Dr inż.
JACEK BAUER

1943 -2004

Jacek Bauer

DUALNOŚĆ W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ KONSTRUKCJI

3/2004

WARSZAWA 2004

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 2004 r.

IPPT PAN

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd.3,4 ark. druk. 4,5
Oddano do drukarni w maju 2004 r.

ATOS - Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

Dr inż. Jacek Bauer

Przemówienie pożegnalne, w dniu pogrzebu, w kościele Św. Trójcy (Warszawa)

Wśród kandydatów na studia doktoranckie w naszym Instytucie, w 1968 roku, pojawił się dwudziesto- pięcioletni mgr inż. Jacek Bauer, kierownik budowy w Hrubieszowie. Tak rozpoczął się 35-letni okres naukowej pracy Jacka w Instytucie, a także mojej z nim współpracy. Były to również lata Jego społecznej działalności dla Instytutu.

Już w dwa lata po rozpoczęciu studiów doktoranckich Jacka, ukazała się nasza pierwsza, poważna, wspólna publikacja w International Journal for Mechanical Sciences. Jeszcze dziś pamiętam Jego rozradowaną twarz, gdy czytał list od redakcji przyjmującej pracę do druku. Potem były dziesiątki wspólnych publikacji, w których wkład pracy Jacka był ogromny. Głęboka wiedza i szczególna staranność sprawiały, że Jego wywodom i wyprowadzeniom można było wierzyć bez cienia wątpliwości.

Jacek wziął udział w trzech kongresach IUTAM, dwóch światowych kongresach z optymalizacji konstrukcji, wygłosił w CISM, w Udine, wykład z optymalizacji dyskretnej konstrukcji. Prowadził liczne prace z naszymi kolegami z Francji, Belgii, Węgier i Słowacji.
Razem organizowaliśmy sympozjum IUTAM z optymalizacji dyskretnej i międzynarodowy kongres z optymalizacji konstrukcji – WCSMO 2.
Jakiż ogrom pracy i zaangażowania Jacka kryje się w tych kilku zdaniach! A przecież brał też aktywny udział w działalności instytutowej „Solidarności" i uczestniczył w licznych konferencjach. Nigdy nie odmawiał pomocy. Znaliśmy Go wszyscy jako człowieka niezwykle uczynnego, na którym zawsze można było polegać i nie zawieść się. Te niezwykłe cechy Jego charakteru nie pozwalały mu wykrzesać z siebie ani odrobiny egoizmu. Egoizmu, tak niezbędnego przy karierze naukowej. Od dłuższego czasu Jego praca habilitacyjna była gotowa. Ale ponieważ był perfekcjonistą, ciągle chciał ją dopracowywać. Przeszkadzało mu w tym kolejne zaproszenie do wykonania czegoś dla nas wszystkich.
Na charakter Jacka i Jego osobowość, jaką znaliśmy i niezwykle ceniliśmy, miała wpływ niewątpliwie głęboka wiara. Ponadto, istniały jeszcze dwie Jego inne, obok nauki, pasje. Były to: zainteresowanie kulturą i miłość do gór. Był obecny na wszystkich ważniejszych imprezach teatralnych, muzycznych i filmowych, a nieliczne wolne chwile spędzał na wędrówkach w górach, w gronie przyjaciół ze Stołecznego Klubu Tatrzańskiego, którego był wiceprezesem.
Nagła i przedwczesna śmierć Jacka Bauera przytłoczyła nas wszystkich. Zdawało nam się, że człowiek tak dobry, tak wartościowy powinien żyć wiecznie.
Gdy przychodzi żegnać, osobę tak bliską jaką był mi Jacek trudno opanować żal. Wiem, że ten ogromny smutek jest udziałem wszystkich, którzy mieli szczęście z Nim współpracować.
Jacku, dziękujemy Ci za życie pełne rzetelnej pracy, nieocenionej aktywności na rzecz naszej instytutowej społeczności, przyjaźni i tak nam wszystkim potrzebnej wiary w człowieka.
Żegnaj Jacku, Żegnaj Przyjacielu!

5 stycznia b.r. zmarł nasz serdeczny Kolega i Przyjaciel, dr inż. Jacek Bauer, wieloletni pracownik Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN.

Dr inż. Jacek Bauer urodził się 15 sierpnia 1943 roku. Studia wyższe ukończył na Politechnice Warszawskiej w 1967 r., uzyskawszy stopień mgr inż. budownictwa. Po roku pracy w Hrubieszowie, na stanowisku kierownika budowy, wstąpił na studia doktoranckie IPPT PAN w 1968 r. W 1970 roku ukazała się nasza wspólna publikacja w Int. J. Mech.-Sci. Stopień doktora nauk technicznych Jacek uzyskał w 1975 roku. Byłem niezwykle usatysfakcjonowany możliwością pełnienia roli promotora Jego pracy.

Większość działalności naukowej Jacka była poświęcona analizie i optymalizacji dyskretnej konstrukcji. Kilka reprezentatywnych publikacji z jego działalności znajduje się na końcu tych wspomnień. Praca doktorska związana była z analizą płyt z zadaną strukturą wewnętrzną (otwory, wzmocnienia). Następne prace dotyczyły optymalizacji dyskretnej. Pierwsza z nich była poświęcona optymalizacji z kontrolowanym przeszukiwaniem (Bauer, Gutkowski, Iwanow). Kilka innych poświęconych było zastosowaniom Optymalizacji Ewolucyjnej do optymalizacji konstrukcji. W szczególności dotyczyły one optymalizacji, ze sterowaną naprężeniami mutacją (Gutkowski, Iwanow, Bauer). Jedna z ostatnich naszych wspólnych publikacji była poświęcona bardzo efektywnej, problemowo zorientowanej metodzie poszukiwania minimum ciężaru, poprzez odejmowanie zbędnego materiału.

Jacek był bardzo zaangażowany w prace z zakresu zastosowań optymalizacji nie-różniczkowanej w optymalizacji konstrukcji (Bauer). Część z nich omówił na wykładach w CISM w Udine. Optymalizacja nieróżniczkowania była tematem Jego rozprawy habilitacyjnej. Miał ją przedstawić na poniedziałkowym seminarium 9 lutego 2004 r. Pracę, w postaci, którą zdołałem zebrać z Jego dokumentacji, przedstawiam poniżej. Jak widać nie jest ona pełna, brak w niej na przykład wniosków końcowych.

Ostatnio Jacek zainteresował się optymalizacją w biomechanice, publikując kilka prac na temat optymalizacji, związanej z biochemią (Bauer, Pyrz).

Wielu z nas spotkało się z Jackiem przy organizacji licznych konferencji krajowych i zagranicznych. Jego takt, spokój i zdolności organizacyjne są powszechnie znane nie tylko w Polsce. Sukcesy Sympozjum IUTAM pt. „Discrete Structural Optimization" i 2-go Światowego Kongresu Optymalizacji Konstrukcji w 1997 roku, były niewątpliwie w znacznym stopniu Jego udziałem.

Jacek znaczył dla nas wiele, nie tylko w nauce i jej organizacji. Był zaangażowany w pracach instytutowej „Solidarności", w której pełnił ostatnio funkcję wiceprzewodniczącego. Również był wiceprzewodniczącym w Stołecznym Klubie Tatrzańskim.

Będzie nam Jacka bardzo brakowało, jako współuczestnika w badaniach i jako kolegi i przyjaciela.

Poniżej kilka prac autorstwa Jacka, wymienionych wyżej.

1. W. Gutkowski, J. Bauer, "On the analysis of polar lattice plates" Int J. Mech. Sci., 1970, vol. 12, pp.949-958.
2. J. Bauer, W. Gutkowski and Z. Iwanow, "A discrete method for lattice structures optimization, Engineering Optimization"1981 Vol. 5, pp.121-128.
3. W. Gutkowski, Z. Iwanow, J. Bauer, "Controlled mutation in evolutionary structural optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization", 2001,Vol.21, 5, pp.355-360.
4. W. Gutkowski, J. Bauer, J. Zawidzka, "An effective method for discrete structural optimization" Eng. Computations, 2000, Vol. 17, No.4, pp.417-426.
5. J. Bauer, "Dual methods in Discrete Structural Optimization", Lecture Notes in CISM Courses and Lectures No 373, Springer 1997, pp. 233-250.
6. J. Bauer, M. Pyrz, "Evolutionary programs in the optimization of cementless hip prosthesis", Engineering Transactions, 2001, 49, No. 2-3, pp. 417-429.

Na kolejnych stronach znajduje się tekst rozprawy habilitacyjnej Jacka. Rozprawę tą miał przedstawić na seminarium 9 lutego.
Załączony tekst jest taki, jakim go znaleźliśmy. Nie dokonaliśmy w nim jakichkolwiek poprawek.

Witold Gutkowski

Jacek Bauer
Pracownia Metod Numerycznych
Niezawodności i Optymalizacji
ZAKŁAD METOD KOMPUTEROWYCH

DUALNOŚĆ W OPTYMALIZACJI DYSKRETNEJ KONSTRUKCJI

1. Optymalizacja układów technicznych

Istotnym elementem procesu projektowania układów technicznych jest wybór takiego rozwiązania, które byłoby najlepsze z punktu widzenia określonych kryteriów, i które spełniałoby jednocześnie warunki wynikające z szeroko rozumianej wytrzymałości materiału, z wymagań eksploatacyjnych, technicznych, ekonomicznych, organizacyjnych i innych.

