu plastyczności materiałów polikrystalicznych lub zachowania się kompozytów.

Ambicją Autora jest dotarcie do różnych kręgów czytelników, zarówno do specjalistów—teoretyków w dziedzinie mechaniki kontinuum, jak i do badaczy zajmujących się inżynierskimi zastosowaniami tej dyscypliny wiedzy i praktycznym konstruowaniem algorytmów obliczeniowych. Z tego właśnie powodu sposób wykładu materiału, zwłaszcza w pierwszych rozdziałach, jest dwupoziomowy: specjalista może pominąć informacje zawarte w przypisach, przeznaczone w zasadzie dla czytelnika, który na codzień nie operuje wprowadzonymi pojęciami, ale stykał się już z nimi.

Czytelnik, który, nawet w ogólnych zarysach nie stykał się dotąd z niektórymi z nich znajdzie wskazówki, w jakim kręgu literatury ma ich poszukiwać.

W niektórych przypadkach Czytelnik—nieszpecialista, wreszcie, może zechcieć poprzestać na tym poziomie niemal „gazetowo—encyklopedycznego” zrozumienia niektórych pojęć, który można osiągnąć na podstawie lektury przypisów. Autor (nie namawiając bynajmniej do takiego postępowania), stara się tak konstruować prezentowane rozważania, aby były one dostępne również i dla tej kategorii czytelników.

Zakładając będziemy, że Czytelnik zna podstawy algebry wektorów i rachunku macierzowego oraz potrafi operować zamiennie współrzędnymi kartezjańskimi punktu i składowymi jego wektora położenia<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Jeden ze sposobów wprowadzenia przestrzeni wektorowej polega na utożsamieniu wektorów z klasami równoważności uporządkowanych par punktów generujących równe i równoległe odcinki, procedura taka dostarcza naturalnego, wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania punktom ich wektorów położenia.



## 1. Geometria ruchu

### 1.1 Odwzorowania liniowe

Celem naszym jest opisanie odkształceń i obrotów ciał materialnych. Na ogół stosuje się w tym celu formalizm rachunku wektorowego i tensorowego. Nie jest zamiarem autora przedstawianie systematycznego wykładu algebry liniowej, czy też analizy pól tensorowych,<sup>1</sup> wydaje się jednak celowe poprzedzenie właściwego wykładu pewnymi wstępnymi rozważaniami, które, być może, pozwolą Czytelnikowi używającemu rutynowo rachunku tensorowego zatrzymać uwagę na pewnych interpretacjach wielkości tensorowych, zaś czytelnikowi nie znającemu tego formalizmu pozwolą, przy pewnej staranności w przyswojeniu sobie treści tego podrozdziału, na zrozumienie dalszego ciągu bez konieczności odwoływania się do podręczników rachunku tensorowego[14], [27],[30].

W dalszych rozważaniach interesować nas będą głównie przestrzenie dwu- i trójwymiarowe. Wszędzie jednak tam, gdzie wymiar przestrzeni<sup>2</sup> nie jest istotny nie będziemy specyfikować liczby wymiarów. Jeżeli nie będzie to specjalnie zaznaczone, mówiąc o bazach przestrzeni  $\{e_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) będziemy domyślnie rozumieć bazy ortonormalne:

$$(1.1.1) \quad e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

gdzie kropką oznaczamy iloczyn skalarny,  $\delta_{ij}$  jest symbolem Kroneckera<sup>3</sup>

Narzędziem opisu obrotów ciał oraz ich lokalnych odkształceń jest język liniowych odwzorowań przestrzeni wektorowej, odpowiadających przekształceniom afinicznym<sup>4</sup> przestrzeni punktowej. Odwzorowaniem liniowym z dowolnej przestrzeni wektorowej  $V$  w inną przestrzeń wektorową  $W^n$  będziemy nazywać takie odwzorowanie  $L$ , dla którego zachodzi zależność:

---

<sup>1</sup>Czytelników zainteresowanych głębszymi aspektami zastosowania rachunku tensorowego w mechanice ośrodków ciągłych odsyłamy do fundamentalnej monografii J. Rychlewskiego [31].

<sup>2</sup>Przypominamy, że wymiarem przestrzeni  $n$  nazywamy największą liczbę liniowo niezależnych wektorów tej przestrzeni. Układ  $k$  wektorów  $a_1, \dots, a_k$  nazywamy liniowo niezależnym, jeżeli nie istnieją takie, nie wszystkie równe zeru, liczby  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , że  $\sum \alpha_k a_k = 0$ .

<sup>3</sup>Symbole  $\delta_{ij}$ , gdzie  $\delta_{ij} = 1$  dla  $i = j$ , oraz  $\delta_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$  tworzą macierz jednostkową.

<sup>4</sup>Przekształceniem afinicznym nazywamy takie przekształcenie przestrzeni punktowej, które wszystkie proste odwzorowuje na proste.

<sup>5</sup>O ile nie zastrzegamy, że jest inaczej, będziemy rozumieli, że rozważamy przestrzenie nad ciałem liczb rzeczywistych.

$$(1.1.2) \quad \mathbf{L}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{L}(\mathbf{a}) + \beta \mathbf{L}(\mathbf{b})^6.$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi liczbami. W naszych dalszych rozważaniach przestrzenie  $W$  i  $V$  będą się na ogół pokrywać.

Zdefiniujemy pewne odwzorowanie liniowe przestrzeni  $V$  w siebie: niech będzie dana uporządkowana para wektorów, przez nasunięcie (prawostronne) pary  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  na wektor  $\mathbf{x}$  będziemy rozumieli następującą operację  $\mathbf{L}$ :

$$(1.1.3) \quad \mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}).$$

Zauważmy, że nasunięcie par  $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b})$  i  $(\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b})$  prowadzi dla dowolnego wektora  $\mathbf{x}$  do tego samego wyniku, będziemy więc tego rodzaju pary utożsamiać. Tak utworzony zbiór<sup>7</sup> będziemy nazywali zbiorem diad, a jego elementy diadami. Przyjęło się oznaczać diadę, do której należy para  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  przez  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ .

W zbiorze diad definiujemy w sposób naturalny mnożenie przez liczbę:

$$(1.1.4) \quad \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b})$$

Zauważmy, że diada  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{e}_i$ , gdzie  $\mathbf{e}_i$  jest  $i$ -tym wektorem bazy ortonormalnej, odwzorowuje wektor  $\mathbf{e}_i$  w wektor  $\mathbf{a}$ , natomiast w działaniu na wszystkie inne wektory bazowe daje 0. Dla działania nasunięcia nie wprowadzamy żadnego nowego oznaczenia, podobnie, jak pomija się znak mnożenia symboli algebraicznych, tak i tu będziemy pisać po prostu diadę i wektor obok siebie:

$$(1.1.5) \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{x} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})^8.$$

Zauważmy, że po to, aby zdefiniować dowolne odwzorowanie liniowe wystarczy zadać jego wynik na wektorach bazowych. W rzeczy samej, z liniowości odwzorowania wynika natychmiast:

$$(1.1.6) \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{L}(\mathbf{e}_i)$$

gdzie  $x_i$  są składowymi wektora  $\mathbf{x}$ <sup>9</sup>. Widzimy zatem, że wynik każdej operacji liniowej da się przedstawić jako suma wyników nasunięcia  $n$  diad n.p. typu  $\mathbf{L}(\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j$ :

<sup>6</sup> Każda prosta w przestrzeni wektorowej ma postać następującego zbioru:  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})s$ , gdzie  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  są pewnymi wektorami, a  $s$  — parametrem rzeczywistym, nie trudno zauważyć, że zbiór  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  ma tę samą strukturę, zatem każde odwzorowanie liniowe jest afiniczne.

<sup>7</sup>T.j. zbiór klas równoważności względem relacji:  $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{R} (\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b})$ .

<sup>8</sup> Dla nasunięcia lewostronnego piszemy:  $\mathbf{x}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$ .

<sup>9</sup> W bazie ortonormalnej zachodzi równość, z której będziemy często korzystać:  $x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j$ .

$$(1.1.7) \quad \mathbf{L}(x) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}(e_i) \otimes e_i)x.$$

Mamy zatem uzasadnienie, aby uzupełnić zbiór diad o ich sumy, zdefiniowane, jako takie operatory liniowe, których działanie na dowolny wektor  $x$  jest tożsamy z kolejnym nasunięciem sumowanych diad na ten wektor i zsumowaniem wyników tych działań:

$$(1.1.8) \quad \mathbf{T} = a \otimes b + c \otimes d \Leftrightarrow \forall x \in V: \mathbf{T}x = (a \otimes b)x + (c \otimes d)x.$$

Zbiór diad uzupełniony przez wszystkie ich sumy, (a więc *de facto* zbiór wszystkich odzworowań liniowych przestrzeni  $V$  w siebie) z określonymi (przez odpowiednie działania na diadach) w sposób naturalny działaniami dodawania i mnożenia przez liczby<sup>10</sup> nazywamy iloczynem tensorowym przestrzeni  $V$  przez siebie  $V \otimes V$ <sup>11</sup>, natomiast jego elementy – tensorami drugiego rzędu nad przestrzenią  $V$ .<sup>12</sup> Wprowadziliśmy tu pojęcie tensorów poprzez odzworowania liniowe, tensory, rozumiane w ten sposób, nazywane są niekiedy afinorami.<sup>13</sup>

Jest oczywiste, że jeden i ten sam tensor może być przedstawiony w postaci sumy trzech diad na nieskończenie wiele sposobów<sup>14</sup> Postaramy się sformułować taki zapis tensorów, aby dały się one bez trudu odróżniać względnie utożsamiać. Wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$(1.1.9) \quad T_{ij} \equiv e_i \mathbf{T} e_j \equiv e_i \cdot (\mathbf{T} e_j) = (e_i \mathbf{T}) \cdot e_j$$

Dowodzi się natychmiast, że zachodzi następująca równość:

<sup>10</sup> Sumą dwóch tensorów będziemy nazywać sumę wszystkich tworzących je diad, natomiast mnożenie tensora przez liczbę realizujemy przez pomnożenie wszystkich składających się nań diad przez tę liczbę.

<sup>11</sup> Analogicznie definiujemy tensory, opisujące odzworowania liniowe z przestrzeni  $V$  do innej przestrzeni  $W$ , która może mieć inny wymiar niż przestrzeń  $V$ .

<sup>12</sup> Nie trudno zauważyć, że iloczyn tensorowy przestrzeni jest również przestrzenią liniową o wymiarze równym iloczynowi wymiarów tworzących go przestrzeni, zatem jest sens rozpatrywać odzworowania liniowe z i do takich przestrzeni, okazuje się przy tym, że działanie iloczynu tensorowego jest łączne, sensowne jest zatem mówienie o iloczynach tensorowych  $n$  przestrzeni, elementy takich przestrzeni nazywamy tensorami  $n$ -walencji.

<sup>13</sup> Wektory, które dadzą się wprowadzić jako klasy par punktów, mogą opisywać najróżniejsze obiekty: np. mnożenie skalarnie przez wybrany wektor jest odzworowaniem liniowym z przestrzeni  $V$  do zbioru liczb, zatem wektor możemy traktować jako tensor o walencji 1. Podobnie i tensory, raz wprowadzone, żyją już dalej własnym życiem nie przejawiając swej afinorowej natury, mogą one opisywać całkiem inne obiekty jak formy kwadratowe, krzywizny i t.p.

<sup>14</sup> Na przykład odzworowanie tożsamościowe ma postać  $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$  gdzie baza  $\{e_i\}$  może być dowolna.

$$(1.1.10) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{T}.$$

Macierz  $T_{ij}$  zwana jest reprezentacją tensora  $\mathbf{T}$  w bazie  $\{\mathbf{e}_i\}$ <sup>15</sup>.

Dotarliśmy do właściwego miejsca, aby wprowadzić pewne udogodnienie zapisu zwane konwencją sumacyjną. Czytelnik zechce zauważyć, że we wszystkich dotychczasowych wzorach wszędzie tam, gdzie powtarzały się wskaźniki następowało po nich sumowanie, oszczędzimy więc na zapisie opuszczając znak sumowania i przyjmując, że wszędzie tam, gdzie nie zastrzeżono, iż jest inaczej, podwójne wskaźniki oznaczają sumowanie od 1 do  $n$ .<sup>16</sup>

Przy takiej umowie dają się elegancko zapisać nasunięcia tensorów:<sup>17</sup>

$$(1.1.11) \quad \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} \Leftrightarrow y_i = T_{ij}x_j; \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \Leftrightarrow C_{ij} = A_{ik}B_{kj}.$$

Działanie (1.1.11), można także zapisać w formalizmie rachunku macierzy:

$$(1.1.12) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przypominamy tu Czytelnikowi, że wszystkie przytoczone zależności wyprowadziliśmy dla baz ortonormalnych. Sprawa się nieco komplikuje, jeżeli chcemy korzystać z dowolnych baz,  $\{\mathbf{a}_i\}$  wprowadza się wtedy tzw. kobazy  $\{\mathbf{a}^i\}$  według recepty:  $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$ , oraz kowariantne  $T_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{T} \mathbf{a}_j$ , kontrawariantne  $T^{ij} = \mathbf{a}^i \mathbf{T} \mathbf{a}^j$  i mieszane  $T^i_j = \mathbf{a}^i \mathbf{T} \mathbf{a}_j$  reprezentacje tensora. Mamy wówczas:  $\mathbf{T} = T^{ij}(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) = T_{ij}(\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j) = T^i_j(\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}_j) = T^i_j(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j)$  i, analogicznie, dla wektorów:  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{a}^i = x^i \mathbf{a}_i$ . Wskaźniki można opuszczać i podnosić przy pomocy mnożenia reprezentacji przez macierze  $A_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$  i  $A^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j$ , które są kowariantną i kontrawariantną reprezentacją tensora jednostkowego:  $\mathbf{x}^i = A^{ij}x_j$ ,  $T^i_j = T^{ik}A_{kj}$ , itd. Wszystkie zależności, które zapisujemy przy

<sup>15</sup> Wystarczy pokazać, że obie strony równości (1.1.10) jednakowo działają na dowolny wektor bazowy. Zauważamy, że  $\mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_i)$  jest  $j$ -tą składową odwzorowania  $i$ -tego wektora bazowego:

$$\sum_{j=1}^n [\mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_i)] \mathbf{e}_j = \mathbf{T}\mathbf{e}_i, \text{ a stąd } \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \right\} \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n T_{ik} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_k)] \mathbf{e}_i.$$

<sup>16</sup> Piszemy więc:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$ ;  $\mathbf{T} = T_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  i tp. Jak się wydaje, pomysł takiego zapisu pochodzi od Alberta Einsteina.

<sup>17</sup> Przez nasunięcie tensora na diadę będziemy rozumieć nasunięcie na jeden z jej wektorów, stąd natychmiast wynika uogólnienie działania na dowolne tensory jako nasunięcia na wszystkie diady, łatwo zauważyć, że zapisując działanie jako  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  nie musimy precyzować, czy nasuwamy prawostronnie tensor  $\mathbf{A}$  na  $\mathbf{B}$ , czy też lewostronnie  $\mathbf{B}$  na  $\mathbf{A}$ , wynik obu tych operacji jest identyczny.

pomocy konwencji sumacyjnej w bazach ortonormalnych pozostaną prawdziwe dla składowych ko- i kontrawariantnych, jeżeli przestrzegać będziemy żelaznej reguły: powtarzające się wskaźniki muszą występować na różnych poziomach.



## 1.2 Zamiana bazy, obroty przestrzeni

Niechaj dane będą w przestrzeni  $V$  dwie różne bazy ortonormalne  $\{e_i\}$  i  $\{\varepsilon_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). (Dla  $n = 3$  sytuacja pokazana jest na Rys. 2.1.)

Nietrudno skonstruować tensor, który odwzorowuje wektory bazy  $\{e_i\}$  na  $\{\varepsilon_i\}$  np.

$$(1.2.1) \quad Q = \delta_{ij}(\varepsilon_i \otimes e_j) = \varepsilon_i \otimes e_i.$$

Reprezentacja tego tensora w bazach  $\{e_i\}$  i  $\{\varepsilon_i\}$  ma tę samą postać; w rzeczy samej, w bazie  $\{e_i\}$  mamy:

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} e_i Q e_j &= e_i (\varepsilon_k \otimes e_k) e_j = \\ e_i \cdot \varepsilon_k \delta_{jk} &= e_i \cdot e_j. \end{aligned}$$

A dla bazy  $\{\varepsilon_j\}$  możemy napisać:

$$(1.2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i Q \varepsilon_j &= \varepsilon_i (\varepsilon_k \otimes e_k) \varepsilon_j = \\ \delta_{ik} \varepsilon_k \cdot \varepsilon_j &= e_i \cdot e_j \end{aligned}$$

Zatem w obu bazach:

$$(1.2.4) \quad Q_{ij} = e_i \cdot e_j.$$

Lub, inaczej:

$$(1.2.5) \quad Q_{ij} \varepsilon_j = e_i^1$$

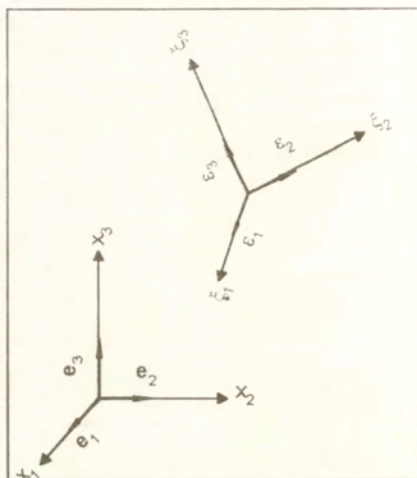
Mnożąc tę równość przez  $e_k$  otrzymamy:

$$(1.2.6) \quad Q_{ij} (\varepsilon_j \cdot e_k) = \delta_{ik}.$$

Jednak wielkości  $\varepsilon_j \cdot e_k$  są składowymi macierzy  $Q^T$ , mamy zatem:

$$(1.2.7) \quad Q Q^T = \mathbf{I},$$

gdzie przez  $\mathbf{I}$  oznaczyliśmy macierz jednostkową<sup>2</sup>. Z jednoznaczności macierzy odwrotnej wnioskujemy natychmiast, że dla dowolnej macierzy opisującej odwzorowanie wzajemne dwóch baz ortonormalnych zachodzi równość



Rys. 1.1. Bazy ortonormalne

<sup>1</sup> Z równości (1.2.5) wynika natychmiast prawo transformacji reprezentacji dowolnego tensora przy przejściu od jednej bazy ortonormalnej do innej, mamy bowiem:  $T'_{ij} = e_i^T e_j = (Q_i \cdot \varepsilon_j) \mathbf{T} (Q_{jm} \varepsilon_m) = Q_{ij} (\varepsilon_j^T \varepsilon_m) Q_{mj}^T = Q_{ij} T'_{lm} Q_{mj}^T$ , gdzie przez  $Q^T$  oznaczamy macierz transponowaną, a znakiem „prim” reprezentację w bazie  $\{\varepsilon_i\}$ . Analogicznie otrzymujemy:  $T'_{ij} = Q_{il}^T T_{lm} Q_{mj}$ . Dla wektorów, zaś, następujące zależności:  $Q_{ij} x'_j = x_i$ ;  $Q_{ij}^T x_j = x'_i$ .

<sup>2</sup> Taka macierz jest w każdej bazie ortonormalnej reprezentacją tensora jednostkowego (odwzorowania tożsamościowego)

$$(1.2.8) \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T.$$

Ponieważ przy wyprowadzaniu zależności (1.2.8) nie zakładaliśmy nic odnośnie bazy, zatem równość ta musi być prawdziwa w dowolnej bazie<sup>3</sup>, uprawnia to nas do nazwania tensora  $\mathbf{Q}$  ortogonalnym. Opierając się na znanych zależnościach algebry macierzy:

$$(1.2.9) \quad \begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}; \\ \det \mathbf{A}^T &= \det \mathbf{A}; \\ \det \mathbf{I} &= 1. \end{aligned}$$

otrzymujemy natychmiast dla dowolnej macierzy ortogonalnej:

$$(1.2.10) \quad (\det \mathbf{Q})^2 = 1.^4$$

W dalszym ciągu tego podrozdziału zajmiemy się odwzorowaniami ortogonalnymi w przestrzeni trójwymiarowej, zanim jednak do tego przystąpimy, pożytecznie będzie rozpatrzyć krótko przypadek dwuwymiarowy. Z elementarnych rozważań geometrycznych (por. Rys. 2.1) wynika natychmiast, że wektory obróconej bazy  $\{\varepsilon_\alpha\}$ , ( $\alpha = 1, 2$ ) wyrażają się przez wyjściowe wektory bazowe w następujący sposób:

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi \\ \varepsilon_2 &= -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

wynika stąd natychmiast następująca postać macierzy obrotu<sup>5</sup>

<sup>3</sup> Własność ta daje się udowodnić bezpośrednio. mamy bowiem dla dowolnej macierzy:  $(\mathbf{QAQ}^T)^{-1} = (\mathbf{AQ}^T)^{-1} \mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{Q}^T)^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{QA}^{-1} \mathbf{Q}^T$  i tak samo dla transpozycji:  $(\mathbf{QAQ}^T)^T = \mathbf{QA}^T \mathbf{Q}^T$  zatem równość (1.2.8) dla pewnej reprezentacji musi pociągać za sobą taką samą zależność dla dowolnej innej.

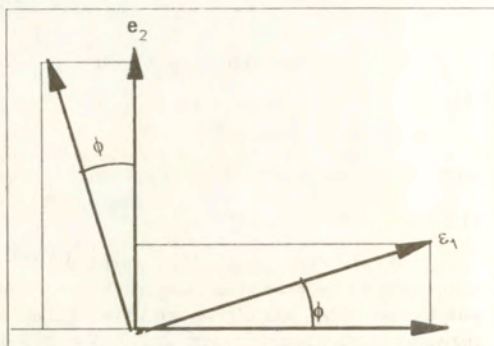
<sup>4</sup> Ze wzoru (1.2.10) i zależności transformacyjnych wyprowadzonych w przypisie <sup>(1)</sup> na str. 6 wynika natychmiast, że wyznacznik macierzy reprezentacji dowolnego tensora nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej, możemy więc mówić o wyznaczniku tensora. Czytelnik może tę własność udowodnić jako samodzielne ćwiczenie. Pozostawiamy również do samodzielnego wykazania przez czytelnika, że tę samą własność mają następujące funkcje określone na reprezentacjach tensora:

$\text{Tr} \mathbf{A} \equiv A_{ij} \delta_{ij} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$ ;  $\text{Tr} \mathbf{A}^2 \equiv A_{ij} A_{ij} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{I}$ ; pierwsza z nich nosi nazwę śladu tensora, a pierwsza z drugiej, (będącej sumą kwadratów wszystkich składowych reprezentacji tensora) nazywany jest normą tensora. Działanie oznaczone kropką nazywamy pełnym nasunięciem, a funkcje niezależne od wyboru reprezentacji — niezmiennikami tensora.

$$(1.2.12) \quad Q = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Zbiór tensorów ortogonalnych jest zatem gładkim, spójnym jednoparametrowym zbiorem w czterowymiarowej przestrzeni tensorów drugiego rzędu, nietrudno stwierdzić, że jest to krzywa zamknięta, można ją utożsamiać z okręgiem jednostkowym w dwuwymiarowej podprzestrzeni złożonej z kombinacji liniowych następujących dwóch tensorów jednostkowych:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^6$$



Rys. 2..2 Obrót w płaszczyźnie

Pojęcie osi obrotu nie ma sensu w przestrzeni dwuwymiarowej, jednak jeżeli wyobrazimy ją sobie zanurzoną w przestrzeni trójwymiarowej, to oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny obrotu. Jeżeli skierować trzeci wektor bazowy zgodnie z kierunkiem osi obrotu, to odpowiednia trójwymiarowa macierz obrotu ma postać:

$$(1.2.13) \quad Q = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykażemy, że każdy tensor obrotu w przestrzeni trójwymiarowej, przy odpowiednim doborze bazy, da się przedstawić w postaci (1.2.13).

<sup>5</sup>Macierze ortogonalne typu:  $\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}$  opisują odbicia tj. nie dające się fizycznie urzeczywistnić odwzorowania ciała materialnego. „Nie wychodząc z płaszczyzny” nie da się w żaden sposób odwzorować litery  $\Gamma$  na  $L$ . Podobnie, jak nie sposób z prawego buta zrobić lewy (dlatego, w obawie przed kradzieżą, umówiono się dawać do przymiarki jedynie prawe buty).

<sup>6</sup>Mnożenie macierzy i mnożenie przez liczbę rzeczywistą również nie wyprowadzają poza tę przestrzeń, nietrudno dowiedzieć, że tworzy ona ciało liczbowe izomorficzne z ciałem liczb zespolonych.



W rzeczy samej: tensor ortogonalny ma co najmniej jedną wartość własną równą  $\pm 1$ <sup>7</sup>. Zatem za trzeci z wektorów bazowych możemy przyjąć jednostkowy wektor własny przypisany do tej wartości własnej. Zarówno wiersze, jak i kolumny macierzy  $\mathbf{Q}$  są tworzone przez składowe wektorów jednostkowych w bazie ortonormalnej, wobec tego, zawierając jedynkę nie mogą już zawierać żadnych innych niezerowych elementów. Reprezentacja tensora  $\mathbf{Q}$  musi zatem w obranej bazie mieć następującą postać:

$$(1.2.14) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

gdzie  $\varepsilon = \pm 1$ , a podmacierz  $a$  jest dwuwymiarową macierzą ortogonalną. Zauważmy, że wyznacznik macierzy obrotu musi być dodatni<sup>8</sup>.

Składowe macierzy  $a$  muszą spełniać następujące zależności:

$$(1.2.15) \quad \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Kładąc

<sup>7</sup> Jeżeli odwzorowanie liniowe  $\mathbf{A}$  pozostawia pewien wektor  $\mathbf{x}$  nie obróconym  $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$  to wektor taki nazywamy wektorem własnym tensora  $\mathbf{A}$ , a liczbę  $\lambda$  wartością własną tego tensora. Zagadnienie poszukiwania składowych wektora  $\mathbf{x}$  sprowadza się do rozwiązania jednorodnego układu równań liniowych:  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ . Warunkiem istnienia nietrywialnych rozwiązań tego układu jest równość zera jego wyznacznika:  $\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0$ . Równanie to, zwane równaniem charakterystycznym, jest stopnia  $n$  względem  $\lambda$ , a zatem, jeżeli wymiar przestrzeni jest nieparzysty istnieje conajmniej jedna rzeczywista wartość własna, a co za tym idzie, conajmniej jeden wektor własny tensora  $\mathbf{A}$ . Transformacja ortogonalna nie zmienia długości wektorów, zatem dla tensora ortogonalnego  $|\lambda| = 1$ .

<sup>8</sup> Wiersze macierzy  $\mathbf{Q}$  opisują składowe wektorów bazy prawoskrętnej, których iloczyn mieszany

obliczany ze wzoru  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$  równy jest wyznacznikowi macierzy reprezentacji

tensora  $\mathbf{Q}$ .

$$(1.2.16) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi; & a_{12} &= \sin \varphi; \\ a_{21} &= -\sin \psi; & a_{22} &= \cos \psi; \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$(1.2.17) \quad \sin(\varphi - \psi) = 0,$$

czyli:

$$(1.2.18) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \psi; & \cos \varphi &= \cos \psi; \\ \text{lub} \\ \sin \varphi &= -\sin \psi; & \cos \varphi &= -\cos \psi; \end{aligned}$$

zatem macierz  $\mathbf{a}$ , jeśli nie jest postaci (1.2.12), to może być jedynie macierzą odbicia i, jako taka, ma dwie rzeczywiste wartości własne:  $\lambda_1 = -1$  i  $\lambda_2 = 1^9$ . Wobec dodatniości

<sup>9</sup> Każda macierz symetryczna o wymiarze  $2 \times 2$   $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  ma rzeczywiste wartości własne, ponieważ jej równanie charakterystyczne ma postać:  $\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0$ , a wyróżnik tego równania

$\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$  jest nieujemny. Jak łatwo sprawdzić, macierz odbicia  $\begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$  ma

wartości własne:  $\lambda_1 = -1$  i  $\lambda_2 = 1$ . Symetria  $A_{ij} = A_{ji}$ , lub antysymetria  $A_{ij} = -A_{ji}$  reprezentacji tensora nie zależy od wyboru bazy, mamy bowiem:  $(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)^T = (\mathbf{Q}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}^T)$ , możemy zatem mówić o tensorach symetrycznych i antysymetrycznych. Nie trudno zauważyć, że przyjmując jednostkowy wektor własny za pierwszy wektor bazowy, otrzymamy, dla tensora symetrycznego o dowolnym wymiarze

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Wymyka stąd natychmiast, że dla każdego symetrycznego tensora ortogonalnego w przestrzeni trójwymiarowej istnieje baza ortonormalna złożona z jego wektorów własnych, w której ma on macierz reprezentacji złożoną jedynie z wartości  $\pm 1$  na głównej przekątnej. Czytelnik, który uważnie prześledzi tok rozumowania prowadzący do tego wniosku, przy pewnej staranności zauważy, że jest on prawdziwy również dla dowolnego tensora symetrycznego w przestrzeni trójwymiarowej chociaż w nieco osłabionej postaci (twierdzenie spektralne):

wyznacznika macierzy  $Q$  mamy więc dwie możliwości: albo we wzorze (1.2.14)  $\varepsilon = 1$  i wtedy macierz  $a$  jest dwuwymiarową macierzą obrotu, albo też  $\varepsilon = -1$ , ale wtedy również istnieje dodatkowo wartość własna równa 1 i obrót odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do przynależnego jej wektora własnego. Wykazaliśmy tym samym, że każdy tensor ortogonalny, odwzorowujący prawoskrętną bazę ortonormalną na prawoskrętną bazę ortonormalną ma w pewnej bazie reprezentację postaci (1.2.13). Twierdzenie, które wykazaliśmy pochodzi od Eulera i początkowo było sformułowane w następujący sposób:

#### Twierdzenie 1.1

*Każde przemieszczenie bryły sztywnej odwzorowujące pewną sferę na siebie pozostawia nieruchome pewne jej dwa, położone naprzeciw siebie, punkty [19], [34].*

W zapisie absolutnym tensor ortogonalny da się przedstawić w następującej formie:

$$(1.2.19) \quad Q = n \otimes n + (I - n \otimes n) \cos \varphi + \varepsilon n \sin \varphi. {}_{10}$$

Rozważaliśmy dotychczas jedynie obroty wektorów bazowych, tensor ortogonalny może jednak działać na dowolny wektor wedle tego samego przepisu

$$(1.2.20) \quad \hat{a} = Qa; \quad (\hat{a}_i = Q_{ij} a_j).$$

Rzecz jasna, jeżeli baza jest obracana wraz z wektorem, to składowe wektora obróconego są w bazie obróconej takie same, jak wyjściowego wektora w początkowej bazie.

Przez obrót diady będziemy rozumieli obrót obu tworzących ją wektorów, działanie to w naturalny sposób rozszerza się na kombinacje liniowe diad:

*Istnieje baza ortonormalna wektorów własnych  $\tau_i$  tensora symetrycznego, w bazie tej tensor ma*

*reprezentację diagonalną utworzoną z jego wartości własnych  $T = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\tau_i \otimes \tau_i)$ . Wniosek ten*

*pozostaje prawdziwy dla tensorów symetrycznych w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów (dowód - patrz [31])*

<sup>10</sup> $\varepsilon$  jest tu tensorem o walencji 3 przyporządkowującym wektorom tzw. dualne do nich tensory antisymetryczne według następującego przepisu:  $W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} u_k$ , gdzie w bazie ortonormalnej reprezentacja tensora  $\varepsilon$  wyraża się w następujący sposób:  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$ ;  $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$ ; pozostałe składowe równe są zeru. Przy pomocy tensora  $\varepsilon$  wygodnie jest zapisywać działania mnożenia wektorowego  $a \times b = c \Leftrightarrow c_k = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ . Wyznacznik macierzy  $3 \times 3$  wyraża się przez składowe tensora  $\varepsilon$  w następujący sposób:  $\det A = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}$ . Warte zapamiętania jest także następująca zależność:  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ , wynika z niej m.in. znany wzór na podwójny iloczyn wektorowy  $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ , mamy bowiem:  $a_k (b_j c_l \varepsilon_{ijl}) \varepsilon_{klm} = a_l c_j b_m - a_l b_j c_m$ .

$$(1.2.21) \quad \tilde{T} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad (\tilde{T}_{ij} = Q_{ik} T_{kl} Q_{lj})^{11}$$

Mamy tu do czynienia z drugim wcieleniem tensorów ortogonalnych, jako operatorów obrotu obiektów geometrycznych, w szczególności mogą to być ciała materialne, lub inne, niekoniecznie obdarzone masą, obiekty, opisujące świat materialny, takie jak np. tzw. operatory konstytutywne, przyporządkowujące pewnym obiektom geometrycznym charakteryzującym stan materiału lub jego historię (przyczynom) inne obiekty geometryczne (skutki)<sup>12</sup>. Interesować nas będą także wzajemne obroty włókien w odkształcającym się materiale oraz obroty sieci krystalicznych.

Jeszcze jednym wcieleniem tensorów ortogonalnych jest opis transformacji współrzędnych punktów zarówno przy obrocie kartezjańskich układów współrzędnych, jak i obrotach brył sztywnych wokół początku takich układów, wobec pełnego izomorfizmu zbioru punktów i zbioru ich wektorów położenia odpowiednie prawa transformacji nie muszą być oddzielnie formułowane i omawiane.

Rozpoczęliśmy omawianie skończonych obrotów w przedstawieniu tensorowym ponieważ ten sposób opisu daje się najłatwiej wykorzystać wspólnie z tensorowym opisem odkształceń ciał, co więcej, jak zobaczymy dalej, stanowi jego integralną część.

Dla niektórych zastosowań wygodnie jest przedstawić obrót w postaci superpozycji kolejnych obrotów wokół trzech (np. prostopadłych) osi<sup>13</sup>. W mechanice

<sup>11</sup>Również i w tym przypadku, jeżeli wraz z tensorem obracamy bazę, nie zachodzi zmiana wartości składowych reprezentacji. Podobnie dla tensorów o wyższej walencji możemy zdefiniować pojęcie tensora obróconego, jako takiego, który w obróconej bazie ma tę samą reprezentację, co tensor wyjściowy w początkowej bazie. Taka definicja pozwala nam zapomnieć o złożonej „polyadowej” ich strukturze. W wyjściowej bazie będziemy mieli:  $\tilde{T}_{ijk...pqr} = T_{lmn...stuvw} Q_{il} Q_{jm} Q_{kn} \dots Q_{pu} Q_{qv} Q_{rw}$

<sup>12</sup>Niekiedy wygodnie jest przedstawiać wielkości opisywane przez trójwymiarowe tensory symetryczne drugiego rzędu przy pomocy ich reprezentacji wektorowych w sześciowymiarowej przestrzeni, wtedy reprezentacjami ich odwzorowań liniowych są macierze  $6 \times 6$ , opis transformacji ortogonalnych w tej konwencji jest sprawą dość delikatną, nie dość, że nie wszystkie macierze ortogonalne  $6 \times 6$  opisują realne fizyczne transformacje generowane przez obroty w przestrzeni trójwymiarowej, to jeszcze dodatkową trudność sprawia tu fakt, że normy wektorów w sześciowymiarowej przestrzeni, przynajmniej przy tradycyjnie używanym sposobie zapisu, nie są równe normom tensorów z przestrzeni dwięciowymiarowej. Sprawa ta będzie dokładniej omówiona dalej.

<sup>13</sup>Jednym z ciekawych wyników teorii skończonych obrotów jest możliwość przedstawienia dowolnego obrotu  $\mathbf{Q}$  w postaci superpozycji dwóch obrotów o kąt  $\pi$  wokół dwóch osi prostopadłych do osi rozpatrywanego obrotu. W rzeczy samej, obierając za pierwszy wektor bazowy wektor własny tensora  $\mathbf{Q}$  możemy napisać

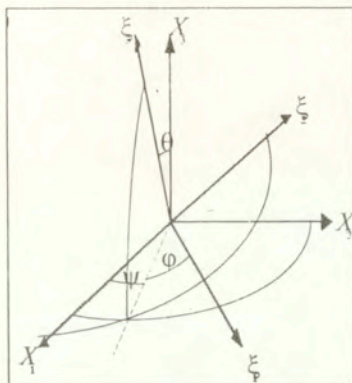
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

były sztywnej przyjęto ze względów praktycznych (dla ruchu obrotowego ciał niebieskich, wirujących białów i żyroskopów) opis przy pomocy tzw. kątów Eulera. Wprowadzimy dla wygody dalszych rozważań następujące oznaczenie:

$$(1.2.22) \quad \mathbf{Q}(\mathbf{n}, \varphi) \equiv \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cos \varphi + \varepsilon \mathbf{n} \sin \varphi.$$

Niechaj dana będzie pewna wyjściowa baza  $\{e_i\}$  (wyjściowy układ współrzędnych kartezjańskich  $\{x_i\}$ ). Podamy sekwencję trzech obrotów przekształcających bazę  $\{e_i\}$  na pewną inną bazę  $\{\varepsilon_i\}$ . Niechaj pierwszy obrót o kąt  $\psi$ , zwany kątem precesji, wokół wektora  $e_3$   $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1(e_3, \psi)$ , przeprowadza wektor  $e_1$  w wektor  $e'_1$ , leżący w płaszczyźnie utworzonej przez wektory  $e_3$  i  $e_1$ . Następny obrót o kąt  $\theta$ , zwany kątem nutacji, zachodzi we wspomnianej płaszczyźnie wokół wektora  $e'_1$ :  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2(e'_1, \theta)$ , przeprowadza on wektor  $e_3$  w jego ostateczne położenie  $\varepsilon_3$ . I wreszcie ostatni obrót, o kąt  $\varphi$ , zwany kątem obrotu właściwego:  $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_3(\varepsilon_3, \varphi)$ , następuje wokół wektora  $\varepsilon_3$ , przeprowadza on wektor  $e'_1$  w  $e_1$ , a dwukrotnie już obracany, wektor  $e'_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 e_2$  w jego ostateczne położenie  $\varepsilon_2$ . Tym samym możemy napisać:

$$(1.2.23) \quad \mathbf{Q}e_i = \mathbf{Q}_3(\varepsilon_3, \varphi) \mathbf{Q}_2(e'_1, \theta) \mathbf{Q}_1(e_3, \psi) e_i = \varepsilon_i \quad 14$$



Rys. 1.3 Kąty Eulera

skrajna macierz z prawej strony jest niewątpliwie reprezentacją obrotu o kąt  $\pi$  wokół trzeciej osi, natomiast następną macierz od prawej ma na pewno jedną dodatnią wartość własną (równą 1), przy czym odpowiadający jej wektor własny (wyznaczający oś obrotu) jest prostopadły do wektora własnego tensora  $\mathbf{Q}$ . Co więcej, trzecia jej wartość własna musi być równa 1, więc jest to również obrót o kąt  $\pi$ . Trudno powiedzieć, czy ten fakt ma jakieś praktyczne znaczenie, w każdym razie daje on możliwość sprowadzenia opisu obrotów tensorów i wektorów do działań na macierzach symetrycznych. Zależność ta stanowi przypadek szczególny tzw. prawa Donkina-Hamiltona, [19], stwierdzającego, że trzy kolejne obroty sfery w płaszczyznach kąt wielkich, na których leżą boki dowolnego trójkąta sferycznego, o kąty odpowiadające podwojonym łukom tworzonym przez te boki, sprowadzają sferę do pierwotnego położenia.