Nałożone ograniczenia spełnia na ogół więcej niż jeden zbiór wartości zmiennych, opisujących dany układ i powstaje w związku z tym możliwość optymalizowania. Spośród rozwiązań, spełniających nałożone warunki - tzn. rozwiązań dopuszczalnych - można wybrać najlepsze w jakimś sensie. Wybór ten zależy od idei samego konstruktora i od stosowanych przez niego kryteriów, według których jedno rozwiązanie przedkłada nad inne. Optymalizacja możliwa jest wówczas, gdy konstruktor może wyrazić swój własny pogląd np. w jawnej, matematycznej postaci. Jeżeli takim kryterium będzie funkcja lub funkcjonał, wtedy optymalnemu rozwiązaniu będą odpowiadać takie wartości lub funkcje, dla których wspomniana funkcja lub funkcjonał osiągają wartość ekstremalną. Optymalizacja z pewnością nie może w pełni zastąpić projektowania, w którym elementy sztuki inżynierskiej oraz nauki wzajemnie się przeplatają, ale w istotny sposób może to projektowanie usprawnić.

Takie sformułowanie problemu optymalizacji, które w możliwie największym stopniu odzwierciedlałoby stojące przed projektantem zadanie, zależy przede wszystkim od stopnia rozwoju dziedziny matematyki stosowanej, której przedmiotem jest znajdowanie wartości zmiennych lub postaci funkcji maksymalizujących czy też minimalizujących funkcję lub funkcjonały, stanowiące kryteria problemu.

Zależy to zarówno od możliwości języka formalnego, użytego do sformułowania problemu, jak również od efektywnych metod pozwalających uzyskać rozwiązanie. Dlatego też pierwsze rozwiązania sprowadzały się do znajdowania ekstremum funkcji bez ograniczeń. Z kolei idea mnożników Lagrange'a umożliwiła znajdowanie ekstremum funkcji z ograniczeniami równościowymi. Rozwój rachunku wariacyjnego stworzył możliwość rozwiązywania problemów, w których poszukiwano ekstremum funkcjonału, a zmiennymi były funkcje jednej lub większej liczby innych zmiennych. Rozpowszechnianie maszyn cyfrowych pozwoliło na efektywne wykorzystanie takich dziedzin jak analiza wypukła i programowanie matematyczne. Wyboru jednego rozwiązania spośród wielu rozwiązań możliwych dokonywano na podstawie tylko jednego kryterium. Wyniki prac Pareto umożliwiły sformułowanie i uzyskanie rozwiązań dla zagadnień, w których występuje więcej niż jedno kryterium - funkcja celu. Powstała i zaczęła rozwijać się nowa dziedzina nazwana optymalizacją wielokryterialną. Wspomniane wyżej dziedziny optymalizacji były i nadal są efektywnie wykorzystywane w optymalizacji konstrukcji. Niezmienną motywację do badań stanowią zarówno wartości poznawcze, jak również możliwości praktycznego zastosowania w fazie projektowania układów konstrukcyjnych. Poprzez wartość praktyczną należy tu rozumieć wykorzystanie rozwiązań zadań optymalizacji jako pewnego rodzaju propozycji, zgłoszonej podczas tworzenia ostatecznej postaci projektowanej konstrukcji. Możemy na przykład wymienić systemy komputerowe, które służą do projektowania wspomaganego komputerowo (Computer Aided Design), czy też komputerowego opracowywania technologii (Computer Aided Technology). Elementami składowymi wspomnianych systemów są również programy lub procedury, których funkcja polega na uzyskiwaniu optymalnych rozwiązań pewnych zagadnień, związanych z procesem projektowania danej konstrukcji lub technologii. Bardzo rzadko jednak w wyniku rozwiązania jednego lub kilku problemów optymalizacji otrzymujemy komplet parametrów jednoznacznie określających projektowaną konstrukcję. Ale dzięki temu, że powyższe rozwiązania zawierają sugestie, dotyczące np. minimalnej objętości konstrukcji lub jej maksymalnej sztywności, mogą one w istotnym stopniu usprawnić sam proces projektowania.

2. Problemy modelowania zadań optymalizacji konstrukcji

Sformułowanie każdego problemu niezbędnie wymaga zbudowania modelu matematycznego rzeczywistego obiektu, stanowiącego przedmiot analizy. W naszym przypadku będzie to model matematyczny układu technicznego, który zamierzamy zoptymalizować. Istotnym elementem wspomnianego modelu matematycznego są opisujące dany obiekt zmienne. W dalszym ciągu będziemy je nazywać zmiennymi projektowania. Są to wielkości, które określają zarówno kształt i wymiary geometryczne konstrukcji, jak również inne cechy np. własności wytrzymałościowe czy odkształceniowe materiału, z którego konstrukcja ta jest wykonana. Spośród najczęściej występujących, odnoszących się do konstrukcji inżynierskich zmiennych projektowania możemy wymienić:

- pole i moment bezwładności przekroju poprzecznego dla prętów i belek oraz grubości dla płyt, tarcz i powłok,
- zmienne opisujące np. liczbę oraz system połączeń elementów i węzłów konstrukcji,
- zmienne konfiguracyjne takie jak: współrzędne węzłów, położenie i charakter osi obojętnej belek lub powierzchni środkowej płyt i powłok,
- zmienne opisujące kształt brzegu zewnętrznego lub powierzchni w obrębie samej konstrukcji. Przykładem może tu być kształt przekroju poprzecznego prętów lub powierzchnia graniczna między dwoma różnymi materiałami, występującymi w elementach przestrzennych,
- zmienne materiałowe opisujące własności materiałów,
- zmienne podparcia lub obciążenia opisujące np. warunki brzegowe, liczbę i miejsce usytuowania podpór, rozkład obciążenia na konstrukcji lub liczbę i miejsca przyłożenia czujników.

W tym miejscu należy zauważyć, że w przypadku projektowania rzeczywistych konstrukcji rodzaj wymienionych zmiennych, z punktu widzenia przynależności do zbioru ciągłego lub dyskretnego, jest różny.

Zmienne opisujące liczbę *węzłów i elementów* oraz system połączeń elementów składowych należą do zbioru liczb całkowitych nieujemnych. W zdecydowanej większości przypadków również *zmienne materiałowe* są elementami zbioru dyskretnego - katalogu własności materiałów : na przykład modułu Younga, współczynnika Poissona, naprężeń dopuszczalnych na ściskanie, rozciąganie, ścinanie itp. *Zmienne wymiarowe* takie jak pola przekroju poprzecznego prętów lub grubości płyt tarcz traktowane są w wielu przypadkach jako zmienne ze zbioru ciągłego. W niektórych sytuacjach jest to uzasadnione. Szczególnie wtedy, gdy najważniejszym kryterium dla danego układu konstrukcyjnego jest minimum ciężaru, a inne aspekty traktowane są drugoplanowo np. koszt wykonania. Znajduje to miejsce chociażby w konstrukcjach lotniczych, kosmicznych, kiedy ciężar konstrukcji jest czynnikiem, który istotnie wpływa na zużycie paliwa. Wówczas to konkretne założenie, że grubość elementu powierzchniownego jest ciągłą funkcją współrzędnych, że kształt przekroju poprzecznego pręta jest pewną krzywą, czy też że grubość płyty lub wysokość belki mogą być liczbami rzeczywistymi zawartymi w określonym przedziale $[h_{\min}, h_{\max}]$, wydaje się być uzasadnione. Jednakże wiele konstrukcji tworzonych jest z elementów prefabrykowanych i parametry charakteryzujące te elementy, czyli *zmienne wymiarowe*, dane są w postaci skończonych zbiorów dyskretnych - katalogów. Można w tym miejscu wymienić chociażby profile walcowane i gięte, prefabrykaty żelbetowe, urządzenia instalacyjne itp. *Zmienne podparcia lub obciążenia* mogą mieć zarówno charakter dyskretny, jak i ciągły. *Zmienne konfiguracyjne* występujące najczęściej jako zmienne ciągłe, w niektórych przypadkach mogą być również zmiennymi dyskretnymi. Np. współrzędne węzłów konstrukcji prętowych - ze względu na łatwość montażu - mogą być ograniczone tylko do pewnego skończonego zbioru wartości.

Z powyższej analizy charakteru zmiennych projektowania wynika, że w optymalizacji rzeczywistych konstrukcji występowanie zmiennych dyskretnych jest faktem, którego w wielu przypadkach nie można przybliżyć, przyjmując w zamian zmienne o charakterze ciągłym. Można się tu odwołać, na przykład, do fragmentu recenzji autorstwa A. Templemana książki pod redakcją A.J. Morrisa "Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach", Wiley, 1982 [1983, b]. Recenzent "........ zawiedziony jest tym, że dyskretny charakter takich zmiennych jak zmienne wymiarowe lub opisujące własności materiałów został potraktowany tylko jako szczegółowe zastosowanie (special application), zasługujące jedynie na mały, oddzielny rozdział". Wspomniana recenzja podkreśla fakt, że pomijanie dyskretnego charakteru niektórych zmiennych projektowania, czy też traktowanie go marginesowo nie przyczynia się do popularyzacji lub też przyjmowania za wiarygodne przez inżynierów - projektantów rezultatów, otrzymanych w wyniku rozwiazywania zagadnień optymalizacji konstrukcji.

Na zakończenie należy też wspomnieć również o problemie "katalogu". Lista elementów konstrukcyjnych i maszynowych, dostępnych (dla projektanta) na rynku, powstaje w sposób raczej heurystyczny. Z pewnością ważnym i interesującym mogłoby być także rozwiązanie problemu optymalizacji, którego rozultatem byłaby liczba dostępnych z katalogu parametrów oraz ich wartości. Zagadnienia te nie są jednak przedmiotem niniejszej pracy.

3. Metody rozwiązywania zadań optymalizacji układów technicznych ze zmiennymi dyskretnymi

3.1. Uwagi ogólne

Zwrócenie w poprzednim rozdziale większej uwagi na charakter zmiennych projektowania (zmiennych decyzyjnych) w zadaniach optymalizacji wynika z faktu, że jest to jeden z kilku istotnych czynników, mających wpływ na wybór efektywnej metody rozwiązania problemu. Znane powszechnie w optymalizacji metody programowania matematycznego (liniowego i nieliniowego) i jego rozszerzenie na przestrzenie funkcyjne lub - wg literatury anglosaskiej - metody analizy wypukłej dotyczyły prawie wyłącznie przypadków, w których zmienne decyzyjne są zmiennymi ciągłymi. Jednakże, często, w dziedzinie optymalizacji konstrukcji, w zagadnieniach planowania ekonomicznego, kierowania gałęziami przemysłu, organizacji produkcji itp. mamy do czynienia ze zmiennymi dyskretnymi lub w szczególnych przypadkach ze zmiennymi całkowitoliczbowymi. W związku z tym zaistniała potrzeba opracowania efektywnych algorytmów, rozwiązujących powyższe problemy.

Na oznaczenie wspomnianych wyżej zadań i metod został powszechnie przyjęty termin: "programowanie całkowitoliczbowe". W literaturze występują również inne terminy takie jak programowanie dyskretne lub programowanie kombinatoryczne.

Nie wszystkie dyskretne zadania programowania matematycznego mogą zostać sprowadzone do skończenie wymiarowego programowania całkowitoliczbowego. Są i takie zadania dyskretne, w przypadku których sprowadzenie do programowania liniowego w liczbach całkowitych nie stanowi najkrótszej drogi do otrzymania rozwiązania (np. znane zadanie komiwojażera).

Sformalizujmy obecnie przedmiot naszych rozważań. Zagadnienie programowania matematycznego rozumiane jest jako zadanie maksymalizacji (minimalizacji) funkcji

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.1}$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0 \\ g_3(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

i przy dodatkowym warunku

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \tag{3.3}$$

przy czym D jest pewnym obszarem n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej R^n (w zdecydowanej większości przypadków D jest nieujemnym wycinkiem przestrzeni R^n tj. (3.3) przedstawia warunek nieujemności wszystkich zmiennych). Obszar określony warunkami (3.2) i (3.3) oznaczmy przez G.

Z formalnego punktu widzenia zadanie dyskretne programowania matematycznego można scharakteryzować jako zadanie typu (3.1) - (3.3), gdzie D jest zbiorem niespójnym. Na przykład D może być zbiorem skończonym (przeliczalnym) lub iloczynem kartezjańskim zbioru skończonego (przeliczalnego) i zbioru mocy continuum. Mówiąc o zbiorach przeliczalnych, mamy na myśli zbiory przeliczalne bez punktów skupienia.

Wynika stąd, że w zadaniach programowania dyskretnego obszar rozwiązań dopuszczalnych G jest niewypukły i niespójny.

Obszar ten określają warunki dwóch rodzajów : warunki regularności (3.2) i warunki dyskretności (częściowej dyskretności) (3.3). Warunki dyskretności określamy ze względu na każdą ze zmiennych, co można zapisać w następujący sposób

$$x_j \in D_j, \quad j = 1, 2, ..., n_1. \tag{3.4}$$

Przy czym $n_1 \leq n$, a każde D_j jest albo skończonym zbiorem zawierającym nie mniej niż dwa elementy, albo zbiorem przeliczalnym. Jeżeli $n_1 = n$ to mamy do czynienia z zadaniami w pełni dyskretnymi, natomiast jeżeli $n_1 < n$ - z zadaniami częściowo dyskretnymi. Jeżeli $n_1 = n$, a wszystkie D_j są zbiorami skończonymi, to zadanie programowania dyskretnego sprowadza się do poszukiwania ekstremum warunkowego na zbiorze skończonym. W rozwiązywaniu powyższych problemów natrafiono na szereg istotnych i specyficznych trudności nie tylko natury technicznej, ale również teoretycznej. Chodzi tu o to, że *niewypukłość i niespójność* obszaru rozwiązań dopuszczalnych zadania dyskretnego uniemożliwiają zastosowanie standardowych metod regularnego programowania matematycznego (przechodzenie z jednego wierzchołka wielościanu do drugiego, przemieszczanie wzdłuż gradientów w otoczeniu danego punktu itp.). Proste metody rozwiązania tego problemu okazały się mało skuteczne. Nie do przyjęcia jest z praktycznego punktu widzenia zaliczana do nich metoda przeglądu zupełnego dla zadań o skończonych zbiorach rozwiązań dopuszczalnych. W tym przypadku, jeżeli wszystkie D_j są zbiorami skończonymi, to liczba punktów $(x_1, ..., x_n)$ spełniających warunek

$$x_j \in D_j, \quad j = 1, 2, ..., n_1 \ \ (\text{dla } \ n_1 = n)$$

wynosi
$$\prod_{j=1}^{n} |D_j| \geq 2^n.$$

Widzimy zatem, że wraz ze wzrostem liczby zmiennych bardzo szybko wzrasta liczba obliczeń.

Inny narzucający się sposób rozwiązywania zadań dyskretnych zwany *regularyzacją* polega na odrzucaniu warunków dyskretności, rozwiązywaniu odpowiedniego zadania ciągłego a następnie zaokrąglaniu otrzymanego rozwiązania do najbliższych wartości, które są elementami katalogu (zbioru dyskretnego). Tu również można podać proste przykłady zadań programowania liniowego w liczbach całkowitych, wskazujące na niedopuszczalność takiej metody. Dla przykładu rozpatrzmy zadanie maksymalizacji funkcji [Korbut, Finkelsztejn, 1974]

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 \tag{3.5}$$

przy warunkach

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \tag{3.6}$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 2 \tag{3.7}$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \tag{3.8}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_j - \text{liczby całkowite}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.9}$$

Pomijając warunki całkowitoliczbowości, możemy znaleźć rozwiązanie optymalne dla odpowiedniego zadania programowania liniowego

$$x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 4\frac{1}{2}.$$

Natomiast całkowitoliczbowym rozwiązaniem optymalnym dla tego zadania jest

$$x_1 = 2, \;\; x_2 = 2, \;\; x_3 = 5.$$

Widzimy więc, że żadne zaokrąglenie współrzędnych niecałkowitoliczbowego rozwiązania nie daje nawet rozwiązania dopuszczalnego.
Należy jednak pamiętać, że przytoczony przykład obala nie samą ideę regularyzacji, a jedynie jej zbytnią prostolinijność zastosowania. Idea regularyzacji jest podstawą pewnej klasy metod numerycznych programowania dyskretnego, które zostaną omówione w dalszej części pracy. Istnieją zadania programowania liniowego, których z formalnego punktu widzenia nie zaliczamy do zadań całkowitoliczbowych, gdyż nie ma w nich jawnego warunku całkowitoliczbowości dla zmiennych, a które dla całkowitoliczbowych danych wejściowych mają zawsze rozwiązanie całkowitoliczbowe. Warunek taki spełnia zadanie transportowe wraz z jego licznymi wariantami (zadania przydziału, zadania przepływu w sieciach). Mówiąc o "wymiarze" problemu mamy zazwyczaj na myśli czas potrzebny do uzyskania rozwiązania zagadnienia analizy i optymalizacji. W zagadnieniach optymalizacji ciągłej dobrym oszacowaniem wymiaru rozpatrywanego problemu jest czas. Nie jest to natomiast takie oczywiste w przypadku optymalizacji dyskretnej. Jeśli rozwiązanie problemu ciągłego wymaga do rozwiązania sekund lub minut, to rozwiązanie podobnego zadania przy założeniu, że zmienne należy wybierać ze skończonych katalogów, może wymagać godzin i dni. Mówiąc o "wymiarze" zagadnień optymalizacji dyskretnej sensowniej jest mówić o liczbie kombinacji, z jaką mamy do czynienia przy rozwiązywaniu problemu. Poświęcono temu zagadnieniu fragment wykładu sekcyjnego podczas Konferencji Euromechu Sztokholm, 1997 [W. Gutkowski, 1997, a].

Zilustrujmy to na przykładzie prostego problemu optymalnego wymiarowania. Załóżmy kratownicę z "p" elementami konstrukcyjnymi - prętami lub strefami i "r" przekrojów poprzecznych danych w katalogu. Łatwo sprawdzić, że przypisując każdemu prętowi odpowiednie przekroje z katalogu otrzymamy "r^p" kombinacji. Zatem aby znaleźć odpowiednie rozwiązanie, musimy sprawdzić wszystkie kombinacje. Rozwiązaniem problemu jest ta kombinacja, która daje najmniejszą wartość objętości materiału kratownicy przy nieprzekraczaniu ograniczeń. Zauważmy, że liczba kombinacji rośnie wraz ze wzrostem "r" i "p" lub obu tych wielkości jednocześnie. Dla konstrukcji trójprętowej p=3 z katalogiem zawierającym 4 elementy mamy $4^3 = 64$ kombinacji. Dla tego konkretnego przypadku weryfikacja wszystkich możliwych rozwiązań nie nastręcza problemu. Liczba kombinacji do sprawdzenia jest tego samego rzędu wielkości, co i liczba iteracji wymagana przy rozwiązaniu tego typu problemu w optymalizacji ciągłej. Takie zagadnienie optymalizacji dyskretnej możemy traktować jako "małe" z punktu widzenia czasu obliczeniowego. Jednak już w przypadku konstrukcji złożonej z 10 elementów i katalogu o 10 wartościach, która nie jest żadną specjalną konstrukcją, mamy 10^{10} kombinacji rozwiązań. Przy założeniu, że sprawdzenie jednego rozwiązania odnośnie spełnienia warunków ograniczających trwa 1 sekundę, to w tym przypadku otrzymujemy czas obliczeń trwający ponad trzysta lat. Problemy tego typu możemy traktować jako "duże", zakładając niezbędną konieczność opracowania innych metod, takich które mogłyby dać rozwiązanie w praktyce w rozsądnym czasie. Problemy o wymiarze "średnim" sytuują się oczywiście pomiędzy problemami małymi i dużymi. Nie wydaje się możliwe określenie dokładnej granicy, w jakiej się one zawierają. Zależy to od bardzo wielu czynników takich nawet jak nasza wiedza o możliwym rozwiązaniu, dostępnym komputerze itp. Przeciętnie "średni" problem możemy traktować jako taki, który zawiera $10^2 - 10^4$ kombinacji. Liczba 10^4 oznacza w przybliżeniu 24 godziny obliczeń wymagających sprawdzenia wszystkich kombinacji przy założeniu, że sprawdzenie jednej kombinacji trwa 1 sekundę.