14 Pozostawimy Czytelnikowi do samodzielnego wykazania, że wykonując odpowiednie mnożenia, otrzymamy następujące wyrażenie dla składowych macierzy  $\mathbf{Q}$ :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\theta, & Q_{12} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta, & Q_{13} &= \sin\varphi \sin\theta, \\ Q_{21} &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\theta, & Q_{22} &= -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi \cos\theta, & Q_{23} &= \cos\varphi \sin\theta, \\ Q_{31} &= \sin\psi \sin\theta, & Q_{32} &= -\cos\psi \sin\theta, & Q_{33} &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Przyjęta tu umowa w zasadzie zgadza się z konwencją przyjętą w monografii [32] (z dokładnością do transpozycji macierzy), inni autorzy wybierają inne kąty (por. [11],[34]), lub inaczej je oznaczają.

Opis obrotów przez kąty Eulera jest naturalny i wygodny w tych przypadkach, gdy da się wskazać w bryle sztywnej pewien uprzywilejowany kierunek materialny, wokół którego, bądź ciało wiruje, bądź, przynajmniej, ruch osi chwilowego obrotu względem tego kierunku jest powolny w porównaniu do ruchu wokół osi obrotu. O przykładach zastosowań wspominaliśmy już wyżej<sup>15</sup>

---

<sup>15</sup> Autorowi nie wydają się natomiast ani naturalne, ani tym bardziej, oczywiste, próby wykorzystania tego formalizmu do opisu położenia i obrotów sieci krystalicznych przy rozważaniu ewolucji tekstur w materiałach krystalicznych. Do kwestii tej wrócimy jeszcze w dalszych rozważaniach.

### 1.3 Geometria przestrzeni obrotów

Wspominaliśmy już uprzednio, że w czterowymiarowej przestrzeni tensorów o walencji dwa nad przestrzenią dwuwymiarową zbiór tensorów ortogonalnych jest okręgiem w płaskiej dwuwymiarowej podprzestrzeni. W przestrzeni trójwymiarowej interpretacja geometryczna zbioru tensorów ortogonalnych nie jest taka prosta. Nietrudno pokazać<sup>1</sup>, że zbiór tensorów ortogonalnych nie da się włożyć w żadną podprzestrzeń właściwą dziewięciowymiarowej przestrzeni tensorów o walencji dwa. Wszystkie tensory ortogonalne leżą oczywiście na hypersferze o promieniu  $\sqrt{3}$ , ale z tego faktu niewiele wynika.

Nieco więcej da się powiedzieć o przestrzeni stycznej do trójwymiarowej podrozmaitości<sup>2</sup> tensorów ortogonalnych. Przedstawimy mianowicie składowe kartezyjskie wektora jednostkowego przez współrzędne sferyczne jego końca<sup>3</sup>:

$$(1.3.1) \quad \mathbf{n} = \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3,$$

Obliczając pochodne otrzymujemy

$$(1.3.2) \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \psi} = -\sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_2 = \sin \theta \mathbf{e}_\psi,$$

$$(1.3.3) \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \psi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \psi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\theta.$$

$\mathbf{e}_\psi$  i  $\mathbf{e}_\theta$  są tu jednostkowymi wektorami stycznymi do sfery jednostkowej, wektory  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}_\psi$  i  $\mathbf{e}_\theta$  tworzą bazę ortonormalną w wyjściowej przestrzeni euklidesowej, zależą one wszystkie oczywiście od wyboru wektora  $\mathbf{n}$ . Ze wzorów (1.2.19), (1.3.2) i (1.3.3) wynikają natychmiast następujące zależności:

$$(1.3.4) \quad \mathbf{G}_1 \equiv \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \psi} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}_\psi + \mathbf{e}_\psi \otimes \mathbf{n})(1 - \cos \varphi) \sin \theta - \varepsilon \mathbf{e}_\psi \sin \varphi \sin \theta,$$

<sup>1</sup> Zauważmy, że w dowolnie obranej bazie ortonormalnej części antisymetrycznej trzech obrotów wokół wektorów bazowych tworzą bazę w podprzestrzeni tensorów antisymetrycznych, również łatwo pokazać, że dowolna diada symetryczna może być przedstawiona jako suma tensora obrotu o kąt  $\pi$ , i tensora jednostkowego, zatem dowolny tensor może być przedstawiony jako kombinacja liniowa tensorów ortogonalnych. Nie istnieje więc tensor prostopadły do wszystkich tensorów ortogonalnych.

<sup>2</sup> Czytelnik nie obeznany z pojęciem rozmaitości różniczkowej może (w tym przypadku) rozumieć pod tym terminem gładką hiperpowierzchnię

<sup>3</sup> Niezgodnie z przyjętymi zwyczajami oznaczmy tu kąt wzniesienia przez  $\psi$  – aby pozostać w zgodzie z wprowadzonymi oznaczeniami kątów Eulera i kąta obrotu w przypadku płaskim. Niekiedy kąt precesji oznacza się przez  $\varphi$  a kąt obrotu właściwego przez  $\psi$ , mamy wtedy zgodność oznaczeń z tradycyjnie przyjętymi dla układu sferycznego, natomiast niezgodność z opisem obrotu w układzie biegunowym.

$$(1.3.5) \quad \mathbf{G}_2 \equiv \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \theta} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{n})(1 - \cos \varphi) - \varepsilon \mathbf{e}_\theta \sin \varphi,$$

$$(1.3.6) \quad \mathbf{G}_3 \equiv \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \varphi} = -(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \sin \varphi - \varepsilon \mathbf{n} \cos \varphi.$$

Trójka tensorów  $\{\mathbf{G}_K\}$  ( $K = 1, 2, 3$ ) tworzy bazę przestrzeni stycznej, jest to baza ortogonalna<sup>4</sup>, (ale nie ortonormalna), co nietrudno sprawdzić bezpośrednio<sup>5</sup>. Tego rodzaju holonomiczne (t.j. złożone z pochodnych „wektora położenia” po parametrach opisujących hiperpowierzchnię) bazy przyjęto nazywać kowariantnymi<sup>6</sup>. Jak nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie mnożenie, prawdziwe są następujące ważne zależności:

$$(1.3.7) \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \psi} = -\sin \theta \{ \varepsilon [\mathbf{e}_\nu \sin \varphi - \mathbf{e}_\theta (1 - \cos \varphi)] \} \mathbf{Q};$$

$$(1.3.8) \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \theta} = -\{ \varepsilon [\mathbf{e}_\nu (1 - \cos \varphi) + \mathbf{e}_\theta \sin \varphi] \} \mathbf{Q};$$

<sup>4</sup> W sensie mnożenia skalarnego tensorów o walencji dwa:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T)$ .

<sup>5</sup> W lokalnej bazie ortonormalnej  $\{\mathbf{n}, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\theta\}$  tensory  $\mathbf{G}_K$  mają następujące reprezentacje:

$$\mathbf{G}_1 = 2 \sin \theta \sin \frac{\varphi}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \\ \sin \frac{\varphi}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

Nietrudno wyspecyfikować również i ortonormalną bazę przestrzeni stycznej, nie jest ona jednak dla nas specjalnie interesująca ze względu na swoją nieholonomiczność.

<sup>6</sup> Zauważmy, że tensory bazowe przestrzeni stycznej są ortogonalne nie tylko wzajemnie, ale również i do „wektora wodzącego”  $\mathbf{Q}$ . Własność tę mają np. wektory styczne do sfery dwuwymiarowej w trójwymiarowej przestrzeni. Wobec ortogonalności wektorów bazowych konstrukcja kobazy jest niemal trywialna:

$$\mathbf{G}^1 = \frac{1}{4 \sin \theta} [(\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{n}) - \text{ctg} \frac{\varphi}{2} \varepsilon \mathbf{e}_\nu], \quad \mathbf{G}^2 = \frac{1}{4} [(\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{n}) - \text{ctg} \frac{\varphi}{2} \varepsilon \mathbf{e}_\theta],$$

$$\mathbf{G}^3 = -\frac{1}{2} [(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \sin \varphi - \varepsilon \mathbf{n} \cos \varphi].$$



$$(1.3.9) \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \varphi} = -(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n})\mathbf{Q}.$$

Geometrią przestrzeni stycznej, a w szczególności interpretacją zależności (1.3.7) - (1.3.9) zajmijmy się dokładniej przy okazji rozpatrywania kinematyki obrotów, w tym rozdziale spróbujemy zaś określić bliżej własności geometryczne samej rozmaitości obrotów.

Zaczerpnięte z dziewięciowymiarowej przestrzeni działanie mnożenia skalarnego prowadzi do następującej kowariantnej reprezentacji tensora metrycznego  $G_{IK}$ :

$$(1.3.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_1 &= G_{11} = 4 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi); \\ \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{G}_2 &= G_{22} = 4(1 - \cos \varphi); \\ \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{G}_3 &= G_{33} = 2; \\ \mathbf{G}_I \cdot \mathbf{G}_K &= G_{IK} = 0 \quad \text{dla } I \neq K. \end{aligned}$$

Wobec diagonalności reprezentacji otrzymujemy natychmiast:

$$(1.3.11) \quad G^{KL} = \begin{cases} \frac{1}{G_{LL}} & \text{dla } K = L \\ 0 & \text{dla } K \neq L \end{cases}$$

Symbole Christoffela<sup>8</sup> wyznaczamy ze znanej zależności:

$$(1.3.12) \quad \Gamma_U^K = \frac{1}{2} G^{KL} \left( \frac{\partial G_{LJ}}{\partial \xi^J} + \frac{\partial G_{LJ}}{\partial \xi^I} - \frac{\partial G_{IJ}}{\partial \xi^L} \right),$$

gdzie:  $\xi^1 = \psi$ ,  $\xi^2 = \theta$ ,  $\xi^3 = \varphi$ .

<sup>7</sup>Pojawienie się symbolu  $\boldsymbol{\varepsilon}$  w wyrażeniach (1.3.7) - (1.3.9) nie jest przypadkowe, zależności tego typu są znacznie ogólniejsze, dotyczą one dowolnego operatora różniczkowego  $D$  w zastosowaniu do tensorów ortogonalnych, mamy bowiem:

$$D(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = D\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}D\mathbf{Q}^T = 0, \quad \text{czyli } (D\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)^T = -D\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T, \quad \text{ponieważ zaś}$$

$D\mathbf{Q} = D\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}) = (D\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}$ , więc wynik dowolnego różniczkowania tensora ortogonalnego  $\mathbf{Q}$  możemy przedstawić w postaci  $\Omega\mathbf{Q}$ , gdzie  $\Omega$  jest pewnym tensorem antysymetrycznym.

<sup>8</sup> Symbole Christoffela w przestrzeniach euklidesowych definiujemy jako współczynniki rozkładu

pochodnych wektorów bazy:  $\Gamma_U^K = \frac{\partial \mathbf{G}_I}{\partial \xi^J} \cdot \mathbf{G}^K$  czyli  $\frac{\partial \mathbf{G}_I}{\partial \xi^J} = \Gamma_U^K \mathbf{G}_K$ . Korzystając z zależności

(1.3.10) łatwo wykazać równoważność zależności (1.3.12) z przytoczoną tu definicją. W przestrzeniach Riemanna możemy traktować zależność (1.3.12) jako definicję [12], [29].

Otrzymujemy stąd następujący obiekt koneksji riemannowskiej:<sup>10</sup>

$$(1.3.13) \quad \begin{aligned} \Gamma_{12}^4 &= \operatorname{ctg} \theta, \quad \Gamma_{13}^4 = \Gamma_{23}^4 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}; \\ \Gamma_{11}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{22}^4 &= -\sin \varphi, \quad \Gamma_{11}^3 = -\sin^2 \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

pozostałe symbole są równe zero.

Mając pole koneksji riemannowskiej (1.3.13) możemy z zależności:

<sup>9</sup>Zgodnie z tą umową mamy:  $\mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi^K}$

<sup>10</sup>Rozmaitość różniczkowa z zadany polem tensora metrycznego nosi nazwę przestrzeni Riemanna, wektory z przestrzeni stycznej do rozmaitości w pewnym punkcie nie mogą być przedstawione jako kombinacje liniowe wektorów bazowych przestrzeni stycznej do rozmaitości w innym punkcie, ponieważ jest to zupełnie inna przestrzeń, wobec tego dla „porównania” wektorów przy przesuwaniu ich wzdłuż krzywej  $\xi^i = \xi^i(s)$  wprowadza się obiekt przeniesienia równoległego (koneksji) zdefiniowany przez uogólnienie warunku stałości pola wektorowego  $\mathbf{a}(\xi^i)$  wzdłuż krzywej  $\xi^i = \xi^i(s)$  we współrzędnych

krzywoliniowych:  $\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \frac{da^k}{ds} \mathbf{e}_k + a^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \xi^i} \frac{d\xi^i}{ds} = \left( \frac{da^k}{ds} + a^l \Gamma_{l\beta}^k \frac{d\xi^\beta}{ds} \right) \mathbf{e}_k = 0$ . Żądamy

mianowicie, aby zachodziła zależność:  $\frac{da^k}{ds} = -\Gamma_{l\beta}^k a^l \frac{d\xi^\beta}{ds}$ . W szczególności jeżeli pole  $\mathbf{a}(\xi^i)$

przenoszone równoległe jest w każdym punkcie krzywej  $\xi^i = \xi^i(s)$  równe wektorowi stycznemu:

$a^i = d\xi^i/ds$ , to krzywą taką nazywamy geodezyjną, pojęcie to uogólnia pojęcie prostej na przestrzenie nieeuklidesowe. Równanie różniczkowe geodezyjnej otrzymujemy podstawiając wektor styczny do

warunku przeniesienia równoległego:  $\frac{d^2 \xi^K}{ds^2} + \Gamma_{l\beta}^K \frac{d\xi^l}{ds} \frac{d\xi^\beta}{ds} = 0$ . Nietrudno wykazać [29], że

przeniesienie równoległe w przestrzeni Riemanna nie zmienia kąta między wektorami, zatem przy przeniesieniu dowolnego wektora wzdłuż geodezyjnej zostaje zachowany kąt pomiędzy krzywą i wektorem. Przenosząc dowolny wektor równoległe po obwodzie zamkniętym utworzonym z odcinków kół wielkich (geodezyjnych) na powierzchni sfery w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej otrzymujemy wektor różny od wyjściowego, kąt między tymi wektorami równy jest ekscesowi sferycznemu trójkąta (sumie kątów minus  $\pi$ ). Obiekt przeniesienia równoległego w przestrzeni Riemanna określony zależnościami (1.3.12) nazywany jest koneksją riemannowską, w odróżnieniu od ogólnej koneksji afinicznej, pole której może być zadane również i na takich rozmaitościach, na których nie został zadany tensor metryczny.

$$(1.3.14) \quad R_{IK,IL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 G_{IJ}}{\partial \xi^K \partial \xi^L} - \frac{\partial^2 G_{IJ}}{\partial \xi^K \partial \xi^J} + \frac{\partial^2 G_{KI}}{\partial \xi^L \partial \xi^J} - \frac{\partial^2 G_{KI}}{\partial \xi^L \partial \xi^I} \right) + G_{I\Omega} \left( \Gamma_{IJ}^P \Gamma_{KI}^Q - \Gamma_{KI}^P \Gamma_{IJ}^Q \right)$$

znaleźć tensor krzywizny  $R$ . Wykonując odpowiednie rachunki otrzymujemy:

$$(1.3.15) \quad \begin{aligned} R_{12,12} &= 2 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi);^2 \\ R_{13,13} &= \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi); \\ R_{12,12} &= (1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Pozostałe składowe bądź są zerami, bądź też dają się otrzymać z następującej, wynikającej z (1.3.14), zależności:

$$(1.3.16) \quad R_{IJ,KL} = -R_{JI,KL} = R_{JI,LK} = -R_{JI,KL} \dots$$

Ostatecznie otrzymujemy zależność

$$(1.3.17) \quad R_{PQ,RS} = \frac{1}{8} (G_{PR} G_{QS} - G_{PS} G_{QR}).$$

Wzór (1.3.17) definiuje przestrzeń o stałej krzywiznie  $K^{11}$ , równej mnożnikowi przed nawiasem z prawej strony równości, w rozpatrywanym przypadku

$$(1.3.18) \quad K = 1/8.$$

Wielkość:

$$(1.3.19) \quad r = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

<sup>11</sup>W ogólnym przypadku krzywiznę  $K$  w punkcie  $\Xi \in V$ , gdzie  $V$  jest przestrzenią Riemanna definiuje się w następujący sposób: niechaj dana będzie w rozmaitości dwuwymiarowa powierzchnia  $S$ :

$\xi^i = \xi^i(u, v)$ , taka, że  $\Xi \in S$ . Niechaj na powierzchni  $S$  dany będzie kontur  $\Sigma$  otaczający punkt  $\Xi$  i niechaj pole powierzchni wewnątrz konturu równe będzie  $\sigma$ , a kąt pomiędzy wektorem przeniesionym wzdłuż konturu a wyjściowym wynosi  $\Delta\varphi$ . Przez krzywiznę  $K$  będziemy rozumieć wielkość określoną

przez zależność  $K = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\sigma}$ . Wartość  $K$ , jak się okazuje nie zależy od wyboru przenoszonego wektora, ani sposobu ściągania konturu  $\Sigma$  do punktu  $\Xi$  a jedynie od orientacji płaszczyzny stycznej do dwuwymiarowej powierzchni  $S$  w punkcie  $\Xi$ :  $K = R_{PQ,RS} \xi^{PQ} \xi^{RS}$ , gdzie  $\xi^{ij} = \zeta^i \eta^j - \zeta^j \eta^i$ , a  $\zeta, \eta$  tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni stycznej do  $S$  w punkcie  $\Xi$ . Dlatego mówimy o krzywiznie przestrzeni  $V$  w kierunku płaszczyzny wyznaczonej przez biwektor  $\xi^{ij}$ .

nosi nazwę promienia krzywizny.

Inny tensor krzywizny, zwany tensorem Ricci lub tensorem Einsteina otrzymujemy z następującej zależności:

$$(1.3.20) \quad R_{IK} = G^{PQ} R_{IP, QK} .$$

Z (1.3.18) i (1.3.20) otrzymujemy natychmiast:

$$(1.3.21) \quad R_{IK} = -\frac{1}{4} G_{IK} .$$

Wielkość:

$$(1.3.22) \quad R = G^{IK} R_{IK}$$

nosi nazwę krzywizny skalarnej, mamy zatem:

$$(1.3.23) \quad R = -3/4.$$

Wielkości  $K$  i  $R$  są niezmiennikami (nie zależą od wyboru współrzędnych w rozmaitości, a zatem i od bazy w przestrzeni stycznej), charakteryzującymi „nieeuklidesowość” przestrzeni Riemanna. W przestrzeniach euklidesowych wszystkie wielkości  $R_{IJ, KL}$  są tożsamościowo równe zeru, a zatem znikają również wielkości  $R$  i  $K$ .

W zaawansowanych kursach geometrii różniczkowej [35], dowodzi się, że wszystkie przestrzenie  $n$ -wymiarowe o stałej dodatniej krzywiznie są izometryczne<sup>12</sup> do przestrzeni ilorazowych  $S^n / \Gamma$ <sup>13</sup>, gdzie  $S^n$  jest  $n$ -wymiarową sferą, a  $\Gamma$  – dyskretną

<sup>12</sup>Izometrią nazywamy odwzorowanie  $f: U \rightarrow V$  zachowujące odległości:

$$d(x, y) = d'(f(x), f(y)), \text{ gdzie } d(\cdot, \cdot) \text{ jest odległością w } U, \text{ a } d'(\cdot, \cdot) \text{ w } V.$$

<sup>13</sup>Grupą  $G$  nazywamy zbiór  $Z$  z określonym w nim dwuelementowym działaniem „ $*$ ”, nie wyprowadzającym poza zbiór i takim, że:

1. Dla dowolnych trzech elementów grupy:  $g*(h*f) = (g*h)*f$
2. Istnieje taki element  $e$ , zwany jednością, że dla każdego elementu  $g$  zachodzi równość:  $e*g = g*e = g$ .
3. Dla każdego elementu  $g$  istnieje dokładnie jeden taki element  $g^{-1}$  zwany odwrotnym, że:  $g*g^{-1} = g^{-1}*g = e$ .

grupą izometrii działającą swobodnie (nie zachowującą punktów stałych). Przestrzenie takie w przypadku  $K > 0$  noszą nazwę sferycznych form przestrzennych [24]. Bliższe rozpatrzenie takich form nad rozmaitością tensorów ortogonalnych może być bardzo owocne dla opisu orientacji i obrotów obiektów o nietrywialnych grupach symetrii<sup>14</sup> (np. sieci krystalicznych). Rzecz w tym, że opis orientacji takich obiektów za pomocą pełnej grupy obrotów będzie zawierał niepotrzebną niejednoznaczność, nie ma bowiem większego sensu np. dla kryształów o sieciach regularnych odróżnianie kierunków krystalograficznych  $\langle 111 \rangle, \langle \bar{1} \bar{1} \bar{1} \rangle, \langle \bar{1} 1 1 \rangle$ <sup>15</sup> itd.

Najprostszą formą sferyczną jest tak zwana przestrzeń eliptyczna (sfera rzutowa), dla której grupą  $\Gamma$  jest dwuelementowa grupa złożona z przekształcenia tożsamościowego i inwersji, orbitami na sferze są tu pary punktów biegunowo przeciwległych, zatem przestrzeń eliptyczną możemy rozumieć jako sferę, na której utożsamiamy przeciwległe punkty. Wykazano [35], że jest to jedyna (poza pełną hipersferą) sferyczna forma przestrzenna zachowująca maksymalną jednorodność przestrzeni tj. mająca grupę izometrii o maksymalnym wymiarze (liczbie parametrów)  $n(n+1)/2$ , czyli w rozważanym przypadku – 6. W rzeczy samej: grupa lewostronnych translacji  $L(Q): Q \rightarrow LQ$ , gdzie  $L$  jest dowolnym, lecz ustalonym tensorem obrotu jest oczywiście trójparametrowa, podobnie jak grupa obrotów  $\mathcal{O}$  działająca według reguły:  $(Q): \rightarrow RQR^T$  gdzie  $Q$  i  $R$  są tensorami ortogonalnymi<sup>16</sup>. Zatem pełna grupa izometrii jest sześcioparametrowa, nietrudno bowiem zauważyć, że translacje prawostronne, również należące do grupy izometrii dadzą się łatwo wyrazić jako iloczyny obrotów i translacji lewostronnych.

*Ważną rolę odgrywają grupy przekształceń zbioru w siebie, gdzie działaniem grupowym jest składanie przekształceń. Jeżeli w pewnej przestrzeni metrycznej  $S$  działa grupa przekształceń, to grupę taką nazywamy dyskretną jeżeli dla każdego jej elementu  $g$  oprócz  $e$  i dla każdego elementu zbioru  $a$  spełniona jest nierówność  $d(a, g(a)) \geq M$ , gdzie  $M$  jest pewną ustaloną liczbą, a  $d$  – odległością. Orbitą elementu  $a$  względem grupy  $G$  nazywamy zbiór wszystkich elementów postaci:  $g(a)$ ,  $g \in G, a \in S$ . Przestrzenną ilorazową  $S/\Gamma$  względem grupy  $\Gamma$  nazywamy zbiór wszystkich orbit względem tej grupy [21].*

<sup>14</sup>Jeżeli dana jest grupa przekształceń  $G$  działająca w zbiorze  $V$ , to grupą symetrii  $\Gamma$  elementu  $x \in G$  nazywamy podgrupę  $\Gamma \subset G$  taką, że:  $g \in \Gamma \Leftrightarrow gx = x$ . Np. grupę symetrii obrotów sześcianu stanowią wszystkie obroty o  $\pi/2$  wokół krawędzi i ich złożenia [21].

<sup>15</sup>Ten ostatni fakt jest oczywiście znany i uwzględniany przy praktycznych rozważaniach nad kształtem zbiorów orientacji ziaren w polikryształach [6], jednak, o ile Autorowi wiadomo, teoria trójwymiarowych form sferycznych nie była do tej pory stosowana w tym aspekcie pomimo, że ich pełna klasyfikacja znana jest już od około 60-ciu lat [25].

<sup>16</sup>Grupa translacji i grupa obrotów są istotnie różnymi podgrupami grupy izometrii, translacje np. nie zachowują śladu tensora, nie mają także punktów stałych podczas, gdy obrót przy pomocy tensora  $R$  zachowuje wszystkie tensory ortogonalne z nim przemienne (współosiowe), translacja nie jest ponadto automorfizmem grupy – na ogół  $L(Q_1 Q_2) \neq (LQ_1)(LQ_2)$ .

Pokażemy teraz, że rozważana przestrzeń nie jest sferą trójwymiarową, a właściwie przestrzenią eliptyczną, wyspecyfikujemy w tym celu równania geodezyjnych (por. uwagę w przypisie <sup>(25)</sup> na str. 16-17) :

$$(1.3.29) \quad \frac{d^2 \xi^k}{ds^2} = \Gamma_{ij}^k \frac{d\xi^i}{ds} \frac{d\xi^j}{ds} = 0.$$

Korzystając z (1.3.14) przepisujemy (1.3.29) w następującej postaci:

$$(1.3.30) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{ds^2} &= -\operatorname{ctg} \theta \frac{d\psi}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2; \\ \frac{d^2 \theta}{ds^2} &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2; \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} &= \sin \varphi \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \theta \sin \varphi \left( \frac{d\psi}{ds} \right)^2. \end{aligned}$$

Z drugiej strony zachodzi równość

$$(1.3.31) \quad (ds)^2 = G_{kl} d\xi^k d\xi^l. \quad 17$$

Biorąc zatem

$$(1.3.32) \quad \theta = \operatorname{const}; \quad \psi = \operatorname{const}; \quad |\varphi| = \frac{s}{\sqrt{2}} = 2 \frac{s}{r},$$

spełniamy równanie (1.3.30), a więc geodezyjnymi  $\mathbf{Q}(s)$  są orbity jedynki względem jednoparametrowych grup obrotów wokół ustalonej osi:

$$(1.3.33) \quad \mathbf{Q}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{I},$$

gdzie:

<sup>17</sup>Zgodnie z definicją długości łuku, jeżeli wektor położenia punktu na krzywej  $\mathbf{R}(s)$  dąży do  $\mathbf{R}(s_0)$ , to

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{|\mathbf{R}(s) - \mathbf{R}(s_0)|^2}{(s - s_0)^2} = 1, \text{ natomiast z definicji różniczki mamy}$$

$$d\mathbf{R}(s) = \frac{d\mathbf{R}}{ds} ds = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^k} \frac{d\xi^k}{ds} ds = \mathbf{G}_k d\xi^k, \text{ a stąd wynika natychmiast (1.3.31).}$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \left(1 - \cos \frac{2s}{r}\right) + \mathbf{I} \cos \frac{2s}{r} + \mathbf{a} \mathbf{e} \sin \frac{2s}{r},$$

(1.3.34)

$$\mathbf{a} = \text{const}; \quad |\mathbf{a}| = 1.$$

Nieprzypadkowo we wzorze (1.3.33) pozostawiliśmy „zbędną” jedynkę: jak już wspominaliśmy, dowolna translacja prawostronna jest izometrią, zatem, wobec lokalnej równoważności metryk (na rozmaitości i w przestrzeni dziewięciowymiarowej), wnioskujemy, że, prawostronne nasunięcie dowolnego tensora obrotu na równość (1.3.33) prowadzi również do równania geodezyjnej, zatem geodezyjnymi są wszystkie orbity względem jednoparametrowych grup obrotów wokół ustalonej osi.

Możemy zatem łatwo zdefiniować globalną metrykę w rozmaitości: za odległość pomiędzy tensorami obrotu  $\mathbf{Q}_1$  i  $\mathbf{Q}_2$  przyjmiemy długość łuku odpowiadającego obrotowi przeprowadzającemu reper opisywany przez  $\mathbf{Q}_1$  na reper opisywany przez  $\mathbf{Q}_2$ , realizowanemu jako translacja lewostronna za pomocą tensora obrotu  $\mathbf{R}$ :

$$(1.3.35) \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T.$$

Mamy zatem następujące wyrażenie na odległość  $S$ :

18

$$(1.3.36) \quad S = \sqrt{2} \arccos \left( \frac{\text{tr}(\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T) - 1}{2} \right).$$

Największa określona w ten sposób odległość wynosi

<sup>18</sup>Lokalna równoważność metryki (1.3.36) i metryki dziewięciowymiarowej przestrzeni daje się sprawdzić bezpośrednio:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{RQ} - \mathbf{Q}|}{\sqrt{2} \arccos \left( \frac{\text{tr} \mathbf{RQ} - 1}{2} \right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\text{tr}(\mathbf{RQ})(\mathbf{RQ})^T - \text{tr} \mathbf{RQ} \mathbf{Q}^T - \text{tr} \mathbf{Q}(\mathbf{RQ})^T + \text{tr} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T}}{\sqrt{2} \arccos \left( \frac{\text{tr} \mathbf{R} - 1}{2} \right)} =$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6 - 2(1 + \cos \alpha)}}{\sqrt{2} \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\alpha} = 1$$

$$(1.3.37) \quad d_{\max} = \sqrt{2} \pi = \frac{\pi r}{2} \dots$$

Dla każdego tensora obrotu  $\mathbf{Q}$  istnieje więc nieskończenie wiele „najdalszych” tensorów obrotu, które dadzą się otrzymać z tensora  $\mathbf{Q}$  przez translację w rozmiarowości (w grupie) dpowiadającą obrotowi reprezentowanego przezeń reperu w przestrzeni „fizycznej” o kąt  $\pi$ , każdej orientacji osi obrotu odpowiada jeden „najdalszy” element rozmiarowości obrotów. Fakty te świadczą dobitnie, że mamy do czynienia właśnie z przestrzenią eliptyczną, a nie hipersferą, na której daje się wskazać jednoznacznie jeden najdalszy element. Zbiór wszystkich elementów maksymalnie odległych od danego elementu (bieguna) nosi w geometrii Riemanna<sup>19</sup> nazwę płaszczyzny biegunowej lub polary<sup>20</sup>.

Można także obliczyć objętość rozpatrywanej rozmiarowości :

$$(1.3.38) \quad V = \int_V dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{G} d\varphi d\theta d\psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{32 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi)} d\varphi d\theta d\psi = 16\sqrt{2} \pi^2 = \dots^3$$

Kąt obrotu  $\psi$  zmieniamy w granicach  $(0, \pi)$  ponieważ uwzględniliśmy już poprzednio oba zwroty wersorów osi obrotu, a jednoczesna zmiana znaku wersora osi i sinusa kąta obrotu nie zmienia tensora obrotu, natomiast zależność:

$$(1.3.39) \quad dV = \sqrt{G} d\varphi d\theta d\psi$$

wynika natychmiast z zastosowania wzoru na objętość równoległoscianu rozpiętego na wektorach  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ :

$$(1.3.40) \quad V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

do wektorów bazowych. Wynik (1.3.38) zgadza się z wartością znaną z geometrii Riemanna [24].

<sup>19</sup>Geometrią Riemanna nazywana jest jedna z geometrii nieeuklidesowych (innym przykładem jest geometria Łobaczewskiego), pojęcia tego nie należy mylić z geometrią przestrzeni Riemanna [24].

<sup>20</sup>Zauważmy, że fakt istnienia nieskończenie wielu tensorów obrotu maksymalnie odległych od danego prawdziwy jest również w sensie metryki przestrzeni dziewięciowymiarowej, mamy

bowiem  $|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2|^2 = 6 - 2 \operatorname{tr} \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T$  tensor  $\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T$  jest tensorem obrotu, zatem jego najmniejszy ślad

(odpowiadający obrotowi o  $\pi$ ) wynosi  $-1$ , a stąd  $|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2|_{\max} = \sqrt{8}$  i tu także elementów najdalszych jest tyle, ile możliwych osi obrotu.



#### 1.4 Inne sposoby opisu obrotów

Przedstawiony w rozdziale 1.3 opis obrotów wektorów (reperów) nie jest oczywiście jedynym możliwym. Przyjęcie innych współrzędnych (np. jednego z wariantów kątów Eulera) prowadzi do innych wzorów, w szczególności otrzymuje się niediagonalne wyrażenie na tensor metryczny (por. [8], [11], [36]).

Stosowane są także całkiem inne podejścia np. reprezentacja z obrotów przez tzw. macierze spinowe Pauliego lub, co jest praktycznie równoważne, przez kwaterniony. Dla kompletności wykładu omówimy poniżej pokrótce pierwszą z tych metod<sup>1</sup>[13] [34].

Rozpatrzmy przestrzeń  $P$  macierzy kwadratowych  $2 \times 2$  o elementach zespolonych, przestrzeń tę możemy traktować jako czterowymiarową przestrzeń liniową nad ciałem liczb zespolonych, bądź też jako ośmiowymiarową przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych, oba te podejścia w zastosowaniu do naszych celów mają swoje wady i zalety, tu zastosujemy pierwsze z nich.

Wygodnie jest przy tym podejściu przyjąć następującą bazę przestrzeni:

$$(1.4.1) \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W rozpatrywanej przestrzeni liniowej  $P$  wprowadzimy iloczyn skalarny określony zależnością:

$$(1.4.2) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \overline{\mathbf{A}} \mathbf{B}^T,$$

gdzie kreska nad symbolem oznacza sprzężenie:  $\overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$ .

Odwzorujemy teraz trójwymiarową przestrzeń euklidesową  $E^3$  w rozpatrywaną przestrzeń  $P$  zgodnie z następującą regułą:

<sup>1</sup>Spośród dostępnych podręczników i literatury encyklopedycznej najpełniej, jak się wydaje, omówiono różne sposoby opisu grupy obrotów w monografii J.L. Synge „Classical Dynamics” w tomie III/1 Encyklopedii Fizyki (Handbuch der Physik) pod red. S.F. Flügge [34].

<sup>2</sup>Macierze  $\sigma_i$  spełniają następujące zależności:  $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{I} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$ , tj kwadraty ich równe są jedności, a iloczyn dwóch różnych daje (z dokładnością do znaku) trzecią z nich pomnożoną przez pierwiastek z minus jedności. Czytelnik zapoznany z algebrą kwaternionów zauważy, że macierze  $-i\sigma_k$  spełniają kwaternionowe reguły mnożenia, nie będziemy tu jednak rozwijać tego wątku, odsyłając czytelnika do wspomnianej monografii J.L. Synge [34].

$$(1.4.3) \quad \mathbf{e}_i \rightarrow \sigma_i \quad \text{czyli} \quad \mathbf{x} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{bmatrix},$$

gdzie  $x_i$  są składowymi wektora w pewnej ortonormalnej bazie kartezjańskiej. Nie trudno zauważyć, że takie odwzorowanie w zbiór macierzy hermitowskich<sup>3</sup>, przy przyjętych regułach mnożenia skalarnego, zachowuje strukturę przestrzeni euklidesowej, chociaż obraz  $E^3$  w  $P$  nie jest podprzestrzenią (nie zawiera macierzy postaci  $i\sigma_k$ )<sup>4</sup>

Poszukajmy ogólnej postaci odwzorowań zbioru macierzy hermitowskich w siebie z zachowaniem iloczynu skalarnego w  $P$  (a zatem również normy i iloczynu skalarnego w  $E^3$ ). Rozpatrzmy odwzorowanie określone zależnością:

$$(1.4.4) \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{QAQ}^{\overline{\top}},$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  jest bezśladową macierzą unitarną<sup>5</sup>. Dla dowolnych dwóch macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  zachodzą oczywiste zależności:

$$(1.4.5) \quad \begin{aligned} \operatorname{tr} \left[ (\mathbf{QAQ}^{\overline{\top}}) (\overline{\mathbf{QBQ}^{\overline{\top}}})^{\top} \right] &= \operatorname{tr} \left[ (\mathbf{QAQ}^{\overline{\top}}) (\overline{\mathbf{QB}^{\top} \mathbf{Q}^{\top}}) \right] = \\ \operatorname{tr} (\mathbf{QAB}^{\overline{\top}} \overline{\mathbf{Q}^{\top}}) &= \operatorname{tr} (\overline{\mathbf{AB}^{\top} \mathbf{Q}^{\top}} \mathbf{Q}) = \operatorname{tr} (\overline{\mathbf{AB}^{\top}}). \end{aligned}$$

Z faktu, że ostatnia z ciągu równości musi być spełniona dla dowolnej macierzy  $\overline{\mathbf{AB}^{\top}}$ <sup>6</sup> wynika natychmiast, że unitarność macierzy  $\mathbf{Q}$  jest warunkiem nie tylko dostatecznym, ale i koniecznym. Wykażemy, że dowolną macierz unitarną w  $P$ , (realizującą transformację odpowiadającą obrotom wektorów w  $E^3$ ) może być przedstawiona w postaci:

$$(1.4.6) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I} \cos \frac{\gamma}{2} + i \mathbf{R} \sin \frac{\gamma}{2},$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest bezśladową macierzą hermitowską o normie 1, wobec niewątpliwej unitarności tak skonstruowanej macierzy pozostaje tylko udowodnić, że jeżeli  $\mathbf{Q}$  jest

<sup>3</sup>Macierzami hermitowskimi nazywane są macierze spełniające zależność:  $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}^{\top}}$  w przypadku macierzy rzeczywistych pojęcie to pokrywa się z pojęciem macierzy symetrycznej.

<sup>4</sup>Obraz  $E^3$  jest natomiast podprzestrzenią we wspomnianej ośmiowymiarowej przestrzeni macierzy zespolonych nad ciałem liczb rzeczywistych.

<sup>5</sup>Macierz unitarna z definicji spełnia zależność  $\mathbf{QQ}^{\overline{\top}} = \mathbf{I}$ , w przypadku macierzy rzeczywistych sprowadza się to do definicji macierzy ortogonalnej.