Scharakteryzujmy teraz zadania programowania dyskretnego, korzystając z kryteriów stosowanych w dziale metod numerycznych, zajmującym się analizą modeli procesów obliczeniowych, czyli *złożonością obliczeniową* [Błażewicz, 1988, g]. W złożoności obliczeniowej można wyróżnić dwa zasadnicze ujęcia: oszacowanie nakładu obliczeń oraz ustalenie, że dwa dane problemy są lub nie są, ujmując ogólnie, tak samo trudne; jest to ustalenie klas równoważności. Pamiętając, że problem to zbiór zadań, możemy więc mierzyć rozkład obliczeń jako *średnią, w sensie wartości oczekiwanej, liczbę operacji*, którą należy wykonać, aby rozwiązać zadanie przy ustalonym wymiarze problemu, za pomocą danego algorytmu, na określonym wyidealizowanym modelu realnie istniejących komputerów lub też jako *maksymalną liczbę takich iteracji*. W przypadku pierwszym mówimy o *analizie probabilistycznej algorytmów*, natomiast w drugim o *analizie najgorszego (najtrudniejszego) przypadku*. Analiza probabilistyczna algorytmów jest znacznie trudniejsza od analizy najgorszego przypadku i przeprowadzono ją tylko dla niektórych algorytmów. Dla opisu złożoności algorytmów korzysta się najczęściej z abstrakcyjnego modelu komputera, jakim jest (deterministyczna) maszyna Turinga [Walukiewicz, 1986, g], [Błażewicz, 1988, g]. Korzystając z tego modelu, dzielimy zadania na problemy o deterministycznej złożoności wielomianowej i problemy o niedeterministycznej złożoności wielomianowej. Problem jest wielomianowy, jeśli istnieje taki algorytm jego rozwiązania, że czas rozwiązywania najtrudniejszego zadania w tym problemie wzrasta nie szybciej niż pewien wielomian od jego wymiaru. Klasę wszystkich problemów wielomianowych oznacza się w literaturze symbolem $\mathcal{P}$ (od angielskiego terminu "polynomial"). Funkcje określające czas rozwiązywania zazwyczaj nie są znane w postaci jawnej i najczęściej wystarcza nam, gdy znamy je z dokładnością do rzędu wielkości. Są jednak problemy, których złożoność obliczeniowa nie może być ograniczona przez żaden wielomian. Dla ich określenia potrzebne będą pojęcia algorytmu niedeterministycznego i niedeterministycznej maszyny Turinga. Ujmując rzecz obrazowo, niedeterministyczna maszyna Turinga to maszyna, która może produkować swoje kopie. Jeżeli w procesie liczenia zachodzi konieczność liczenia różnych możliwości np. $x_j = 0$ oraz $x_j = 1$, to niedeterministyczna maszyna Turinga wytwarza swoją kopię i od tego stanu obie te maszyny pracują równolegle, na zasadzie, że jedna z nich liczy przypadek $x_j = 0$ a druga $x_j = 1$. Problem optymalizacyjny jest *problemem niedeterministycznej złożoności obliczeniowej*, jeśli odpowiadający mu problem decyzyjny jest rozwiązywalny przez niedeterministyczną maszynę Turinga w czasie ograniczonym przez wielomian od wymiaru tego problemu. W literaturze stosuje się najczęściej oznaczenie symbolem $\mathcal{NP}$, pochodzącym od angielskiego terminu "nondeterministic polynominal time". Dla bliższego określenia zadań programowania dyskretnego wprowadźmy pojęcia : *wielomianowej transformowalności* oraz *problemu spełnialności.* Problem decyzyjny D_1 jest *wielomianowo transformowalny* do problemu decyzyjnego D_2, co zapisuje się jako $D_1 \alpha D_2$, jeśli istnieje funkcja transformująca ft, spełniająca następujące warunki :

(i) $ft : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ tj. ft odwzorowuje łańcuchy na łańcuchy;

(ii) istnieje wielomianowy algorytm obliczania ft;

(iii) ft zachowuje problem, tj. $ft(z) \in D_2$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $z \in D_1$.

Z kolei, jak wiadomo, każde wyrażenie logiczne można zapisać w normalnej postaci koniunkcyjnej tj. jako koniunkcję alternatyw zmiennych logicznych, które mogą przyjmować wartości: "prawda" lub "fałsz". *Problem spełnialności* polega na określeniu, czy dane wyrażenie logiczne zapisane w normalnej postaci koniunkcyjnej jest spełnialne tzn. czy istnieje takie przypisanie wartości zmiennym logicznym, dla którego wyrażenie to jest prawdziwe. Zauważmy, że problem spełnialności należy do klasy $\mathcal{NP}$, gdyż w najgorszym przypadku stwierdzenie, czy dane wyrażenie logiczne zawierające n zmiennych jest spełnialne, wymaga sprawdzenia 2^n możliwych kombinacji 0 i 1, przypisanych tym zmiennym.

Problem decyzyjny D jest $\mathcal{NP}$ – *zupełny* jeżeli :

(i) $D \in \mathcal{NP}$ oraz

(ii) problem spełnialności jest wielomianowo transformowalny do D.

Zdecydowana większość problemów programowania dyskretnego to problemy $\mathcal{NP}$ – *zupełne.* Szczegółowe rozważania dotyczące powyższych zagadnień można znaleźć w monografiach [Walukiewicz, 1986, g], [Nemhauser, Wolsey, 1988, f]. Analizę złożoności obliczeniowej zadania optymalizacji dyskretnej konstrukcji kratowej na minimum ciężaru z ograniczeniem na ugięcie węzła i katalogiem przekrojów poprzecznych prętów przeprowadzono w pracy [Yates i in., 1982, a], wykazując, że jest to problem $\mathcal{NP}$ – *zupełny.*

W chwili obecnej teoria dyskretnego programowania matematycznego jest w zasadzie teorią numerycznych metod rozwiązywania zadań dyskretnych. Ze względu na różnorodność, występującą w rozwiązywaniu zadań dyskretnych, metody te możemy podzielić na trzy zasadnicze grupy.

Do pierwszej grupy zaliczamy metody charakteryzujące się przede wszystkim regularyzacją zadania. Polegają one na zanurzeniu wyjściowego obszaru rozwiązań dopuszczalnych (3.2)-(3.4) w obejmujący go obszar wypukły; określa się to inaczej chwilowym odrzuceniem warunków dyskretności (3.4). Następnie, do tak otrzymanego zadania regularnego stosujemy standardowe metody optymalizacji. Jeżeli otrzymane w ten sposób rozwiązanie spełnia warunki dyskretności, to zadanie jest rozwiązane. Jeżeli tak nie jest, to należy dokonać przejścia do rozwiązania całkowitoliczbowego. Przejściem tym nie może być, oczywiście, po prostu zaokrąglenie składowych rozwiązania niedyskretnego do najbliższych wartości dyskretnych (jak podano w przykładzie (3.5)-(3.9)). Omawiane tu przejście od rozwiązania regularnego do dyskretnego stanowi istotę metod tej grupy. Ogólną ideę rozwiązania zadań programowania liniowego w liczbach całkowitych podał Dantzing, [1957]. Zgodnie z jego ideą, jeżeli w wyniku pierwszego kroku (rozwiązanie zadania bez uwzględnienia warunku całkowitoliczbowości) otrzymamy rozwiązanie niecałkowitoliczbowe, to do ograniczeń zadania wyjściowego należy dołączyć nowe ograniczenie liniowe, spełniające dwa warunki:

1) otrzymane rozwiązanie niecałkowitoliczbowe nie spełnia tego ograniczenia,

2) z pewnością wiadomo, że spełnia go dowolne rozwiązanie całkowitoliczbowe.

Rozwiązujemy zatem otrzymane w taki sposób zadanie, a jeżeli jest to konieczne, dodajemy jeszcze jedno ograniczenie itd. Proces powtarzamy aż do otrzymania rozwiązania, spełniającego warunki całkowitoliczbowości. Geometrycznie, każdorazowe dołączenie nowego ograniczenia liniowego odpowiada przeprowadzeniu hiperpłaszczyzny, która odcina od wielościanu rozwiązań regularnego zadania poprzedni punkt optymalny o współrzędnych ułamkowych, ale nie odcina żadnego z punktów o współrzędnych całkowitych tego wielościanu. Dlatego też metody, wykorzystujące tę ideę, otrzymały w literaturze nazwę *metod płaszczyzn odcinających* lub *metod odcięcia.*

Idea odcięcia prowadzi do wyodrębnienia trzech problemów:

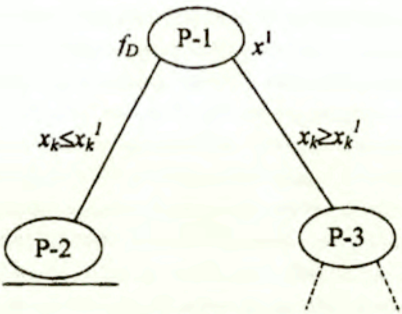
1) poszukiwania uniwersalnej metody formułowania ograniczeń uzupełniających,
2) dowodu zbieżności odpowiedniego procesu odcinania,
3) zapobiegania nadmiernemu rozrastaniu się zadania podczas dołączania dodatkowych ograniczeń.