<sup>6</sup>Jeżeli dla dowolnej macierzy  $\mathbf{C}$  zachodzi równość  $\operatorname{tr}(\mathbf{CX}) = \operatorname{tr}(\mathbf{CY})$ , to  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ , zatem, aby zawsze zachodziła ostatnia z równości (1.4.5) musi być:  $\mathbf{QQ}^{\overline{\top}} = \mathbf{I}$ .

macierzą ortogonalną, to jej część bezśladowa jest równa iloczynowi pewnej macierzy hermitowskiej przez pierwiastek z minus jedności czyli:

$$(1.4.7) \quad \overline{[-i(\mathbf{Q} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\text{tr}\mathbf{Q})]}^T = -i(\mathbf{Q} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\text{tr}\mathbf{Q}).$$

Skorzystamy w tym celu z zależności:

$$(1.4.8) \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}\text{tr}\mathbf{Q} - \mathbf{Q},$$

$$\text{tr}\mathbf{Q} = \text{tr}\mathbf{Q}^{-1} = \text{tr}\overline{\mathbf{Q}}^T = \text{tr}\overline{\mathbf{Q}}.$$

Przekształcając lewą stronę równości (1.4.7), podstawiając  $\mathbf{Q}^{-1}$  zamiast  $\overline{\mathbf{Q}}^T$  i korzystając z (1.4.8) otrzymujemy:

$$(1.4.9) \quad \begin{aligned} \overline{[-i(\mathbf{Q} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\text{tr}\mathbf{Q})]}^T &= i\overline{\mathbf{Q}}^T - \frac{1}{2}i\text{tr}\overline{\mathbf{Q}} = \\ &= -i\mathbf{Q} + i\text{tr}\mathbf{Q} - \frac{1}{2}i\text{tr}\mathbf{Q} = -i(\mathbf{Q} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\text{tr}\mathbf{Q}), \end{aligned}$$

co kończy dowód. Macierz  $\mathbf{R}$  we wzorze (1.4.6) jest reprezentacją wektora jednostkowego z  $\mathbb{E}^3$ , jest to wektor wyznaczający kierunek osi obrotu tj. wektor własny tensora obrotu, mamy bowiem:

$$(1.4.10) \quad \begin{aligned} (\mathbf{I}\cos\frac{\gamma}{2} - i\mathbf{R}\sin\frac{\gamma}{2})\mathbf{R}(\mathbf{I}\cos\frac{\gamma}{2} + i\overline{\mathbf{R}}^T\sin\frac{\gamma}{2}) &= (\mathbf{I}\cos\frac{\gamma}{2} - i\mathbf{R}\sin\frac{\gamma}{2})(\mathbf{R}\cos\frac{\gamma}{2} + i\mathbf{I}) = \\ &= \mathbf{R}\cos^2\frac{\gamma}{2} + \mathbf{R}\sin^2\frac{\gamma}{2} + i(\mathbf{R}^2 - \mathbf{I})\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Ostatecznie możemy napisać:

<sup>7</sup>Dla dowolnej macierzy  $2 \times 2$  obowiązuje zależność:  $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\text{tr}\mathbf{A} + \mathbf{I}\det\mathbf{A} = 0$ , mnożąc tę zależność przez  $\mathbf{A}^{-1}$  i uwzględniając, że  $\det\mathbf{Q} = 1$  otrzymujemy (1.4.8).

<sup>8</sup>Korzystamy tu z faktu, że dla dowolnej macierzy bezśladowej  $2 \times 2$  zachodzi równość:  $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}\det\mathbf{A} = 0$ , skąd  $2\det\mathbf{A} = \text{tr}\mathbf{A}^2$ , dla macierzy hermitowskiej  $\mathbf{A}^2 = \overline{\mathbf{A}\mathbf{A}}$ , zatem dla hermitowskiej macierzy bezśladowej mamy  $\det\mathbf{A} = -1$ ,  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ , a stąd ostatnia z równości (1.4.10). Wynika stąd także, że każda jednostkowa bezśladowa macierz hermitowska  $2 \times 2$  jest unitarna, jednak wobec faktu, że jej wyznacznik jest ujemny nie reprezentuje ona żadnego obrotu w  $\mathbb{E}^3$ .

$$(1.4.11) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} - i \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & \cos \theta \end{bmatrix} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Pozostawimy Czytelnikowi wykazanie, że  $\gamma$  jest tu kątem obrotu w  $E^3$ <sup>9</sup>.

Różniczkując macierz  $\mathbf{Q}$  kolejno po  $\gamma, \theta, \varphi$  otrzymamy bazę przestrzeni stycznej do rozmaitości macierzy obrotu  $\mathbf{Q}$ :

$$(1.4.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{G}_\gamma &= -\frac{1}{2} \mathbf{I} \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2},^{10} \\ \mathbf{G}_\theta &= -i \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta e^{-i\varphi} \\ \cos \theta e^{i\varphi} & \sin \theta \end{bmatrix} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ \mathbf{G}_\varphi &= \begin{bmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix} \sin \theta \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Mnożąc skalarnie wektory bazy (w sensie iloczynu w  $S$ ) otrzymujemy, z dokładnością do mnożnika 8, te same, co poprzednio wyrażenia na składowe tensora metrycznego, zatem geometria obu badanych rozmaitości jest identyczna<sup>11</sup>. Wobec tej równoważności pozostaniemy dalej przy poprzednim opisie, który znacznie lepiej przystaje do tensorowego opisu mechaniki kontinuum.

<sup>9</sup>Najłatwiej to wykazać przyjmując taką bazę w  $E^3$  aby oś obrotu pokrywała się z  $\mathbf{e}_3$ .

<sup>10</sup>Zauważmy, że wektory styczne do rozmaitości nie dadzą się przedstawić jako kombinacje liniowe (o rzeczywistych współczynnikach) wektorów bazy  $\sigma_i$  wobec tego nie reprezentują żadnych rzeczywistych wektorów z przestrzeni  $E^3$ .

<sup>11</sup>Stały mnożnik 8 pochodzi stąd, że przyjęliśmy różne definicje mnożenia skalarnego w przestrzeniach euklidesowych, w których zanurzaliśmy przestrzeń styczną, co doprowadziło do dwóch różnych skal długości.

### 1.5 Funkcje i operatory na zbiorze orientacji

Rozpatrzmy funkcje skalarnie przypisujące każdemu obszarowi przestrzeni tensorów obrotu (orientacji, reperów) pewną liczbę. Prostim przykładem takiej funkcji jest rozkład orientacji przyporządkowujący każdemu obszarowi  $\Omega$  w przestrzeni orientacji liczbę  $N(\Omega)$  tych wszystkich elementów z danego skończonego zbioru elementów zorientowanych, których orientacje należą do obszaru  $\Omega$ , funkcja taka jest oczywiście addytywna względem sumowania zbiorów rozłącznych np.:

$$(1.5.1) \quad (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow F(A \cup B) = F(A) + F(B).$$

Analogiczny wzór możemy oczywiście napisać dla dowolnej skończonej liczby zbiorów parami rozłącznych. Sprawa się nieco komplikuje (ale tylko na poziomie rozważań ścisłych, na poziomie pojęć intuicyjnych sprawa jest dość oczywista) w przypadku zbiorów nieskończonych. Nie jest jednak intencją Autora wgłębianie się w fundamentalne zagadnienia teorii miary<sup>1</sup>, wobec tego, założymy po prostu, że zbiór elementów zorientowanych jest na tyle liczny i regularnie rozłożony, że nie popełnimy dużego błędu zakładając istnienie takiej funkcji  $\rho(\mathbf{Q}) = \rho(\varphi, \theta, \psi)$ , zwanej gęstością orientacji, że:

$$(1.5.2) \quad N(\Omega) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{Q}) dV = \iiint_{\Omega} \rho(\varphi, \theta, \psi) \sqrt{32 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi)} d\varphi d\theta d\psi,$$

gdzie przez  $dV$  oznaczyliśmy element objętości w przestrzeni orientacji  $\mathbf{Q}$ . Całka po całej przestrzeni od funkcji  $\rho(\mathbf{Q})$  równa jest liczbie wszystkich elementów zbioru. Podobnie możemy definiować inne funkcje addytywne względem podzbiorów i ich rozkłady w przestrzeni orientacji. Mogą one opisywać np. masę elementów zorientowanych ich energię itp., analogicznie określamy gęstości tych funkcji. Niekiedy wygodnie jest używać wielkości zregularyzowanych:

$$(1.5.3) \quad \tilde{\rho}(\mathbf{Q}) = \frac{\rho(\mathbf{Q})}{N(\mathbf{Q})} = \frac{\rho(\mathbf{Q})}{\int_{\mathbf{Q}} \rho(\mathbf{Q}) dV}.$$

Całka od zregularyzowanej gęstości po całej przestrzeni równa jest oczywiście jedności. Jeżeli zbiór jest dostatecznie liczny i dostatecznie regularnie rozłożony w przestrzeni

---

<sup>1</sup>Sprawy te reguluje m.in. twierdzenie Radona-Nikodyma [24], całe zagadnienie zresztą wykracza poza zakres matematyki, podobnie, jak to się dzieje we wszystkich przypadkach modeli ciągłych układów dyskretnych.

orientacji, aby można było z dobrym przybliżeniem założyć gładkość funkcji gęstości, możemy do jej badania zastosować aparat analizy<sup>2</sup>.

Dla niektórych zastosowań istotna może się okazać informacja, jak intensywnie zmienia się wartość  $\rho(\mathbf{Q})$  przy małych przyrostach argumentu  $\mathbf{Q}$ , wielkością charakteryzującą ilościowo tę własność funkcji jest jej gradient<sup>3</sup>, a ściślej, pole gradientu funkcji  $\nabla\rho(\mathbf{Q})$ , zadane na przestrzeni orientacji (lub jej podobszarze). Każdy operator liniowy przyporządkowujący wektorowi z pewnej przestrzeni euklidesowej skalar da się zinterpretować jako wektor z tej samej przestrzeni<sup>1</sup>. Ponieważ przy  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}_0$  iloraz  $(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0)/|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0|$  dąży z definicji do pewnego wektora z przestrzeni stycznej w punkcie  $\mathbf{Q}_0$  zatem gradient dowolnej funkcji skalarniej określonej na przestrzeni orientacji jest również wektorem należącym do przestrzeni stycznej do rozmaitości w punkcie  $\mathbf{Q}_0$ , jest zatem kombinacją liniową wektorów  $\mathbf{G}^K$  ( $K = 1, 2, 3$ ) czyli, jak to uprzednio wykazaliśmy, pewnym tensorem z przestrzeni  $E^3 \otimes E^3$  o postaci  $\mathbf{W}\mathbf{Q}_0$ , gdzie  $\mathbf{W}$  jest tensorem antysymetrycznym.

Inaczej mówiąc, jeżeli mamy pewną krzywą  $\mathbf{Q}(s)$ , gdzie  $s$  jest parametrem naturalnym, a

<sup>2</sup>Czytelnik z pewnością zauważy zbieżność stosowanej symboliki z opisem rozkładów prawdopodobieństwa, zbieżność ta pozwala nam zastosować wprowadzone funkcje gęstości również do opisu zbiorów o niewielkiej liczbie elementów, wyobraźmy sobie np. polikrystaliczny ośrodek ciągły i skonstruujemy na iloczyźnie kartezjańskim przestrzeni położenia cząstek materialnych  $E^3$  i przestrzeni orientacji  $\mathbf{Q}$  funkcję  $\mu_{\mathbf{R}}(\mathbf{Q}, \mathbf{x})$  według następującego przepisu: wartość funkcji  $\mu_{\mathbf{R}}$  jest dla każdego  $\mathbf{Q}$

równa wartości funkcji  $\tilde{\rho}(\mathbf{Q})$  dla zbioru orientacji ziaren krystalicznych zawartych w kuli o promieniu  $R$  i o środku w  $\mathbf{x}$ . Jeżeli wartość tej funkcji mało zależy od  $R$  (przynajmniej dla wartości  $R$  znacznie większych od rozmiarów ziaren) to jej ekstrapolowaną wartość dla  $R = 0$ , którą oznaczymy przez  $\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{x})$ , będziemy skłonni utożsamiać za gęstość prawdopodobieństwa znajdowania się cząstki  $\mathbf{x}$  w obszarze ziarna o orientacji  $\mathbf{Q}$ . Inaczej mówiąc: prawdopodobieństwo  $\pi(\mathbf{x}, \Omega)$  tego, że orientacja ziarna krystalicznego, zawierającego cząstkę  $\mathbf{x}$  leży w obszarze  $\Omega$  przestrzeni orientacji określa wzór:

$$\pi(\mathbf{x}, \Omega) = \int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) dV_{\Omega}.$$

<sup>3</sup>Przez gradient funkcji skalarniej określonej na dowolnej rozmaitości rozumiemy taki operator, który przyrostowi argumentu przyporządkowuje liniową część przyrostu funkcji według reguły:

$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f \cdot \mathbf{h} + o(|\mathbf{h}|)$ , gdzie przez  $o(x)$  rozumiemy wielkość dążącą do zera szybciej.

niż argument  $x$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{|x|} = 0$ .

<sup>4</sup>Jeżeli przestrzeń  $V$  nie jest euklidesowa, czyli nie została w niej zdefiniowane działanie mnożenia skalarnego, to zbiór takich operatorów wręcz definiuje tzw. przestrzeń sprzężoną  $V^*$ :

$$(\mathbf{b}^* \mathbf{a} \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow (\mathbf{a} \in V \wedge \mathbf{b}^* \in V^*).$$

$$(1.5.4) \quad \tau(s) = \frac{d\xi^k}{ds} \mathbf{G}_k$$

jest wektorem jednostkowym stycznym do krzywej, to wzdłuż krzywej, dla każdej różniczkowalnej funkcji  $f(\mathbf{Q})$  zachodzić ma równość:

$$(1.5.5) \quad \frac{df(\mathbf{Q})}{ds} = \nabla f(\mathbf{Q}) \cdot \tau.$$

Mamy jednak z definicji:

$$(1.5.5) \quad \frac{df(\mathbf{Q})}{ds} = \frac{\partial f(\mathbf{Q})}{\partial \xi^k} \frac{d\xi^k}{ds},$$

a zatem

$$(1.5.6) \quad \nabla f(\mathbf{Q}) = \frac{\partial f(\mathbf{Q})}{\partial \xi^k} \mathbf{G}^k.$$

Analogicznie, opierając się na przytoczonej na str. 16 zależności (przypis <sup>(25)</sup>) dla funkcji wektorowej  $\mathbf{a}(\mathbf{Q})$  przyporządkowującej tensorowi obrotu  $\mathbf{Q}$  wektor  $\mathbf{a}$  z przestrzeni stycznej do rozmaitości piszemy:

$$(1.5.7) \quad \frac{d\mathbf{a}}{ds} = \left( \frac{d\mathbf{a}^k}{ds} + a^j \Gamma_{jl}^k \frac{d\xi^l}{ds} \right) \mathbf{G}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{a}^k}{\partial \xi^l} + a^j \Gamma_{jl}^k \right) \frac{d\xi^l}{ds} \mathbf{G}_k. \quad ^5$$

Tensor drugiego rzędu  $\nabla \mathbf{a}$  z iloczynu tensorowego przestrzeni stycznej przez siebie (czyli tensor o walencji 4 z  $\mathbb{E}^3 \otimes \mathbb{E}^3 \otimes \mathbb{E}^3 \otimes \mathbb{E}^3$ ) określony zależnością:

$$(1.5.8) \quad \nabla \mathbf{a} = \left( \frac{\partial \mathbf{a}^k}{\partial \xi^l} + a^j \Gamma_{jl}^k \right) (\mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}^l)$$

nazywamy gradientem pola  $\mathbf{a}(\xi)$ , a jego składowe:

$$(1.5.9) \quad a^k_{,l} = \frac{\partial \mathbf{a}^k}{\partial \xi^l} + a^j \Gamma_{jl}^k$$

<sup>5</sup>Sprawa gradientu funkcji wektorowej (a szerzej – tensorowej o dowolnej walencji), którą traktujemy tu nieco formalnie, przy bliższym zbadaniu nie jest ani prosta, ani oczywista, rzecz w tym, że nie możemy napisać różnicy  $f(\mathbf{Q} + \Delta \mathbf{Q}) - f(\mathbf{Q})$  ponieważ wektory te należą do różnych przestrzeni, musimy najpierw dokonać przeniesienia równoległego, a potem porównać. Wynika tu z kolei sprawa zależności wyniku przeniesienia równoległego od drogi. Zagadnienia te są dokładnie omówione w podręcznikach geometrii różniczkowej [29], [35].

– pochodnymi kowariantnymi pól  $a^k(\mathbf{Q})$ . Analogicznie definiujemy pochodne kowariantne składowych kowariantnych pola wektorowego:

$$(1.5.10) \quad a_{\kappa,l} = \frac{\partial \hat{a}_\kappa}{\partial \xi^l} - a_j \Gamma_{kl}^j. \quad 6$$

Nie będziemy tu wypisywać *explicitie* wszystkich dziewięciu składowych tych wyrażen, ograniczając się do podania wyrażenia na ich ślady – dywergencję pola  $\mathbf{a}(\mathbf{Q})$ :

$$(1.5.11) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= a_{\kappa,l} G^{kl} = \left( \frac{\partial \hat{a}_\kappa}{\partial \xi^l} - a_j \Gamma_{kl}^j \right) G^{kl} = \\ &= \frac{\partial \hat{a}_1}{\partial \xi^1} G^{11} + \frac{\partial \hat{a}_2}{\partial \xi^2} G^{22} + \frac{\partial \hat{a}_3}{\partial \xi^3} G^{33} - a_2 \Gamma_{11}^2 G^{11} - a_3 \left( \Gamma_{11}^3 G^{11} + \Gamma_{22}^3 G^{22} \right) = \\ &= \frac{\partial \hat{a}_1}{\partial \psi} \frac{1}{4 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi)} + \frac{\partial \hat{a}_2}{\partial \theta} \frac{1}{4(1 - \cos \varphi)} + \frac{\partial \hat{a}_3}{\partial \varphi} \frac{1}{2} - a_2 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{4(1 - \cos \varphi)} - a_3 \frac{\sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast wzór na laplasjan funkcji skalarnej

$$(1.5.12) \quad \begin{aligned} \Delta f(\mathbf{Q}) &= f_{,kl} G^{kl} = \\ &= \frac{1}{4(1 - \cos \varphi)} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} (1 - \cos \varphi) - \frac{\partial f}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi} \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Zmiana znaku w stosunku do wzoru (1.5.9) pochodzi stąd, że z definicji wektorów kobazy wynika

natychmiast:  $\frac{\partial \mathbf{G}_l}{\partial \xi^k} \cdot \mathbf{G}^l = -\mathbf{G}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{G}^l}{\partial \xi^k}$ . Analogicznie definiujemy pochodne kowariantne składowych

tensorów:  $T_{,k}^l = \frac{\partial T^l}{\partial \xi^k} + T^{il} \Gamma_{lk}^j + T^{lj} \Gamma_{lk}^i$ ,  $T_{,k}^l = \frac{\partial T_l}{\partial \xi^k} - T_{lj} \Gamma_{lk}^j - T_{il} \Gamma_{jk}^l$  itp. W przypadku

skalarów pochodne kowariantne sprowadzają się do pochodnych cząstkowych. Dowodzi się, [29] że pochodne kowariantne są (w przeciwieństwie np. do symboli Christoffela) składowymi tensorów o odpowiednio wyższej walencji, możemy zatem określać pochodne kowariantne wyższych rzędów. Pozostawimy Czytelnikowi wykazanie, że wszystkie pochodne kowariantne składowych tensora metrycznego są równe zeru.



## 1.6 Obroty brył sztywnych

Ciało materialne, którego wszystkie ruchy są izometriami będziemy nazywać bryłą sztywną. Pytanie, czy i kiedy, taki wyidealizowany twór modeluje zachowanie się realnych ciał stałych pod wpływem sił i przyspieszeń powodujących małe (z punktu widzenia rozważanych zastosowań) odkształcenia, wykracza poza kompetencje matematycznego opisu i musi być za każdym razem zweryfikowane (choćby przy pomocy intuicji inżynierskiej). Faktem jest, że badaniem tego modelu zajmowało się wielu najwybitniejszych matematyków i poświęcono mu wiele dziesiątków monografii.

Przydatny z punktu widzenia zastosowań opis położenia bryły sztywnej bez nawiązania do przebiegu procesów ich zmiany w czasie jest dosyć ubogi pojęciowo, tym nie mniej, dla kompletności wykładu warto rozpatrzeć go tu w ogólnych zarysach.

Każdą zmianę położenia<sup>1</sup> bryły sztywnej (lub, co na jedno wychodzi, związanej z nią „na sztywno” pewnej bazy ortonormalnej) możemy opisać przez zadanie obrotu wokół wybranego jej punktu (bieguna) o położeniu  $\mathbf{R}$  i przemieszczenia bieguna do nowego położenia  $\mathbf{R}'$ .<sup>2</sup> Niechaj więc pewien punkt bryły sztywnej o położeniu  $\mathbf{x}$  przyjmuje w wyniku translacji i obrotu położenie  $\mathbf{y}$  zgodnie z zależnością:

$$(1.6.1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{R} + \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{R}) + \mathbf{U},$$

gdzie  $\mathbf{U} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}$ . Wybór bieguna przy opisie danej zmiany położenia jest tu naszym aktem woli, oczywiście wektor  $\mathbf{U}$  (tj. położenie  $\mathbf{R}'$ ) zależy od wyboru  $\mathbf{R}$ . Natomiast tensor  $\mathbf{Q}$  zadany jest jednoznacznie przez iloczyny wersorów bazy wyjściowej i końcowej.

Pokażemy, że każda izometria bryły sztywnej da się przedstawić w postaci złożenia obrotu względem pewnej osi oraz translacji wzdłuż tej osi. W rzeczy samej, niechaj dla pewnego wyboru bieguna zachodzi zależność (1.6.1), niechaj  $\mathbf{n}$  będzie przy tym wektorem własnym tensora  $\mathbf{Q}$ . Poszukajmy innego bieguna o (nie znanym na razie) położeniu  $\hat{\mathbf{R}}$ , takim, że:

$$(1.6.2) \quad \mathbf{y} = \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{R}}) + \hat{\mathbf{U}}\mathbf{n},$$

gdzie  $\mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{n}$ . Żądamy zatem, aby dla każdego  $\mathbf{x}$  zachodziła równość:

---

<sup>1</sup>Dla ujednoczenia terminologii umówimy się, że pod pojęciem położenia (zmiany położenia) bryły sztywnej rozumiemy zarówno orientację pewnej sztywno z nią związanej bazy jak i położenie pewnego jej wybranego punktu (bieguna), zbiór składający się z pewnej cząstki materialnej wraz z przypisaną jej trójką liniowo niezależnych wektorów materialnych (np. łączących wybraną cząstkę z innymi ustalonymi cząstkami materialnymi) nazywać będziemy reperem *m a t e r i a l n y m*; analogicznie, przypisując trójkę wektorów punktowi przestrzeni, tworzymy repery przestrzenie umiejscowione.

<sup>2</sup>Łatwo zauważyć, że operacje te są przemienne.

$$(1.6.3) \quad \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}) - (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}) = \hat{U}\mathbf{n} - U$$

Warunek (1.6.3) daje nam trzy równania na cztery niewiadome: trzy składowe wektora  $\hat{\mathbf{R}}$  oraz  $U$ . Ustalmy zatem jedną z tych wielkości, niechaj więc nowy biegun leży w tej samej płaszczyźnie prostopadłej do wektora  $\mathbf{n}$ , co i stary:  $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{n} = \mathbf{R}\mathbf{n}$ . Mnożąc (1.6.3) przez  $\mathbf{n}$  i zauważając, że tensor  $\mathbf{Q}$  transformuje każdy wektor normalny do  $\mathbf{n}$  na inny, również normalny otrzymujemy:

$$(1.6.4) \quad \hat{U} = U \cdot \mathbf{n}.$$

Podstawiając ten wynik z powrotem do (1.6.3) po przekształceniu otrzymujemy:

$$(1.6.5) \quad (\mathbf{Q} - \mathbf{I})(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}) = (U \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - U.$$

mnożąc obie strony równości (1.6.5) lewostronnie przez  $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)$ , dzieląc przez  $(3 - \text{tr}\mathbf{Q})$ , otrzymujemy:<sup>3</sup>

$$(1.6.6) \quad \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R} = \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)U}{(3 - \text{tr}\mathbf{Q})}.$$

Z ostatniej równości, jeżeli tylko tensor  $\mathbf{Q}$  jest różny od  $\mathbf{I}$ , znajdujemy wektor położenia nowego bieguna  $\hat{\mathbf{R}}$ . Wyznaczając efektywnie nieznanne wielkości, dowiedliśmy tym samym naszej tezy.

Do kompletności brakuje nam jeszcze opisu złożenia przemieszczeń. W tym celu należy wprowadzić pojęcie przemieszczenia względnego. Niechaj dany będzie mianowicie pewien układ sztywny  $\Omega^{(1)}$  zaopatrzony w bazę  $\{\varepsilon_i\}$  i odniesiony do bieguna o położeniu  $\mathbf{R}^{(1)}$ . Niech biegun innego układu  $\Omega^{(2)}$  o bazie  $\{\eta_i\}$  zajmuje położenie  $\mathbf{R}^{(2)}$ . Względna orientację układu  $\Omega^{(2)}$  względem  $\Omega^{(1)}$  będziemy nazywać tensor:

$$(1.6.7) \quad \mathbf{Q}^{(2,1)} = \eta_i \otimes \varepsilon_i,$$

a względne położenie jego bieguna będzie określone przez wektor:

$$(1.6.8) \quad \mathbf{R}^{(2,1)} = \mathbf{R}^{(2)} - \mathbf{R}^{(1)}.$$

Zachodzą oczywiste zależności:

<sup>3</sup>Jak łatwo to sprawdzić na reprezentacjach, zachodzi zależność:

$$2\mathbf{I} - (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) = (3 - \text{tr}\mathbf{Q})(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \text{ dla dowolnego wektora } \mathbf{a} \text{ i dowolnego tensora obrotu}$$

$\mathbf{B}$  o (jednostkowym) wektorze własnym  $\mathbf{n}$  mamy także:  $(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{a}$ .

$$(1.6.9) \quad \mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{R}^{(2,1)} + \mathbf{R}^{(1)},$$

$$(1.6.10) \quad \mathbf{Q}^{(2)} = \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(1)},$$

gdzie  $\mathbf{Q}^{(1)} = \varepsilon_i \otimes \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{Q}^{(2)} = \eta_i \otimes \mathbf{e}_i$  opisują odpowiednio orientację układów  $\Omega^{(1)}$  i  $\Omega^{(2)}$  względem pewnej „nieruchomej” bazy  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Zależność (1.6.7) można przepisać w następującej postaci:

$$(1.6.11) \quad \eta_j = Q_{ij}^{(2,1)} \varepsilon_k,$$

gdzie  $Q_{ij}^{(2,1)} = \varepsilon_k \cdot \eta_j$ , czyli:

$$(1.6.12) \quad \mathbf{Q}^{(2)} = \underline{Q_{ij}^{(2,1)}} (\varepsilon_k \otimes \mathbf{e}_j).$$

Natomiast (1.6.9) możemy przedstawić w postaci:

$$(1.6.13) \quad \mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{R}^{(1)} + \underline{\mathbf{R}^{(2,1)} \varepsilon_i} \mathbf{e}_j.$$

Jeżeli będziemy teraz nadal zmieniać położenie układu  $\Omega^{(1)}$  pozostawiając jednak układ  $\Omega^{(2)}$  sztywno z nim związanym, to we wzorach (1.6.12) i (1.6.13) wielkości podkreślone nie ulegną zmianie, a wartości  $\mathbf{Q}^{(2)}$  i  $\mathbf{R}^{(2)}$  ulegną zmianie na skutek zmiany wartości  $\mathbf{R}^{(1)}$  i  $\varepsilon_j$ , czyli na skutek unoszenia. W odróżnieniu od tego, zmiany położenia układu  $\Omega^{(2)}$  wskutek zmian położenia repera  $\{\eta_i\}$  względem repera  $\{\varepsilon_i\}$ , w wyniku których zmieniają się wartości podkreślonych członów, nazywane są ruchami w z g l ę d n y m i. Podział taki, który może się wydawać sztuczny w odniesieniu do opisu położenia, okazuje się bardzo owocny przy przejściu do prędkości, które okazują się addytywne. Dokładne rozpatrywanie składania ruchów skończonych, wprowadziłoby nas w gąszcz nowych oznaczeń, a otrzymane wzory byłyby mało pouczające z punktu widzenia mechaniki ośrodków ciągłych. Wzory takie znajdują zastosowanie w mechanice robotów i manipulatorów do opisu złożonych łańcuchów kinematycznych. Do tego celu został opracowany specjalny aparat matematyczny zwany rachunkiem krętników<sup>4</sup> [7] [18]. Pozostawimy zatem na razie to zagadnienie bez dalszego rozwinięcia, a do sprawy ruchów względnych powrócimy przy rozpatrywaniu kinematyki.

<sup>4</sup>Calculus of screws (ang.), wintowoje isczislenije (ros).

### 1.A. Uzupełnienie

Zgodnie z zapowiedzią, (por. przypis na str.15) rozpatrzmy opis obrotów tensorów symetrycznych w przestrzeni trójwymiarowej, zapisanych w postaci wektorów sześciowymiarowych. Zazwyczaj w inżynierskich podręcznikach wytrzymałości materiałów, bądź teorii sprężystości operuje się następującym wektorowym zapisem tensorów symetrycznych:

$$(1.A.1) \quad \mathbf{T} = [T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}] .$$

Taki zapis wykorzystuje się zazwyczaj do przedstawienia w postaci macierzowej liniowych zależności konstytutywnych, i do tego celu nadaje się on w pełni. Kiedy zaczynają nas jednak interesować normy tensorów oraz zmiana bazy – wynikają pewne trudności. Jeżeli przyjmimy, że zapis (1.A.1) odnosi się do pewnej bazy ortonormalnej w przestrzeni sześciowymiarowej, to wyrażenie na kwadrat normy tensora przybierze postać:

$$(1.A.2) \quad \|\mathbf{T}\|^2 = T_{11}^2 + T_{22}^2 + T_{33}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2 + T_{23}^2 .$$

Wyrażenie to w sposób oczywisty nie spełnia wymogu niezmienniczości względem obrotów w przestrzeni  $E^3$ , rozpatrzmy bowiem dwa tensory:

$$(1.A.3) \quad \mathbf{T}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \mathbf{T}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

tensory te dadzą się wzajemnie przeprowadzić w siebie obrotem o  $\pi/4$  wokół wektora  $e_1$  i oczywiście mają jednakowe normy, podczas, gdy reguła (1.A.2) prowadzi do różnych norm. Aby zatem zachować podstawowe struktury z  $E^3 \otimes E^3$  należy, bądź zrezygnować z unormowanej bazy, bądź też przyjąć inne odwzorowanie:

$$(1.A.4) \quad \mathbf{T} = [T_{11}, T_{22}, T_{33}, \sqrt{2}T_{12}, \sqrt{2}T_{13}, \sqrt{2}T_{23}] .$$

Druga z tych dróg wydaje się praktyczniejsza. Jeżeli po pokonaniu tego utrudnienia zabierzemy się do konstruowania macierzy obrotów w przestrzeni sześciowymiarowej, napotykamy następną trudność: nie każda macierz ortogonalna  $6 \times 6$  reprezentuje obrót tensora symetrycznego w przestrzeni  $E^3$ . W rzeczy samej, transformacja

$$(1.A.5) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

realizuje odwzorowanie:

$$(1.A.6) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

które w oczywisty sposób nie jest obrotem w  $E^3$  – nie jest zachowany ani ślad, ani wyznacznik tensora. Nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że obrót wokół wektora  $e_1$ :

$$(1.A.7) \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T,$$

gdzie:

$$(1.A.8) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \cos \varphi + \varepsilon \mathbf{e}_1 \sin \varphi$$

można w przestrzeni sześciowymiarowej przedstawić następująco:

$$(1.A.9) \quad \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ \sqrt{2}B_{12} \\ \sqrt{2}B_{13} \\ \sqrt{2}B_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \\ 0 & \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi & 0 & 0 & \cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{33} \\ \sqrt{2}A_{12} \\ \sqrt{2}A_{13} \\ \sqrt{2}A_{23} \end{bmatrix}$$

Można sprawdzić, że wektorami własnymi tej macierzy są następujące tensory symetryczne:

$$(1.A.10) \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

oraz ich kombinacje liniowe, poza tym istnieją dwie przestrzenie (płaszczyzny) niezmiennicze rozpięte na następujących parach tensorów:

$$(1.A.11) \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Przy całej swojej pogłębności i prostocie reprezentacja w przestrzeni sześciowymiarowej ma zasadniczą wadę: w przestrzeni tej nie mają swojej reprezentacji tensory niesymetryczne, z  $E^3 \otimes E^3$  a zatem i dualne do nich wektory z  $E^3$ , wobec tego nie będziemy jej dalej w zasadzie stosować, nie będziemy tu zatem również przytaczać dość skomplikowanych wyrażeń opisujących obroty wokół dowolnej osi.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Zainteresowany tym przedmiotem Czytelnik może taką postać prosto (choć zmusznie) otrzymać np. przez nałożenie obrotów wokół trzech wektorów bazowych (wyrażenia dla obrotów wokół dwóch pozostałych wektorów bazowych nieludno wydedukować na podstawie wyrażenia (1.A.9)).

## 2. Kinematyka obrotów

### 2.1 Pochodna czasowa tensora obrotu

Niechaj każdej chwili czasu  $t$  z pewnego przedziału przyporządkowany będzie tensor obrotu  $\mathbf{Q}(t)$ . Zakładając będziemy, że zależność ta jest dostatecznie gładka, aby wykonalne były wszystkie operacje, które będziemy dalej definiować. Nie będzie nas w tej chwili interesować, czy obiekt, którego orientacja opisana jest tensorem  $\mathbf{Q}(t)$  przyporządkowany został pewnej cząstce materialnej<sup>1</sup>, czy też interesuje nas jego „lokalna” zmienność, która może (choć nie musi) mieć charakter jedynie konwekcyjny – w ustalonym punkcie przestrzeni  $E^3$  orientacja może się zmieniać na skutek „przepływania” przezeń obiektów o różnej orientacji, nawet jeżeli orientacje samych obiektów pozostają niezmiennie w czasie.

Niechaj więc zależność  $\mathbf{Q}(t)$  realizuje się poprzez trzy funkcje skalarne:

$$(2.1.1) \quad \xi = \xi(t), \quad (\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t)).$$

Wykazaliśmy w poprzednim rozdziale (por (1.3.7) – (1.3.9), oraz przypis na tej samej stronie), że wektory bazowe w przestrzeni stycznej do rozmaitości obrotów w „punkcie”  $\mathbf{Q}$  mają następującą postać:

$$(2.1.2) \quad \mathbf{G}_j = \mathbf{w}_{(j)} \mathbf{Q},$$

gdzie  $\mathbf{w}_{(j)}$  są tensorami antysymetrycznymi:

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{w}_{(1)} &= -\varepsilon \left[ 2 \sin \theta \sin \frac{\varphi}{2} \left( \mathbf{e}_\varphi \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{e}_\theta \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]; \\ \mathbf{w}_{(2)} &= -\varepsilon \left[ 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left( \mathbf{e}_\varphi \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_\theta \cos \frac{\theta}{2} \right) \right]; \\ \mathbf{w}_{(3)} &= -\varepsilon \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Wobec tego możemy napisać:

$$(2.1.3) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{w}\mathbf{Q},$$

gdzie

---

<sup>1</sup>Jak już wspominaliśmy uprzednio, taki obiekt, nawet będąc obiektem fizycznym nie musi być obciążony masą, może to być np. prawo fizyczne przyporządkowujące wektorom wektory, takie jak prawo przewodnictwa cieplnego wiążące strumień ciepła z gradientem temperatury (dla materiałów niepolarnych, ten ostatni operator, jak każdy inny tensor symetryczny, określa reper z dokładnością co najwyżej do zwrotu osi.).

$$(2.1.4) \quad \mathbf{w} = \sum_{l=1}^3 \mathbf{w}_{(l)} \frac{d^x l}{dt},$$

jest oczywiście tensorem antysymetrycznym.<sup>2</sup> Równość (2.1.3) możemy przepisać w następującej postaci:

$$(2.1.5) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\omega \varepsilon \mathbf{Q},$$

gdzie  $\omega$  jest wektorem z  $E^3$  dualnym do tensora  $\omega_k = -\frac{1}{2} \omega_{ij} \varepsilon_{ijk}$ . Wektory dualne do tensorów  $\mathbf{W}_{(l)}$  tworzą po unormowaniu bazę ortonormalną  $\{\eta_i\}$ :

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \mathbf{e}_\nu \cos \frac{\sigma}{2} - \mathbf{e}_\theta \sin \frac{\sigma}{2}; \\ \eta_2 &= \mathbf{e}_\nu \sin \frac{\sigma}{2} + \mathbf{e}_\theta \cos \frac{\sigma}{2}; \\ \eta_3 &= \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Rozkładając w tej bazie wektor  $\omega$ :

$$(2.1.7) \quad \omega = \omega_i \eta_i$$

otrzymujemy:

$$(2.1.8) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= 2 \sin \theta \sin \frac{\sigma}{2} \frac{d\psi}{dt};^3 \\ \omega_2 &= 2 \sin \frac{\sigma}{2} \frac{d\theta}{dt}; \\ \omega_3 &= \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Postać wzoru (2.1.3) można wykazać bezpośrednio, mamy bowiem  $\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = 0$ , a stąd:

$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}$ , wobec przemienności operacji różniczkowania i transpozycji obie strony równości są tensorami antysymetrycznymi, mnożąc zatem obie strony ostaniej równości prawostronnie

przez  $\mathbf{Q}$  otrzymujemy zależność o tej samej postaci co (2.1.3):  $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\left(\mathbf{Q} \frac{d}{dt} \mathbf{Q}^T\right) \mathbf{Q}$ .



$$(2.1.9) \quad \omega^2 = (1 - \cos \varphi) \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + (1 - \cos \varphi) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Wektor  $\omega$  nosi nazwę prędkości kątowej, natomiast dualny do niego tensor  $\mathbf{W}$  zwany jest tensorem spinu.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Zauważmy, że niezależnie od tego, jak zależą od czasu kąty  $\theta$  i  $\psi$ , jeżeli przyjmiemy orientację bieżącą za orientację odniesienia ( $\varphi = 0$ ), to wektor  $\omega$  będzie się pokrywał z wektorem własnym

„infinitesimalnego” obrotu., a ściślej:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\omega}{|\omega|} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \mathbf{n}.$$

<sup>4</sup>Zwróćmy raz jeszcze uwagę Czytelnika na fakt, że, ani tensor  $\mathbf{W}$ , ani (tym bardziej) wektor  $\omega$  nie należą do przestrzeni  $\mathbf{T}_Q$  stycznej do rozmierności w punkcie  $Q$ , ta bowiem składa się z tensorów typu  $\mathbf{w}Q$ . Istnieje jednak, jak to łatwo zauważyć, izomorfizm przestrzeni  $\mathbf{T}_Q$  i trójwymiarowej podprzestrzeni  $\mathbf{W} \subset \mathbf{E}^3 \otimes \mathbf{E}^3$  złożonej z tensorów antysymetrycznych mianowicie:

$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W} \exists \mathbf{T} \in \mathbf{T}_Q : \mathbf{w} = \mathbf{T}Q^T$  z kolei, jak już wspominaliśmy, tak długo, jak nie zmieniamy orientacji reperów, przestrzeń tensorów antysymetrycznych możemy rozważać jako izomorficzną z przestrzenią  $\mathbf{E}^3$ . O ile jednak drugi z tych izomorfizmów nie zależy od punktu w rozmierności, to pierwszy nie ma tej własności, popełnilibyśmy zatem poważny błąd utożsamiając te przestrzenie np. przy różniczkowaniu ich elementów po współrzędnych.

## 2.2 Elementy kinematyki bryły sztywnej

W tym podrozdziale rozpatrywać będziemy zmianę w czasie orientacji (położenia) nieodkształcalnego obiektu materialnego, wygodnie jest zatem obrócić taki reper, reprezentowany przez tensor obrotu który jest „na sztywno” związany z tym obiektem.

Dla uwypuklenia tego faktu będziemy pochodne po czasie widziane przez obserwatora związanego z tym reperem oznaczać kropkami. Niechaj więc, jak w (1.6.1), położenie dowolnego punktu bryły sztywnej  $y(t)$  zależy od położenia bieguna  $R_o(t)$ , tensora obrotu  $Q(t)$  i wyjściowego położenia punktu względem bieguna:

$$r = y(t_o) - R_o(t_o) \quad (\text{Rys. 2.1}).$$

$$(2.2.1) \quad y(t) = Q(t)r + R_o(t).$$

Różniczkując (2.2.1) otrzymujemy:

$$(2.2.2) \quad v(t) = \dot{Q}(t)r + \dot{R}_o(t)$$

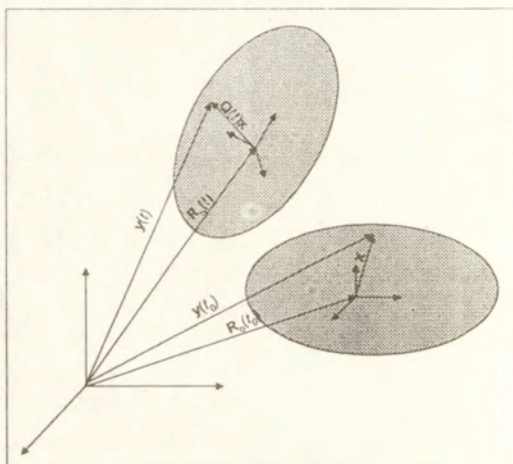
czyli

$$(2.2.3) \quad v = -\omega \varepsilon Q r + v_o,$$

i ostatecznie – znany wzór:

$$(2.2.4) \quad v = v_o + \omega \times r,$$

gdzie przez  $v_o$  oznaczyliśmy prędkość bieguna. Jeżeli zauważymy, że



Rys. 2.1 Obrót bryły sztywnej

<sup>1</sup>Pisząc  $v_i = v_{oi} + w_{ij} (y^j - R_o^j)$  i różniczkując po składowych wektora położenia  $y^j$  otrzymujemy następujący związek, opisujący gradient prędkości w ruchu bryły sztywnej:  $v_{i,j} = w_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega^k$ , w zapisie kowariantnym pod oznaczeniem  $\varepsilon_{ijk}$  rozumiemy nie sam symbol permutacyjny zdefiniowany na str. 15, a jego iloczyn przez  $g \equiv \sqrt{\det[g_{ij}]}$ , analogicznie w przypadku składowych kontrawariantnych  $\varepsilon^{ijk}$  mnożymy symbol permutacyjny przez  $g^{-1} \equiv \sqrt{\det[g^{ij}]}$ .

$$(2.2.5) \quad \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

to bez trudności, różniczkując raz jeszcze otrzymamy następujące wyrażenie dla przyspieszeń:

$$(2.2.6) \quad \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Ze znanych wzorów na podwójny iloczyn wektorowy otrzymujemy zależność:

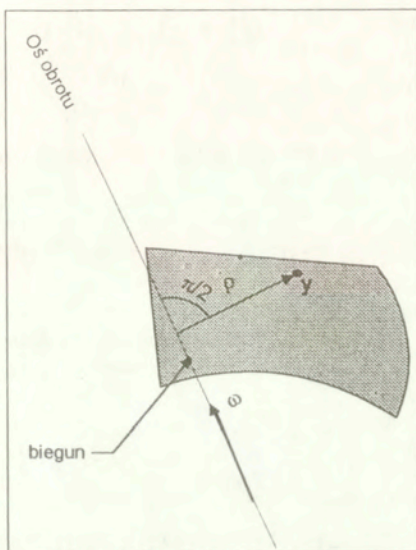
$$(2.2.7) \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\omega^2 \left( \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \right).$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia nic innego, jak wektor  $\rho$  łączący prostopadle pewien punkt na chwilowej osi obrotu<sup>2</sup> z rozważanym punktem bryły (Rys. 2.2). Ostatecznie otrzymujemy inną, szerzej jeszcze znaną niż poprzednia, postać wzoru (2.2.7):

$$(2.2.8) \quad \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \otimes \mathbf{r} - \omega^2 \rho.$$

W ostatnim z członów prawej strony łatwo rozpoznajemy przyspieszenie dośrodkowe.

Ze wzorów typu (1.6.11), (1.6.12), czy też (2.2.1) nietrudno wyprowadzić pewne ważne zależności dla prędkości i przyspieszeń w ruchu względnym. Na końcu rozdziału 1.6 niezbyt precyzyjnie określiliśmy (względny) obrót układu  $\{\eta_i\}$  względem  $\{\epsilon_i\}$  jako zmianę składowych tensora obrotu  $\mathbf{Q}^{(2,1)}$  przeprowadzającego  $\{\epsilon_i\}$  w  $\{\eta_i\}$



Rys.2.2 Obrót wokół biegun

$$(2.2.9) \quad \mathbf{Q}^{(2,1)} = \eta_i \otimes \epsilon_i = (\epsilon_k \cdot \eta_i) (\epsilon_k \otimes \epsilon_i) = Q_M (\epsilon_k \otimes \epsilon_i).$$

<sup>2</sup>Pod (chwilową) osią obrotu rozumiemy prostą przechodzącą przez biegun i skierowaną równoległe do wektora  $\boldsymbol{\omega}$ .

Zauważmy jednak, że pochodna tensora  $\mathbf{Q}^{(2,1)}$  może być różna od zera, nawet jeżeli składowe tego tensora w bazie  $(\varepsilon_k \otimes \varepsilon_j)$  są stałe<sup>3</sup>, zatem wielkość  $\dot{\mathbf{Q}}^{(2,1)}$  nie jest dobrą miarą prędkości zmiany wzajemnej orientacji baz  $\{\varepsilon_i\}$  i  $\{\eta_i\}$ . Możemy natomiast za taką miarę przyjąć następującą wielkość:

$$(2.2.10) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}^{(2,1)} &= \dot{Q}_{ij} (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = \dot{\mathbf{Q}}^{(2,1)} - \dot{\mathbf{Q}}^{(1)} \mathbf{Q}^{(1)\top} \mathbf{Q}^{(2,1)} - \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(1)} \dot{\mathbf{Q}}^{(1)\top} = \\ &= \mathbf{Q}^{(2,1)} - \mathbf{w} \mathbf{Q}^{(2,1)} - \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{w}^\top. \end{aligned}$$

Wielkość tensorową  $\mathbf{w}^{(2,1)}$  określoną wzorem:

$$(2.2.11) \quad \mathbf{w}^{(2,1)} = \dot{\mathbf{Q}}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(2,1)\top}$$

nazywać będziemy spinem (względny) bazy  $\{\eta_i\}$  względem bazy  $\{\varepsilon_i\}$ , natomiast wektor  $\omega^{(2,1)}$ , określony zależnością:

$$(2.2.12) \quad \omega_i^{(2,1)} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{jk}^{(2,1)}$$

nazywać będziemy (względną) prędkością kątową bazy  $\{\eta_i\}$  względem bazy  $\{\varepsilon_i\}$ .

Wykonajmy proste rachunki, oznaczając przez  $\mathbf{w}^{(1)}$  i  $\mathbf{w}^{(0)}$  odpowiednio spiny baz  $\{\varepsilon_i\}$  i  $\{\eta_i\}$ , napiszemy:

<sup>3</sup>Nietrudno wykazać, że po to, aby była ona równa zeru przy  $Q_{ij} = \text{const}$  potrzeba i wystarczy, aby wektor prędkości kątowej układu  $\{\varepsilon_i\}$  był wektorem własnym tensora  $\mathbf{Q}^{(2,1)}$ , tj. aby np. kierunek osi obrotu był stały.

<sup>4</sup>Pochodne typu zdefiniowanej wzorem (2.2.11) dadzą się określić dla tensorów o dowolnej walencji, nazywane są one czasem pochodnymi współobrotowymi. Pochodna taka równa jest zeru jeżeli pewna wielkość tensorowa widziana przez obserwatora związanego z pewną ruchomą bazą  $\{\varepsilon_i\}$ , (który „nie wie” o swoim ewentualnym obrocie) pozostaje stała. Jeżeli więc:

$\mathbf{A} = A^{ijk\dots} (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j \otimes \varepsilon_k \otimes \dots \otimes \varepsilon_l)$ ,  $\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}^{ijk\dots} (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j \otimes \varepsilon_k \otimes \dots \otimes \varepsilon_l)$ , pozostawimy czytelnikowi sprawdzenie, że tak zdefiniowany operator ma podstawową własność operatorów różniczkowych – spełnia regułę Leibniza:  $D(f \star g) = (Df) \star g + f \star (Dg)$ , gdzie gwiazdka oznacza mnożenie z dowolną liczbą nasunięć.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{(2)} &= \dot{\mathbf{Q}}^{(2)} \mathbf{Q}^{(2)\top} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(1)} \right) \left( \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(1)} \right)^\top = \dot{\mathbf{Q}}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(2,1)\top} + \mathbf{Q}^{(2,1)} \dot{\mathbf{Q}}^{(1)} \mathbf{Q}^{(1)\top} \mathbf{Q}^{(2,1)\top} = \\
 (2.2.13) \quad &= \left( \dot{\mathbf{Q}}^{(2,1)} + \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{Q}^{(2,1)} + \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{w}^{(1)\top} \right) \mathbf{Q}^{(2,1)\top} + \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{Q}^{(2,1)\top} = \\
 &= \dot{\mathbf{Q}}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(2,1)\top} + \mathbf{w}^{(1)} \mathbf{Q}^{(2,1)} \mathbf{Q}^{(2,1)\top} + \mathbf{Q}^{(2,1)} \left( \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{w}^{(1)\top} \right) \mathbf{Q}^{(2,1)\top}
 \end{aligned}$$

Wobec ortogonalności tensora  $\mathbf{Q}^{(2,1)}$  i skośnej symetrii  $\mathbf{W}$  otrzymujemy ostatecznie:

$$(2.2.14) \quad \mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{w}^{(2,1)} + \mathbf{w}^{(1)},$$

a zatem również:

$$(2.2.15) \quad \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \boldsymbol{\omega}^{(2,1)} + \boldsymbol{\omega}^{(1)}.$$

Wynik, który otrzymaliśmy formułowany jest zazwyczaj w następującej szacie słownej:

*Prędkość kątowa bryły sztywnej w ruchu złożonym równa jest sumie wektorowej prędkości kątowych unoszenia i ruchu względnego.*

Równie łatwo<sup>5</sup> otrzymujemy inny klasyczny wynik: niechaj, (Rys. 2.3) podobnie jak poprzednio, przez  $\mathbf{r}$  oznaczony będzie wektor położenia pewnego punktu względem pewnego ruchomego repera o początku w  $\mathbf{R}_o(t)$  i wektorach bazowych  $\{\mathbf{e}_i\}$ , tym razem, jednak, przeciwnie niż na Rys. 2.1 niech wektor  $\mathbf{r}$  zmienia się również i dla ruchomego obserwatora ( $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t_s)$ ). Wektor położenia y rozważanego punktu zapiszemy w nieco odmiennej postaci:

$$(2.2.16) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}_o(t) + \mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_o(t) + r_i(t)\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{R}_o(t) + r_i \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i,$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  oznacza tensor obrotu przeprowadzający bazę  $\{\mathbf{e}_i\}$  w  $\{\mathbf{e}_i\}$ .<sup>6</sup> Różniczkując wyrażenie (2.2.16) po czasie otrzymujemy:

<sup>5</sup>Zwróćmy tu uwagę Czytelnika, że zastosowanie podejścia tensorowego pozwoliło nam niemal mimochodem uzyskać wynik (2.2.14), którego dowód w klasycznych podręcznikach mechaniki teoretycznej zajmuje zazwyczaj kilka stron, lub jest w ogóle pomijany jako kłopotliwy.

<sup>6</sup>Jeżeli rozpatrywany reper będziemy wyobrażać sobie jako związany z pewną bryłą sztywną to wygodnie jest umiejscowić punkt odniesienia w biegunie, dlatego zachowaliśmy oznaczenie położenia ruchomego punktu odniesienia  $\mathbf{R}_o$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \mathbf{v}_o + \dot{r}_i \mathbf{e}_i + r_i \dot{\mathbf{e}}_i = \\
 (2.2.17) &= \mathbf{v}_o + \dot{r}_i \mathbf{e}_i + r_i \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_i = \\
 &= \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{r}_i \mathbf{e}_i = \\
 &= \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{r}_i \mathbf{e}_i.
 \end{aligned}$$

Pierwsze dwa człony ostatniego wyrażenia po prawej stronie związane są tylko z aktualnym położeniem punktu w układzie ruchomym oraz z ruchem tego układu, ich wkład do prędkości punktu zwany jest prędkością unoszenia  $\mathbf{v}^{(u)}$ , natomiast ostatni człon – pochodna współrotowa wektora  $\mathbf{r}(t)$  nosi nazwę prędkości względnej  $\mathbf{v}^{(w)}$

$$(2.2.18) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(u)} + \mathbf{v}^{(w)}$$

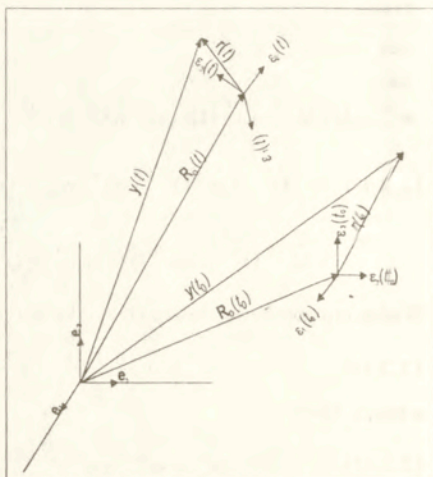
Różniczkując raz jeszcze (2.2.16) i korzystając dla  $\mathbf{v}^{(w)}$  z otrzymanego uprzednio dla wektora  $\mathbf{r}$  wyrażenia na pochodną współrotową, które oczywiście prawdziwe jest dla dowolnego wektora:

$$(2.2.19) \quad \dot{\mathbf{v}}^{(w)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{(w)} + \dot{r}_i \mathbf{e}_i,$$

otrzymujemy następujący wynik:

$$\begin{aligned}
 (2.2.20) \quad \dot{\mathbf{v}} &= \dot{\mathbf{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{(w)} + \dot{r}_i \mathbf{e}_i + \dot{r}_i \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{e}_i = \\
 &= (\dot{\mathbf{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{(w)} + \dot{r}_i \mathbf{e}_i.
 \end{aligned}$$

Wkład od członów w nawiasie z prawej strony (2.2.20) rozumnie jest nazwać przyspieszeniem unoszenia  $\mathbf{a}^{(u)}$ <sup>7</sup> natomiast ostatni człon:  $\dot{r}_i \mathbf{e}_i$  – przyspieszeniem względnym  $\mathbf{a}^{(w)}$ . Człon środkowy  $\mathbf{a}^{(c)} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^{(w)}$  nosi nazwę przyspieszenia Coriolisa, nie ma on odpowiednika w rozkładzie prędkości, po to, aby był on różny od zera musi występować równocześnie unoszenie z obrotem i ruch względny. Czytelnikowi znane są



Rys2. .3 Opis ruchu punktu względem ruchomej bazy

<sup>7</sup>Wygodnie jest czasem korzystać z przedstawienia  $\mathbf{a}^{(u)}$  w następującej postaci  $\mathbf{a}^{(u)} = \dot{\mathbf{v}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{\rho}$ , gdzie wektor  $\boldsymbol{\rho}$  ma to samo znaczenie, co na Rys. 2.2 i we wzorze (2.2.8), identyczność tego ostatniego wzoru z przytoczonym tu wyrażeniem nie powinna dziwić, ponieważ w gruncie rzeczy wyprowadzone poprzednio wzory na rozkład prędkości i przyspieszeń w ruchu bryły sztywnej (2.2.4) i (2.2.8) opisują szczególnie przypadek ruchu złożonego – taki, kiedy człony względne równe są zeru.

z pewnością prawdziwe i anegdotyczne przykłady działania sił bezwładności związanych z przyspieszeniem Coriolisa.

Jak już wspominaliśmy, przedmiotem naszych rozważań nie są złożone łańcuchy kinematyczne, ani też wymyślne mechanizmy krzywkowe, nie będziemy zatem rozwijać tu dalej problemu kinematyki ruchów złożonych brył sztywnych i ich układów. Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do odpowiednich podręczników i opracowań monograficznych w szczególności poświęconych rachunkowi krętników [7]. Pokażemy tu jedynie, dla kompletności wykładu, że dowolne pole prędkości bryły sztywnej daje się opisać w języku krętników, tj. sprowadzić przez odpowiedni dobór bieguna do ruchu śrubowego, tj. do obrotu wokół pewnej chwilowej osi i translacji w kierunku du niej równoległym. Inaczej mówiąc, przez odpowiedni dobór bieguna możemy osiągnąć taki opis, przy którym wektory  $\omega$  i  $\mathbf{v}_o$  są równoległe. Wektor  $\omega$  oczywiście od wyboru bieguna nie zależy<sup>8</sup>, mając zatem zadany pewien ruch chwilowy (rozkład prędkości bryły sztywnej) przy wyborze bieguna  $O$  o położeniu  $\mathbf{R}_o$ :

$$(2.2.21) \quad \mathbf{v}(\mathbf{y}) = \dot{\mathbf{R}}_o + \omega \times (\mathbf{y} - \mathbf{R}_o),$$

poszukujemy takiego nowego położenia  $\mathbf{R}_{o'}$  bieguna  $O'$ , aby zachodziła zależność:

$$(2.2.22) \quad \omega \times \dot{\mathbf{R}}_{o'} = 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że warunek ten spełnia wektor wyznaczony wzorem:

$$(2.2.23) \quad \mathbf{R}_{o'} = \mathbf{R}_o + \frac{\omega \times \dot{\mathbf{R}}_o}{\omega^2}.$$

Oczywiście warunek (2.2.22) spełniony jest dla wszystkich punktów prostej określonej równaniem:

$$(2.2.24) \quad \mathbf{R}(\alpha) = \mathbf{R}_{o'} + \alpha \omega,$$

prosta ta nosi nazwę chwilowej osi śrubowej.

<sup>8</sup>Na ogół w standardowych podręcznikach mechaniki teoretycznej faktu tego dowodzi się. Przy stosowanym tu podejściu, kiedy wyprowadzamy pojęcie prędkości kątowej z ruchu baz bez żadnego odniesienia do pól prędkości, jest on oczywisty.

<sup>9</sup>Mamy bowiem dla  $O'$ , tak samo, jak dla dowolnego innego punktu należącego do bryły (por. (2.2.21)):

$$\dot{\mathbf{R}}_{o'} = \dot{\mathbf{R}}_o + \omega \times (\mathbf{R}_{o'} - \mathbf{R}_o) = \dot{\mathbf{R}}_o + \frac{\omega \times (\omega \times \dot{\mathbf{R}}_o)}{\omega^2} = \frac{(\dot{\mathbf{R}}_o \cdot \omega)}{\omega^2} \omega.$$

### 2.3 Rozkład mas, pęd, moment pędu i energia kinetyczna bryły sztywnej

Materiał, który omówimy w tym rozdziale jest tylko luźno związany z podstawowym nurtem naszych rozważań, tym niemniej autor uznał za konieczne dla kompletności wykładu i ku przypomnieniu najważniejszych pojęć i twierdzeń, które znajdują zastosowanie w drugiej części niniejszego opracowania, poświęconej zależnościom konstytutywnym i dynamice, podać szkic ich wyprowadzenia. Czytelnik biegły w macierzowo – tensorowym opisie dynamiki bryły sztywnej może ten podrozdział pominąć lub odłożyć jego lekturę do dalszych rozdziałów.

Dokonując przejścia granicznego od układu punktów materialnych do ciała o ciągłym rozkładzie masy otrzymujemy w sposób naturalny dosyć oczywiste wyrażenia całkowite na masę  $m$ , momenty statyczne  $M_j$ , pęd  $\mathbf{P}$ , moment pędu (kręt)  $\mathbf{K}$  i energię kinetyczną  $E_k$ ,<sup>1</sup> dla oszczędności miejsca pominiemy tu trywialne przejścia graniczne od sum do całek, których to nie będziemy tu także oddzielnie specyfikować, zrobimy to w tych miejscach, (w tym i dalszych rozdziałach) gdzie będą po raz pierwszy zastosowane.

Aż do miejsca, w którym specjalnie zaznaczymy, że przystępujemy do rozważania bryły sztywnej, nasze dalsze rozważania odnosić się będą do dowolnego ciała materialnego.

Mamy zatem następujące wyrażenie określające pęd ciała materialnego, zajmującego obszar  $\Omega$  :

$$(2.3.1) \quad \mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV,$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość masy, a całkowanie następuje po całym obszarze  $\Omega$ .

Dla dowolnego punktu  $O$  o prędkości  $\mathbf{v}_o$  możemy napisać oczywistą równość:

$$(2.3.2) \quad \mathbf{P} = \mathbf{v}_o \int_{\Omega} \rho dV + \int_{\Omega} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_o) dV.$$

W przypadku, gdy punkt  $O$  pokrywa się ze środkiem masy  $C$  druga z całek po prawej stronie równa jest zeru, a ponieważ pierwsza z całek równa jest masie ciała, to możemy ostatecznie napisać:

$$(2.3.3) \quad \mathbf{P} = m \mathbf{v}_c,$$

czyli:

---

<sup>1</sup>Niektóre pojęcia, takie jak całkowita siła  $\mathbf{F}$ , moment sił  $\mathbf{M}$  czy też energia wewnętrzna wymagają oddzielnego rozważenia ze względu na obecność członów kontaktowych, osobliwych względem miary objętościowej (w przypadku sił – dla dowolnego modelu, w przypadku momentów i energii – dla niektórych modeli nieklasycznych).



Pęd ciała materialnego równy jest iloczynowi jego masy i prędkości środka masy<sup>2,3</sup>.

Z analogicznych rozważań dla momentu pędu:

$$(2.3.4) \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV$$

otrzymujemy łatwo<sup>4</sup>:

$$(2.3.5) \quad \mathbf{K} = m \mathbf{R}_c \times \mathbf{v}_c + \mathbf{K}^{(c)},$$

gdzie wektor  $\mathbf{K}^{(c)}$ , określony zależnością:

$$(2.3.6) \quad \mathbf{K}^{(c)} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{R}_c) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) dV$$

może być interpretowany jako wektor momentu pędu ciała względem jego środka masy.

<sup>2</sup>Środkiem masy ciała nazywamy punkt, którego położenie  $\mathbf{R}_c$  określone jest jako:  $\mathbf{R}_c = \frac{1}{m} \int_{\Omega} \rho \mathbf{x} dV$ ,

gdzie  $m = \int_{\Omega} \rho dV$  jest masą ciała. Środek masy jest jednocześnie środkiem ciężkości, czyli punktem, względem którego moment sił ciężkości, niezależnie od orientacji ciała, równy jest zeru, mamy bowiem:

$$\mathbf{M}_g = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{R}_c) \times (\rho \mathbf{g}) dV = \left[ \int_{\Omega} \rho \mathbf{x} dV - \mathbf{R}_c \int_{\Omega} \rho dV \right] \times \mathbf{g} = 0,$$

<sup>3</sup>Różniczkowanie po czasie całki określonej na obszarze materialnym od iloczynu dowolnej funkcji przez gęstość masy następuje według schematu  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dV = \int_{\Omega} \dot{f}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dV$ , wynika to z

lokalnego prawa zachowania masy  $\frac{d}{dt}(\rho dV) = \frac{d}{dt}(dm) = 0$ , zatem możemy napisać:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{x} dV - \mathbf{R}_c \int_{\Omega} \rho dV \right) = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) dV.$$

$$\begin{aligned} \text{<sup>4</sup>W rzeczy samej: } \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{v}_c) dV + \int_{\Omega} \rho[\mathbf{x} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c)] dV = \\ &= \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{x} dV \right) \times \mathbf{v}_c + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x} - \mathbf{R}_c) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) dV + \mathbf{R}_c \times \int_{\Omega} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) dV \end{aligned}$$

uwzględniając, że ostatnia z całek po prawej stronie równa jest zeru otrzymujemy natychmiast (2.3.5).

Do tego miejsca, jak to już wspominaliśmy, wszystkie wyprowadzone w tym podrozdziale zależności ważne są dla dowolnego ciała, w dalszych rozważaniach ograniczymy się do bryły sztywnej.

Obierzmy, jak zwykle, pewien biegun  $O$  o położeniu  $\mathbf{R}_o$ . Przez

$$(2.3.7) \quad \mathbf{K}_o = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{x} - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_o) dV$$

oznaczmy moment pędu bryły  $\Omega$  względem bieguna. Korzystając z wprowadzonych uprzednio oznaczeń i z wyrażenia (2.2.4) na prędkość punktów bryły sztywnej możemy napisać:

$$(2.3.8) \quad \mathbf{K}_o = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV = \left( \int_{\Omega} \rho (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dV \right) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}.$$

Tensor  $\mathbf{J}$  określony wzorem:

$$(2.3.9) \quad \mathbf{J} = \int_{\Omega} \rho (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dV$$

zwany jest tensorem momentów bezwładności względem osi przechodzących przez punkt  $O$ <sup>5</sup>. Jeżeli punkt  $O$  pokrywa się ze środkiem masy  $C$ , to tensor  $\mathbf{J}$  zwany jest tensorem momentów bezwładności względem osi centralnych. Jeżeli obierzemy pewien układ kartezjański  $\{x_i\}$  o początku w  $O$ , i bazie  $\{e_j\}$  to tradycyjnie obowiązuje następująca terminologia: składowe diagonalne tensora  $\mathbf{J} - J_{11}, J_{22}, J_{33}$  zadane wzorami:

$$(2.3.10) \quad J_{(ii)} = \int_{\Omega} \rho d_{(i)}^2 dV \quad (\text{bez sumowania!}),$$

gdzie przez  $d_{(i)}$  oznaczyliśmy odległość od  $i$ -tej osi układu nazywamy momentami bezwładności względem osi  $x_i$ . Składowe pozadiagonalne –  $J_{kl}$  ( $k \neq l$ ) określone za pomocą zależności:

$$(2.3.11) \quad J_{kl} = - \int_{\Omega} \rho x_k x_l dV \quad (k \neq l)$$

zwane są momentami dewiacji<sup>6</sup>

Ponieważ orientacja układu współrzędnych może być ustalona dowolnie, to dowolna prosta  $P$  (oś) przechodząca przez punkt  $O$  o kierunku zadany przez wektor

<sup>5</sup>Tensor  $\mathbf{J}$  częściej oznacza się symbolem  $\mathbf{I}$ , ponieważ jednak tym symbolem oznaczyliśmy już wcześniej tensor jednostkowy, pozostaniemy przy naszym oznaczeniu.

<sup>6</sup>Niektórzy autorzy przez moment dewiacji rozumieją tę wartość wziętą z przeciwnym znakiem:  $-J_{kl}$

jednostkowy  $\tau$  może być osią układu kartezjańskiego, zatem sensowne jest nazywać wielkość określoną wzorem

$$(2.3.12) \quad J_{(P)} = \tau \mathbf{J} \tau,^7$$

momentem bezwładności względem osi  $P$ . Interpretacja dana wzorem (2.3.10) oczywiście się przy tym nie zmienia.

Tensor  $\mathbf{J}$ , jako symetryczny ma trzy wzajemnie ortogonalne kierunki własne, jeżeli zatem przyjmiemy taki układ współrzędnych, którego osie skierowane są w kierunku wektorów własnych, to reprezentacja tensora przybierze postać diagonalną, czyli wszystkie momenty dewiacji przybiorą wartość zero. Takie osie nazywają osiami głównymi (tensora) bezwładności. Jeżeli ponadto przechodzą one przez środek masy, to mówimy o głównych osiach centralnych, jak za chwilę się przekonamy w takich osiach tensor bezwładności nie tylko przybiera najprostszą (diagonalną) postać, ale również jego składowe (a dokładniej jego ślad) osiąga minimum. W podręcznikach mechaniki teoretycznej w dość zawity sposób wyprowadza się wzory na przekształcenia momentów bezwładności i momentów dewiacji przy obrocie osi. Stosując od początku do tego zagadnienia formalizm tensorowy (i nie wykraczając poza operacje tensorowe) mamy tu ten komfort, że nic nie musimy udowadniać – stwierdzamy po prostu, że składowe tensora  $\mathbf{J}$  transformują się jak składowe każdego innego tensora o walencji dwa<sup>8</sup>

Omówienia wymaga natomiast sprawa przesunięcia równoległego osi (zmiany bieguna), prowadząca do zależności znanej zapewne Czytelnikowi pod nazwą wzoru Steinera, z której natychmiast wynika minimalność momentów względem osi centralnych. Wybierzmy zatem dowolną oś i przyjmijmy taki układ współrzędnych  $\{z_i\}$ , aby nasza wybrana oś pokrywała się z osią  $z_3$ . Oznaczmy przez  $z_{(e)1}$  i  $z_{(e)2}$  współrzędne środka masy, możemy wtedy napisać:

<sup>7</sup>Dla przejrzystości zapisu w przypadku podwójnego nasunięcia wektorów na tensory, jak to już zaznaczaliśmy, będziemy łamać zasadę pisania kropek przy iloczynach skalarnych wektorów pisząc np.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  zamiast  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b})$ .

<sup>8</sup>Mogą tu powstać pewne wątpliwości w związku ze stosowaniem przy wyprowadzeniach wzorów operacji mnożenia wektorowego, która może wykreować obiekty zwane pseudotensoremami i pseudowektorami – zmieniające znak przy odbiciach (co zresztą nie ma dla nas tu żadnego znaczenia). W naszym jednak przypadku tak nie jest, ponieważ operacja mnożenia wektorowego zastosowana została parzystą ilość razy (dwa).

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\Omega} \rho (z_1^2 + z_2^2) dV = \int_{\Omega} \rho \left\{ \left[ (z_1 - z_{(c)1}) + z_{(c)1} \right]^2 + \left[ (z_2 - z_{(c)2}) + z_{(c)2} \right]^2 \right\} dV = \\
 (2.3.13) \quad &= \int_{\Omega} \rho \left\{ (z_1 - z_{(c)1})^2 + (z_2 - z_{(c)2})^2 \right\} dV + z_{(c)1} \int_{\Omega} \rho (z_1 - z_{(c)1}) dV + \\
 &+ z_{(c)2} \int_{\Omega} \rho (z_2 - z_{(c)2}) dV + (z_{(c)1}^2 + z_{(c)2}^2) \int_{\Omega} \rho dV.
 \end{aligned}$$

Pierwszy człon jest niewątpliwie momentem względem osi centralnej  $J_{(c)}$ , całki występujące w drugim i trzecim członie opisują współrzędne wektora położenia środka masy w układzie o początku w środku masy, są one zatem równe zeru i wreszcie ostatni człon jest iloczynem kwadratu odległości  $d$  pomiędzy osiami i masą ciała  $m$ , a zatem:

$$(2.3.14) \quad J = J_{(c)} + md^2.$$

Minimalność momentów względem osi centralnych wynika trywialnie z (2.3.14).

• Zarówno definicja momentów bezwładności, jak i twierdzenie Steinera pozostają oczywiście słuszne dla dowolnego ciała, nie koniecznie bryły sztywnej, dla ciała odkształcalnego nie jest prawdziwy jedynie wzór (2.3.8).

Wracając do bryły sztywnej, możemy na mocy (2.3.8) przepisać zależność (2.3.5) w prostej postaci:

$$(2.3.15) \quad \mathbf{K} = m \mathbf{R}_c \times \mathbf{v}_c + \mathbf{J}_{(c)} \boldsymbol{\omega}.$$

Wyznamy jeszcze energię kinetyczną bryły sztywnej:

$$(2.3.16) \quad E_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV.$$

Skorzystamy z następującej równości:

<sup>9</sup>Nietrudno zauważyć, że nawet w przypadku ruchu bryły sztywnej wokół ustalonej osi ze stałą prędkością kątową, ani pęd ani moment pędu nie muszą być stałe. Stały pęd (zerowy) osiągamy umieszczając środek masy na osi obrotu, natomiast, aby osiągnąć stałość momentu pędu musimy ustalić iloczyn  $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ , (tensor  $\mathbf{J}$  jest co prawda stały dla obserwatora związanego z bryłą sztywną, ale nie jest to na ogół prawdą dla obserwatora związanego z inercjalnym układem laboratoryjnym) jak łatwo sprawdzić iloczyn ten będzie stały jeżeli oś obrotu pokrywa się z i-tą osią główną, mamy wtedy:

$\mathbf{K} = J_i \boldsymbol{\omega}$  gdzie przez  $J_i$  oznacza się tradycyjnie moment bezwładności względem  $i$ -tej osi głównej. Kolejne usuwanie tych dwóch przyczyn zmienności podstawowych charakterystyk ruchu obrotowego bryły sztywnej nazywamy odpowiednio statycznym i dynamicznym wyważaniem ciała wirującego wokół nieruchomej osi. Brak wyważenia powoduje powstawanie w łożyskach sił reakcji, koniecznych, aby mogły zachodzić zmiany pędu i momentu pędu wirującej masy.

$$(2.3.17) \quad (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega},^{10}$$

biorąc zatem dla dowolnego bieguna  $O$ :

$$(2.3.18) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

otrzymujemy:

$$(2.3.19) \quad E_k = \frac{1}{2} v_o^2 \int_{\Omega} \rho dV + \mathbf{v}_o \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \times \int_{\Omega} \rho \mathbf{r} dV \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \int_{\Omega} \rho (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dV \right) \boldsymbol{\omega}.$$

Zanim napiszemy ostateczną postać wyrażenia na energię, przekształcimy jeszcze środkowy człon prawej strony ostatniej zależności. Wyrażenie podcałkowe nie jest niczym innym, jak iloczynem masy i wektora położenia środka masy względem bieguna

$$(2.3.20) \quad \int_{\Omega} \rho \mathbf{r} dV = m(\mathbf{R}_c - \mathbf{R}_o).$$

Ponadto

$$(2.3.21) \quad \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_c - \mathbf{R}_o) = \mathbf{v}_c - \mathbf{v}_o.$$

Możemy zatem ostatecznie napisać:

$$(2.3.22) \quad E_k = \frac{1}{2} m v_o^2 + m \mathbf{v}_o \cdot (\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_o) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega},$$

Wzór (2.3.22) znany jest jako twierdzenie Königa<sup>11</sup>

<sup>10</sup>W rzeczy samej, zapisując przez składowe mamy:

$$\omega_i \varepsilon_{ijk} r_j \omega_p \varepsilon_{pqk} r_q = \omega_i \omega_p (\delta_{ip} \delta_{jk} - \delta_{iq} \delta_{jp}) r_j r_q = \omega_i \omega_p (r_j r_j \delta_{ip} - r_i r_p), \text{ czyli (2.3.17).}$$

<sup>11</sup>W podręcznikach nie operujących zapisem tensorowym wzór ten można spotkać w innej postaci:

$E_k = \frac{1}{2} m v_o^2 + m \mathbf{v}_o \cdot (\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_o) + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega}^2$ , gdzie przez  $J$  rozumiany jest moment bezwładności względem osi przechodzącej przez bieżący równoległe do wektora  $\boldsymbol{\omega}$ . Czasami podawana jest także następująca postać tego twierdzenia  $E_k = \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega}^2$ , gdzie  $J$  jest oczywiście momentem względem osi centralnej. Przy takim sformułowaniu gubi się bardzo ważny przypadek szczególny – nieruchomego bieguna (różnego od środka masy), kiedy mamy po prostu  $E_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}$ .

## 2.4. Kinematyka w przestrzeni orientacji

W podrozdziale 1.5 rozpatrywaliśmy funkcje określone na przestrzeni orientacji, jako przykład rozpatrywaliśmy funkcję gęstości, która scałkowana po dowolnie wybranym podobszarze  $\Sigma$  przestrzeni orientacji daje w wyniku liczbę tych elementów (z pewnego zbioru zorientowanych), których orientacje należą do  $\Sigma$ . Wydaje się, że z punktu widzenia interpretacji fizycznej w zastosowaniu do mechaniki ośrodków ciągłych, a w szczególności materiałów polikrystalicznych bardziej interesująca będzie masowa gęstość orientacji (funkcja rozkładu orientacji) zdefiniowana analogicznie, z tym że słowo „liczbę” należy zastąpić słowem „masę”, dla łatwiejszego operowania funkcję tę unormujemy i oznaczymy jako  $c(\mathbf{Q})$ :

$$(2.4.1) \quad \frac{m(\Sigma)}{m} = \int_{\Sigma} c(\mathbf{Q}) dV,$$

gdzie:

$\Sigma$  – dowolny podobszar przestrzeni orientacji;

$m(\Sigma)$  – masa elementów, których orientacje należą do obszaru  $\Sigma$ ;

$m$  – masa wszystkich elementów zbioru;<sup>1</sup>

$dV = \sqrt{32 \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi)} d\varphi d\theta d\psi$  – element objętości.

Pragniemy tu raz jeszcze podkreślić, że zależność (2.4.1) nie jest wzorem służącym do obliczania wartości  $m(\Sigma)$ , o tych zakładamy, że są dane, jest to definicja funkcji  $c(\mathbf{Q})$ , której istnienie, przy pewnych rozumnych założeniach, zapewniają odpowiednie twierdzenia teorii miary.

Przedmiotem naszych dalszych rozważań będzie „prawo bilansu” funkcji  $c(\mathbf{Q})$ , przy założeniu, że liczba elementów zbioru nie zmienia się, natomiast orientacje poszczególnych elementów, a zatem i wartości funkcji rozkładu orientacji  $c(\mathbf{Q})$  mogą zależeć od czasu. Zanim przystąpimy do dalszych rozważań musimy tu przedyskutować pewien problem, który zazwyczaj umyka z pola widzenia w klasycznej mechanice ośrodków ciągłych.

Mechanika ośrodka ciągłego wprowadza pojęcie przemieszczenia cząstki materialnej przy założeniu, że (za wyjątkiem być może skończonej liczby powierzchni osobliwych) zostaje zachowana topologia ośrodka – otoczenie przechodzi w trakcie

---

<sup>1</sup>Nie definiujemy czym jest tu rozważany zbiór, może to być na przykład zbiór domen w kryształach ferromagnetyka, ziaren krystalicznych w pewnym „małym” otoczeniu cząstki materialnej, czy też wręcz pszczoł w pewnym roju.

ruchu na otoczenie <sup>2)</sup>. Pomimo tego, że z góry wiadomo, iż założenie to nie jest ściśle (np. jest ono sprzeczne z opisem dyfuzyjnego transportu masy), nie wywołuje ono sprzeczności. Skale czasowe zjawisk uśrednionego przepływu masy i procesów dyfuzyjnych są na ogół tak różne, że zjawiska te dadzą się efektywnie rozseparować. Pewne trudności mogą powstać przy opisie dynamiki gazów rozrzedzonych przy opływach satelitów na granicach jonosfery, czy też przepływach w układach próżniowych. Do tego celu służą jednak specjalne modele, które nie mają wiele wspólnego z klasycznym podejściem kontynuualnym.