Jedynie rozwiązanie powyższych problemów może doprowadzić do skonstruowania uniwersalnego i realizowalnego numerycznie algorytmu. Po raz pierwszy dokonał tego Gomory, 1958] i, w zasadzie, od tego momentu datuje się rozwój ogólnych metod odcięcia. W następnych latach rozwój metod płaszczyzn odcinających przebiegał dwoma torami : z jednej strony - drogą ich uszczegółowienia, z drugiej - drogą ich przenoszenia z zadań liniowych na zadania bardziej ogólne. Można tutaj wymienić np. zadania minimalizacji dodatnio określonej formy kwadratowej przy liniowych ograniczeniach całkowitoliczbowych, zadania z liniową funkcją celu oraz ograniczeniami parabolicznymi.

Druga grupa metod różni się od pierwszej tym, że w maksymalnym stopniu wykorzystuje się zarówno skończoność zagadnienia, jak i jego kombinatoryczny charakter. W pewnym zakresie wykorzystuje się tutaj ideę przeglądu. W pierwszych pracach, prezentujących omawianą grupę metod, nazywano je *metodami gałęzi i granic*. Wraz z upływem czasu ustaliła się nazwa *metoda podziału i ograniczeń*.

Istota metody podziału i ograniczeń polega na rozbiciu zbioru rozwiązań dopuszczalnych zadania na skończoną liczbę podzbiorów. Zastępuje się zatem rozwiązanie jednego problemu rozwiązaniem kilku podproblemów. Oprócz tego, w metodzie podziału i ograniczeń głównie szacujemy od dołu wartości funkcji celu podproblemów (przy poszukiwaniu w zadaniu wyjściowym minimum).

Orginalny algorytm [Landa i Doiga, 1960, a] polega na obliczeniu górnych i dolnych ograniczeń na wartość funkcji celu. Pierwszym krokiem algorytmu jest rozwiązanie zagadnienia programowania liniowego przy założeniu, że zmienne są elementami zbioru ciągłego. Jeżeli rozwiązanie zawiera wartości, które są elementami zbioru dyskretnego, to otrzymujemy rozwiązanie optymalne naszego zagadnienia. Wartość funkcji celu dla otrzymanych wartości zmiennych jest jednocześnie jej ograniczeniem od dołu f_D. Wynika to z założenia, że zmienne są elementami zbioru ciągłego. Wybrane ze zbiorów dyskretnych wartości zmiennych mogą jedynie zwiększyć wartość funkcji celu. Powyższy problem wyjściowy z rozwiązaniem oznaczonym x^1 oznaczmy jako P-1 i umieszczamy w górnym węźle drzewa przeglądu (rys.1).



Rys.1

Drugim krokiem algorytmu jest podział na nowe zadania poprzez dodanie nowego ograniczenia do P-1 tak, że uwzględniana będzie tylko jedna zmienna niedyskretna np. x_k. Jeden z problemów P-2, żąda, aby wartość podzielonej (rozgałęzionej) x_k była mniejsza od x_k^1, problem P-3 z ograniczeniem dodatkowym - aby x_k była większa od x_k^1. Oba powyższe problemy dzielą (gałęzią) obszar rozwiązań dopuszczalnych na dwa obszary. Istnieje kilka możliwości (postaci) rozwiązania tych dwóch problemów. Jedną z nich jest np. nieistnienie rozwiązań dopuszczalnych dla nowego problemu. W takim przypadku podkreślony będzie nowy węzeł oraz dzielona będzie (gałęziowo) inna zmienna. Kolejną możliwością jest osiągnięcie rozwiązania dyskretnego i w tym przypadku węzeł jest również podkreślony i wartość funkcji celu staje się górnym ograniczeniem dla naszego problemu. Zatem każdy węzeł naszego drzewa rozwiązań, który daje większą wartość funkcji celu, będzie podkreślony i nie będzie brany pod uwagę w dalszym przeglądzie możliwych rozwiązań. Uwzględniane będą tylko te rozwiązania, których wartości funkcji celu zawierają się między f_D i f_G. Jeżeli nie wystąpią nowe rozwiązania, w których wartość funkcji celu jest mniejsza od f_G, wówczas węzeł odpowiadający f_G jest optymalnym rozwiązaniem zadania. Jeśli natomiast wystąpią inne rozwiązania z wartościa funkcji celu mniejszą od f_G i zawierające wartości zmiennych spoza zbioru dyskretnego, mogą one podlegać procesowi podziału (gałęzienia). Proces taki powtarzany jest aż do momentu, w którym zostaną podkreślone wszystkie węzły drzewa przeglądu.

Istotą algorytmu metody podziału i ograniczeń jest właściwy wybór zmiennej niedyskretnej, która będzie podlegała procesowi podziału (gałęziowania) oraz wybór węzła do podziału. Np. przy wyborze węzłów do podziału wybieramy te, które dają najmniejszą wartość funkcji celu.

Prace, w których po raz pierwszy konsekwentnie próbowano zastosować algorytmy programowania dyskretnego w optymalizacji konstrukcji, dotyczyły kratownic statycznie wyznaczalnych. Na przykład [Maciulevicius, 1968, a] zastosował w swojej pracy do analizy kilkuelementowych układów kratowych algorytm Gomory'ego, poszukując optymalnej konfiguracji kratownicy wspornikowej o najmniejszym ciężarze przy ograniczeniach na naprężenia i ugięcia. Wykazał m. in., że rozwiązanie, uzyskane przy uwzględnieniu skończonego katalogu przekrojów prętów, różni się zarówno ilościowo, jak i jakościowo od wyników uzyskanych z przybliżenia rozwiązania zadania, w którym odrzucono warunki dyskretności. Z kolei [Toakley, 1986, b] optymalizował na minimum ciężaru kratownicę statycznie wyznaczalną przy ograniczeniach na ugięcia wybranych węzłów. Zagadnienie zostało sprowadzone do zadania programowania liniowego dla zmiennych zero-jedynkowych. Zastosowany algorytm Gomory'ego okazał się bardzo słabo zbieżny. Nie najlepsze efekty uzyskano również stosując metodę poszukiwania przypadkowego. Należy podkreślić, że liczba zmiennych dla tej konstrukcji była równa 8. Można z pewnością stwierdzić, że te dwie wspomniane wyżej prace rozpoczęły badania w dziedzinie optymalizacji konstrukcji ze zmiennymi dyskretnymi. Poniżej omówione zostaną inne prace poświęcone tej tematyce.

3.2. Przegląd metod stosowanych w optymalizacji konstrukcji

Omówienie metod, stosowanych w dyskretnej optymalizacji konstrukcji można znaleźć m. in. w pracach [Bauer i in. 1981, a], [Brenicker i in. 1990, h], [Vanderplats, Thanedar 1991, c], [Thanedar, Vanderplats, 1995, a], [Arora i in., 1994, e], [Bauer, 1994, g], [Bauer, Gutkowski, 1995, j], [Gutkowski 1997, a]. Niniejsza praca obejmuje oczywiście wyniki, uzyskane w okresach poprzedzających datę opublikowania. Dla ustalenia uwagi przegląd będzie niemal wyłącznie poświęcony rozwiązywaniu zagadnień ze zmiennymi dyskretnymi. Niektóre z powyższych prac przeglądowych zajmują się również problemami, w których występują zmienne dyskretno - ciągłe. Rozdział wstępny pracy [Zhang, Wang, 1993, a] omawia zagadniena mieszane dyskretno - ciągłe. Niniejszy przegląd dotyczy wyłącznie zastosowań programowania dyskretnego w optymalizacji konstrukcji i nie obejmuje bardzo szerokiej gamy prac, poświęconych planowaniu ekonomicznemu, organizacji produkcji, transportu itp. Spośród metod stosowanych i pozwalających uzyskać efektywne rozwiązania można wyróżnić :

(a) metodę podziału i ograniczeń
(b) ujęcie dualne
(c) metody przeglądu
(d) programowanie genetyczne
(e) metody funkcji kary
(f) metodę symulowanego wyżarzania
(g) metody heurystyczne oraz inne.

3.2.1 Metoda podziału i ograniczeń

Zasadnicza idea tej metody, przedstawiona w punkcie 3, została efektywnie zastosowana już w połowie lat siedemdziesiątych [Cella i Soosar 1973, a] w optymalizacji ramy przestrzennej, będącej konstrukcją nośną radioteleskopu i belki o przekroju skrzynkowym. [Haftka i Walsh, 1992, c] (stosując metodę podziału i ograniczeń) optymalizowali ściskane płyty kompozytowe. Zmodyfikowaną wersję tej metody w rozwiązywaniu zagadnień mieszanych dyskretno-ciągłych zastosowali [Hajela, Shih, 1989, d] w optymalizacji wspornikowej belki kompozytowej, projektowanej na minimum ciężaru i z ograniczeniami na wytężenie, przemieszczenia oraz drgania własne. [Sepulveda, 1995, d] zastosował metodę podziału i ograniczeń w optymalnym rozmieszczeniu materiału w kratownicach przestrzennych. Katalog materiałów obejmował : stal, aluminium, tytan i magnez. Przekroje poprzeczne prętów były zmiennymi o charakterze ciągłym. Zasadnicza wada metody podziału i ograniczeń wynika z konieczności wielokrotnego rozwiązywania zadań programowania nieliniowego, co czyni ją niezwykle kosztowną. Pewne propozycje przyspieszenia zbieżności tej metody zawarte zostały w pracy [Tseng i in., 1995, b]. Propozycje te dotyczą również zadań mieszanych dyskretno-ciągłych. Korzystne wyniki daje np. połączenie metody podziału i ograniczeń z algorytmem sekwencyjnego programowania kwadratowego.

3.2.2 Metody dualne

Szczegółowy opis metody dualnej, która jest tematem niniejszej pracy, przedstawiony będzie w następnym rozdziale. W tym punkcie zaprezentowane zostaną praktyczne zastosowania najczęściej przybliżanych algorytmów ujęcia dualnego. Schemat postępowania wynika z metod, stosowanych w optymalizacji ze zmiennymi ciągłymi. Zadanie takie przybliżane jest ciągiem rozłącznych zadań wypukłych. Zadania wypukłe rozwiązywane są metodą dualną.

Funkcje dualne są wklęsłe i różniczkowalne i w związku z tym z rozwiązania dualnego można otrzymać optimum dla zadania wyjściowego. Podobny schemat stosowany jest dla zadań ze zmiennymi dyskretnymi. Tworzy się ciąg zadań dyskretnych przybliżający problem wyjściowy. Dla zadań tych budujemy zadania dualne [Schmit, Fleury, 1980, a], [Ringertz, 1988, a]. Funkcje dualne są również wklęsłe (jak w zadaniach ciągłych), ale odcinkami liniowe i nie wszędzie różniczkowalne. W związku z tym przy poszukiwaniu extremum funkcji dualnej nie mogą być zastosowane standardowe metody gradientowe. Poza tym, ponieważ problem wyjściowy (zadanie dyskretne) nie jest wypukły, rozwiązanie zadania dualnego nie odpowiada rozwiązaniu optymalnemu zadania wyjściowego. Występuje tzw. *odstęp dualności*. W poszukiwaniu ekstremum zadań dualnych stosowane są metody rzutowania gradientowego [Schmit, Fleury, 1980, a], subgradientu [Sepulveda, Casis, 1986, d]. W pracach Schmita, Fleury'ego oraz Sepulvedy, Cassisa uzyskane zostały rozwiązania zadań optymalizacji dyskretnej dla rzeczywistych układów konstrukcyjnych takich jak skrzydło samolotu czy układy przestrzenne. Należy zwrócić uwagę na to, że ujęcie dualne pozwala również na uzyskanie rozwiązań dla zadań mieszanych dyskretno-ciągłych [Schmit, Fleury, 1980, a], [Ringertz, 1988, a].

3.2.3 Metody przeglądu

W rozdziale wstępnym wskazaliśmy na prostą metodę przeglądu wszystkich możliwych rozwiązań jako tę metodę, która nie może mieć znaczenia praktycznego. Jednak przy zastosowaniu szczególnych strategii eliminowania tych układów zmiennych decyzyjnych, które nie mogą być rozwiązaniem naszego zadania, metody przeglądu mogą być narzędziem, pozwalającym uzyskać rozwiązania dla realnych układów konstrukcyjnych. Ideę jednej z takich metod zaproponował w swojej monografii Greenberg [1971, b]. Chodzi w niej o znajdowanie takich układów zmiennych decyzyjnych, które dają monotonicznie rosnący ciąg wartości celu (przy poszukiwaniu minimum). Pierwszy wektor zmiennych decyzyjnych, który spełnia warunki ograniczające zadania, jest rozwiązaniem naszego problemu. Algorytm zaproponowany przez Greenberga jest jednak mało przydatny z praktycznego punktu widzenia, gdyż wymaga dużej pamięci, a czas obliczeń jest zdecydowanie długi. Istotne ulepszenie algorytmu, które nie wymaga dużej pamięci obliczeniowej i pozwala na rozpoczęcie przeglądu od dowolnej wartości funkcji celu zostało zaproponowane przez Iwanowa [1981, e; 1990, e]. Bardzo ważna jest w tym przypadku możliwość rozpoczęcia przeglądu od dowolnej wartości funkcji celu. Wiadomo, że dla wielu zadań można uzyskać oszacowanie od dołu wartości funkcji celu. Taką możliwość dają np. metody dualne [Libura, 1984, b]. Dysponując takim oszacowaniem, rozpoczynamy przegląd od tej wartości funkcji celu. Innym oszacowaniem od dołu jest wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego, bez warunków ograniczających na dyskretność zmiennych decyzyjnych, czyli rozwiązanie dla zadania optymalizacji ciągłej. Algorytm Iwanowa, szczegółowo opisany w pracy [1990, e], został opracowany zarówno dla zmiennych 0-1, jak i dla katalogu złożonego ze zmiennych rzeczywistych. Szczegółowe zastosowanie powyższego algorytmu - głównie dla przestrzennych konstrukcji prętowych przedstawiono w pracy [Gutkowski, 1992, h]. Oryginalną metodę przeglądu: "backtrack method" opracowali [Farkas, Szabo, 1980, b]. Metoda ta może być z powodzeniem stosowana dla zadań z nieliniową funkcją celu i nieliniowymi ograniczeniami. W każdym kroku iteracyjnym dokonujemy częściowego przeglądu dla każdej zmiennej. Dzięki wykorzystaniu tej metody uzyskano efektywne rozwiązania dla hybrydowych przekrojów dwuteowych oraz dla układów prętowych [Janczura, Sieczkowski, 1986, c], [Berkowski, Boroń, 1986, f], [Janczura, 1994, a(23)], [Farkas Jarmai, 1997, m]. Dokładność i efektywność wspomnianej metody oraz przedstawienie szczegółowej analizy standartowych przykładów numerycznych przedstawiono w pracy [Yuan i in., 1990, d]. Efektywną metodę przeglądu z systematycznym eliminowaniem rozwiązań nieoptymalnych zastosowano w pracy [Hua, 1983, b] dla optymalizacji układów prętowych oraz konstrukcji skrzydła o przekroju skrzynkowym.

3.2.4 Algorytmy genetyczne

Przedstawione w tym punkcie prace mogłyby z powodzeniem zostać wymienione również w punkcie poprzednim, tzn. opisującym wykorzystanie metody przeglądu. Programowanie genetyczne bowiem jest niczym innym jak metodą stochastycznego przeglądu, wykorzystującą mechanizmy doboru naturalnego oraz dziedziczności [Goldberg, 1989, h; 1998, a], [Michalewicz, 1996, b], [Hajela, 1997, k]. Naśladuje ona metody hodowli populacji, ukierunkowanej na uzyskanie osobników o określonych, pożądanych z punktu widzenia hodowcy, cechach. Rolę populacji spełnia zbiór konstrukcji, przy czym poszczególne egzemplarze różnią się elementami, z których zostały złożone. Populację wyjściową tworzymy w sposób przypadkowy, losując wartości parametrów. Następnie iteracyjnie powtarzamy następujące sekwencje kroków:

a) porządkujemy elementy populacji na podstawie wartości dla każdego elementu, funkcji przystosowania. W przypadku optymalizacji konstrukcji funkcja przystosowania uwzględnia koszt konstrukcji oraz ograniczenia na nią nałożone.

b) stosujemy *selekcję*. Losujemy odpowiednią liczbę par elementów populacji (konstrukcji), aby zapewnić odtworzenie populacji w następnym kroku iteracji.

c) *krzyżowanie*, które polega na odpowiednim łączeniu par, otrzymanych na etapie selekcji. Każda para daje 2 nowe elementy. Liczba utworzonych konstrukcji potomnych powinna zapewnić odtwarzanie populacji. W niektórych odmianach algorytmów genetycznych część elementów populacji przechodzi do następnej iteracji bez zmian.

d) *mutacje*. Na tym etapie dostarczamy do populacji elementy nowe, które nie są powiązane żadnym "pokrewieństwem" z innymi elementami populacji. Najczęściej dokonuje się tego w taki sposób, że w losowo wybranym elemencie populacji zmieniamy losowo jego wybrany fragment.

Jedną z pierwszych prac nt. optymalizacji konstrukcji z wykorzystaniem powyższego algorytmu była praca, poświęcona optymalizacji znanego układu konstrukcyjnego stosowanego powszechnie jako benchmark problem, tzn. dziesięcioprętowca. Pracę tę [Goldberg, Samanti, 1986, h] omawia w swojej monografii Goldberg.

Zagadnienie optymalizacji dwóch typowych układów prętowych, stosowanych często jako "benchmark problems", oraz 160 - prętowej wieży transmisyjnej rozwiązali, wykorzystując algorytm genetyczny, Rajeev i Kirhnamoorthy [1992, b]. [Hajela i Lee, 1994, a (5)] zastosowali programowanie genetyczne w projektowaniu rusztów. Poszukiwano układu prętów oraz wartości przekrojów poprzecznych przy ograniczeniach na naprężenia i przemieszczenia. [Trompette i in., 1994, a(1)] określili optymalne tłumienie belek i płyt.