O ile w przypadku pól przemieszczeń i prędkości cząstek materialnych w przestrzeni fizycznej (modelowanej przez  $E^3$ ) przypisanie każdemu punktowi obszaru zajmowanego przez ciało określonego wektora prędkości jest umotywowane, o tyle nie ma ważkich przesłanek, aby przypuszczać, że jeżeli w pewnej chwili orientacje dwóch elementów są sobie bliskie, to tak będzie nadal w przeciągu całego interesującego nas przedziału czasowego. Innymi słowy: założenie o tym, że sensowne i owocne koncepcyjnie jest przypisanie jednakowo zorientowanym elementom jednakowej (średniej? <sup>3)</sup> prędkości zmiany orientacji wymaga, jak się wydaje każdorazowego uzasadnienia w odniesieniu do konkretnego problemu.

Aby jednak uwzględnić możliwość różnych prędkości zmiany orientacji w jednym punkcie przestrzeni orientacji, trzeba by przypisać każdej orientacji nie prędkość, a funkcję rozkładu prędkości. Autor niniejszego opracowania nie czuje się intelektualnie przygotowany do operowania na tym piętrze uogólnienia, tym bardziej, że w rozważaniach praktycznych mamy na ogół do czynienia ze zbiorami skończonymi o znacznej mniejszej mocy niż np. zbiory cząstek w gazach rozrzedzonych, gdzie, o ile autorowi wiadomo, nie stosuje się (przynajmniej na szerszą skalę) takiego wyrafinowanego podejścia.

Przez prędkość zmiany orientacji elementu zorientowanego rozumieć będziemy wektor styczny do trajektorii  $\mathbf{Q}(t)$  wykreślonej w rozmiarowości przez sekwencję orientacji, elementu w kolejnych chwilach czasowych (por. (2.1.3) na str 38):

$$(2.4.2) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{d\mathbf{Q}}{d\xi^t} \xi^t = \mathbf{w}\mathbf{Q},$$

Założymy zatem, że każdej wartości  $\mathbf{Q}$  i każdej chwili  $t$  przypisaliśmy pewien tensor z przestrzeni stycznej

$$(2.4.3) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, t).$$

Zdefiniowaliśmy tym samym (zależne od czasu) pole wektorów stycznych na rozmiarowości. Czy na tak zdefiniowane pole prędkości składają się wektory prędkości

<sup>2)</sup>Zbliżone ciągi cząstek materialnych nie tracą tej własności w trakcie ruchu ciała, krzywe przechodzą na krzywe, powierzchnie na powierzchnie, tak że sensownie jest operowanie pojęciami włókna materialnego i powierzchni materialnej. Dokładniej – patrz w następnym rozdziale.

<sup>3)</sup>Sprawą uśredniania rozkładów tensorów obrotu na rozmiarowości zajmiemy się dalej.

zmiany orientacji realnie istniejących elementów zorientowanych, czy też należy wartości przypisane punktom rozmaitości rozumieć jako wyniki pewnych uśrednień, zależec będzie od konkretnej sytuacji fizycznej, którą modelujemy. Jeżeli pole  $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, t)$  spełnia określone warunki regularności (tak zwane warunki Liepshtz'a) to można skonstruować takie pole  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\Phi, \Theta, \Psi, t)$ , że

$$(2.4.4) \quad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(\Phi, \Theta, \Psi, t),$$

gdzie  $\Phi = \varphi(t_0)$ ;  $\Theta = \theta(t_0)$ ;  $\Psi = \psi(t_0)$  są „materialnymi” współrzędnymi (etykietami) numerującymi elementy zorientowane np według ich orientacji w chwili  $t_0$ . Nie wiemy oczywiście, czy ponumerowaliśmy rzeczywiste fizycznie identyfikowalne elementy, czy też fikcyjne (uśrednione?) wyznaczone przez cofanie się po trajektoriach.

Sytuacja jest tu analogiczna do spotykanej w teorii mieszanin, gdzie wprowadzamy oprócz pól prędkości poszczególnych składników średnie „masowe” pole prędkości i możemy znaleźć jego trajektorie, i psedomaterialny (pseudolagrangeowski) układ współrzędnych.<sup>4</sup> Do zagadnień tych wrócimy przy omawianiu lokalnych i konwekcyjnych pochodnych czasowych w przestrzeni orientacji.

Rozważymy teraz prawo bilansu masy w przestrzeni orientacji. Obierzmy w tym celu powierzchnię  $S$  w przestrzeni orientacji zadaną równaniem:

$$(2.4.5) \quad F(\mathbf{Q}) = 0.$$

Niech dla pewnego elementu zorientowanego  $\mathbf{P}$  o współrzędnych materialnych w rozmaitości orientacji  $(\Phi_0, \Theta_0, \Psi_0)$  i zmiennej w czasie orientacji  $\mathbf{O}(\mathbf{P}, t) = \mathbf{O}(\Phi_0, \Theta_0, \Psi_0, t)$  zachodzi w pewnej chwili  $t_0$  nierówność:

$$(2.4.6) \quad F(\mathbf{O}(\mathbf{P}, t_0)) < 0.$$

Oznaczmy kropką prędkość zmiany wartości funkcji  $F$  obliczanej od aktualnej tesorowej wartości orientacji  $\mathbf{O}$  elementu  $\mathbf{P}$ .

$$(2.4.7) \quad \dot{F} = \frac{dF}{d\mathbf{O}} \dot{\mathbf{O}}.$$

<sup>4</sup>Występuje tu jeszcze jedna dodatkowa komplikacja, mianowicie istnieją ważne powody, aby żądać w przypadku ruchu ośrodka ciągłego w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej dodatniości jacobianu przejścia od współrzędnych materialnych do bierzących położeń cząstek. Czy, i dlaczego takie żądanie jest fizycznie uzasadnione w przestrzeni orientacji, autor nie potrafi odpowiedzieć.



Trajektoria  $\mathbf{O}(\mathbf{P}, t)$  elementu  $\mathbf{P}$  w przestrzeni orientacji przetnie w przedziale czasowym  $(t_0, t_0 + h)$  powierzchnię  $S$  wtedy i tylko wtedy gdy wartość średnia pochodnej  $\dot{F}^*$  w przedziale czasowym  $(t_0, t_0 + h)$  spełnia następującą nierówność:

$$(2.4.8) \quad \dot{F}^* h \geq -F(\mathbf{O}(\mathbf{P}, t_0)).$$

Oznaczając przez  $d$  odległość orientacji  $\mathbf{O}(\mathbf{P}, t_0)$  od powierzchni  $S$  i korzystając z

definicji gradientu funkcji  $\nabla F = \frac{dF}{d\mathbf{Q}}$  możemy napisać:

$$(2.4.9) \quad h \nabla F \cdot \dot{\mathbf{O}} \geq |\nabla F(\mathbf{O}(\mathbf{P}, t_0 + h))| d + \mathcal{O}(d)$$

Oznaczając przez

$$(2.4.10) \quad \mathbf{N} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$

jednostkowy wektor normalny do powierzchni  $S$  w rozmaitości <sup>5</sup>, oraz uwzględniając, że wartość średnia pochodnej w przedziale  $(t_0, t_0 + h)$  różni się od wartości w dowolnie obranym punkcie tego przedziału co najwyżej o człony rzędu  $h$  możemy sformułować następujący warunek:

w przedziale czasowym o rozciągłości  $h$  powierzchnia  $S$  zostanie przekroczona przez te elementy, których orientacje mieszczą się w warstwie o grubości  $d$  przyległej do powierzchni  $S$ . Wartość  $d$  (z dokładnością do członów wyższego rzędu względem  $h$  i/lub  $d$ ) zadana jest wzorem:

$$(2.4.11) \quad \frac{d}{h} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{O}}.$$

Masa (unormowana) elementów zawartych w warstwie o grubości  $d$  na jednostkę powierzchni  $S$  w otoczeniu punktu  $\mathbf{Q} \in S$  wynosi  $c(\mathbf{Q})d$ , masa ta w czasie  $h$  przekroczy powierzchnię  $S$ , zatem przy założeniu, że elementy zorientowane nie zmieniają swojej masy, a ich liczba w dowolnym obszarze  $\Omega$  zmienia się tylko wskutek transportu przez jego granicę  $\partial\Omega$  możemy sformułować, obowiązujące dla dowolnego obszaru przestrzeni orientacji, całkowite prawo bilansu:

<sup>5</sup>Wektory styczne do powierzchni  $S$  w dowolnie obranym punkcie tworzą dwuwymiarową podprzestrzeń trójwymiarowej przestrzeni, stycznej w tym punkcie do rozmaitości, wektorem normalnym do powierzchni  $S$  będziemy nazywać taki wektor  $\mathbf{N}$  z przestrzeni stycznej do rozmaitości, który jest normalny do wszystkich wektorów stycznych do powierzchni  $S$ .

$$(2.4.12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m(\Omega, t)}{m} \right) = - \int_{\Omega} c \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Opierając się na definicji unormowanej gęstości (2.4.1) oraz korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrograńskiego<sup>6</sup> przepisujemy wyrażenie (2.4.12) w postaci całki objętościowej

$$(2.4.13) \quad \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} c(\mathbf{Q}, t) + \text{Div} [c(\mathbf{Q}, t) \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, t)] \right\} dV = 0.$$

Ponieważ równość (2.4.13) obowiązywać ma dla dowolnie wybranego obszaru  $\Omega$  w rozmaitości, to dla każdego  $\mathbf{Q}$  musi zachodzić następujące lokalne prawo bilansu masy<sup>7</sup>:

$$(2.4.14) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \text{Grad} c \cdot \dot{\mathbf{Q}} + c \text{Div} \dot{\mathbf{Q}} = 0,$$

gdzie operatory **Grad** i **Div** rozumiemy w sensie różniczkowania pól na rozmaitości.

Czytelnik z pewnością zauważył pełną analogię otrzymanego przez nas wyniku z wyrażeniem na lokalny bilans masy w przestrzeni fizycznej, jednak w tej ostatniej bilans możemy napisać także i w odmierzonej postaci:

$$(2.4.15) \quad \dot{\rho} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0,$$

gdzie kropką oznaczamy pochodną materialną, w ustalonej cząstce  $\mathbf{X}$  (tj. przy ustalonej wartości współrzędnych lagranżowskich)

$$(2.4.16) \quad \dot{f} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}}.^8$$

Możemy oczywiście poprawnie z formalnego punktu widzenia napisać podobną definicję dla funkcji określonych na przestrzeni orientacji:

<sup>6</sup>O stosowalności wzoru Greena-Gaussa-Ostrograńskiego dla rozmaitości por. [20], [24].

<sup>7</sup>Jeżeli funkcja ciągła jest w pewnym punkcie różna od zera, np. dodatnia, to istnieje pewne skończone otoczenie tego punktu, w którym również obowiązuje ta nierówność, zatem istnieje taki obszar po którym całka od badanej funkcji jest różna od zera, jeżeli więc takiego obszaru nie ma, to funkcja musi być wszędzie tożsamościowo równa zeru.

<sup>8</sup>„Dowód” tego wzoru jest trywialny

$$\frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

$$(2.4.17) \quad \hat{f} = \frac{\partial f(\mathbf{P}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\mathbf{Q}, t)}{\partial t} + \text{Grad} f \cdot \dot{\mathbf{Q}},^9$$

gdzie  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{P}, t)$  jest orientacją elementu  $P$  w chwili  $t$ .

Pytanie o sensowność podobnej definicji w przestrzeni orientacji postawiliśmy *de facto* kilka stron wcześniej konstruując (z lepszym lub gorszym uzasadnieniem) lagranżowski układ współrzędnych, logiczną konsekwencją takiego kroku jest interpretacja pojęcia pochodnej konwekcyjnej względem pola prędkości  $\dot{\mathbf{Q}}$  jako pochodnej materialnej. Taki, zresztą, jest jej sens jeżeli mamy do czynienia ze stałym polem  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = \text{const}$  (w sensie stałości w  $E^3 \otimes E^3$ ), czyli z obrotem „sztywnym”. Zachodzi wtedy np. następująca równość

$$(2.4.18) \quad \hat{c} = -c \text{Div} \dot{\mathbf{Q}} = 0 \quad (\text{w ruchu sztywnym}).$$

Pierwszy znak równości jest oczywiście prawdziwy w dowolnym ruchu, natomiast drugi wynika stąd, że w ruchu sztywnym dywergencja pola  $\mathbf{w}$  (w sensie różniczkowania w rozciągłości) równa jest zeru<sup>10</sup>.

Wyrażenie (2.4.17) podaje receptę na przejście od pochodnej lokalnej do pochodnej konwekcyjnej dla funkcji skalarnych. Formalnie rzecz biorąc, można podobną definicję rozszerzyć na dowolne funkcje, przyporządkowujące elementom zorientowanym  $\mathbf{P}$  obiekty z różnych przestrzeni, nie wydaje się jednak, aby tak zdefiniowane obiekty były przydatne w rozważaniach mechanicznych, naturalniejsza wydaje się inna droga uogólnienia.

Ograniczmy się do rozważań nad zależnymi od czasu funkcjami o wartościach tensorowych z  $E^3 \otimes E^3 \otimes \dots \otimes E^3$ . Jeżeli stanęliśmy już na gruncie rozróżnialności trajektorii elementów zorientowanych, to np. pochodną konwekcyjną temperatury w przestrzeni orientacji możemy interpretować jako prędkość zmiany temperatury mierzonej przez obserwatora obracającego się w czasie tak samo jak wybrany element

<sup>9</sup>Aby zachować konsystentność oznaczeń, powinniśmy byli oznaczać prędkość obrotu raczej przez  $\dot{\mathbf{Q}}$ , niż przez  $\dot{\mathbf{Q}}$ , ale ze względu na tradycję pozostaniemy przy dotychczasowym oznaczeniu.

<sup>10</sup>Aby otrzymać ten wniosek zbadamy pochodne kowariantne składowych kontrawariantnych  $w^k$  tensora  $\mathbf{w}$  w bazie przestrzeni stycznej. Jeżeli tensor  $\mathbf{w}$  jest stały, to jego pochodne cząstkowe znikają,

a zatem:  $\frac{\partial w^k}{\partial \xi^L} \mathbf{G}_k = -w^k \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \xi^L}$ . Mnożąc obie strony równości przez  $\mathbf{G}^l$  otrzymujemy:

$$\frac{\partial w^k}{\partial \xi^L} \delta_k^l = -w^k \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial \xi^L} \mathbf{G}^l \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial w^l}{\partial \xi^L} = -w^k \Gamma_{kl}^l, \quad \text{a więc: } w_{,L}^l = \frac{\partial w^l}{\partial \xi^L} + w^k \Gamma_{kl}^l = 0. \quad \text{skąd}$$

oczywiście  $\text{Div} \mathbf{w} = w^l_{,l} = 0$ .

$\mathbf{P}^{11}$ . O wiele naturalniejszym założeniem niż wyposażanie obracającego się obserwatora w termometr jest przypisanie mu obracającego się wraz z nim reperu (dokładniej reperu i „teodolitu”) przy pomocy którego będzie on oceniał orientację różnorodnych przypisanych elementowi zorientowanemu  $\mathbf{P}$  obiektów.

W podrozdziale 2.2 na str 43 (przypis 4) powołaliśmy do życia prawie mimochodem pojęcie pochodnej współobrotowej, zastosowanie tego pojęcia do naszych obecnych rozważań wydaje się logiczne: przez konwekcyjną pochodną współobrotową pola tensorowego określonego na przestrzeni orientacji będziemy rozumieć taką prędkość zmiany tej wielkości jaką widzi obracający się wraz z elementem  $\mathbf{P}$  obserwator (który „nie wie” o tym że się obraca, „nie widzi” reszty świata poza obiektami przypisanymi elementowi  $\mathbf{P}$ ).

$$(2.4.19) \quad \overline{A_{j \rightarrow q}}(\dot{\varepsilon}_i \otimes \dots \otimes \varepsilon_q) = \hat{A}_{i \rightarrow q}(\varepsilon_i \otimes \dots \otimes \varepsilon_q),$$

Gdzie  $\varepsilon_k$  są wektorami bazy obracającej się wraz z obserwatorem. Aby definicję tę uwolnić od wyboru bazy napiszemy

$$(2.4.20) \quad \hat{\mathbf{A}} = \hat{A}_{i \rightarrow q}(\varepsilon_i \otimes \dots \otimes \varepsilon_q) + A_{i \rightarrow q}(\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_q) + \dots + A_{i \rightarrow q}(\mathbf{Q}\mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}\mathbf{e}_q),$$

czyli

$$(2.4.21) \quad \hat{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + A_{i \rightarrow q}(\mathbf{w}\varepsilon_i \otimes \dots \otimes \varepsilon_q) + \dots + A_{i \rightarrow q}(\varepsilon_i \otimes \dots \otimes \mathbf{w}\varepsilon_q),$$

skąd ostatecznie

$$(2.4.22) \quad \dot{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} - \sum_{i=1}^n \mathbf{w}^{(i)} \circ \mathbf{A}_i,$$

gdzie przez działanie  $\mathbf{w}^{(i)} \circ \mathbf{A}$  rozumiemy nasunięcie tensora  $\mathbf{w}$  po drugim wskaźniku na tensor  $\mathbf{A}$  po  $i$ -tym wskaźniku.

Na zakończenie tego podrozdziału, być może, warto, zabiegając naprzód, powiedzieć, że nawet jeżeli rozważane przez nas elementy zorientowane powiązane są w jakiś sposób z ośrodkiem ciągłym, to w żaden sposób, przynajmniej na tym etapie rozważań, nie możemy stwierdzić, czy i jak rozpatrywany tu przez nas tensor obrotu  $\mathbf{w}$  jest związany z polem prędkości cząstek materialnych ośrodka (choć np. w ruchu sztywnym mamy podstawy, aby identyfikować go z gradientem prędkości).

<sup>11</sup>Zakładamy oczywiście że elementy tak samo zorientowane, w tym i sam obserwator, mają jednakową temperaturę, jeżeli Czytelnikowi założenie to, (podobnie jak autorowi), wydaje się nierealistyczne, to możemy się umówić, że mierzona jest temperatura wszystkich elementów z pewnego otoczenia obserwatora w przestrzeni orientacji i w jakiś sposób uśredniana.

### 3. Kinematyka deformacji

#### 3.1 Odształcenia i obroty

Rozważając ośrodek ciągly mówimy potocznie, że zajmuje on pewien skończony lub nieskończony obszar  $\Omega$  w przestrzeni  $E^3$ <sup>1</sup>. Nie wdając się w rozważania topologiczne i szczegółowe rozważania nad klasami dopuszczalnych odwzorowań możemy to stwierdzenie rozumieć tak, że w każdej chwili każdemu punktowi obszaru  $\Omega$  przyporządkowana jest pewna cząstka materialna<sup>2</sup> rozumiemy przy tym, że różnym punktom przestrzeni przyporządkowane są różne cząstki materialne i że ciało nie zawiera innych „ukrytych” cząstek materialnych. Zbiory cząstek materialnych przyporządkowanych w pewnej ustalonej chwili krzywym i powierzchniom w przestrzeni  $E^3$  nazywać będziemy odpowiednio włóknami materialnymi i powierzchniami materialnymi. Jak to już wspominaliśmy w poprzednim rozdziale, mechanika ośrodków ciągłych zajmuje się takimi ruchami ośrodka, przy których włókna materialne zostają zachowane. Inaczej mówiąc, w każdej konfiguracji każde włókno materialne przypisane jest, z zachowaniem uporządkowania<sup>3</sup> cząstek, pewnej krzywej, (lub przynajmniej skończonej liczbie łuków – w przypadku dezintegracji ośrodka). O krzywych tych, jeżeli nie zostanie specjalnie zastrzeżone, że jest inaczej, będziemy zakładać, że są one dostatecznie gładkie, aby wykonalne były operacje różniczkowe, które będziemy dalej rozważać<sup>4</sup>.

Oierzmy konfigurację ciała w pewnej chwili  $t_0$  za konfigurację odniesienia, a wszystkie włókna materialne sparujemy przez parametr naturalny. Niechaj zatem w konfiguracji odniesienia włókno materialne zadane będzie przez pewną funkcję wektorową (wektor położenia) parametru  $S = s$  gdzie  $s$  jest długością łuku wzdłuż krzywej od pewnej dowolnej, lecz ustalonej cząstki  $S_0$  do cząstki oznaczonej wartością parametru materialnego  $S$ .

$$(3.1.1) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(S).$$

Podwójne numerowanie cząstek nie jest tu wywołane chęcią komplikowania rzeczy prostych, rzecz w tym, że przy odształcaniu ciała odległości wzdłuż krzywej pomiędzy cząstkami materialnymi nie zostają zachowane i właśnie dla opisu tego faktu

<sup>1</sup>Rozumiemy, że naszym „prazołożeniem” jest to, że przestrzeń  $E^3$  dobrze modeluje własności geometryczne otaczającej nas przestrzeni fizycznej.

<sup>2</sup>Pojęcie cząstki materialnej, stanowiące odpowiednik punktu geometrycznego potraktujemy jako pierwotne, odpowiedniejszym terminem był by tu „punkt materialny”, ale ten termin został już wcześniej zarezerwowany dla masy skupionej.

<sup>3</sup>Darujemy sobie i Czytelnikom uściślenie tego pojęcia, mając absolutną pewność, że nawet ci spośród nich, którzy je pojmują jedynie intuicyjnie, rozumieją je właściwie.

<sup>4</sup>Założenie to w istocie rzeczy wydziela pewną klasę gładkości odwzorowań (deformacji) ciała do której ograniczmy nasze rozważania.

musimy je jakoś rozróżnić (i utożsamiać). „Zaetykietujemy” je więc, (czy, jak być może woli Czytelnik, – ponumerujemy) poprzez przypisanie im na stałe wartości parametru  $S$ .

Niechaj więc ruch włókna materialnego opisany będzie przy pomocy funkcji

$$(3.1.2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(S, t).$$

Ze względów tradycyjnych zmieniliśmy tu oznaczenie wektora położenia z dużej litery na małą, chociaż chodzi w gruncie rzeczy o tę samą funkcję:  $\mathbf{R}(S) = \mathbf{r}(S, t_0)$ . Odległość  $s$  cząstki  $S$  wzdłuż włókna od cząstki  $S_0$  zmienia się w czasie i może być opisana przez funkcję

$$(3.1.3) \quad s = s(S, t).$$

Równanie (3.1.2) opisuje pewną krzywą w  $E^3$ , ta sama krzywa może być oczywiście opisana również i w innej parametryzacji np. naturalnej:

$$(3.1.4) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s(S, t)).$$

Zgodnie z geometryczną definicją długości łuku, oraz definicją stycznej, jako granicy siecznych, jest niemal oczywiste, że wektor

$$(3.1.5) \quad \mathbf{A} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dS} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}$$

jest jednostkowym wektorem stycznym do włókna materialnego w konfiguracji odniesienia. Również wektorem jednostkowym, stycznym do włókna materialnego w ustalonej konfiguracji bieżącej jest wektor

$$(3.1.6) \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}; \quad \left( \boldsymbol{\tau} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s} \right|_{t=t_0} \right)$$

Nie jest natomiast wektorem jednostkowym, chociaż jest również wektorem stycznym wektor

$$(3.1.7) \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}(S, t)}{\partial S} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{\partial s(S, t)}{\partial S}.$$

Zauważmy, że z punktu widzenia rozciągnięcia włókna,  $F$  wyrażającego się stosunkiem długości wektorów  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{A}$  w ustalonej cząstce,

<sup>5</sup>Purystycznie podchodząc do sprawy, to raczej w tym miejscu należałoby zmienić literę na oznaczenie funkcji, nie chcemy jednak mnożyć bytów bez istotnej potrzeby.

$$(3.1.8) \quad F \equiv \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{A}|} = \frac{\partial s(S, t)}{\partial S}$$

jest absolutnie bez znaczenia jak przebiegał w czasie proces odształcania<sup>6</sup>. Z tego punktu widzenia możemy traktować czas jako parametr numerujący sekwencję stanów odształcenia, z których interesuje nas właściwie jedynie konfiguracja aktualna oraz wyjściowa (konfiguracja odniesienia). Dla podkreślenia tego faktu piszemy zazwyczaj

$$(3.1.7) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{r}(S)}{dS} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \frac{ds(S)}{dS}$$

oraz

$$(3.1.8) \quad F \equiv \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{A}|} = \frac{ds(S)}{dS}$$

Wielkość określoną przez zależność:

$$(3.1.9) \quad \varepsilon = F - 1$$

nazywamy wydłużeniem (względny) włókna materialnego<sup>7</sup>. Wektory  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{a}$  będziemy dalej nazywać umownie wektorami materialnymi (jak to łatwo zauważyć przyporządkowane są one nie pojedynczym włóknom, lecz pętkom włókien wzajemnie stycznych w rozważanej cząstce materialnej<sup>8</sup>).

Znajomość wszystkich nieskończenie wielu wektorów materialnych zarówno w stanie odniesienia, jak i w stanie aktualnym dla pewnej cząstki materialnej dawała by oczywiście pełną informację o lokalnym odształceniu otoczenia cząstki, niemniej taka informacja byłaby dość niedogodna w użyciu. Wykażemy, że jest ona cała dostępna „w pigułce” w postaci dziewięciu składowych pewnego tensora.

Wygodnie jest identyfikować cząstki materialne w trójwymiarowym obszarze  $\Omega$  przez zadanie trzech rodzin włókien materialnych, w ten sposób, aby przez każdą cząstkę materialną przechodziło dokładnie jedno włókno z każdej rodziny

<sup>6</sup>Czytelnik łatwo zauważy, że dla opisu wartości  $F$  nie ma także znaczenia, jaką parametryzacją włókna przyjęliśmy dla konfiguracji odniesienia, nie musiały to być wcale parametryzacja naturalna.

<sup>7</sup>Pozostawiamy dociekliwemu czytelnikowi wykazanie zależności  $\varepsilon = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{l - l_0}{l_0}$ , gdzie  $l$  i  $l_0$  są odpowiednio długościami pewnego łuku materialnego w chwili aktualnej i w konfiguracji odniesienia.

<sup>8</sup>Czytelnikowi pozostawiamy wykazanie, że tego rodzaju lokalne charakterystyki nie ulegną zmianie jeżeli dane włókno zastąpimy innym, stycznym do niego w rozważanej cząstce materialnej, (relacja styczności jest niezmiennicza względem zmiany konfiguracji, sensowne jest więc mówienie o styczności włókien a nie tylko ich odwzorowań w  $E^3$ ).

sparametryzowane pewnym parametrem  $\xi^\alpha$ , ( $\alpha=1,2,3$ ). Zakładamy przy tym, że wzdłuż każdego z włókien wybranej rodziny, wartości parametrów numerujących cząstki na włóknach pozostałych dwóch rodzin pozostają stałe. W ten sposób możemy przypisać każdemu punktowi materialnemu trójkę liczb  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , nazywaną materialnymi współrzędnymi cząstki.

Aby uniknąć kłopotów technicznych przy korzystaniu ze współrzędnych materialnych musimy konstruując materialny układ współrzędnych spełnić żądanie, aby w konfiguracji odniesienia (zatem, wobec założenia o odwzorowywaniu się włókna we włókno – również i w każdej innej) odwzorowanie

$$(3.1.10) \quad x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

przyporządkowujące wartościom materialnych współrzędnych cząstek współrzędnych ich położenia (współrzędne) w przestrzeni punktowej było ciągłe i (przynajmniej obszarami) gładkie o dodatnim jacobianie

$$(3.1.11) \quad \det \left[ \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \right] > 0.$$

Zależnie od tego, jak będziemy mierzyć odległości pomiędzy cząstkami materialnymi – tak jak między zajmowanymi przez nie punktami przestrzeni w konfiguracji odniesienia, czy tak jak między tymi punktami w konfiguracji aktualnej, współrzędne materialne nazywane są współrzędnymi Lagrange'a (w pierwszym przypadku) lub konwekcyjnymi (w drugim). Podkreślamy tu raz jeszcze, że wartości współrzędnych materialnych przypisaliliśmy cząstkom „raz na zawsze”, tak samo w obydwu przypadkach, różnica pomiędzy układem współrzędnych Lagrange'a i konwekcyjnym objawia się zazwyczaj dopiero przy różniczkowaniu kowariantnym. W mechanice ośrodków ciągłych znajdują zastosowanie oba rodzaje współrzędnych materialnych, my, przynajmniej w tym rozdziale, będziemy posługiwać się współrzędnymi konwekcyjnymi.

Znajdziemy wektory materialne styczne do linii współrzędnościowych w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej

$$(3.1.12) \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{G}_\alpha,$$

$$(3.1.13) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{g}_\alpha.$$

Zarówno wektory  $\mathbf{G}_\alpha$ , jak i  $\mathbf{g}_\alpha$  tworzą bazy lokalne w  $E^3$  przypisane cząstkom materialnym. Utworzymy kobazy  $\mathbf{G}^\alpha$  i  $\mathbf{g}^\alpha$  według przepisu:

$$(3.1.14) \quad \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}^\beta = \delta_\alpha^\beta; \quad \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta.$$



Nietrudno zauważyć, że tensor  $\mathbf{F}$ , zwany gradientem deformacji określony przez zależność

$$(3.1.15) \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha = \delta_\beta^\alpha (\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta)^9$$

realizuje odwzorowanie  $\mathbf{G}_\alpha \rightarrow \mathbf{g}_\alpha$  według reguły:

$$(3.1.16) \quad \mathbf{g}_\alpha = \mathbf{F} \mathbf{G}_\alpha.$$

Wykażemy, że zależność (3.1.16) prawdziwa jest dla wektorów materialnych stycznych do dowolnego włókna materialnego. Niechaj dane będzie włókno materialne zadane we współrzędnych materialnych przez zależności

$$(3.1.17) \quad \xi^\alpha = \xi^\alpha(S).$$

Z definicji mamy

$$(3.1.18) \quad \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{R}}{dS} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{dS} = \mathbf{G}_\alpha \frac{d\xi^\alpha}{dS};$$

$$(3.1.19) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{r}}{dS} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{dS} = \mathbf{g}_\alpha \frac{d\xi^\alpha}{dS}.$$

Ze wzorów (3.1.16), (3.1.18) i (3.1.19) wynika natychmiast nasza teza:

$$(3.1.20) \quad \mathbf{a} = \mathbf{F} \mathbf{A}.^{10}$$

Ze wzorów (3.1.18) i (3.1.19) możemy wysnuć jeszcze jeden ważny wniosek praktyczny: składowe kowariantne wektorów materialnych w bazach układów konwekcyjnych nie zależą od konfiguracji, dla każdej z nich możemy napisać:

$$(3.1.21) \quad a^\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}^\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G}^\alpha = A^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{dS}.$$

<sup>9</sup>Tensor  $\mathbf{F}$  możemy oczywiście zdefiniować przy dowolnym wyborze układu współrzędnych  $x^i$  w konfiguracji aktualnej i  $X^K$  w konfiguracji odniesienia, ponieważ jednak ich wartości liczbowe nie pokrywają się dochodzi dodatkowy mnożnik „przeskalowujący” je wzajemnie:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^i}{\partial X^K} (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^K), \text{ gdzie } \mathbf{g}_i \text{ i } \mathbf{G}^K \text{ są wektorami bazowymi, generowanymi przez układy}$$

$$\text{współrzędnych } x^i \text{ i } X^K: \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}; \quad \mathbf{G}_K = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X^K}; \quad \mathbf{G}_K \mathbf{G}^L = \delta_K^L. [27], [34].$$

<sup>10</sup>Czytelnik, któremu nasze określenie „materialności” wektorów wydało się niedostatecznie ścisłe może traktować zależność (3.1.20) jako definicję materialności wektora.

Znając tensor  $\mathbf{F}$  możemy zatem dla dowolnych włókien materialnych, przechodzących przez daną cząstkę materialną znaleźć wydłużenie, obrót włókna i zmianę kąta pomiędzy dwoma włóknami.

Kwadrat rozciągnięcia włókna o wektorze stycznym  $\mathbf{A}$  znajdujemy z następującej zależności:

$$(3.1.22) \quad \frac{a^2}{A^2} = \frac{(\mathbf{F}\mathbf{A})(\mathbf{F}\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \cdot \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T},$$

gdzie przez  $\mathbf{T}$  oznaczyliśmy jednostkowy wektor styczny do włókna w konfiguracji odniesienia, natomiast tensor symetryczny  $\mathbf{C}$  określony jako

$$(3.1.23) \quad \mathbf{C} \equiv \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

zwany jest lewym tensorem Cauchy-Green'a. Wzór (3.1.22) może być w niektórych zastosowaniach niewygodny, możemy wtedy skorzystać z innej zależności

$$(3.1.24) \quad \frac{a^2}{A^2} = \frac{|\mathbf{a}|^2}{(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{a})} = \left( \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot (\mathbf{F}^{-1T} \mathbf{F}^{-1}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right)^{-1} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau})^{-1},$$

gdzie  $\boldsymbol{\tau}$  jest jednostkowym wektorem stycznym do włókna w konfiguracji aktualnej, natomiast (również symetryczny) tensor

$$(3.1.25) \quad \mathbf{B} \equiv \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

nosi nazwę prawego tensora Cauchy-Green'a<sup>11</sup>. Analogicznie czytelnik może otrzymać wyrażenia na kosinusy kątów pomiędzy włóknami przed i po odształceniu, na wydłużenia względne<sup>12</sup> itp. których nie będziemy tu przytaczać.

Nieco więcej zachodu wymaga opis obrotów włókien materialnych. Dla ułatwienia tego opisu przydatna będzie pewna konstrukcja z algebry macierzy (i, wobec jej inwariantności względem zamiany bazy – również i algebry tensorów) zwana rozkładem biegunowym. Jak to pokazaliśmy, każdy tensor, a więc również tensor  $\mathbf{F}$  da się przedstawić w postaci sumy trzech diad, na przykład:

<sup>11</sup>Bezpośrednie zastosowanie definicji (3.1.15) tensora  $\mathbf{F}$ , i wynikającej z niej natychmiast zależności:

$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\alpha$  do wzorów (3.1.23) i (3.1.25) prowadzi do następujących pożytecznych wyrażeń na reprezentacje tensorów  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{B}$  w bazach układów konwekcyjnych:

$$\mathbf{C} = g_{\alpha\beta} (\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta); \mathbf{B} = G^{\alpha\beta} (\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta); \mathbf{C}^{-1} = g^{\alpha\beta} (\mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta); \mathbf{B}^{-1} = G_{\alpha\beta} (\mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta).$$

<sup>12</sup>Wygodnie jest przy tym operować tensorami odształcenia  $\mathbf{e} \equiv \mathbf{I} - \mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{C} - \mathbf{I}$ , które przydatne są zwłaszcza w teoriach liniowych, mają one tę dogodną własność, że przy braku odształcenia wszystkie ich składowe są równe zeru.

$$(3.1.26) \quad \mathbf{F} = \varepsilon_i \otimes \mathbf{e}^i,$$

gdzie wektory  $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$  tworzą bazę ortonormalną<sup>13</sup>. Zauważmy że zawsze istnieje tensor  $\mathbf{Q}_1$ <sup>14</sup> o tej własności, że wektory  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_2$  i  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_3$  są prostopadłe do wektora  $\mathbf{e}^1$ , zatem w bazie  $\{\mathbf{e}^i\}$  reprezentacja tensora  $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{Q}_1 \mathbf{F}$  będzie miała następującą postać

$$(3.1.27) \quad [Y_{ij}] = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}.$$

Nietrudno również wskazać taki tensor  $\mathbf{Q}_2$  o reprezentacji

$$(3.1.28) \quad [Q_{2ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix},$$

że tensor

$$(3.1.29) \quad \mathbf{U} \equiv \mathbf{Q}_2 \mathbf{F}$$

jest symetryczny<sup>15</sup>. Zatem każdy tensor (w tym również tensor  $\mathbf{F}$ ) da się przedstawić w postaci iloczynu tensora ortogonalnego i tensora symetrycznego

$$(3.1.30) \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U},$$

gdzie  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T$ . Jak łatwo sprawdzić zachodzi związek

$$(3.1.31) \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2.$$

Analogicznie dowodzimy istnienia takiego tensora ortogonalnego  $\mathbf{R}'$  i takiego tensora symetrycznego  $\mathbf{V}$ , że

<sup>13</sup>Rozważania nasze dotyczą dowolnego tensora, w przypadku tensora  $\mathbf{F}$  mogą to być wektory jednostkowe styczne w konfiguracji odniesienia do trzech wzajemnie prostopadłych włókien materialnych, jeżeli współrzędne materialne w otoczeniu cząstki są ortogonalne i naturalne (długościowe), to wektory  $\mathbf{e}_i$  we wzorze (3.1.26) są wektorami bazy układu konwekcyjnego w konfiguracji aktualnej.

<sup>14</sup>Dowolny tensor ortogonalny ustawiający wektor  $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$  równoległe do  $\mathbf{e}^1$ .

<sup>15</sup>Potrzeba i wystarcza, aby  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{Y_{23} - Y_{32}}{Y_{22} + Y_{33}}$ .

$$(3.1.32) \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}',$$

$$(3.1.33) \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{B}.$$

Można wykazać, że jeżeli ograniczymy się do tensorów dodatnio określonych (tj. takich, których wszystkie wartości własne są dodatnie) to rozkłady (3.1.30) i (3.1.32) są jednoznaczne, przy czym  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}^{16}$ .

Wyznacznik tensora  $\mathbf{F}$  jest dodatni ponieważ jest to jacobian przekształcenia współrzędnych przy odształceniu, to samo dotyczy tensorów  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$ , z uwagi na ich dodatnią określoność, zatem, zgodnie ze znanym twierdzeniem Cauchy o wyznaczniku iloczynu macierzy, wyznacznik tensora  $\mathbf{R}$  musi być dodatni, czyli tensor  $\mathbf{R}$  jest, w przypadku rozkładu biegunowego gradientu deformacji  $\mathbf{F}$ , tensorem obrotu.

$$(3.1.34) \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\mathbf{U} = \mathbf{U}^T; \mathbf{V} = \mathbf{V}^T; \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T; \det \mathbf{R} = 1).$$

Powstaje uzasadnione pytanie: czy tensor  $\mathbf{R}$  możemy uznać za tensor obrotu otoczenia cząstki materialnej? Niestety na to pytanie nie ma jednoznacznej odpowiedzi. Nietrudno zauważyć, że tak jest istotnie dla dowolnego wektora materialnego skierowanego w konfiguracji odniesienia równoległe do jednej z osi własnych tensora  $\mathbf{U}$  (lub, co na jedno wychodzi, tensora  $\mathbf{C}$ ), mamy bowiem:

$$(3.1.35) \quad \mathbf{a} = \mathbf{F}\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}\mathbf{A},$$

gdzie  $\lambda$  jest wartością własną tensora  $\mathbf{U}$ .

Zależność (3.1.34) sugeruje nam dodatkowo jeszcze jeden ciekawy wniosek, mianowicie, jeżeli  $\mathbf{A}$  jest wektorem własnym tensora  $\mathbf{C}$ , to  $\mathbf{R}\mathbf{A}$  jest wektorem własnym tensora  $\mathbf{B}$ , ten ostatni bowiem otrzymać można przez obrót tensora  $\mathbf{C}$  przy pomocy tensora  $\mathbf{R}$ .

$$(3.1.36) \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{U}^2\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^T.$$

Wszystko to dotyczy tak samo pary tensorów  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{U}$ . W tym sensie możemy uznać tensor  $\mathbf{R}$  za charakterystykę nie tyle obrotu otoczenia materialnego cząstki, co obrotu

<sup>16</sup>Centralnym punktem dowodu jest wymaganie dodatniej określoności: dla dowolnego niezerowego wektora  $\mathbf{a}$  ma zachodzić  $\mathbf{a}\mathbf{V}\mathbf{a} > 0$ ,  $\mathbf{a}\mathbf{U}\mathbf{a} > 0$ . Jeżeli tensory  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{R}'$  nie są sobie równe, to  $\mathbf{R}'' \equiv \mathbf{R}'\mathbf{R}^T \neq \mathbf{I}$ , zatem porównując oba wyrażenia na  $\mathbf{F}$  i mnożąc obie strony równości przez  $\mathbf{R}^T$  otrzymamy  $\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T = \mathbf{V}\mathbf{R}''$ , lewa strona tej równości przedstawia tensor symetryczny, aby zaś prawa strona była również symetryczna, reprezentacje tensorów  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{R}''$  w bazie, której pierwszy wektor jest wektorem własnym tensora  $\mathbf{R}''$  muszą spełniać warunek  $(V_{22} + V_{33})\sin \gamma = 0$ , ponieważ zaś, zgodnie z założeniem,  $\sin \gamma \neq 0$ , zatem jedna ze składowych diagonalnych tensora dodatnio określonego musiałaby być ujemna, co nie jest możliwe, bo wówczas, wbrew definicji dodatniej określoności, mielibyśmy dla odpowiedniego wektora bazowego  $\mathbf{e}_i$   $\mathbf{V}\mathbf{e}_i < 0$ .

charakterystyk jej deformacji. Różnica pomiędzy obrotem włókna materialnego, a obrotem tensorów przypisanych ( np. przez prawa fizyczne) cząstkom na tym włóknie (nawet takich, których kierunki własne są chwilowo równoległe do włókna) będzie jeszcze lepiej widoczna przy rozpatrywaniu kinematyki otoczenia cząstki materialnej.

W ogólnym przypadku obrót włókna materialnego zależy nie tylko od tensora  $\mathbf{R}$  – ten ostatni może być w szczególności równy jedności co bynajmniej nie oznacza braku obrotu włókien materialnych. Aktualny kierunek jednostkowego wektora  $\tau$ , stycznego do włókna materialnego wyznaczony jest przez zależność

$$(3.1.37) \quad \tau \equiv \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{A}}{\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{A}}} = \frac{(\mathbf{R}\mathbf{U})\mathbf{A}}{\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{U}^2\mathbf{A}}}.$$

Natomiast dla kosinusa kąta pomiędzy kierunkami włókien w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej otrzymujemy:

$$(3.1.38) \quad \cos \varphi = \frac{\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{A}}}.$$

Jedynie dla włókien równoległych do osi własnych tensora  $\mathbf{U}$  wyrażenie to nie zależy od postaci tego ostatniego, mamy wtedy bowiem

$$(3.1.39) \quad \cos \varphi = \frac{\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^2} \quad (\text{dla } \mathbf{U}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}).$$

To uhonorowanie specjalnymi względami pewnych trzech wzajemnie ortogonalnych włókien materialnych ma jednak dość ulotny charakter, ponieważ w procesie deformacji na ogół coraz to inne włókna materialne są w ten sposób kolejnie wyróżniane.

Przy rozpatrywaniu niektórych materiałów, np. takich jak kompozyty warstwowe lub struktury krystaliczne co najmniej tak samo ważne, jak obroty włókien mogą się okazać obroty powierzchni materialnych. Obrót „wewnętrzny” elementu powierzchni tj. wokół normalni nie wnosi wiele nowego do naszych dotychczasowych rozważań, przenosząc je po prostu do dwuwymiarowej przestrzeni stycznej w danym punkcie do powierzchni<sup>17</sup>, zajmiemy się zatem obrotem wektora normalnego do powierzchni materialnej.

Zauważmy, że jeżeli pewien wektor  $\mathbf{N}$  jest w konfiguracji odniesienia prostopadły do powierzchni materialnej, to wektor

$$(3.1.40) \quad \mathbf{n} = \mathbf{N}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1T}\mathbf{N}$$

<sup>17</sup>Jedyną bodaj istotną różnicę stanowi to fakt, że w dwóch wymiarach tensor  $\mathbf{F}$  nie musi mieć wektorów własnych, nie istnieje więc na ogół włókno materialne, które zachowywało by swój kierunek przy odształceniu.

jest do niej<sup>18</sup> prostopadły w konfiguracji aktualnej. Niechaj bowiem dla pewnego wektora  $\mathbf{A}$  w konfiguracji odniesienia zachodzi

$$(3.1.41) \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{A} = 0$$

wtedy

$$(3.1.41) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{N}\mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{A}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Wektor  $\mathbf{n}$  nie jest oczywiście wektorem materialnym, przy odształceniu jednak nietrudno go zidentyfikować, ponieważ jego składowe kowariantne (a nie kontrawariantne, jak było to w przypadku wektorów materialnych) pozostają stałe<sup>19</sup>

$$(3.1.42) \quad n_\alpha = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_\alpha = (\mathbf{N}\mathbf{F}^{-1})(\mathbf{F}\mathbf{g}_\alpha) = \mathbf{N}\mathbf{g}_\alpha = N_\alpha.$$

Jednostkowy wektor  $\mathbf{v}$  normalny do powierzchni materialnej w konfiguracji aktualnej ma zatem postać

$$(3.1.43) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}^{-1\top}\mathbf{N}}{\sqrt{(\mathbf{N}\mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F}^{-1\top}\mathbf{N})}} = \frac{\mathbf{F}^{-1\top}\mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{N}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{N}}},$$

natomiast kosinus kąta obrotu normali przy odształceniu wyraża się wzorem:

$$(3.1.44) \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{N}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{N}}{\sqrt{(\mathbf{N}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{N})(\mathbf{N}\mathbf{N})}}.$$

I znowu, jeżeli  $\mathbf{N}$  jest wektorem własnym tensora  $\mathbf{U}$  (a więc i  $\mathbf{C}$ )<sup>20</sup> zależność (3.1.44) przybiera szczególnie prostą postać:

$$(3.1.45) \quad \cos \varphi = \frac{\mathbf{N}\mathbf{R}\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^2} \quad (\text{dla } \mathbf{U}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}).$$

W tym ostatnim przypadku wektor  $\mathbf{n}$  zachowuje się podobnie, jak wektor materialny, w tym sensie, że jest on styczny do tego samego włókna materialnego co wektor  $\mathbf{N}$ .

<sup>18</sup>Do przestrzeni tej należą niezależnie od deformacji te same wektory materialne i ich kombinacje liniowe, mamy bowiem dla dowolnych wektorów materialnych w konfiguracji odniesienia  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{F}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{F}\mathbf{A} + \beta\mathbf{F}\mathbf{B}$

<sup>19</sup>Nasuwa się tu przez analogię termin „kovektor materialny”, ale znów, czy warto mnożyć byty?

<sup>20</sup>Tensory  $\mathbf{C}$ ;  $\mathbf{U}$ ;  $\mathbf{C}^{-1}$ ;  $\mathbf{U}^{-1}$  mają oczywiście te same kierunki własne.

W przypadku dwuwymiarowym tensor  $\mathbf{R}$  można interpretować jako tensor średniego obrotu, w tym sensie, że uśredniony po wszystkich włóknach kąt pomiędzy wektorami stycznymi w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej równy jest kątowi, o który tensor  $\mathbf{R}$  obraca włókna materialne równoległe do wektorów własnych tensora  $\mathbf{U}$ . Najłatwiej wykazać ten fakt na reprezentacjach, niechaj w bazie ortonormalnej wektorów własnych tensora  $\mathbf{U}$  tensor  $\mathbf{F}$  zapisuje się w postaci:

$$(3.1.46) \quad [F_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}$$

Wektory własne tensora  $\mathbf{U}$  obracają się oczywiście o kąt  $\varphi$  natomiast dowolny inny wektor jednostkowy  $[\sin \alpha, \cos \alpha]$  transformuje się według reguły

$$(3.1.47) \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cos \alpha \cos \varphi - U_2 \sin \alpha \sin \varphi \\ U_1 \cos \alpha \sin \varphi + U_2 \sin \alpha \cos \varphi \end{bmatrix},$$

a więc różnica  $\delta$  pomiędzy kątem obrotu dowolnego włókna a kątem  $\varphi$  wynosi więc

$$(3.1.48) \quad \begin{aligned} \delta &= \arctg \left( \frac{U_1 \cos \alpha \sin \varphi + U_2 \sin \alpha \cos \varphi}{U_1 \cos \alpha \cos \varphi - U_2 \sin \alpha \sin \varphi} \right) - \arctg \left( \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha)} \right) = \\ &= \arctg \left( \frac{(U_2 - U_1) \sin 2\alpha}{(U_2 + U_1) - (U_2 - U_1) \cos 2\alpha} \right). \end{aligned}$$

Całka po zmiennej  $\alpha$  od tego ostatniego wyrażenia w przedziale  $(0, \pi)$ , jak to już na pierwszy rzut oka stwierdzamy, równa jest zeru, co dowodzi naszej tezy.<sup>21</sup>

Spotykane w literaturze rozważania na temat „czy, dlaczego i w jakim sensie tensor  $\mathbf{R}$  opisuje średni obrót” [23], [26] sprowadzają zagadnienie trójwymiarowe w istocie do rodziny zagadnień dwuwymiarowych poprzez rzutowanie na płaszczyznę prostopadłą do obranych wektorów i badanie obrotów tych rzutów.

<sup>21</sup>Przy całkowym uśrednianiu z wagą 1 wartości funkcji skalarnej  $f(\mathbf{x})$  po dowolnym zbiorze  $\Omega$

zachodzi oczywisty związek: 
$$\int_{\Omega} (f^* - f(\mathbf{x})) dV = 0 \Leftrightarrow f^* = \frac{\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) dV}{\int_{\Omega} dV}.$$

### 3.2. Prędkości odkształceń i obrotów

Z definicji tensora  $\mathbf{F}$  wynika natychmiast wzór na prędkość jego zmiany w ustalonej cząstce materialnej

$$(3.2.1) \quad \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}(X^\beta(x^\gamma), t)}{\partial x^\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(X^\beta(x^\gamma), t)}{\partial x^\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha.$$

Wykorzystaliśmy przy ostatnim przekształceniu fakt, że w trakcie deformacji wartości współrzędnych materialnych nie ulegają zmianie, wobec czego różniczkowanie cząstkowe po czasie i po współrzędnych przestrzennych funkcji wektorowej  $\mathbf{r}$ , (która zależy od współrzędnych przestrzennych jedynie poprzez zależność od nich współrzędnych materialnych) jest przemienne<sup>1</sup>. Przekształcając dalej wyrażenie (3.2.1) otrzymujemy:

$$(3.2.2) \quad \dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \hat{x}^\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \hat{x}^\alpha} \otimes \mathbf{g}^\beta \right) (\mathbf{g}_\beta \otimes \mathbf{G}^\alpha) = \mathbf{VvF},$$

lub, inaczej

$$(3.2.3) \quad \mathbf{Vv} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1},$$

Korzystając z rozkładu polarnego możemy zależność (3.2.3) przepisać w jeszcze innej postaci:

$$(3.2.4) \quad \mathbf{Vv} = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^\top = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^\top.$$

W przypadku ruchu bryły sztywnej mamy  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ,  $\dot{\mathbf{U}} = 0$ , wobec tego gradient prędkości, jak to już uprzednio pokazaliśmy, jest tensorem antysymetrycznym równym  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top$ , w ogólnym przypadku taka zależność nie jest prawdziwa, nie ma bowiem powodu, aby tensor  $\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}$  (a zatem również i jego obrocona postać  $\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^\top$ ) był symetryczny. Zauważmy jednak, że jeżeli za konfigurację odniesienia przyjmiemy

<sup>1</sup>Dokładniej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mathbf{r}(X^\beta(x^\gamma), t) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}(X^\beta, t)}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}(X^\beta, t)}{\partial X^\mu} \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(X^\beta, t)}{\partial X^\mu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}(X^\beta, t)}{\partial x^\alpha}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Skorzystaliśmy tu z zależności  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ ;  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$ .



konfigurację aktualną, czyli położymy  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{I}^3$ , to zachodzą szczególnie proste zależności

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{R}}; \\ \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) &= \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{U}}; \end{aligned} \quad (\text{dla } \mathbf{U} = \mathbf{I}, \mathbf{R} = \mathbf{I}).$$

Znajdziemy zależności opisujące prędkość obrotu włókna materialnego i powierzchni materialnej. Za prędkość kątową włókna materialnego o wektorze stycznym  $\mathbf{a}$  uznamy taki, ortogonalny do  $\mathbf{a}$ , wektor  $\mathfrak{Q}$ , który spełnia następujący związek:

$$(3.2.6) \quad \mathfrak{Q} \times \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}}.$$

Sprawdźmy, że własność tę ma wektor

$$(3.2.7) \quad \mathfrak{Q} = \frac{\dot{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|} \times \boldsymbol{\tau},$$

w rzeczy samej, obliczając  $\dot{\boldsymbol{\tau}}$  otrzymujemy

$$(3.2.8) \quad \dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\dot{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\dot{\mathbf{a}}|\mathbf{a}| - \mathbf{a}\frac{\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\dot{\mathbf{a}}|\mathbf{a}| - \mathbf{a}\frac{\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\dot{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}).$$

Podstawiając (2.3.7) i (2.3.8) do (2.3.6) i stosując wzór na podwójny iloczyn wektorowy otrzymujemy tożsamość, co dowodzi zależności (3.2.7), wynik ten jest jednoznaczny w zbiorze wektorów ortogonalnych do  $\boldsymbol{\tau}$ .

Ponieważ

$$(3.2.9) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{A} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{A} = \nabla \mathbf{v}\mathbf{a},$$

możemy (3.2.7) zapisać w postaci

$$(3.2.10) \quad \mathfrak{Q} = \nabla \mathbf{v}\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{W}\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau},$$

gdzie przez

$$(3.2.11) \quad \mathbf{D} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T); \quad \mathbf{W} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T)$$

<sup>3</sup>Nie zakładamy, rzecz jasna, stałości tych tensorów, a tylko to, że w chwili aktualnej przyjmują taką właśnie wartość.

oznaczamy odpowiednio symetryczną i antysymetryczną część gradientu prędkości. Oznaczając wektor dualny do tensora antysymetrycznego  $\mathbf{W}$  przez  $\Omega$ , możemy przepisać równość (3.2.9) w jeszcze innej, być może dla części czytelników bardziej poglądowej postaci:

$$(3.2.12) \quad \mathfrak{g} = (\mathbf{I} - \tau \otimes \tau)\Omega + \mathbf{D}\tau \times \tau.$$

Obrót zatem włókna materialnego zależy zatem zarówno od części symetrycznej, jak i antysymetrycznej tensora gradientu prędkości. Do rozważań o sensowności określania tensora  $\mathbf{W}$  (wektora  $\Omega$ ) jako średniej prędkości obrotu otoczenia materialnego cząstki wrócimy dalej. W tym miejscu zwrócimy jedynie uwagę czytelnika na fakt, że jeżeli wektor styczny do włókna materialnego jest wektorem własnym tensora  $\mathbf{D}$ , to prędkość jego obrotu nie zależy od  $\mathbf{D}$ , a wartość  $\dot{\tau}$ , która w istocie rzeczy charakteryzuje prędkość obrotu włókna materialnego wyraża się szczególnie prosto:

$$(3.2.13) \quad \dot{\tau} = \mathbf{W}\tau = \Omega \times \tau \quad (\text{przy } \mathbf{D}\tau = \lambda\tau).^4$$

Istnieją zatem trzy wzajemnie ortogonalne włókna materialne, które obracają się z prędkością kątową  $\Omega$ , tak, jakby były ze sobą sztywno związane. Pragniemy w tym miejscu podzielić się z Czytelnikiem dwoma uwagami. Po pierwsze – wyróżnienie to, podobnie, jak w przypadku tensorów  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{U}$  ma charakter chwilowy. Po drugie – nie należy obrotu włókien skierowanych wzdłuż kierunków głównych w żadnym razie utożsamiać z obrotem samych kierunków głównych, który omówimy dalej.

Rozpatrzmy teraz (lokalne) obroty powierzchni materialnych. Niechaj więc wektor

$$(3.2.14) \quad \mathbf{n} = \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{N}$$

będzie w konfiguracji aktualnej ortogonalny do pewnej powierzchni materialnej (pęku powierzchni wzajemnie stycznych w cząstce materialnej). Oznaczając, jak uprzednio przez  $\mathbf{v}$  unormowany wektor normalny, będziemy, zaniedbując obrót płaszczyzny stycznej wokół normali poszukiwać takiego wektora obrotu  $\eta$ , który spełnia warunki:

$$(3.2.15) \quad \eta \times \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}; \quad \eta \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Analogicznie jak uprzednio (por. (3.2.7)) mamy<sup>5</sup>:

<sup>4</sup>Postać ta wynika natychmiast z zależności (3.2.8), nie jest ona sprzeczna z (3.2.12) ponieważ wartość rzutu wektora  $\Omega$  na kierunek wektora  $\tau$  nie wpływa na ich iloczyn wektorowy.

<sup>5</sup>Zależność (3.2.8) została wyprowadzona bez potrzeby specyfikowania wektorów  $\mathbf{a}$  i  $\tau$  jako stycznych zatem analogiczna zależność obowiązuje dla wektorów  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{v}$ .

$$(3.2.16) \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\dot{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|} \times \mathbf{v}.$$

Wyrazimy pochodną wektora  $\mathbf{n}$  przez gradient prędkości. Różniczkując równość

$$(3.2.17) \quad \mathbf{F}^{-1\top} \mathbf{F}^\top = \mathbf{I}$$

otrzymujemy

$$(3.2.18) \quad \overline{\mathbf{F}^{-1\top} \mathbf{F}^\top} = -\mathbf{F}^{-1\top} \dot{\mathbf{F}}^\top,$$

skąd mamy

$$(3.2.19) \quad \overline{\mathbf{F}^{-1\top}} = -\mathbf{F}^{-1\top} \dot{\mathbf{F}}^\top \mathbf{F}^{-1\top},$$

i ostatecznie

$$(3.2.20) \quad \overline{\mathbf{F}^{-1\top}} = -\mathbf{F}^{-1\top} \mathbf{F}^\top \nabla \mathbf{v}^\top \mathbf{F}^{-1\top} = \nabla \mathbf{v}^\top \mathbf{F}^{-1\top},$$

Zatem

$$(3.2.21) \quad \dot{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{F}^{-1\top}} \mathbf{N} = -\nabla \mathbf{v}^\top \mathbf{F}^{-1\top} \mathbf{N} = -\nabla \mathbf{v}^\top \mathbf{n},$$

i ostatecznie

$$(3.2.22) \quad \boldsymbol{\eta} = -(\nabla \mathbf{v}^\top \mathbf{v}) \times \mathbf{v}.$$

Odpowiednikiem wzoru (3.2.11) jest następująca zależność

$$(3.2.23) \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \mathbf{D}\mathbf{v} \times \mathbf{v}.$$

Zależności (3.2.11) i (3.2.23) mają identyczną strukturę różniąc się jedynie znakiem drugiego członu, zatem wnioski, które można wyciągnąć z dyskusji wyrażenia (3.2.23) niczym się w zasadzie nie różnią od tych, które już otrzymaliśmy z (3.2.11), nietrudno bowiem zauważyć, że istnienie sztywno obracającej się trójki włókien materialnych implikuje istnienie trzech tak samo obracających się płaszczyzn stycznych do powierzchni materialnych, i odwrotnie.

Zauważmy wreszcie, że wprowadzenie wektorów prędkości kątowych stanowi dość sztuczną konstrukcję, mającą, w gruncie rzeczy jedynie dydaktyczne znaczenie dla wyspecyfikowania roli tensorów  $\mathbf{W}$  i  $\mathbf{D}$  oraz porównania z obrotami bryły sztywnej. Jest rzeczą oczywistą że każda pochodna – w szczególności po czasie, wektora

jednostkowego (funkcji wektorowej o stałym module) jest do tego wektora prostopadła<sup>6</sup> wobec tego podanie dla dowolnego wektora wartości pochodnej czasowej jego wektora całkowicie charakteryzuje prędkość obrotu tego wektora. Możemy zatem korzystać do celów praktycznych bezpośrednio z następujących zależności:

$$(3.2.24) \quad \dot{\tau} = \mathbf{W}\tau + (\mathbf{I} - \tau \otimes \tau)\mathbf{D}\tau = \boldsymbol{\Omega} \times \tau + (\mathbf{I} - \tau \otimes \tau)\mathbf{D}\tau;$$

$$(3.2.25) \quad \dot{\nu} = \mathbf{W}\nu - (\mathbf{I} - \nu \otimes \nu)\mathbf{D}\nu = \boldsymbol{\Omega} \times \nu - (\mathbf{I} - \nu \otimes \nu)\mathbf{D}\nu.$$

W rozważaniach nad plastycznością kryształów przyporządkowuje się niekiedy cząstkom materialnym repery ortonormalne według następującego przepisu: niechaj zadana będzie w konfiguracji odniesienia pewna powierzchnia materialna, przechodząca przez rozpatrywaną cząstkę, wybieramy na tej powierzchni pewne włókno materialne również przechodzące przez tę cząstkę. Niech  $\mathbf{A}$  będzie wektorem stycznym do włókna, a  $\mathbf{N}$  – wektorem normalnym do powierzchni. Określimy w konfiguracji aktualnej w cząstce następującą trójkę ortonormalną  $\{\kappa_i\} (i=1,2,3)$ :

$$(3.2.26) \quad \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\mathbf{F}\mathbf{A}}{|\mathbf{F}\mathbf{A}|} ; \\ \kappa_3 &= \frac{\mathbf{F}^{-1\top}\mathbf{N}}{|\mathbf{F}^{-1\top}\mathbf{N}|} ; \\ \kappa_2 &= \kappa_3 \times \kappa_1. \end{aligned}$$

Nie trudno zauważyć, że wektor  $\kappa_2$  jest wektorem stycznym do wybranej powierzchni materialnej, nie jest on jednak wektorem materialnym. Autor proponuje nazywać tego rodzaju trójki wektorów reperami Mandela (J. Mandel [22], patrz także [28]).

Poszukamy prędkości kątowej obrotu reperu  $\{\kappa_i\}$ , tj. takiego wektora  $\boldsymbol{\omega}$ , aby dla każdego z wektorów  $\kappa_i$  zachodziła równość

$$(3.2.27) \quad \dot{\kappa}_i = \boldsymbol{\omega} \times \kappa_i.$$

Dla wygody dalszych rozważań, które prowadzić będziemy na reprezentacjach, oznaczymy tensor gradientu prędkości jedną literą, przyjęte jest korzystanie w tym celu z litery  $\mathbf{L}$ , czyli w języku reprezentacji mamy  $L_{ij} \equiv v_{rj}$ . Korzystając z zależności (3.2.24) i (3.2.24), oraz pamiętając, że dla dowolnego wektora jednostkowego  $\mathbf{m}$  i dowolnego tensora antisymetrycznego  $\mathbf{K}$  zachodzi równość:  $(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m})\mathbf{K}\mathbf{m} = \mathbf{K}\mathbf{m}$ , możemy napisać:

<sup>6</sup>Mamy bowiem:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \text{const} \Rightarrow D(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = D\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot D\mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot D\mathbf{a} = 0$ , dla dowolnego operatora różniczkowego  $D$ .

$$(3.2.28) \quad \dot{\kappa}_1 = (\mathbf{I} - \kappa_1 \otimes \kappa_1) \mathbf{L} \kappa_1,$$

$$(3.2.29) \quad \dot{\kappa}_1 = -\kappa_1 \mathbf{L} (\mathbf{I} - \kappa_1 \otimes \kappa_1).$$

W celu znalezienia wartości  $\dot{\kappa}_2$  skorzystamy z równości

$$(3.2.30) \quad \dot{\kappa}_2 \kappa_j = -\kappa_2 \dot{\kappa}_j.$$

Rozkładając wektor  $\dot{\kappa}_2$  w bazie  $\{\kappa_i\}$  otrzymujemy natychmiast:

$$(3.2.31) \quad \dot{\kappa}_2 = -(\kappa_2 \cdot \dot{\kappa}_1) \kappa_1 - (\kappa_2 \cdot \dot{\kappa}_3) \kappa_3.$$

Rozkładając w tej samej bazie prawe strony (3.2.28) i (3.2.29) oraz korzystając z (3.2.31) możemy wyrazić pochodne wektorów bazy  $\{\kappa_i\}$  przez składowe tensora gradientu prędkości w tej bazie

$$(3.2.32) \quad \begin{aligned} \dot{\kappa}_1 &= L_{21} \kappa_2 + L_{31} \kappa_3; \\ \dot{\kappa}_2 &= -L_{21} \kappa_1 + L_{32} \kappa_3; \\ \dot{\kappa}_3 &= -L_{31} \kappa_1 - L_{32} \kappa_2. \end{aligned}$$

Jak łatwo sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, odpowiada to następującej reprezentacji wektora  $\varpi$  w bazie  $\{\kappa_i\}$ :

$$(3.2.33) \quad \begin{aligned} \varpi_1 &= L_{32}; \\ \varpi_2 &= -L_{31}; \\ \varpi_3 &= L_{21}. \end{aligned}$$

Związki (3.2.33) można przedstawić przy pomocy składowych reprezentacji części symetrycznej i antysymetrycznej gradientu prędkości

$$(3.2.34) \quad \varpi_i = -\frac{1}{2} W_{ij} \varepsilon_{kij} - \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{kij},$$

gdzie tensor  $\mathbf{P}$  ma następującą reprezentację w bazie  $\{\kappa_i\}$ :

$$(3.2.35) \quad [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & 0 & 0 \\ D_{11} & D_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie  $D_{ij}$  są składowymi tensora  $\mathbf{D}$  w tej samej bazie, czyli:

$$(3.2.36) \quad \mathbf{P} = \kappa_2 \mathbf{D} \kappa_1 (\kappa_2 \otimes \kappa_1) + \kappa_3 \mathbf{D} \kappa_1 (\kappa_3 \otimes \kappa_1) + \kappa_3 \mathbf{D} \kappa_2 (\kappa_3 \otimes \kappa_2).$$

Trudno było by podać „bardziej absolutny” zapis tensora  $\mathbf{P}$  ponieważ jest on funkcją nie tylko gradientu prędkości, lecz również wyboru powierzchni materialnej i włókna materialnego ustalających reper<sup>7</sup>.

Dyskusję wyrażen na prędkości obrotu i dopuszczalności interpretacji części antysymetrycznej gradientu prędkości jako średniej prędkości obrotu cząstki materialnej odłożymy do następnego podrozdziału, tu ograniczymy się do stwierdzenia, że również i w przypadku reperów Mandela nie sposób wyeliminować wpływu części symetrycznej gradientu prędkości.

---

<sup>7</sup> Rola tensora  $\mathbf{P}$  we wzorze (3.2.34) może pełnić dowolny inny tensor, różniący się od niego członami diagonalnymi np.  $\mathbf{D} - \kappa_1 \mathbf{D} \kappa_2 (\kappa_1 \otimes \kappa_2) - \kappa_1 \mathbf{D} \kappa_3 (\kappa_1 \otimes \kappa_3) - \kappa_2 \mathbf{D} \kappa_3 (\kappa_2 \otimes \kappa_3)$ .

### 3.3 Prędkość kątowa wektorów własnych, współbrotowość tensorów

Pożyteczne będzie, zanim przystąpimy do dalszych rozważań, przeanalizowanie na prostym (w istocie dwuwymiarowym) przykładzie niektórych pojęć wprowadzonych w poprzednim podrozdziale. Rozpatrzmy mianowicie następujące, zależne od czasu pole deformacji: (Rys 3.1)<sup>1</sup>

$$(3.3.1) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= X_1 - a(t)X_2; \\ x_2(t) &= X_2; \\ x_3(t) &= X_3, \end{aligned}$$

gdzie przez  $x_i(t)$  oznaczyliśmy aktualne współrzędne kartezjańskie cząstek, które w chwili  $t = 0$  miały wartość  $X_i$  (dla uproszczenia rozważań przyjmujemy, że funkcja

$a(t) \in (0, \infty)$  przyjmuje w chwili  $t = 0$  wartość 0). Zdefiniowaliśmy w ten sposób we współrzędnych kartezjańskich pewien ruch ciała. Czytelnik zauważy z pewnością, że użyte przez nas współrzędne  $x_i$  nie są współrzędnymi konwekcyjnymi, zrezygnowaliśmy z nich po to, aby operować przez cały czas w stałych (w czasie i przestrzeni) bazach kartezjańskich:  $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}^i = \mathbf{G}_i = \mathbf{G}^i = \mathbf{e}_i$ . Dla ułatwienia dalszych rozważań wprowadzimy oznaczenie:

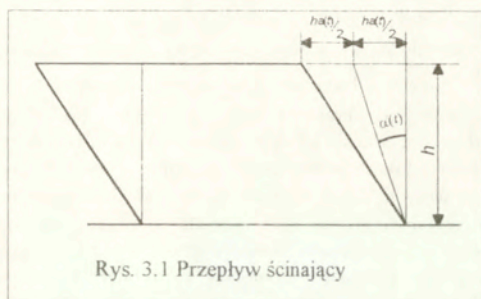
$$(3.3.2) \quad a(t) \equiv 2 \operatorname{tg} \alpha; \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Jak łatwo sprawdzić, w rozważanej bazie kartezjańskiej składowe wektora prędkości  $\mathbf{v}$  i gradientu prędkości  $\mathbf{L}$  wyrażają się wzorami:

$$(3.3.3) \quad v_1 = -\frac{2\dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} x_2; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = 0;$$

$$(3.3.4) \quad [L_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha},$$

lub



Rys. 3.1 Przepływ ścinający

<sup>1</sup>W hydrodynamice takie pole nosi nazwę prostego przepływu ścinającego.

$$(3.3.4') \quad [L_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{a}(t) - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{a}(t),$$

Najprostsza nietrywialna zależność od czasu:  $a(t) = a_0 t$  prowadzi do stałej wartości tensora  $\mathbf{W}$ , a zatem do stałej wartości dualnej do niego prędkości kątownej  $\omega = \frac{1}{2} a_0 e_i$ . Jeżeli zatem nadamy wektorowi  $\omega$  sens średniej prędkości kątownej, to „średni kąt obrotu” (Czego właściwie?) po odpowiednio długim czasie może być dowolnie wielki. Trudno wskazać w ośrodku ciągłym jakkolwiek element materialny typu włókna, powierzchni itp. który przy rozpatrywanym schemacie ruchu mógłby obrócić się o kąt większy niż  $\pi/2$ . Wydaje się zatem, że przypisywanie tensorowi  $\mathbf{W}$  (wektorowi  $\omega$ ) roli średniej prędkości obrotu jest trudne do zaakceptowania. Nie chodzi tu tylko o pokonanie oporów intelektu przeciw pogwałceniu zdrowego rozsądku, (taka postawa mogłaby się spotkać z zarzutem konserwatyizmu i małej lotności umysłu). Rzecz w tym, że zastosowanie takiej koncepcji do obliczania np. ewolucji tekstur, czy tzw. wzmocnienia kinematycznego w plastyczności prowadzi do fizycznie nie uzasadnionych i nie obserwowanych w doświadczeniach, okresowych oscylacji parametrów procesu.

Spróbujemy rozważyć na użytek naszego przykładu inne propozycje miar prędkości obrotu otoczenia cząstki materialnej. Wypycyfikujemy w tym celu rozkład biegunowy tensora  $\mathbf{F}$

$$(3.3.5) \quad [F_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \operatorname{tg} \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jak nie trudno sprawdzić, prawdziwe są następujące związki:

$$(3.3.6) \quad [R_{ij} U_{j\mu}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(3.3.7) \quad [V_{ij} R_{j\mu}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Znając tensor  $\mathbf{R}$  możemy znaleźć jego pochodną po czasie<sup>2</sup> oraz tensor antisymetryczny  $\Lambda$  określony zależnością

$$(3.3.8) \quad \Lambda \equiv \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T;$$

$$(3.3.9) \quad [\Lambda_{ij}] = \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}.$$

lub, wracając do zmiennej  $a(t)$

$$(3.3.10) \quad [\Lambda_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{2\dot{a}(t)}{4+a^2(t)}.$$

Nie przesądzając sprawy ewentualnej przydatności tensora  $\Lambda$  jako miary prędkości obrotów, zwrócimy uwagę Czytelnika, że niezależnie od tego, jaki obiekt fizyczny jest realnie obracany z prędkością kątowną dualną do tensora  $\Lambda$ , to przy rozpatrywanym schemacie ruchu kąt tego obrotu nie przekroczy  $\pi/2$ . W przypadku sztywnego obrotu tensor  $\Lambda$  pokrywa się z tensorem  $\mathbf{W}$  (oba one są równe gradientowi prędkości).

Dla kompletności znajdziemy jeszcze zależność pomiędzy tensorami  $\Lambda$  i  $\mathbf{W}$ . Jak to widać z zależności (3.2.4), część antisymetryczna gradientu prędkości jest sumą tensora  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  i części antisymetrycznej tensora  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T$ , a zatem

$$(3.3.11) \quad \Lambda = \mathbf{W} - \frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T.$$

Wzór (3.3.11) jest w ogólnym, trójwymiarowym przypadku niestety równie nieefektywny (jeżeli chodzi o wyznaczenie tensora  $\Lambda$ ), co i definicja (3.3.8) – rzecz w tym, że brak jest prostych algorytmów analitycznych pozwalających znajdować tensory  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{R}$ , występujące w rozkładach biegunowych, aby to uczynić efektywnie należy z reguły znać wektory własne pewnego tensora symetrycznego np. tensora  $\mathbf{B}$  lub  $\mathbf{C}$ , co wiąże się z koniecznością rozwiązania sześciennego równania charakterystycznego na wartości własne.

W naszym prostym, dwuwymiarowym w istocie rzeczy, przypadku nie jest trudno określić jeszcze jedną prędkość obrotu, mianowicie prędkość obrotu wektorów własnych tensora  $\mathbf{U}$  (a tym samym i  $\mathbf{C}$ ). Rozwiązując dla tensora  $\mathbf{U}$  równanie charakterystyczne

<sup>2</sup>Pomieważ rozpatrywane tu pole tensora  $\mathbf{R}$  nie zależy od współrzędnych jego pochodna materialna i lokalna pokrywają się

$$(3.3.12) \quad \det \begin{bmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha \sin\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

otrzymujemy, oprócz trywialnej wartości  $\lambda = 1$  także dwie inne wartości

$$(3.3.13) \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sin\alpha}{\cos\alpha},$$

przyjmując dla ustalenia uwagi dolny znak<sup>3</sup>, otrzymujemy następujący warunek na pierwszą składową transformowanego wektora  $x$ :

$$(3.3.14) \quad x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha = x_1 \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha},$$

zatem otrzymujemy następujące wyrażenie na tangens kąta  $\gamma$  nachylenia wektora własnego do osi  $x_1$ :

$$(3.3.15) \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{x_2}{x_1} = \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Różniczkując równość (3.3.15), po niewielkich przekształceniach otrzymujemy

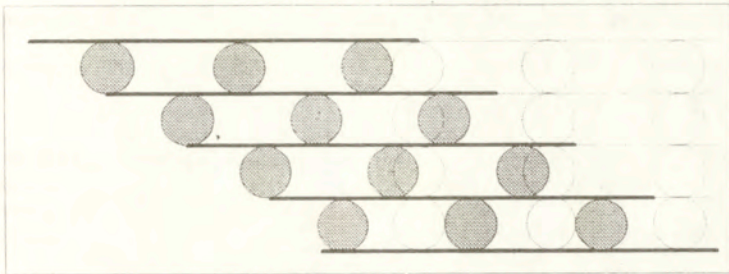
$$(3.3.16) \quad \dot{\gamma} = -\frac{\dot{\alpha}}{2}.$$

Analogiczne rozważania dla tensora  $\mathbf{V}$  prowadzą do tego samego wyniku z przeciwnym znakiem<sup>4</sup>. Nie będziemy tu specjalnie komentować tego wyniku, osiągniętego na dość niskim poziomie ogólności.

Kończąc rozpatrywanie tego przykładu ruchu wystąpimy w charakterze *advocatus diaboli* i pokażemy przykład, dla którego dowolnie duże kąty obrotu przy prostym ścinaniu nie są całkowicie pozbawione sensu. Niech dana będzie pokazana na Rys. 3.2 struktura złożona z desek (dla uproszczenia zaniedbamy ich grubość) i toczących się po nich bez poślizgu beczek, którą postaramy się opisać jako dwuwymiarowy ośrodek ciągły. Nietrudno zauważyć, że jeżeli w konfiguracji odniesienia (pokazanej na rysunku liniami przerywanymi) poprowadzimy proste przez środki kół i oznaczymy na trwałe na

<sup>3</sup>Wiadomo, że wektor prędkości kątowej jest prostopadły do płaszczyzny ruchu, zatem obojętnie dla którego z ruchomych wektorów własnych znajdziemy prędkość kątową.

<sup>4</sup>Ten wynik nietrudno było przewidzieć na podstawie oczywistej równości  $\mathbf{V} = \mathbf{RUR}^T$ , z której natychmiast wynika, że kąt rozwarcia pomiędzy osiami własnymi tensorów  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$  równy jest kątowi obrotu generowanego przez tensor  $\mathbf{R}$ .



Rys. 3.2 Beczki i deski

deskach punkty przecięcia ich z tymi prostymi (czyli aktualne punkty styczności), to po jednorodnym odkształceniu oba te zbiory punktów będą nadal leżały na prostych. Jest więc sens mówić tu o włóknach materialnych i rozpatrywać model ciągły (inna sprawa, czy jest to użyteczne). Pozostając przy naszym przykładzie deformacji zadanej zależnościami (3.3.1) widzimy, że wzajemne przesunięcie sąsiadujących desek wynosi  $2Ra(t)$ , gdzie  $R$  jest promieniem beczki. Oznacza to, że każda beczka przetoczyła się po leżącej pod nią desce o połowę tej drogi tj. o  $Ra(t)$  obracając się o kąt  $a(t)$ , tym samym jej prędkość kątowna, niezależnie od parametrów geometrycznych modelu „materiału” (promienia beczek, ich rozstawu) równa jest dokładnie podwojonej prędkości kątownej  $\omega$ .

Autor ma nadzieję, że przekonał Czytelnika, iż, w zależności od sytuacji, sensowne jest rozpatrywanie obrotów różnych, niekoniecznie materialnych, obiektów. W szczególności może okazać się fizycznie uzasadnione rozpatrywanie obrotu baz wektorów własnych pewnych tensorów symetrycznych, oraz obrotów innych obiektów względem tych baz. W rozpatrywanym dopiero co przykładzie potrafiłiśmy dość prosto znaleźć prędkości obrotu wektorów własnych tensorów  $U$  i  $V$  ( $C$  i  $B$ ). Przyjrzyjmy się teraz temu problemowi w nieco ogólniejszym sformułowaniu.