3.2.5 Metody funkcji kary

W metodzie funkcji kary tworzymy szczególną funkcję - poprzez kombinację oryginalnej funkcji celu naszego zadania optymalizacji oraz ograniczeń. Ograniczenia do funkcji kary, wprowadzone są w taki sposób, by występował czynnik "kary" wtedy, gdy ograniczenia nie są spełnione. Zasadniczy schemat postępowania przedstawił w swojej monografi S.S. Rao [1978, d]. W pracach szczegółowych, prezentujących zastosowanie powyższej metody, znajdujemy różne warianty formułowania ogólnej funkcji celu. Rozszerzoną wewnętrzną funkcję kary wprowadzili [Shin i in., 1988, e; 1990, b]. Efektywność wymienionej wyżej metody zaprezentowano na przykładzie powszechnie znanych "benchmark problems": kratownice trój-, dziesięcio- i 25-prętowe. Z kolei ulepszoną metodę funkcji kary zaproponowali [Cai, Thierauf, 1993, b]. Uzyskano efektywne rozwiązania dla obciążeń statycznych 10- i 25-prętowych kratownic, a także dla obciążonej dynamicznie 44 - elementowej ramy płaskiej. Autorzy powyższych prac stwierdzają, że aby metoda mogła być w pełni wiarygodna, wymaga nadal wielu testów numerycznych. Metodę funkcji kary wykorzystują również [Ge i Huang, 1989, g] w transformacji nieliniowego mieszanego zadania całkowitoliczbowego, związanej z zagadnieniem optymalizacji globalnej.

3.2.6 Metoda symulowanego wyżarzania

W metodzie tej wykorzystuje się związki między mechaniką statystyczną (zachowanie się układów z wieloma stopniami swobody w równowadze termicznej przy skończonej temperaturze) i optymalizacją kombinatoryczną [Kirkpatrick i in., 1983, c].

W pracy [Metropolis i in., 1953, a] zaproponowano prosty algorytm, który może być wykorzystany do efektywnej symulacji zbioru atomów, będących w równowadze przy danej temperaturze. W każdym kroku algorytmu atom poddawany jest małemu losowemu przemieszczeniu i porównywana jest zmiana energii układu $-\triangle E$.

Jeśli $\triangle E \leq 0$, to przemieszczenie jest akceptowane i konfiguracja z przemieszczonym atomem wykorzystywana jest jako punkt wyjścia do następnego kroku. Przypadek, gdy $\triangle E > 0$ traktowany jest probabilistycznie :

prawdopodobieństwo, że konfiguracja jest akceptowana wynosi $P(\triangle E) = \exp(\frac{-\triangle E}{k_B T})$

gdzie k_B - stała Boltzmana, T - temperatura.

Liczby losowe o rozkładzie jednostajnym w przedziale (0,1) są wygodnym sposobem implementacji losowej części algorytmu. Wybieramy jedną liczbę i porównujemy ją z $P(\triangle E)$.

Jeżeli okazuje się, że jest ona mniejsza od $P(\triangle E)$, to wówczas ustalona jest nowa konfiguracja. Natomiast w przeciwnym przypadku konfiguracja wyjściowa traktowana jest jako punkt startu w następnym kroku. Powtarzając podstawowy krok wielokrotnie, otrzymujemy symulacyjny termiczny ruch atomów przy nagrzewaniu w temperaturze T. Traktując funkcję celu zadania optymalizacji jako energię i definiując konfigurację poprzez układ parametrów, można wygenerować z procedury Metropolis populację konfiguracji danego problemu optymalizacji przy pewnej efektywnej temperaturze. Parametrem, który steruje procesem jest temperatura. W procesie symulowanego wyżarzania (takie tłumaczenie można spotykać) ma miejsce najpierw "topnienie" układu, który jest optymalizowany w odpowiednio wysokiej efektywnej temperaturze, a następnie obniżanie temperatury w małych krokach, aż do osiągnięcia stanu "zmrożenia", w którym to stanie nie występują żadne zmiany. Realizacja algorytmu symulowanego wyżarzania jest wrażliwa na wielkość kroku ruchu i chłodzenia (w tym wyznaczenie początkowej temperatury), prędkości zmniejszania temperatury oraz kryterium stopu.

Możemy wyróżnić następujące postawowe elementy algorytmu symulowanego wyżarzania (patrz [Zhang, Wang, 1993, a])

1) konfiguracja rozwiązania problemu

2) przejście z jednej konfiguracji do drugiej

3) sąsiednia konfiguracja : wynik ruchu p.2

4) funkcja celu : miara jakości rozwiązania

5) schemat chłodzenia : ustalenie, jak wysoka powinna być temperatura w punkcie startu oraz zasady wyznaczania

a) kiedy aktualna temperatura powinna być obniżona?

b) w jakim stopniu temperatura powinna zostać obniżona?

oraz

c) kiedy powinien zostać zakończony proces wyżarzania?

Powyższe elementy występują w większości implementacji symulowanego wyżarzania, jednakże w zależności od zastosowań mogą występować pewne różnice. Szczegółowy opis metody, z zastosowaniem do zagadnień występujących w optymalnym projektowaniu komputerów oraz w rozwiązaniu zagadnienia komiwojażera, przedstawiono w artykule [Kirkpatrick i in., 1983, c]. Efektywność tej metody w rozwiązywaniu zagadnień mieszanych dyskretno-ciągłych przedstawili [Zhang, Wang, 1993, a]. Zadanie optymalizacji przestrzennej ramy stalowej rozwiązał Balling [1991, b], wprowadzając pewną modyfikację w strategii symulowanego wyżarzania [May, Balling, 1992, e] rozwiązali zagadnienie optymalizacji dyskretnej dla ramy stalowej z ograniczeniami wytrzymałościowymi i użytkowymi, z liczbą zmiennych i elementów w katalogach - jak dla praktycznie realizowanych konstrukcji. Mamy w tym przypadku : 7 zmiennych dla słupów z 47 elementami w katalogu oraz 4 zmienne dla rygli z 46 elementami w katalogu. Zatem w zadaniu tym występuje $47^7 \times 46^4$ możliwych przypadków. Zgodnie z klasyfikacją przedstawioną w p. 3, a zaproponowaną przez W. Gutkowskiego [1997, a] jest to z pewnością problem "duży".

3.2.7 Metody heurystyczne oraz zastosowania szczegółowe

Należy wyróżnić tu przede wszystkim prace A.B. Templemana oraz jego współpracowników [Yates i in., 1983, a], [Templeman, 1988, c; 1987, l]. Zaproponowana przez Templemana [1988, c] metoda "segmental member" polega na transformacji zadania dyskretnego do zadania ze zmiennymi ciągłymi. Wprowadzane są dodatkowe warunki ograniczające. Każdy z prętów, np. kratownicy, podzielony jest na segmenty w liczbie dokładnie odpowiadającej liczbie elementów katalogu. Przekrój każdego segmentu odpowiada wartości jednego z elementów katalogu. Nieznane są natomiast długości poszczególnych segmentów. Suma tych długości jest długością danego pręta. W wyniku takiej transformacji otrzymujemy zadanie ze zmiennymi ciągłymi, którymi są długości segmentów. Powoduje to wzrost liczby zmiennych, ale tylko w zadaniu ze zmiennymi ciągłymi. Jako rozwiązanie zadania, polegającego na znalezieniu wielkości przekroju poprzecznego pręta, przyjmujemy tę wartość z katalogu, która odpowiada segmentowi o największej długości. Metoda ta została zaproponowana dla konstrukcji prętowych oraz konstrukcji złożonych z elementów dwuwymiarowych w płaskim stanie naprężenia. [Kaliszky i in., 1997, d] wykorzystali ją w dyskretnej optymalizacji kratownic sprężysto - plastycznych na minimum objętości materiału z ograniczeniami na wyboczenie prętów. Metoda ta znalazła swoje zastosowanie również w optymalizacji niezawodnościowej [da Cruz Simões, 1992, g].

Wśród prac, dotyczących dyskretnej optymalizacji konstrukcji, można wyróżnić grupę publikacji, w których, nie dbając o absolutną poprawność matematyczną, wykorzystuje się metody znane z programowania liniowego i nieliniowego, stosowane w odniesieniu do zagadnień ze zmiennymi ciągłymi. [Fox, Liebman, 1981, b] przedstawili zmodyfikowany nieliniowy algorytm sympleks dla zagadnień optymalizacji ze zmiennymi dyskretnymi. Algorytm ten wzbogacony został o jednowymiarowy przegląd, pewne metody przyspieszenia i regeneracji oraz strategie dekompozycji. [Liebman i in., 1981, c], wykorzystując funkcję kary przekształcili problem z ograniczeniami na ciąg zagadnień bez ograniczeń. Z kolei zadania dyskretne bez ograniczeń rozwiązano wykorzystując metodę "całkowitoliczbowego gradientu" (integer gradient direction). Należy wymienić w tym miejscu prace [Amir, Hasegawa, 1988, b;] oraz [Amir, 1989, c], w których metodę całkowitoliczbowego gradientu połączono ze zmodyfikowaną procedurą ortogonalizacyjną Resenbrocka. Zmienne 0-1 zastosowano w optymalizacji kształtu dwuwymiarowych konstrukcji plastycznych [Zavelani i in., 1975, c]. Uzyskano w rezultacie kształt podpory dla dwupasmowej drogi szybkiego ruchu. W odniesieniu do konstrukcji prętowej [Salajegheh, Vanderplaats, 1993, c] wprowadzili zmienne dyskretne, określające przekroje poprzeczne prętów oraz kształt konstrukcji. Zmienne te mogą mieć również charakter ciągły lub mieszany dyskretno - ciągły. Wśród rozwiązanych przykładów liczbowych znajduje się 47 elementowa płaska wieża prętowa.