Niechaj zadana będzie zależność od czasu pewnego tensora symetrycznego  $A$ , założymy na razie, dla uproszczenia rozważań (później postaramy się uwolnić od tego założenia), że w rozpatrywanym przedziale czasu wszystkie wartości własne pozostają różne, tj. że w każdej chwili wektory własne są dobrze określone. Niechaj wektory  $\varepsilon_i(t)$  będą jednostkowymi wektorami własnymi tensora  $A$ . Trójka wektorów bazowych, przy poczynionych założeniach porusza się ruchem sztywnym, istnieje zatem taki wektor  $\omega$  i dualny do niego tensor  $\Omega$ , że dla każdego z wektorów  $\varepsilon_i(t)$  prawdziwa jest zależność

$$(3.3.17) \quad \dot{\varepsilon}_i = \omega \times \varepsilon_i = \Omega \varepsilon_i.$$

Możemy zatem, odstępując od konwencji sumacyjnej, napisać

$$(3.3.18) \quad \dot{A} = \sum_{i=1}^3 \left( \dot{A}_i(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_i) + A_i(\Omega \varepsilon_i \otimes \varepsilon_i) + A_i(\varepsilon_i \otimes \Omega \varepsilon_i) \right).$$

Pierwszy człon, który oznaczmy przez  $\bar{\mathbf{A}} \equiv \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_i)^S$  jest współosiowy z tensorem  $\mathbf{A}$  a zatem komutuje z nim,

$$(3.3.19) \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

własność tę wykorzystamy w dalszych przekształceniach. Zależność (3.3.18) da się zapisać w zwartej „absolutnej” postaci

$$(3.3.20) \quad \dot{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}} + \Omega\mathbf{A} - \mathbf{A}\Omega.$$

Nasuwając na obie strony równości (3.3.20) kolejno z lewej i z prawej strony tensor,  $\mathbf{A}$  a następnie odejmując stronami i korzystając z (3.3.19) otrzymujemy następujące równanie wiążące poszukiwany tensor  $\Omega$  z tensorami  $\mathbf{A}$  i  $\dot{\mathbf{A}}$ :

$$(3.3.21) \quad \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A} - \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}} = \Omega\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\Omega\mathbf{A} + \mathbf{A}^2\Omega.$$

Zapišemy prawą stronę równości (3.3.21) przy pomocy macierzy reprezentacji tensorów w bazie własnej tensora  $\mathbf{A}$  i macierzy składowych poszukiwanego wektora prędkości kątowej  $\omega$  ( $\Omega_{ij} = -\omega_k \varepsilon_{kij}$ ) w tejże bazie

$$(3.3.22) \quad \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \omega_3 & (\lambda_3 - \lambda_1)^2 \omega_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \omega_3 & 0 & -(\lambda_3 - \lambda_2) \omega_1^2 \\ -(\lambda_3 - \lambda_1)^2 \omega_2 & (\lambda_3 - \lambda_2) \omega_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz z prawej strony równości (3.3.22), jest antysymetryczna, zatem istnieje wektor w dualny do reprezentowanego przez nią tensora, w rozważanej bazie jego składowe wyrażają się następująco:

<sup>5</sup> $T_{\xi}$  wielkość tensorową możemy interpretować jako pochodną współobrotową tensora względem własnej bazy wektorów własnych, nie zależy ona od tego czy baza ta jest określona jednoznacznie, czy też nie.

$$(3.3.23) \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_3)^2 \omega_1 \\ (\lambda_3 - \lambda_1)^2 \omega_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_2 - \lambda_3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_3 - \lambda_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Dla ułatwienia dalszych rozważań wprowadzimy pewne oznaczenie, tensor symetryczny, którego reprezentacją jest macierz diagonalna występująca z prawej strony równości (3.3.23) oznaczmy przez  $\mathbf{Z}$  (por. [4]) Przy wykorzystaniu tych oznaczeń oraz zależności (3.3.23) możemy równość (3.3.21) przepisać w następującej postaci:

$$(3.3.24) \quad \dot{A}_{pr} A_{rq} - A_{pr} \dot{A}_{rq} = -Z_{ij} \omega_j \varepsilon_{ipq},$$

mnożąc to wyrażenie obustronnie przez  $\varepsilon_{pqk}$  i korzystając z tożsamości

$$(3.3.25) \quad \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{pqk} = 2\delta_{ik},$$

możemy napisać

$$(3.3.26) \quad (\dot{A}_{pr} A_{rq} - A_{pr} \dot{A}_{rq}) \varepsilon_{kpq} = -2Z_{kj} \omega_j,$$

lub

$$(3.3.27) \quad -\frac{1}{2} Z_{jk}^{-1} \varepsilon_{kpq} (\dot{A}_{pr} A_{rq} - A_{pr} \dot{A}_{rq}) = \omega_j.$$

Zauważmy, że wszystkie wzory, począwszy od (3.3.18), aż do (3.3.26) wyłącznie prawdziwe są bez względu na to, czy wartości własne są równe sobie, czy też nie. Inaczej rzecz się ma z zależnością (3.3.27) – nie da się ona zapisać w przypadku, gdy choć dwie wartości własne są sobie równe, wtedy bowiem tensor  $\mathbf{Z}$  ma zerowe wartości własne i nie istnieje jego odwrotność.

Przechodząc od wektora  $\omega$  do tensora  $\Omega$  i od zapisu wskaźnikowego do absolutnego możemy przepisać (3.3.27) w następującej postaci:

$$(3.3.28) \quad \Omega = (\varepsilon \mathbf{Z}^{-1} \varepsilon) \circ (\mathbf{A} \dot{\mathbf{A}}),$$

gdzie symbolem „ $\circ$ ” oznaczyliśmy nasunięcie tensora o walencji 4 na tensor o walencji 2 po dwóch wskaźnikach:  $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{C} \Leftrightarrow A_{ijk} B_{kl} = C_{ij}^6$ .

Wzory (3.3.27) i (3.3.28) formalnie rozwiązują zagadnienie (przynajmniej dla tensorów o różnych wartościach własnych) dla niektórych zastosowań mogą one jednak okazać się nieefektywne, w tym sensie, że nie znamy na razie wzorów pozwalających w

<sup>6</sup>Wyprowadzając wzór (3.3.28) skorzystaliśmy również z dość oczywistej zależności, obowiązującej dla dowolnego tensora  $\mathbf{T}$ , mianowicie  $\varepsilon_{ijk} (T_{ij} - T_{ji}) = 2\varepsilon_{ijk} T_{ij}$ .

dowolnej bazy (lub wogóle bez eksplikowania bazy) wyrazić tensor  $\mathbf{Z}^{-1}$ . Zajmiemy się zatem poszukiwaniem jawnego wyrażenia dla tego tensora.

Najoszczędniejszą drogą do tego celu wydaje się tu skorzystanie z pewnej konstrukcji pomocniczej [4], [5]. Dla danego tensora symetrycznego  $\mathbf{A}$  zdefiniujemy tensor  $\mathbf{A}^\perp$  poprzez zadanie jego reprezentacji w bazie wersorów własnych tensora  $\mathbf{A}$ :

$$(3.3.29) \quad [A_{ij}^\perp] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \lambda_2 - \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy przez  $\mathbf{S}$  dewiator tensora  $\mathbf{A}$ . Nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że tensor  $\mathbf{A}^\perp$  spełnia następujące zależności:

$$(3.3.30) \quad \begin{aligned} (a) \quad 3\mathbf{A}^{\perp 2} &= \mathbf{Z}; & (b) \quad \text{tr } \mathbf{A}^\perp &= 0; \\ (c) \quad \text{tr } \mathbf{A}^{\perp 2} &= \text{tr } \mathbf{S}^2; & (d) \quad \text{tr}(\mathbf{A}^\perp \mathbf{S}) &= 0; \\ (e) \quad \mathbf{A}^{\perp 2} + \mathbf{S}^2 &= \frac{2}{3} \mathbf{I} \text{tr } \mathbf{S}^2. \end{aligned}$$

Przedstawimy dewiator  $\mathbf{S}$  w postaci tzw. gwiazdy Pełczyńskiego:

$$(3.3.31) \quad \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr } \mathbf{S}^2} \begin{bmatrix} \sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\gamma + \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\gamma + \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix},$$

gdzie sens niezmiennika  $\gamma$  („kąta kształtu dewiatora”) wyjaśnia zależność

$$(3.3.32) \quad \sin 3\gamma = -\sqrt{54} \frac{\det \mathbf{S}}{(\text{tr } \mathbf{S}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Z zależności (3.3.30) (e) wynika, że analogiczna reprezentacja tensora  $\mathbf{A}^\perp$  ma, z dokładnością do znaku, postać

$$(3.3.33) \quad \begin{bmatrix} A_{11}^\perp & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^\perp & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}^\perp \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr } \mathbf{S}^2} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma + \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\gamma + \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}.$$

wniosujemy stąd bez trudności, że

$$(3.3.34) \quad \cos 3\gamma = -\sqrt{54} \frac{\det \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{(\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a zatem

$$(3.3.35) \quad \det \mathbf{S}^2 + \det \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \frac{(\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^3}{54}.$$

Przygotowawszy w ten sposób niezbędną amunicję możemy już teraz łatwo ustrzelić główny cel i znaleźć tensor  $\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{3} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ . Skorzystamy w tym celu ze wzoru Cayleya-Hamiltona<sup>7</sup> dla tensora  $\mathbf{Z}$ , który zapiszemy w następującej postaci:

$$(3.3.36) \quad \mathbf{Z}^{-1} = \frac{\mathbf{Z}^2 - \mathbf{Z} \operatorname{tr} \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \left( (\operatorname{tr} \mathbf{Z})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{Z}^2 \right)}{\det \mathbf{Z}}$$

Podstawiając kolejno do wzoru (3.3.36) następujące wielkości

$$(3.3.30'(e)) \quad \mathbf{Z} = 2\mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 - 3\mathbf{S}^2;$$

$$(3.3.30'(c)) \quad \operatorname{tr} \mathbf{Z} = 3 \operatorname{tr} \mathbf{S}^2;$$

$$(3.3.35') \quad \det \mathbf{Z} = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^3 - 27 \det \mathbf{S}^2$$

$$(3.3.37) \quad \mathbf{Z}^2 = 4\mathbf{I} (\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^2 - 12\mathbf{S}^2 \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 + 9\mathbf{S}^4 = 4\mathbf{I} (\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^2 - \frac{11}{2} \mathbf{S}^2 \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 + 9\mathbf{S} \det \mathbf{S}$$

$$(3.3.38) \quad \operatorname{tr} \mathbf{Z}^2 = \frac{9}{2} (\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^2;$$

po uporządkowaniu otrzymujemy

<sup>7</sup>Pod nazwą wzoru (twierdzenia) Cayleya-Hamiltona znana jest następująca zależność:

$\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}^2 \operatorname{tr} \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{T} (\operatorname{tr} \mathbf{T}^2 - (\operatorname{tr} \mathbf{T})^2) + \mathbf{I} \det \mathbf{T}$ , dla tensorów symetrycznych wynika ona natchmiaszt z faktu, że wartości własne spełniają równanie charakterystyczne  $\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} \mathbf{T} - \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{T}^2 - (\operatorname{tr} \mathbf{T})^2) - \det \mathbf{T} = 0$ , wystarczy zapisać rozważaną zależność tensorową w bazie wektorów własnych, aby stała się ona oczywista.

$$(3.3.39) \quad \mathbf{Z}^{-1} = \frac{\mathbf{I}(\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^2 + 6\mathbf{S}^2 \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 + 36\mathbf{S} \det \mathbf{S}}{2\left((\operatorname{tr} \mathbf{S}^2)^3 - 54 \det \mathbf{S}^2\right)} = \frac{1}{2 \operatorname{tr} \mathbf{S}^2} \frac{\mathbf{I} + 6\sigma^2 - 2\sqrt{6}\sigma \sin 3\gamma}{\cos^2 3\gamma},$$

gdzie przez  $\sigma$  oznaczyliśmy unormowaną wartość dewiatora  $\mathbf{S}$ :  $\sigma \sqrt{\operatorname{tr} \mathbf{S}^2} = \mathbf{S}$ . Czytelnik, który woli ściśle „wielomianowy” wzór może zastąpić wyznacznik dewiatora przez  $\frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{S}^3$ . Przedstawiając tensor  $\mathbf{Z}^{-1}$ , (a więc, na mocy zależności (3.3.28), również i tensor  $\Omega$ ) przez dewiator tensora  $\mathbf{A}$  mieliśmy na uwadze nie tyle dydaktyczny cel pokazania, że prędkość obrotu wektorów własnych nie zależy od zachowania się części kulistej tensora<sup>8</sup> (to jest niemal oczywiste), co po prostu zwarte i łatwo dające się interpretować wzory. Czytelnikowi, który chciałby widzieć wzór (3.3.39) zapisany przy pomocy potęg tensora  $\mathbf{A}$  i ich śladów pozostaje życzyć powodzenia i odrobiny cierpliwości przy jego wyprowadzaniu.

Jak stwierdziliśmy już wyżej, wszystkie zależności, aż do (3.3.27) pozostają prawdziwe dla dowolnych tensorów symetrycznych, ale niech np. wszystkie trzy wartości własne pewnego tensora będą równe, wtedy każdy tensor jest z nim przemienne, a tensor  $\mathbf{Z}$  jest tożsamościowo równy zeru, zatem już począwszy od zależności (3.3.21) nasze wzory są puste (tożsamościowo spełnione). Czy oznacza to, że tensor  $\Omega$  może być przyjęty dowolnie lub np. (jak to błędnie stwierdzają autorzy pewnej, skądinąd cennej, całkiem niedawno opublikowanej pracy [15]) musi być równy zeru?

Aby nie wznosić się, być może bez potrzeby, na wyżyny rozważań o klasach ciągłości funkcji tensorowych i ich pochodnych, rozpatrzmy trzy konkretne przykłady, dla oszczędności zapisu ograniczymy się do obiektów dwuwymiarowych.

#### P r z y k ł a d 1.

Niechaj w pewnej ustalonej, przyjętej za nieruchomą, bazie reprezentacja tensora  $\mathbf{A}(t)$  ma następującą postać:

$$(3.3.40) \quad [A_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} a + \varepsilon(t) & \eta(t) \\ \eta(t) & a - \varepsilon(t) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(3.3.41) \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 t^2 & \text{dla } t < 0; \\ 0 & \text{dla } t \geq 0; \end{cases} \quad \eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \eta_0 t^2 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

<sup>8</sup>Czytelnik może łatwo sprawdzić, że  $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A} - \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{S} - \mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}$



Składowe tensora  $\mathbf{A}$  są zatem w chwili  $t = 0$ , kiedy przybiera on postać kulistą nie tylko ciągłymi, ale nawet gładkimi funkcjami czasu. Jak już wspominaliśmy, kierunki wektorów własnych tensora nie zależą od jego części kulistej, zatem dla  $t < 0$  są to kierunki własne tensora  $\mathbf{A}'$  określonego wyrażeniem:

$$(3.3.42) \quad \mathbf{A}' = \varepsilon_0 t^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (t < 0),$$

natomiast dla  $t \geq 0$  mamy do czynienia z kierunkami własnymi tensora  $\mathbf{A}''$

$$(3.3.43) \quad \mathbf{A}'' = \eta_0 t^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (t \geq 0).$$

Jak łatwo sprawdzić kierunki własne pierwszego z tensorów pokrywają się z kierunkami wektorów bazowych, podczas gdy w przypadku drugiego, dla  $t > 0$  są one obrócone o  $\pi/4$ . Kierunki własne w chwili  $t = 0$  nie są co prawda określone, ale istnieją ich dobrze określone granice prawostronna i lewostronna, i nie są one równe. Widzimy zatem, że ciągłość, a nawet gładkość składowych tensora jako funkcji czasu nie gwarantuje ciągłości wektorów własnych. W podanym przez nas przykładzie prędkość obrotu kierunków głównych była ciągła (dokładniej mówiąc jej granica prawostronna i lewostronna były równe zeru).

Rozpatrzmy następujący przykład

#### Przykład 2.

Niechaj

$$(3.3.44) \quad [A_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} \cos(2\omega(t)t) & \sin(2\omega(t)t) \\ \sin(2\omega(t)t) & -\cos(2\omega(t)t) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(3.3.45) \quad \omega(t) = \begin{cases} \omega_0 & \text{dla } t < 0 \\ 2\omega_0 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

W tym przykładzie, przy odpowiedniej umowie co do numeracji wektorów własnych, mamy sytuację odwrotną – kierunki własne zmieniają się w sposób ciągły – w chwili gdy tensor staje się kulisty, zarówno lewostronnie, jak i prawostronnie dążą one do kierunków wektorów bazowych. Natomiast lewostronna i prawostronna granica prędkości kątownej różnią się dwukrotnie. Widzimy zatem sytuację odwrotną niż poprzednim przykładzie. I mamy wreszcie:

prędkości, pochodna „współobrotowa” (nie jasne z czym właściwie ma być ta współobrotowość) obliczana z użyciem tego właśnie tensora znana jest od dawna pod nazwą pochodnej Zaremby–Jaumanna  $\overset{\vee}{\mathbf{T}}$ , w szczególności jeżeli  $\mathbf{a}$  jest wektorem, a  $\mathbf{A}$  – tensorem drugiego rzędu, to obowiązują zależności

$$(3.3.49) \quad \begin{aligned} \overset{\vee}{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{W}\mathbf{a}; \\ \overset{\vee}{\mathbf{A}} &= \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{W}. \end{aligned}$$

Odnosnie sensu fizycznego, czy chociażby geometrycznego tak zdefiniowanej wielkości, w przypadku gdy ruchu nawet w przybliżeniu nie jest sztywny, autor nie jest w stanie dodać nic więcej do tego, co było już dyskutowane uprzednio.

Jeżeli pochodna współobrotowa pewnego tensora  $\mathbf{B}$  względem tensora symetrycznego  $\mathbf{A}$  jest równa zeru (co oznacza, że składowe tensora  $\mathbf{B}$  w bazie wersorów własnych tensora  $\mathbf{A}$  są stałe), to niewątpliwie tensory możemy traktować jako „na sztywno” wzajemnie związane. W szczególności jeżeli oba są symetryczne, to prędkości kątowe baz złożonych z ich wektorów własnych są jednakowe. „Znikanie” pochodnej współobrotowej nie jest oczywiście warunkiem koniecznym istnienia wspólnej prędkości obrotu (gdyby tak było, to nawet tensor sam ze sobą mógłby być „niewspółobrotowy”). Jeżeli oba tensory obracają się bez zmiany kształtu, tj. zachowane są niezmienniki każdego z nich, to problem współobrotowości sprowadza się do zachowania ich wspólnych niezmienników, takich jak  $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A}^2\mathbf{B})$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^2)$  itp. nie potrafimy jednak podać innego kryterium współobrotowości dwóch dowolnie zmieniających się tensorów zadanych przez składowe w dowolnej bazie, poza wykorzystaniem dla obu z nich wzorów (3.3.28) i (3.3.39) i następnego porównania wyników.

W prostych rozważaniach np. dotyczących teorii plastyczności wprowadza się pojęcie proporcjonalnych dróg obciążenia, mówiąc, że np. tensor naprężenia zmienia się proporcjonalnie, jeżeli w każdej chwili istnieje taki mnożnik  $k$ , że  $\sigma = k\sigma_0$ , gdzie przez  $\sigma_0$  oznaczamy pewien stan naprężenia. Na równi z tym pojęciem możemy rozważać współosiowość tensora naprężenia w dowolnej chwili z tensorem naprężenia w pewnym stanie porównawczym. Podejście takie jest owoce i poprawne w teoriach liniowych, gdzie utożsamiamy współrzędne materialne i przestrzenne cząstek materialnych (lub, co na jedno wychodzi, nie odróżniamy współrzędnych materialnych w konfiguracji odniesienia od współrzędnych konwekcyjnych w konfiguracji aktualnej).

W ogólnym jednak przypadku, jeżeli porównujemy orientacje wektorów własnych jakiegokolwiek tensora w różnych chwilach czasu, musimy określić, dla jakiego obserwatora ma to zachodzić, bowiem tensor np. nieruchomy dla pewnego obserwatora może dla innego obserwatora się obracać, odwołanie się, że np. współosiowość ma zachodzić dla obserwatora związanego z daną cząstką materialną stanowi „wyganianie diabła szatanem”: piłka wraca na naszą połowę boiska zmuszając nas do zdeklarowania się, jak właściwie obraca się materiał, a na to pytanie już przedtem nie umieliśmy sensownie odpowiedzieć. Wydaje się jednak, że sytuacja nie zawsze jest

tak beznadziejna. Kwestia ta wymaga systematycznego i ścisłego rozważenia. Przede wszystkim należy ustalić, co będziemy rozumieć pod współosiowym odkształceniem.

Niechaj dana będzie pewna rodzina odwzorowań (konfiguracji) ciała, dla ustalenia uwagi założymy, że jest to jednoparametrowa rodzina, gdzie parametrem jest czas, ponieważ interesuje nas jedynie zachowanie się otoczenia cząstki materialnej opisywane przez pierwsze pochodne przestrzenne wektora położenia, możemy bez zmniejszenia ogólności ograniczyć się do odwzorowań liniowych (afinicznych). Nie ulega wątpliwości, że wszystkie odwzorowania typu

$$(3.3.50) \quad \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \end{bmatrix},$$

gdzie  $R^i$  i  $r^i$  są składowymi kartezjańskimi wektora położenia cząstki w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej, będziemy skłonni uważać za współosiowe. W bazie układu kartezjańskiego tensor  $\mathbf{F}$  ma postać:

$$(3.3.51) \quad [F_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix}$$

natomiast dla wektorów materialnych, skierowanych w konfiguracji odniesienia zgodnie z wektorami bazy kartezjańskiej mamy

$$(3.3.52) \quad \mathbf{a}_i = \lambda_i(t) \mathbf{A}_i \quad (\mathbf{A}_i \parallel \mathbf{e}_i, \text{ bez sumowania}).$$

W dotychczasowym toku rozumowania związaliśmy się z jedną określoną bazą w konfiguracji odniesienia i z jednym wybranym obserwatorem. Wybór bazy ma w tym przypadku charakter „absolutny” podstawą jego bowiem stanowi wybór włókien wyróżnionych przez samą rodzinę konfiguracji, mianowicie takich, które niezależnie od wyboru konfiguracji pozostają prostopadłe (konfiguracje, dla których takie włókna nie dadzą się wskazać leżą poza zakresem naszych zainteresowań, nie należą one z definicji do rozpatrywanej rodziny). Natomiast wybór obserwatora jest całkowicie przypadkowy. Z punktu widzenia procesu deformacji, określonego przez wydłużenia włókien materialnych i zmiany kątów pomiędzy nimi, nie ma żadnego znaczenia czy wyróżniony reper materialny pozostaje współosiowy do reperu używanego przez obserwatora, czy też obraca się względem niego, co może być spowodowane zarówno obrotem obserwatora względem układu „laboratoryjnego” traktowanego przez nas jako nieruchomy jak i obrotem układu materialnego, którego częścią jest badane przez nas ciało – np. maszyny wytrzymałościowej wraz z zamocowaną w jej szczękach próbką.

Aby zatem uwolnić się od tego niepotrzebnego ograniczenia musimy rozszerzyć pojęcie współosiowości odkształceń. Różnie będzie przyjęć następującą definicję:

prędkości, pochodna „współobrotowa” (nie jasne z czym właściwie ma być ta współobrotowość) obliczana z użyciem tego właśnie tensora znana jest od dawna pod nazwą pochodnej Zaremby–Jaumanna  $\overset{\vee}{\mathbf{T}}$ , w szczególności jeżeli  $\mathbf{a}$  jest wektorem, a  $\mathbf{A}$  – tensorem drugiego rzędu, to obowiązują zależności

$$(3.3.49) \quad \begin{aligned} \overset{\vee}{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{W}\mathbf{a}; \\ \overset{\vee}{\mathbf{A}} &= \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{W}. \end{aligned}$$

Odnośnie sensu fizycznego, czy chociażby geometrycznego tak zdefiniowanej wielkości, w przypadku gdy ruchu nawet w przybliżeniu nie jest sztywny, autor nie jest w stanie dodać nic więcej do tego, co było już dyskutowane uprzednio.

Jeżeli pochodna współobrotowa pewnego tensora  $\mathbf{B}$  względem tensora symetrycznego  $\mathbf{A}$  jest równa zeru (co oznacza, że składowe tensora  $\mathbf{B}$  w bazie wersorów własnych tensora  $\mathbf{A}$  są stałe), to niewątpliwie tensory możemy traktować jako „na sztywno” wzajemnie związane. W szczególności jeżeli oba są symetryczne, to prędkości kątowne baz złożonych z ich wektorów własnych są jednakowe. „Znikanie” pochodnej współobrotowej nie jest oczywiście warunkiem koniecznym istnienia wspólnej prędkości obrotu (gdyby tak było, to nawet tensor sam ze sobą mógłby być „niewspółobrotowy”). Jeżeli oba tensory obracają się bez zmiany kształtu, tj. zachowane są niezmienniki każdego z nich, to problem współobrotowości sprowadza się do zachowania ich wspólnych niezmienników, takich jak  $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A}^2\mathbf{B})$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^2)$  itp. nie potrafimy jednak podać innego kryterium współobrotowości dwóch dowolnie zmieniających się tensorów zadanych przez składowe w dowolnej bazie, poza wykorzystaniem dla obu z nich wzorów (3.3.28) i (3.3.39) i następnego porównania wyników.

W prostych rozważaniach np. dotyczących teorii plastyczności wprowadza się pojęcie proporcjonalnych dróg obciążenia, mówiąc, że np. tensor naprężenia zmienia się proporcjonalnie, jeżeli w każdej chwili istnieje taki mnożnik  $k$ , że  $\boldsymbol{\sigma} = k\boldsymbol{\sigma}_0$ , gdzie przez  $\boldsymbol{\sigma}_0$  oznaczamy pewien stan naprężenia. Na równi z tym pojęciem możemy rozważać współosiowość tensora naprężenia w dowolnej chwili z tensorem naprężenia w pewnym stanie porównawczym. Podejście takie jest owocne i poprawne w teoriach liniowych, gdzie utożsamiamy współrzędne materialne i przestrzenne cząstek materialnych (lub, co na jedno wychodzi, nie odróżniamy współrzędnych materialnych w konfiguracji odniesienia od współrzędnych konwekcyjnych w konfiguracji aktualnej).

W ogólnym jednak przypadku, jeżeli porównujemy orientacje wektorów własnych jakiegokolwiek tensora w różnych chwilach czasu, musimy określić, dla jakiego obserwatora ma to zachodzić, bowiem tensor np. nieruchomy dla pewnego obserwatora może dla innego obserwatora się obracać, odwołanie się, że np. współosiowość ma zachodzić dla obserwatora związanego z daną cząstką materialną stanowi „wyganieanie diabła szatanem”: piłka wraca na naszą połowę boiska zmuszając nas do zdeklarowania się, jak właściwie obraca się materiał, a na to pytanie już przedtem nie umieliśmy sensownie odpowiedzieć. Wydaje się jednak, że sytuacja nie zawsze jest

tak beznadziejna. Kwestia ta wymaga systematycznego i ścisłego rozważenia. Przede wszystkim należy ustalić, co będziemy rozumieć pod współosiowym odkształceniem.

Niechaj dana będzie pewna rodzina odwzorowań (konfiguracji) ciała, dla ustalenia uwagi założymy, że jest to jednoparametrowa rodzina, gdzie parametrem jest czas, ponieważ interesuje nas jedynie zachowanie się otoczenia cząstki materialnej opisywane przez pierwsze pochodne przestrzenne wektora położenia, możemy bez zmniejszenia ogólności ograniczyć się do odwzorowań liniowych (afinicznych). Nie ulega wątpliwości, że wszystkie odwzorowania typu

$$(3.3.50) \quad \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \end{bmatrix},$$

gdzie  $R^i$  i  $r^i$  są składowymi kartezyjskimi wektora położenia cząstki w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej, będziemy skłonni uważać za współosiowe. W bazie układu kartezyjskiego tensor  $\mathbf{F}$  ma postać:

$$(3.3.51) \quad [F_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix}$$

natomiast dla wektorów materialnych, skierowanych w konfiguracji odniesienia zgodnie z wektorami bazy kartezyjskiej mamy

$$(3.3.52) \quad \mathbf{a}_i = \lambda_i(t) \mathbf{A}_i \quad (\mathbf{A}_i \parallel \mathbf{e}_i, \text{ bez sumowania}).$$

W dotychczasowym toku rozumowania związaliśmy się z jedną określoną bazą w konfiguracji odniesienia i z jednym wybranym obserwatorem. Wybór bazy ma w tym przypadku charakter „absolutny” podstawą jego bowiem stanowi wybór włókien wyróżnionych przez samą rodzinę konfiguracji, mianowicie takich, które niezależnie od wyboru konfiguracji pozostają prostopadłe (konfiguracje, dla których takie włókna nie dadzą się wskazać leżą poza zakresem naszych zainteresowań, nie należą one z definicji do rozpatrywanej rodziny). Natomiast wybór obserwatora jest całkowicie przypadkowy. Z punktu widzenia procesu deformacji, określonego przez wydłużenia włókien materialnych i zmiany kątów pomiędzy nimi, nie ma żadnego znaczenia czy wyróżniony reper materialny pozostaje współosiowy do reperu używanego przez obserwatora, czy też obraca się względem niego, co może być spowodowane zarówno obrotem obserwatora względem układu „laboratoryjnego” traktowanego przez nas jako nieruchomy jak i obrotem układu materialnego, którego częścią jest badane przez nas ciało – np. maszyny wytrzymałościowej wraz z zamocowaną w jej szczękach próbka.

Aby zatem uwolnić się od tego niepotrzebnego ograniczenia musimy rozszerzyć pojęcie współosiowości odkształceń. Rozsądnie będzie przyjmując następującą definicję:

Rodzinę konfiguracji lokalnego otoczenia cząstki materialnej będziemy uważać za współosiową, jeżeli istnieją takie trzy wektory materialne, które pozostają wzajemnie ortogonalne dla dowolnej konfiguracji tej rodziny.

$$(3.3.53) \quad \mathbf{a}_j = \mathbf{R}(t)\lambda(t)\mathbf{A}_j \quad (\mathbf{a}_j = \mathbf{F}\mathbf{A}_j; \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_k = \delta_{jk}).$$

Z jednoznaczności rozkładu biegunowego wynika natomiast, że warunek (3.3.53) jest równoważny żądaniu, aby wszystkie prawe tensory rozciągania  $\mathbf{U}(t)$  dla danej rodziny konfiguracji (procesu odkształcenia, jeżeli traktujemy parametr  $t$  jako czas rzeczywisty) miały wspólne wektory własne. Innymi słowy, reprezentacje tensorów  $\mathbf{U}(t)$  (a zatem i  $\mathbf{C}(t)$ ) w niezależnej od czasu bazie ortonormalnej  $\{\mathbf{A}_k\}$  winny być diagonalne

$$(3.3.54) \quad \mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2(t)(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i).$$

Jeżeli rozpatrujemy proces deformacji, tj., jak to już wspominaliśmy, traktujemy parametr  $t$  jako czas, wtedy z zależności (3.3.54) i ze stałości wektorów  $\mathbf{A}_k$  wynika natomiast diagonalność reprezentacji tensora  $\dot{\mathbf{C}}(t)$  w bazie  $\{\mathbf{A}_k\}$ , co z kolei implikuje przemienność tensorów  $\mathbf{C}(t)$  i  $\dot{\mathbf{C}}(t)$

$$(3.3.55) \quad \mathbf{C}\dot{\mathbf{C}} - \dot{\mathbf{C}}\mathbf{C} = 0.$$

Korzystając z zależności (3.1.23) i (3.2.2) przepiszemy równość (3.3.55) jako

$$(3.3.56) \quad \begin{aligned} & \mathbf{F}^T \mathbf{F} (\mathbf{F}^T \nabla \mathbf{v}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla \mathbf{v} \mathbf{F}) - (\mathbf{F}^T \nabla \mathbf{v}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla \mathbf{v} \mathbf{F}) \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \\ & \mathbf{F}^T (\mathbf{F} \mathbf{F}^T \nabla \mathbf{v}^T + \mathbf{F} \mathbf{F}^T \nabla \mathbf{v}) \mathbf{F} - \mathbf{F}^T (\nabla \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^T + \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{F}^T) \mathbf{F} = \\ & = \mathbf{F}^T (\mathbf{B}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{B}) \mathbf{F} = 0. \end{aligned}$$

Wobec nieosobliwości tensora  $\mathbf{F}$  możemy ostatnią z ciągu równości (3.3.56) przepisać w postaci następującego warunku koniecznego współosiowości procesu deformacji

$$(3.3.57) \quad \mathbf{B}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{B} = 0.$$

Jeżeli proces deformacji jest współosiowy, to możemy wprowadzić pojęcie jego proporcjonalności. Proporcjonalnym, rozsądnie będzie nazwać taki współosiowy proces deformacji, przy którym reprezentacja tensora  $\mathbf{C}$  w bazie  $\{\mathbf{A}_k\}$  ma postać:

$$(3.3.58) \quad [C_{ij}] = f(t) \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix},$$

gdzie wielkości  $\lambda_i$  nie zależą od parametru  $t$  (od czasu).

Współosiowość lub proporcjonalność innych tensorów określonych w cząstce materialnej nietrudno zdefiniować jeżeli proces deformacji jest współosiowy, uzasadnione będzie wtedy żądanie, aby zmieniały się one współobrotowo z tensorem **B**. Nietrudno widzieć, że jeżeli kierunki własne tensora **C** są stałe, to wektory **RA**, są wektorami własnymi tensora **V**, a zatem i **B**. Zatem za zmieniające się w czasie współobrotowo z deformacją będziemy uważać takie zależne od czasu, określone w cząstce materialnej symetryczne wielkości tensorowe, dla których prędkość obrotu bazy wektorów własnych  $\omega$  będzie dualna do tensora antysymetrycznego  $\mathbf{RR}^{-1}$

$$(3.3.59) \quad \mathbf{RR}^{-1} = -\omega \varepsilon.$$

Jeżeli zmienność tensora jest współosiowa, to pojęcie jego proporcjonalnej zmienności wynika w sposób naturalny jako zachowanie stosunku wartości własnych w czasie

$$(3.3.60) \quad \lambda_i / \lambda_j = \text{const.} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Jeżeli sam proces deformacji nie jest współosiowy – autor nie potrafi zaproponować sensownej definicji współosiowej lub proporcjonalnej (z punktu widzenia materiału) zmienności jakiegokolwiek innej wielkości zadanej w cząstce przy pomocy tensora symetrycznego, nie jest np. (przynajmniej dla autora) jasne, jak należałoby rozumieć proporcjonalność zmian naprężenia, w przypadku, gdy wektory własne tensora **C** nie są stałe.

### 3.4 Niejednorodne obroty, zginanie

W inżynierskich zastosowaniach mechaniki ośrodka ciągłego umownie zwanych teorią konstrukcji, trójwymiarowe problemy teorii sprężystości i plastyczności sprowadza się przez wprowadzenie pewnych uproszczonych modeli do zagadnień dwuwymiarowych (płyty, powłoki, membrany) lub jednowymiarowych (pręty, belki, cięgna). Przy tym podejściu owocnym okazuje się zastąpienie dokładnego opisu rozkładu wydłużeń włókien normalnych do przekrojów poprzecznych przez podanie integralnych charakterystyk — obrotów przekrojów poprzecznych, które przyjmuje się jako płaskie. Jeżeli pole obrotu zmienia się od przekroju do przekroju, to mówimy o zginaniu. Podejście takie może mieć sens również dla ośrodków trójwymiarowych o niejednorodnej strukturze, zwłaszcza w tych przypadkach, gdy mamy do czynienia z rozciągliwymi elementami strukturalnymi takimi, jak włókna zbrojenia lub warstwy laminatów, szczególnie wtedy, gdy własności mechaniczne (plastyczne, sprężyste) poszczególnych składowych kompozytu istotnie się od siebie różnią [1], [2], [3].

Rozpocznijmy nasze rozważania nad niejednorodnymi obrotami w ośrodku ciągłym od zginania włókna materialnego [1]. Niechaj  $\tau(s)$ , gdzie przez  $s$  oznaczyliśmy długość łuku liczoną wzdłuż włókna, jest jednostkowym wektorem stycznym do włókna materialnego. Prostopadły do niego wektor  $\kappa$  określony zależnością

$$(3.4.1) \quad \kappa \equiv \frac{d\tau}{ds}$$

nazywać będziemy wektorem krzywizny włókna materialnego<sup>1</sup>.

Jeżeli chcemy rozpatrywać ośrodek zbrojony włóknami z zastosowaniem aparatu mechaniki kontinuum, to musimy realnie istniejące dyskretnie rozłożone włókna zbrojenia o skończonych grubościach zastąpić pewnym polem wektorowym, określonym na ciele materialnym, które traktować będziemy dalej jako pole wektorów stycznych do włókien materialnych. Będziemy zatem rozpatrywać pewną rodzinę włókien materialnych, zapewniających cały obszar zajmowany przez ciało, w ten sposób, że przez dowolną cząstkę materialną  $X$  przechodzi dokładnie jedno włókno rozpatrywanej rodziny przy czym jego kierunek jest określony przez wektor  $t(X)$  przypisany w rozpatrywanej konfiguracji cząstce materialnej  $X$ . Inaczej mówiąc rodzinę włókien materialnych zadajemy jako zbiór trajektorii pewnego pola wektorowego, zakładamy oczywiście że pole  $t(x(X))$  jest jako funkcja wektorowa położenia  $x(X)$  cząstki  $X$  dostatecznie gładkie aby miały sens wszystkie pojęcia z których korzystamy. Wygodnie jest sparametryzować rozpatrywane włókna materialne parametrem materialnym  $S$  którego wartość w danej cząstce należącej do włókna nie będzie się zmieniać w trakcie deformacji ciała, w szczególności jako parametr taki może być

<sup>1</sup>Termin ten, o ile autorowi wiadomo, nie jest powszechnie używany, natomiast do przyjętej terminologii należą następujące pojęcia: krzywizna  $\kappa \equiv |\kappa|$ , promień krzywizny  $\rho \equiv \frac{1}{\kappa}$ , środek krzywizny – punkt na normalnej, odległy od rozpatrywanego punktu na krzywej o  $\rho$  [12].



zmieniać w trakcie deformacji ciała, w szczególności jako parametr taki może być przyjęta wartość jednej ze współrzędnych materialnych, wybranych tak, aby włókna rozpatrywanej rodziny pokrywały się z liniami współrzędnościowymi.

Zakładając będziemy dalej, że wyjściowy układ włókien i rozwój deformacji osrodka w czasie są znane, postaramy się wyznaczyć charakterystyki opisujące zginanie włókien i jego rozwój w czasie.

Z punktu widzenia fizyki deformacji, istotniejszą wydaje się informacja na temat zachowania się wtopionych w osrodek włókien względem otaczającego kontinuum niż ewentualne zmiany przestrzenne, które mogą być związane np. ze sztywną translacją ciała lub jego globalnym obrotem. Z tego powodu, jak również ze względu na efektywność otrzymanych zależności w konkretnych zastosowaniach oraz ich zwartość i pewną elegancję będziemy, odmiennie niż w poprzednich rozdziałach, prowadzić nasze rozważania na reprezentacjach w ściśle określonych bazach – bazach układu konwekcyjnego. Niechaj więc  $\xi^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) będą materialnymi współrzędnymi konwekcyjnymi,  $S$  niech będzie parametrem materialnym, przez  $\tau(\xi^i)$  oznaczmy pole jednostkowych wektorów stycznych do włókien w konfiguracji aktualnej a przez  $A$  „materialnych” wektorów stycznych do włókien w konfiguracji odniesienia.

Wyrazimy składowe wektora  $\kappa$  przez pochodną kowariantną pola  $\tau$ :

$$(3.4.2) \quad \frac{d\tau}{ds} \cdot \mathbf{g}^a = \left( \frac{\partial \tau^\beta}{\partial \xi^\gamma} \frac{d\xi^\gamma}{ds} \mathbf{g}_\beta + \tau^\beta \frac{\partial \mathbf{g}_\beta}{\partial \xi^\gamma} \frac{d\xi^\gamma}{ds} \right) \cdot \mathbf{g}^a = \left( \frac{\partial \tau^a}{\partial \xi^\gamma} + \tau^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^a \right) \frac{d\xi^\gamma}{ds}.$$

Pochodne wartości współrzędnych po parametrze naturalnym wzdłuż włókna są niczym innym, jak składowymi wektora  $\tau$ , mamy bowiem

$$(3.4.3) \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{\partial \tau}{\partial \xi^a} \frac{d\xi^a}{ds} = \mathbf{g}_a \tau^a,$$

możemy zatem przepisać (3.4.2) w prostej postaci

$$(3.4.4) \quad \kappa^a = \tau_{;\beta}^a \tau^\beta.$$

Wzór (3.4.4) jest tyleż elegancki co i nieefektywny, nie znamy bowiem na razie pola  $\tau$  w konfiguracji aktualnej. Korzystając z faktu, że  $A$  jest wektorem materialnym (tj. jego składowe kontrawariantne w bazie konfiguracji odniesienia równe są składowym kontrawariantnym materialnego wektora stycznego  $a$  w bazie konfiguracji aktualnej) możemy napisać

$$(3.4.5) \quad \kappa^a = \left( \frac{A^a}{\sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}}} \right)_\beta \left( \frac{A^\beta}{\sqrt{A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}}} \right).$$

konfiguracji aktualnej, taka operacja jest poprawna ponieważ składowe kontrawariantne materialnego wektora stycznego nie zależą od konfiguracji. Pomiędzy pochodnymi kowariantnymi w obu tych konfiguracjach istnieje następująca zależność:

$$(3.4.6) \quad A_{\beta}^{\alpha} = A_{\beta}^{\alpha} + A^{\mu} \left( \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^{\alpha} \right),$$

gdzie średnikiem oznaczyliśmy kowariantne różniczkowanie w konfiguracji odniesienia, natomiast przez  $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$  symbole Christoffela w tejże konfiguracji<sup>2</sup>. Wykonując we wzorze (3.4.5) różniczkowanie, po uporządkowaniu otrzymujemy

$$(3.4.7) \quad \kappa^{\alpha} = \frac{A^{\nu} A^{\beta} A^{\varphi} A_{\beta}^{\theta} \left( \delta_{\theta}^{\alpha} \delta_{\varphi}^{\mu} - \delta_{\varphi}^{\alpha} \delta_{\theta}^{\mu} \right) g_{\mu\nu}}{\left( A^{\nu} A^{\gamma} g_{\nu\gamma} \right)^2} = \frac{A^{\nu} A^{\beta} A^{\varphi} \left( \frac{\partial A^{\theta}}{\partial \xi^{\beta}} + A^{\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^{\theta} \right) \left( \delta_{\theta}^{\alpha} \delta_{\varphi}^{\mu} - \delta_{\varphi}^{\alpha} \delta_{\theta}^{\mu} \right) g_{\mu\nu}}{\left( A^{\nu} A^{\gamma} g_{\nu\gamma} \right)^2}$$

Zauważmy, że w ostatnim członie równości (3.4.7) jedynymi wielkościami zależnymi od czasu są składowe tensora metrycznego w konfiguracji aktualnej oraz symbole Christoffela w tej konfiguracji. Z definicji tensora metrycznego mamy

$$(3.4.8) \quad \dot{g}_{\alpha\beta} = \dot{g}_{\alpha} \cdot g_{\beta} + g_{\alpha} \cdot \dot{g}_{\beta} = \frac{\partial v}{\partial \xi^{\alpha}} \cdot g_{\beta} + g_{\alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi^{\beta}} = v_{\beta,\alpha} + v_{\alpha,\beta} = 2D_{\alpha\beta}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$(3.4.9) \quad \dot{\tilde{\Gamma}}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\xi^{\alpha}, t)}{\partial \xi^{\beta} \partial \xi^{\gamma}} \cdot \mathbf{g}^{\mu} \right) = v_{\beta\gamma}^{\alpha}.$$

Kreski nad symbolami we wzorach (3.4.8) i (3.4.9) oznaczają, że mamy do czynienia z pochodnymi składowych reprezentacji, a nie z reprezentacjami pochodnych tensorów, w zależności od czasu bazy układu konwekcyjnego te dwie wielkości różnią się od siebie w sposób istotny.

Zależności (3.4.8) i (3.4.9) pozwalają nam łatwo wyznaczyć pochodne materialne składowych wektora  $\kappa$ , nie będziemy jednak przytaczać odpowiedniego wzoru, ponieważ, jest on skomplikowany, mało pouczający i, jak się wydaje, niezbyt przydatny. Rzecz w tym, że przy odkształcaniu np. materiałów zbrojonych włóknami

<sup>2</sup>Można wykazać, że różnice symboli Christoffela we współrzędnych konwekcyjnych wziętych w konfiguracji aktualnej i w konfiguracji odniesienia tworzą w bazie konfiguracji aktualnej reprezentację pewnego tensora  $\mathbf{K}$  o walencji trzy:  $K_{\mu\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\mu\beta}^{\alpha}$ ;  $\mathbf{K} = \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}$ .

<sup>3</sup>Przy wyprowadzaniu tej zależności mogą wystąpić pewne kłopoty z różniczkowaniem po czasie wektora kobazy, mamy jednak  $\dot{\delta}_{\beta}^{\alpha} = \dot{g}_{\alpha} \cdot g_{\beta} + g_{\alpha} \cdot \dot{g}_{\beta}$  czyli  $\dot{g}_{\alpha} = -g_{\alpha} \dot{g}_{\beta} g^{\beta} = -v_{\beta,\alpha} g^{\beta}$ , a dalej potrzebna już tylko pewna wprawa w przekształcaniach.

Zależności (3.4.8) i (3.4.9) pozwalają nam łatwo wyznaczyć pochodne materialne składowych wektora  $\kappa$ , nie będziemy jednak przytaczać odpowiedniego wzoru, ponieważ, jest on skomplikowany, mało pouczający i, jak się wydaje, niezbyt przydatny. Rzecz w tym, że przy odkształcaniu np. materiałów zbrojonych włóknami interesować nas będą często procesy zginania tj. raczej z m i a n y krzywizn włókien niż same ich wartości <sup>4</sup>.

Zanim przystąpimy do dalszych rozważań warto zastanowić się, co właściwie mamy rozumieć pod zginaniem włókien materialnych, (lub modelowanych przez nie elementów zbrojenia – włókien w sensie potocznego, technologicznego znaczenia tego terminu). Narzucająca się pierwsza odpowiedź, że każdą zmianę krzywizny włókna można traktować jako zginanie, po pewnym zastanowieniu się przestaje nas zadawałać.

Po pierwsze sama krzywizna może się nie zmieniać, jak np. przy skręcaniu giętkiego elementu o skończonej sztywności skrętnej włożonego z niewielkim luzem do zakrzywionej rurki. Jeżeli oznakujemy wstępnie nasz element, np. nanosząc nań z jednej strony podłużny pasek dobrze przylegającej czerwonej farby, to zauważymy, że przy obracaniu w zakrzywionym kanale wektor krzywizny jest skierowany na przemian w „czerwoną” stronę i w kierunku przeciwnym, nie wspominając już o całym kontinuum stanów pośrednich. Nie wystarczy także zadanie wektora krzywizny, może się bowiem zdarzyć, że wskutek sztywnego obrotu (np. wokół wektora stycznego do włókna) ośrodka z „wtopionym” zbrojeniem kierunek wektora krzywizny w układzie „laboratoryjnym” będzie się wciąż zmieniał, podczas gdy nasza intuicja inżynierska będzie nam mówiła, i, jak się wydaje, słusznie, że uznanie takiego procesu za zginanie prowadziłoby do pomieszania dobrze ustalonych i fizycznie umotywowanych pojęć (przywykliśmy np. wiązać zginanie ciał smukłych z materiałami odkształcalnymi z działaniem momentów, a nie jedynie siły woli rządzącej wyborem obserwatora). Niewiele pomoże tu „odejmowanie” obrotów otoczenia, ponieważ pojęcia tego uprzednio nie potrafiliśmy sensownie zdefiniować jeżeli ruch nie był sztywny.

Obrot włókna materialnego wokół wektora stycznego nie został zdefiniowany (nie został naniesiony „czerwony pasek”, lub wyrażając się bardziej uczenie nie zostało na włóknie określone pole „dyrektorów” – wersorów orientujących), jednak, jeżeli wyidealizowane jednowymiarowe włókno materialne ma modelować realny, smukły, ale wciąż trójwymiarowy element zbrojenia, to sensowne będzie nadanie interpretacji fizycznej składowym wektora krzywizny w bazie układu konwekcyjnego, modelując przez to „wtopienie” zbrojenia w materiał (lub, mówiąc inaczej, ale równie nieściśle, związanie obrotów włókna wokół swojej osi z obrotami otoczenia).

Innym aspektem zagadnienia jest rozdzielenie efektów rozciągania włókien od ich zginania. Aby nie wikłać się w terminologii geometrycznej rozważmy pewien

---

<sup>4</sup>Same wartości krzywizn mogą być interesujące w przypadku początkowo prostych włókien, ale wtedy obie te wielkości pokrywają się.

przykład. Niechaj jednorodna izotropowa<sup>5</sup> kula z materiału ściśliwego poddana zostanie ciśnieniu hydrostatycznemu, nieuchronnym skutkiem takiego procesu będzie zmniejszenie objętości, a zatem skrócenie wszystkich promieni sfer materialnych, czyli zmiana krzywizn m.in. włókien materialnych tworzących koła wielkie, których krzywizny są równe odwrotnościom promieni. Było by nader kontrowersyjne, gdybyśmy takie procesy zaliczyli do zginania. Ostrożniej będzie, jeżeli postaramy się poszukać takiej miary zginania, która nie będzie czuła nie tylko na ściskanie hydrostatyczne, a wogóle na wszystkie jednorodne deformacje ciała (odkształcenia afiniczne).

Ostatnią wreszcie sprawą, którą winniśmy wziąć pod uwagę jest prostota wyrażenia ułatwiająca dalsze przekształcenia i interpretacje fizyczną wyników pośrednich.

Wydaje się, że konstrukcja, którą tu zaraz przedstawimy spełnia dobrze wymagania, które powyżej sformułowaliśmy.

Niechaj zatem rodzina włókien będzie reprezentowana w konfiguracji aktualnej przez pole wektorów jednostkowych

$$(3.4.10) \quad \tau = \tau(\xi^i).$$

Skonstruujemy „materialny przeciwobraz” tego pola w konfiguracji odniesienia

$$(3.4.11) \quad \bar{\tau}(\xi^i) = \mathbf{F}^{-1}\tau(\xi^i), \quad (\bar{\tau}^i = \tau^i).$$

Pole  $\bar{\tau}$  jest styczne w konfiguracji odniesienia do tych samych włókien materialnych, co pole  $\tau$  w konfiguracji aktualnej ale na ogół nie jest jednostkowe, możemy je interpretować jako pole wektorów materialnych stycznych do włókien przy tak dobranej parametryzacji aby w stanie aktualnym materialny obraz tego pola był polem wektorów jednostkowych. Postępując formalnie według recepty (3.4.4) możemy w konfiguracji odniesienia zdefiniować pewne pole wektorowe  $\bar{\kappa}$

$$(3.4.12) \quad \bar{\kappa} = \bar{\nabla}\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = \left( \frac{\partial \tau^i}{\partial \xi^k} + \tau^i \Gamma_{ik}^j \right) \tau^k \mathbf{G}_i,$$

gdzie symbolem  $\bar{\nabla}$  oznaczyliśmy operację gradientu w konfiguracji odniesienia:

$\bar{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \otimes \mathbf{G}^k$ . Interpretacja geometryczna pola  $\bar{\kappa}$  jest dość zawiła, jednak można od razu dostrzec, że jeśli włókna zachowują się jak nierozciągliwe, to rozważane pole pokrywa się z polem wektorów krzywizny włókien w konfiguracji odniesienia (pole  $\bar{\tau}$

<sup>5</sup>Pojęcia izotropii i anizotropii omówimy w drugiej części w rozdziale poświęconym zależnościom konstytutywnym, tu możemy intuicyjnie rozumieć, że chodzi o kulę „taką samą we ewszystkich kierunkach”, która w wyniku ściskania hydrostatycznego zachowa kształt kulisty.

jest wówczas polem jednostkowym). Przenieśmy „materialnie” wektor  $\bar{\kappa}$  do konfiguracji aktualnej i odejmiemy od wektora  $\kappa$  definiując tym samym pewne nowe pole  $\eta(\xi^i)$  określone na ciele w konfiguracji aktualnej

$$(3.4.13) \quad \eta = \kappa - \mathbf{F}\bar{\kappa}.$$

Wyrażając pole  $\kappa$  analogicznie jak  $\bar{\kappa}$  we wzorze (3.4.12) i podstawiając do (3.4.13) otrzymujemy

$$(3.4.14) \quad \eta = \left( \frac{\partial t^j}{\partial \xi^k} + t^j \Gamma_{ik}^i \right) t^k \mathbf{g}_i - \left( \frac{\partial t^j}{\partial \xi^k} + t^j \bar{\Gamma}_{ik}^i \right) t^k \mathbf{F}\mathbf{G}_i = t^j t^k (\Gamma_{ik}^i - \bar{\Gamma}_{ik}^i) \mathbf{g}_i,$$

Wynik (3.4.14) możemy wyrazić w następującej postaci:

$$(3.4.15) \quad \eta^j = K^j_{\mu} t^{\mu} t^{\lambda},$$

gdzie tensor trzeciego rzędu  $\mathbf{K}$  wyraża się następującymi wzorami (por. [2]):

$$(3.4.16) \quad \mathbf{K} = (\Gamma_{ik}^i - \bar{\Gamma}_{ik}^i) (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^k) = \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}.$$

Autorowi trudno wyczuć, na ile zadowoli Czytelnika „materialność” pola  $\eta$  jako miary zginania włókien. Przy wprowadzaniu tego pojęcia staraliśmy się korzystać wyłącznie z „materialnych” procedur. Nie ulega natomiast wątpliwości, że miara taka jest absolutnie nieczuła na deformacje afiniczne<sup>6</sup>, w tym i na sztywne obroty. Przy deformacjach afinicznych, bowiem, tensor  $\mathbf{K}$  pozostaje równy zeru, wynika to ze znanego faktu, że we współrzędnych kartezjańskich prostokątnych lub ukośnokątnych symbole Christoffela są w sposób oczywisty równe zeru (wektory bazowe są stałe), a zatem, deformacja afiniczna przekształcająca prostokątny np. układ współrzędnych materialnych na ukośnokątny pozostawia bez zmian zerowe wartości wszystkich symboli Cristoffela, skąd wynika zerowa wartość wszystkich składowych tensora  $\mathbf{K}$ . Składowe tensorów o dowolnej walencji zależą oczywiście od wyboru bazy, jednak jednocześnie przyjmowanie przez nie wszystkie wartości zero w pewnej bazie powoduje na mocy wzorów transformacyjnych tę samą własność w dowolnej innej bazie (widać stąd, że same symbole Christoffela nie są składowymi tensorów, chociaż, jak to widzieliśmy, ich różnice mogą być)<sup>7</sup>.

Na ile udało się spełnić postulat „szlachetnej prostoty” niechaj Czytelnik sam osądzi.

<sup>6</sup>Rozumiemy tu, że chodzi o przypadek, kiedy przejście od konfiguracji odniesienia do konfiguracji aktualnej odbywa się w sposób afiniczny, sprawa superpozycji deformacji afinicznej na dowolną inną deformację (i odwrotnie) wymaga oddzielnego rozpatrzenia.

<sup>7</sup>Uwaga dla tych, którzy lubią identyfikować tensorowy charakter wielkości indeksowanych poprzez własności transformacyjne: przy przechodzeniu od jednego układu materialnego do innego „psujące” własności transformacyjne symboli Christoffela członów zawierające kwadraty pochodnych nowych współrzędnych po starych są jednakowe w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej, wykazują się zatem wzajemnie przy odejmowaniu.

Wyznaczenie pochodnych materialnych składowych wektora  $\eta$  w bazie układu konwekcyjnego nie nastręcza większych trudności, musimy w tym celu znaleźć pochodne składowych jednostkowego wektora stycznego, a następnie skorzystać z zależności (3.4.9). Dla składowych wektora  $\tau$  mamy:

$$(3.4.17) \quad \dot{\tau}^i = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{A^i}{\sqrt{A^j g_{lm}(\xi^k, t) A^m}} \right) = -t^j t^l \tau^m \frac{1}{2} \dot{g}_{lm} = -t^j t^l \tau^m D_{lm}.$$

Ostatecznie zatem otrzymujemy

$$(3.4.18) \quad \dot{\eta}^i = v^j_{,k} \tau^k t^j - 2 K^i_{,k} \tau^k t^j \tau^p t^q D_{pq} = v^j_{,k} \tau^k t^j - 2 \eta^j \tau^p t^q D_{pq}.$$

Dysponując zależnością (3.4.18) oraz korzystając z tożsamości (por. (3.4.8))

$$(3.4.19) \quad \dot{g}_i = \frac{\partial v}{\partial \xi^i} = v^k_{,j} g_k$$

nietrudno podać wzór na składowe wektora  $\dot{\eta}$

$$(3.4.20) \quad \dot{\eta} \cdot g^i = v^j_{,k} \tau^k t^j - 2 \eta^j \tau^p t^q D_{pq} + v^i_{,k} \eta^k.$$

Chociaż zastosowanie praktyczne ma głównie wzór (3.4.18), jednak dla kompletności podamy jeszcze bezwspółrzędnościowy zapis zależności (3.4.20)

$$(3.4.21) \quad \dot{\eta} = \nabla L : (\tau \otimes \tau) - 2 \eta (\tau L \tau) + L \eta.$$

Dwukropkiem oznaczyliśmy tu nasunięcie po dwóch wskaźnikach, rozumiemy ponadto, że wskaźniki odpowiadające operacji różniczkowania piszemy z prawej strony<sup>8</sup>,

np.:  $\nabla L = L_{j,k} (g^j \otimes g^k \otimes g^k)$ .

Pozostaje nam jeszcze rozpatrzyć zginanie powierzchni materialnych i jego kinematykę [3]. Rodziny powierzchni materialnych w ciele wprowadzamy analogicznie, jak rodziny włókien materialnych, w szczególności mogą być to powierzchnie stałej wartości jednej ze współrzędnych w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych konwekcyjnych. Dla nas istotne będzie to, że każda cząstka materialna ma należeć do jednej i tylko jednej powierzchni spośród rozpatrywanej rodziny. W ten sposób możemy w dowolnej konfiguracji ciała przyporządkować każdej jego cząstce materialnej „kovektor materialny” tj. taki wektor  $n$ , którego składowe k o w a r i a n t n e (a nie kontrawariantne, jak w przypadku materialnych wektorów wektorów stycznych do włókien!) w bazie układu konwekcyjnego równe są składowym kowariantnym wektora

<sup>8</sup>W literaturze można spotkać także odwrotną umowę, ma to swoje logiczne uzasadnienie w przypadku stosowania symbolu „ $\nabla$ ” (nabla), zwyczaj ten jednak nie upowszechnił się.

normalnego  $\mathbf{N}$  do danej powierzchni w konfiguracji odniesienia (w bazie układu materialnych współrzędnych konwekcyjnych)  $\mathbf{n} = \mathbf{F}^{-1T} \mathbf{N}$ ,  $n_i = N_i$ , jak to wykazaliśmy w rozdziale 3.1 wektor  $\mathbf{n}$  jest ortogonalny do tej samej powierzchni materialnej, do której w konfiguracji odniesienia był ortogonalny wektor  $\mathbf{N}$ . Unormowanie pola wektorowego  $\mathbf{n}$  prowadzi do pola  $\mathbf{v}$  wektorów jednostkowych określonych w konfiguracji aktualnej w każdej cząstce materialnej ciała.

W klasycznej geometrii powierzchni dwuwymiarowych zanurzonych w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej [12], lokalne odchylenie kształtu powierzchni od płaszczyzny charakteryzuje się przy pomocy tak zwanej drugiej formy metrycznej – macierzy składowych pewnego tensora drugiego rzędu określonego na iloczynnie tensorowym przestrzeni (płaszczyzny) stycznej do powierzchni przez siebie. Niechaj mianowicie powierzchnia w przestrzeni trójwymiarowej będzie zadana w postaci

$$(3.4.22) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u^\alpha), \quad (\alpha = 1, 2),$$

Parametry  $u^\alpha$  określają pewien układ współrzędnych na powierzchni. Jest raczej oczywiste, że wektory

$$(3.4.23) \quad \mathbf{a}_\alpha \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha}$$

tworzą bazę przestrzeni stycznej. Z drugiej strony, również pochodne jednostkowego wektora  $\mathbf{v}$  normalnego do pewnej powierzchni, będąc ortogonalne do wektora  $\mathbf{v}$  są do rozważanej powierzchni styczne, mogą być zatem rozłożone w bazie przestrzeni stycznej. Współczynniki tego rozkładu zwane są współczynnikami drugiej formy metrycznej na powierzchni

$$(3.4.24) \quad b_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta$$

zauważmy, że w przypadku płaskiej powierzchni wektor  $\mathbf{v}$  jest stały, a zatem wszystkie współczynniki drugiej formy są równe zero. Z ortogonalności wektorów  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{a}_\alpha$  wynika natychmiast symetria macierzy  $\mathbf{b}$ , w rzeczy samej

$$(3.4.25) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0 \Rightarrow b_{\beta\alpha} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha = - \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{v} = - \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \mathbf{v}.$$

Symetria ostatniego członu z prawej strony ciągu równości (3.4.25) nie budzi wątpliwości. Dobierzmy układ współrzędnych materialnych  $\{u^1, u^2, u^3\}$  w trójwymiarowym ciele zawierającym wybraną powierzchnię materialną tak, aby w konfiguracji aktualnej współrzędne  $u^1, u^2$  pokrywały się ze współrzędnymi na powierzchni, natomiast współrzędna  $u^3$  była określona przez parametryzację naturalną wzdłuż linii prostopadłych do powierzchni. Wektor bazowy  $\mathbf{g}_3$  jest wówczas jednostkowy i normalny do powierzchni, to samo dotyczy wektora  $\mathbf{g}^3$ , a zatem, w takim układzie współrzędnych (nie koniecznie zresztą materialnych) zachodzi zależność:

$$(3.4.26) \quad b_{\beta\alpha} \equiv \frac{\partial v}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{g}^\beta}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{g}_\alpha = -\frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{g}^\beta = -\Gamma_{\alpha\beta}^1 \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Zależność (3.4.26) przytoczyliśmy tu głównie ze względów dydaktyczno-interpretacyjnych, dla kompletności rozważań. Nie jest ona natomiast specjalnie wygodna w trójwymiarowych zastosowaniach, ponieważ obowiązuje jedynie w bardzo specyficznym układzie współrzędnych materialnych, zmieniającym się wraz z przechodzeniem od jednego stanu deformacji do innego, nie wiadomo też, jaka jest jej inwariantna postać ponieważ, na ogół, nawet w układzie konwekcyjnym, symbole Christoffela nie są składowymi żadnego tensora. Aby wybrnąć z tego kłopotu skorzystamy z faktu, że dla rozpatrywanej „gęstej” rodziny powierzchni materialnych (jeżeli nawet w określonych rozważaniach mamy tylko jedną powierzchnię, to rodzina taka zawsze da się „dodefiniować”) pole wektorów jednostkowych  $\mathbf{v}$  daje się określić w trzech wymiarach, możemy zatem rozważać jego przestrzenny gradient

$$(3.4.27) \quad \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial \xi^k} \otimes \mathbf{g}^k = \left( \frac{\partial v_i}{\partial \xi^k} - \Gamma_{ik}^j v_j \right) (\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k)$$

wobec unormowania wektora  $\mathbf{v}$  jego pochodne są do niego ortogonalne, czyli

$$(3.4.28) \quad v^k v_{k,j} = 0$$

nie ma natomiast żadnego powodu, aby taka sama równość miała zachodzić przy prawostronnym nasunięciu wektora  $\mathbf{v}$  na tensor  $\nabla \mathbf{v}$ , aby więc otrzymać „płaski” tensor, określony na iloczynie tensorowym przestrzeni stycznej przez siebie, taki którego składowe zależą będą jedynie od kształtu powierzchni, a nie od zachowania się pola  $\mathbf{v}$  poza tą powierzchnią, musimy tensor  $\nabla \mathbf{v}$  prawostronnie rzutować na przestrzeń styczną. Zabiegając naprzód oznaczymy tak otrzymany tensor przez  $\mathbf{b}$ .

$$(3.4.29) \quad \mathbf{b} = \nabla \mathbf{v} (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \quad (b_{ij} = v_{i,k} (\delta_j^k - v^k v_j)).$$

W takich współrzędnych materialnych, w których obowiązuje zależność (3.3.26) jedynymi niezerowymi składowymi wektora  $\mathbf{v}$  na powierzchni są składowe  $v^3 = v_3 = 1$ , zatem w tym układzie współrzędnych we wzorze (3.4.29) wszystkie pochodne składowych wektora  $\mathbf{v}$  po współrzędnych na płaszczyźnie znikają. Ponieważ zaś pochodną w kierunku normalnym wyeliminowaliśmy przy rzutowaniu, łatwo stwierdzić, że zależności (3.4.26) i (3.4.29) określają jedną i tą samą wielkość. Wobec faktu, że znowu interesuje nas raczej zmiana krzywizn<sup>9</sup> niż same ich wartości, nie będziemy tu badać prędkości zmiany tensora  $\mathbf{b}$ , wynik ten łatwo będzie otrzymać jako przypadek szczególnej ogólniejszej zależności, którą dalej wyprowadzimy.

<sup>9</sup>Wartości własne tensora  $\mathbf{b}$  noszą nazwę krzywizn głównych. połowa jego śladu zwana jest krzywizną średnią, natomiast wyznacznik znany jest pod nazwą krzywizny Gaussa.



Kierując się analogicznymi motywami, jak w przypadku włókien materialnych skonstruujemy teraz pewien obiekt tensorowy, który, zdaniem Autora, winien w zadawający sposób charakteryzować zmianę krzywizn (*de facto* zmianę drugiej formy kwadratowej) powierzchni materialnej w trakcie deformacji. Pokazaliśmy uprzednio, że jeżeli dany jest wektor  $\mathbf{N}$  normalny do powierzchni materialnej w konfiguracji odniesienia, to wektor  $\mathbf{n} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}$  jest normalny do tej samej powierzchni materialnej w konfiguracji aktualnej. Odwrotnie, jeżeli  $\mathbf{v}$  jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni materialnej w konfiguracji aktualnej, to  $\bar{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{F}^T \mathbf{v}$  będzie wektorem normalnym do tej powierzchni w konfiguracji odniesienia (choć na ogół nie będzie wektorem jednostkowym). Wykonajmy zatem następujący ciąg operacji

- Przenieśmy pole  $\mathbf{v}$  jak „kovektor materialny” do konfiguracji odniesienia 
$$\bar{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{F}^T \mathbf{v},$$
- Obliczmy gradient pola  $\bar{\mathbf{v}}$  w konfiguracji odniesienia 
$$\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}},$$
- Przenieśmy „materialnie” pole  $\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}}$  do konfiguracji aktualnej 
$$\mathbf{F} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{F}^T,$$
- Odejmijmy od gradientu  $\mathbf{v}$  
$$\nabla \mathbf{v} - \mathbf{F} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{F}^T,$$
- Zrzutujmy na przestrzeń styczną 
$$(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(\nabla \mathbf{v} - \mathbf{F} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{F}^T)(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}).$$

Wprowadzimy oznaczenie:

$$(3.4.30) \quad \begin{aligned} \beta &= (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(\nabla \mathbf{v} - \mathbf{F} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{F}^T)(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \\ &= -(\delta_i^k - v_i v^k)(\Gamma_{km}^j - \bar{\Gamma}_{km}^j) v_j (\delta_n^m - v_n v^m)(\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^n). \end{aligned}$$

Z analogiczną argumentacją, jak w przypadku wektora  $\eta$  autor proponuje Czytelnikowi tensor  $\beta$  jako miarę lokalnego zginania powierzchni materialnej o jednostkowej normalni  $\mathbf{v}$  (w konfiguracji aktualnej). Nie zawadzi tu jeszcze raz podkreślić, że postać reprezentacji tensora  $\beta$  podana we wzorze (3.4.30) obowiązuje jedynie w bazie materialnego układu konwekcyjnego. Tensor  $\beta$  zapisany jest dla wygody w postaci trójwymiarowej, chociaż, *de facto* jest to tensor z przestrzeni stycznej

$$(3.4.31) \quad \beta = (b_{\lambda\mu} - \bar{b}_{\lambda\mu})(\mathbf{a}^\lambda \otimes \mathbf{a}^\mu); \quad (\lambda, \mu = 1, 2),$$

gdzie  $b_{\lambda\mu}$  i  $\bar{b}_{\lambda\mu}$  są odpowiednio współczynnikami drugiej formy kwadratowej w konfiguracji aktualnej i w konfiguracji odniesienia, natomiast wektory  $\mathbf{a}^\lambda$  i  $\mathbf{a}^\mu$  są wektorami kobazy konwekcyjnego układu współrzędnych materialnych, określonego na rozważanej powierzchni materialnej.

Aby znaleźć pochodne składowych tensora  $\beta$  w układzie konwekcyjnym wygodnie będzie skorzystać z zależności (3.4.9) oraz z oczywistych niemal tożsamości

$$(3.4.32) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{g}}^{\mu\nu} &= -D^{\mu\nu}, \\ \dot{\tilde{v}}_k &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N_k}{\sqrt{N_i N_j g^{\mu\nu}}(\xi^j, t)} \right) = v_k (v_i v_j D^{\mu\nu}), \\ \dot{\tilde{v}}^j &= \frac{\partial}{\partial t} (v_k g^kj) = v^j (v_i v_j D^{\mu\nu}) - 2v_k D^{kj}. \end{aligned}$$

Oszczędzając Czytelnikowi żmudnych i mało pouczających przekształceń podamy gotowy wzór na pochodną materialną składowych kontrawariantnych tensora  $\beta$  (w bazie materialnego układu współrzędnych konwekcyjnych) [3]:

$$(3.4.33) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\beta}}^{pq} &= -2D_{ij} [(g^{jp} - v^j v^p) \beta^{iq} + (g^{iq} - v^i v^q) \beta^{jp} - \frac{1}{2} v^j v^l \beta^{pq}] + \\ &\quad + v^i{}_{,l} v_l (g^{kp} - v^k v^p) (g^{lq} - v^l v^q). \end{aligned}$$

Pochodną materialną samego zaś tensora znajdujemy z zależności:

$$(3.4.34) \quad \begin{aligned} \dot{\beta} &= \dot{\tilde{\beta}}^{\mu\nu} (g_i \otimes g_j) + \beta^{\mu\nu} v_{,i}^k (g_k \otimes g_j) + \beta^{\mu\nu} v_{,j}^k (g_i \otimes g_k) = \\ &= (\dot{\tilde{\beta}}^{\mu\nu} + \beta^{\mu\nu} v_{,i}^j + \beta^{\mu\nu} v_{,j}^i) (g_i \otimes g_j). \end{aligned}$$

Bardziej dla porządku niż z przekonania (a już na pewno nie z zamilowania do skomplikowanych wzorów) przepisujemy jeszcze wyrażenie (3.4.34) w zapisie bezwspółrzędnościowym („absolutnym”):

$$(3.4.35) \quad \begin{aligned} \dot{\beta} &= -2[\beta \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{D} \beta - \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}) \beta] + \\ &\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{v} \nabla \mathbf{L})(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \beta \mathbf{L} + \mathbf{L} \beta. \end{aligned}$$

Na tym chcemy zakończyć, bynajmniej nie wyczerpując tematu, nasze rozważania dotyczące obrotów i prędkości obrotów ciał odkształcalnych.

## Literatura

1. Blinowski A., *Nonlinear micropolar continuum model of a composite reinforced by elements of finite rigidity, Part I. Equations of motion and constitutive relations*, Arch. Mech., **33**, 5–6, pp. 753–761, Warszawa, 1981.
2. Blinowski A., *Nonlinear micropolar continuum model of a composite reinforced by elements of finite rigidity, Part II. Stability at compression*, Arch. Mech., **5**, **33**, pp. 763–771, Warszawa, 1981.
3. Blinowski A., *Nonlinear microstructural continuous model of a laminated composite, I. Quasi-static phenomenological model*, Arch. Mech., **38**, pp. 553–563, Warszawa, 1986.
4. Blinowski A., *On the Decomposition of the Isotropic Tensorial Function in Orthogonal Bases*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. tech. **28**, 1–2, pp. 11–16, 1980.
5. Blinowski A., *Orthogonal Systems of Symmetric Tensor Invariants*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. sci. tech. **30**, 11–12, pp. 47–53, 1982.
6. Bunge H.J., *Texture Analysis in Materials Science*, Butterworths, London, 1982.
7. Dimentberg F.M., *Metod wintow w prikladnoj mechanike*, «Maszynostrojenije», Moskwa, 1971.
8. Dłużewski P.H., *Crystal orientation spaces and remarks of the modelling of polycrystal anisotropy*, J. Mech. Phys. Solids, **39**, 5, pp. 651–661, 1991.
9. Dłużewski P.H., *Some remarks on the integration domain of the slip orientation*, Arch. Mech., **39**, pp. 419–422, Warszawa, 1987.
10. Gancarzewicz J., *Geometria Różniczkowa*, PWN, Warszawa, 1982.
11. Głufand I.M., Minlos R.A., Szapiro Z.Ja., *Priedstawlenija grupy wraszczenij i grupy Lorenca, ich primienienija*, Gos. Izd. Fiz-Mat. Lit., Moskwa, 1958.
12. Goetz A., *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa, 1965.
13. Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Cambridge Mass., 1950, (tłumaczenie rosyjskie: Goldstein G., *Klasiczeskaja mechanika*, Gos. Izd. Fiz-Mat. Lit., Moskwa, 1957).
14. Gołąb S., *Rachunek tensorowy*, PWN, Warszawa, 1966.
15. Guo Zhong-Heng, Lehmann Th., Liang Haoyun, Chi-Sing Man, *Twirl tensors and the tensor equation  $AX - XA = C$* , Journal of Elasticity, **27**, pp. 227–245, 1992
16. Guo Zhong-Heng, *Representation of orthogonal tensors*, SM Archives, **6**, 4, pp. 451–466, 1981.
17. Guo Zhong-Heng, *Spin and rotation velocity of the stretching frame in continuum*, Appl. Math. & Math., **9**, pp. 1109–1112, 1988.

18. Hunt K.H., *Screw systems in spatial kinematics*, Monash University, Clayton, Victoria, Australia, 1970.
19. Lamb H., *Higher Mechanics*, University Press, Cambridge, 1943.
20. Landau L., Lifszyc E., *Teoria pola*, PWN, Warszawa, 1958.
21. Lubarski J., *Teoria grup i jej zastosowania w fizyce*, PWN, Warszawa, 1961
22. Mandel J., *Directors vectors and constitutive equations for plastic and viscoplastic media*, in *Problems of Plasticity*, ed. A.Sawczuk, pp. 135–143, Nordhoff, Groningen, 1974.
23. Martins Luiz C., Podio-Guidugli P., *On the local measures of mean rotation in continuum mechanics*, *Journal of Elasticity*, 27, pp. 267–279, 1992.
24. *Matematyčeskaja Encyklopedia*, t. 1 – 5, Izd. «Sowietskaja Encyklopedia», Moskwa, 1977–1985.
25. Nowacki W., *Comment. Math. Helv.*, 7, pp. 81–93, 1934.
26. Nowożyłow W.W., *Osnovy nielinielnoy teorii uprugosti*, Moskwa, 1948, (tłumaczenie angielskie: Novozhilov V.V., *Foundation of the nonlinear theory of elasticity*, Rochester, 1953).
27. Ostrowska-Maciejewska J., *Mechanika ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa, 1994.
28. Raniecki B., Mróz Z., *On the strain-induced anisotropy and texture in rigid-plastic solids*, in *Inelastic Solids and Structures*, ed. M. Kleiber, A. König, pp. 13–32, Pineridge Press, 1989.
29. Raszewski P.K., *Geometria Riemanna i analiza tensorowa*, PWN, Warszawa 1958.
30. Rychlewski J., *O prędkościach tensorów względem zmiennych obserwatorów*, rękopis.
31. Rychlewski J., *Tensory*, PWN, Warszawa, 1994.
32. Susłow G.K., *Mechanika teoretyczna*, PWN, Warszawa, 1960.
33. Synge J., *Classical Dynamics*, in *Encyclopaedia of Physics*, ed. S.Flügge, vol. III/1, Springer Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1960.
34. Truesdell C., Toupin R.A., *The Classical Field Theories*, in *Encyclopaedia of Physics*, ed. S.Flügge, vol. III/1, Springer Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1960.
35. Wolf J.A., *Spaces of constant curvature*, Univ. of California, Berkeley, California, 1972, (tłumaczenie rosyjskie: Wolf Dż., *Prostranstwa postojannoj krywizny*, «Nauka», Moskwa, 1982.)
36. Ziabicki A., *Configurational space for clusters in the theory of nucleation*, *Arch. Mech.*, 6, 42, pp. 703 – 715, Warszawa, 1990.

## Spis rzeczy

Streszczenie.....	3
Wstęp.....	3
1. Geometria ruchu.....	5
1.1 Odwzorowania liniowe.....	5
1.2 Zamiana bazy, obroty przestrzeni.....	10
1.3 Geometria przestrzeni obrotów.....	19
1.4 Inne sposoby opisu obrotów.....	29
1.5 Funkcje i operatory na zbiorze orientacji.....	33
1.6 Obroty brył sztywnych.....	37
1.A. Uzupełnienie.....	40
2. Kinematyka obrotów.....	43
2.1 Pochodna czasowa tensora obrotu.....	43
2.2 Elementy kinematyki bryły sztywnej.....	46
2.3 Rozkład mas, pęd, moment pędu i energia kinetyczna bryły sztywnej.....	52
2.4. Kinematyka w przestrzeni orientacji.....	58
3. Kinematyka deformacji.....	65
3.1 Odształcenia i obroty.....	65
3.2. Prędkości odształcenia i obrotów.....	76
3.3 Prędkość kątowna wektorów własnych, współobrotowość tensorów.....	83
3.4 Niejednorodne obroty, zginanie.....	100
Literatura.....	111
Spis rzeczy.....	113