Podczas formułowania zadań optymalizacji, dotyczących dwuwarstwowych przekryć strukturalnych, wykorzystano możliwość uzyskania rozwiązań równań równowagi w postaci analitycznej, dzięki czemu wyraźnie skraca się czas obliczeń. Otrzymano rozwiązania zadań optymalizacji dyskretnej dla kilku typów przekryć strukturalnych [Bauer i in., 1981, d; 1984, a], [Gawkowska, 1982, b, c; 1985, c; 1987, a]. Metodą, stosowaną często w rozwiązywaniu nieliniowych zadań optymalizacji, jest linearyzacja problemu wyjściowego i najczęściej mamy do czynienia z metodą sekwencyjnego liniowego dyskretnego programowania. Rozwiązywany jest ciąg zadań całkowitoliczbowych liniowych, które są przybliżeniem zadania nieliniowego. Do rozwiązania zadań liniowych wykorzystuje się istniejące algorytmy programowania dyskretnego. Badana jest zbieżność ciągu rozwiązań. Rozwiązanie, spełniające sformułowane kryteria zbieżności przyjmowane jest za rozwiązanie optymalne. Wymienić tu należy prace [Olsen, Vanderplaats, 1989, e], [Bremicker i in., 1990, h], [Loh, Papalambros, 1991, e]. Niekiedy proponowane jest połączenie tej metody z metodą podziału i ograniczeń [Bremicker i in., 1990, h].

Wśród zasługujących na uwagę inżynierskich zastosowań programowania dyskretnego możemy wyróżnić zagadnienia optymalnego rozmieszczenia podpór lub optymalnego podziału konstrukcji [Sui i in., 1991, f], [Dems, Mróz, 1994, a(6)], [Gutkowski in., 1994, a(17); 1995, k]. Z kolei zagadnienie optymalnego rozmieszczenia czujników lub urządzeń wzbudzających (actuatorów) znalazło swoje rozwiązanie m. in. w pracach [Haftka, Adelman, 1985, a], [Holnicki-Szulc i in., 1994, a(19)], [Korbicz, Uciński, 1994, a(18)].

W wielu publikacjach zastosowane zostały różne wersje metody przeglądu. Odnośnie szeregu rozwiązanych zagadnień można mówić o wersjach metody przeglądu "problemowo zorientowanych", w których strategia wyboru kolejnego rozwiązania i omijanie rozwiązań, uznanych za nieoptymalne, związane są z charakterem rozwiązywanych problemów. Należy wymienić tu pracę [Reinschmidt, 1971, a] poświęconą optymalizacji ram plastycznych oraz kratownic sprężystych. Optymalizacja hal stalowych z wykorzystaniem strategii dekompozycji jest tematem pracy Leśniaka i zespołu [Leśniak, 1975, b], [Leśniak i in., 1978, a]. We już wspomnianej poprzednio pracy [Garstecki i in., 1978, b] - ze względu na charakter funkcji celu przegląd można było ograniczyć wyłącznie do "brzegu" obszaru dopuszczalnego. Zastosowanie adaptacyjnego losowego przeglądu w pracy [Kelahan, Gaddy, 1978, c] pozwoliło na rozwiązanie zagadnienia dyskretnego i mieszanego. Szczególną wersję metody przeglądu "voting method" zastosował [Mottl, 1992, a, 1994, a(2)] w optymalizacji układów przestrzennych, zbudowanych z elementów dwuwymiarowych w płaskim stanie naprężenia. Dzięki zastosowaniu klasycznej idei przeglądu wg rosnącej wartości funkcji celu [Greenberg, 1971, b] otrzymano rozwiązania dla układów prętowych z ograniczeniami na utratę stateczności [Pyrz, 1987, c], a także dla zagadnień geometrycznie nieliniowych [Pyrz, 1990, f, g, i].

Metody przeglądu, połączone z metodami sztucznej inteligencji lub innymi systemami experckimi umożliwiły uzyskanie efektywnych rozwiązań dla układów prętowych [Niczyj, Paczkowski, 1994, a(10)], [Pyrz, 1994, a(22)]. Metodę kryterium optymalności zastosowali w swoich pracach [Grierson, Lee, 1986, a], [Chan, 1992, f], [Rozwany, Zhou, 1994, a(13)].

Dyskretnej optymalizacji konstrukcji żelbetowych oraz konstrukcji z betonu sprężonego poświęcone są prace [Eimer, Mączyński, 1976, a], [Choi, Kwak, 1990, c], [Marks, Trochymiak,

1991, a]. Mieszane dyskretno - ciągłe programowanie zastosowano w optymalizacji narzędzi mechanicznych [Weck, Kölsch, 1988, d].
Wymienione wyżej prace poświęcone są zadaniom optymalizacji ze skalarną funkcją celu. Jednakże w ostatnich latach pojawia się coraz więcej prac, dotyczących dyskretnej optymalizacji wielokryterialnej, wśród których należy wymienić pracę poświęconą ogólnemu algorytmowi dla zagadnień całkowitoliczbowych o dwuwartościowej funkcji celu [Eswaran i in., 1989, f]. Optymalizację układu przekładni przedstawili [Osyczka, Montusiewicz, 1994, a(8)]. Zagadnienia wielokryterialnej optymalizacji dla dwuwarstwowych przekryć strukturalnych rozwiązali [Jendo, Paczkowski, 1993, d; 1994, a(21); 1997, b].

4. Cel i zakres pracy

Na podstawie wyszczególnionych powyżej prac, poświęconych optymalizacji układów konstrukcyjnych z dyskretnymi zmiennymi projektowania, można wysnuć wniosek, że trudno byłoby wskazać wyłącznie jedyną metodę, umożliwiającą uzyskanie efektywnych rozwiązań optymalnych w realnym czasie obliczeniowym, dla dowolnie wybranego zadania optymalizacji. Zdecydowana większość przykładów obliczeniowych, dotyczących realnych konstrukcji, została zrealizowana przy pomocy metod hybrydowych tzn. w wyniku połączenia metod np. sekwencyjnego liniowego programowania z metodą podziału i ograniczeń, płaszczyzn odcinających - z metodą losowego przeglądu rozwiązań itp. Wiele metod efektywnych w rodzaju metody symulowanego wyżarzania, czy też programowania genetycznego, umożliwia uzyskanie rozwiązań bez pewności - z matematycznego punktu widzenia - że są one rozwiązaniami optymalnymi. Dość powszechne stało się stosowanie pojęcia "near optimum". Jednakże bardzo często nie mamy możliwości oszacowania, na ile "daleko" od rozwiązania optymalnego pozostaje uzyskane przez nas rozwiązanie. Najwięcej oczekiwań odnośnie zadań dyskretnych można wiązać z metodą przeglądu wg rosnącej wartości funkcji celu [Greenberg, 1971, b], a dokładniej - z jej ulepszoną wersją [Iwanow, 1990, e], w której przegląd rozwiązań możemy rozpocząć od dowolnej wartości funkcji celu. Efektywność metody zależy w znacznym stopniu od wartości funkcji celu, od której rozpoczyna się przegląd. Pożądana jest zatem możliwość jak najlepszego oszacowania od dołu wartości funkcji celu (w przypadku poszukiwania minimum). Takim oszacowaniem od dołu jest z pewnością rozwiązanie zadania ze zmiennymi ciągłymi (z odrzuceniem ograniczeń na dyskretność zmiennych projektowania). Jednak doświadczenia numeryczne z przykładami realnych konstrukcji dowodzą, że wymaga to sprawdzenia jeszcze bardzo dużej liczby przypadków. Liczbę tę można w pewnym stopniu zmniejszyć, wprowadzając eliminację niektórych rozwiązań z wykorzystaniem metody sztucznej inteligencji [Pyrz, 1994, a(22)]. Konieczność jak najlepszego oszacowania od dołu wartości funkcji celu nie pozostawia w tym przypadku żadnych wątpliwości. Również możliwość oszacowania od dołu funkcji celu, w połączeniu z innymi metodami przeglądu np. przeszukiwania losowego, czy też algorytmu genetycznego, może w znacznym stopniu przyspieszyć uzyskanie efektywnego rozwiązania. Oszacowanie wartości funkcji celu można uzyskać, wykorzystując sformułowanie dualne zadań optymalizacji [Libura, 1984, b]. Niezależnie, poprzez sformułowanie dualne możemy otrzymać rozwiązanie zadania wyjściowego. Faktem jest jednak, że w przypadku zadań optymalizacji dyskretnej nie możemy mieć co do tego absolutnej pewności, gdyż zadanie wyjściowe nie jest problemem wypukłym. W przypadku programowania całkowitoliczbowego teoria dualności nie jest rozwinięta w takim stopniu, jak w przypadku programowania liniowego lub wypukłego. Oprócz tego mamy tu do czynienia z wieloma typami zadań dualnych. Jednakże wyniki prac, wykonywanych na przestrzeni ostatnich lat, pozwalają uzyskiwać efektywne rozwiązania zadań dyskretnych przy wykorzystaniu sformułowania dualnego.

Celem niniejszej pracy jest zastosowanie sformułowania dualnego w rozwiązywaniu możliwie szerokiej klasy zadań optymalizacji z dyskretnymi zmiennymi projektowania. W publikacjach reprezentujących tę grupę prac [Schmit, Fleury, 1980, a], [Sepulveda, Cassis, 1986, d], [Ringertz, 1988, a], przyjmuje się najczęściej daleko idące uproszczenie dotyczące możliwości wykorzystania zależności między zmiennymi wyjściowymi a zmiennymi dualnymi z rozwiązań w zadaniach programowania nieliniowego ze zmiennymi ciągłymi. [Schmit, Fleury, 1980, a, str. 1516] jednoznacznie stwierdzają, że "This pragmatic extension of dual formulation is not rigorous from a strict mathematical poin of view because the approximate primal problem is no longer conves when discrete variables are introduced" i że nie jest ono całkowicie poprawne ze ściśle matematycznego punktu widzenia. Wyniki kilku zadań testowych nie mogą być dowodem na funkcjonowanie wspomnianego wyżej postępowania w każdym przypadku zadań ze zmiennymi dyskretnymi. Stosowany we wspomnianych wyżej pracach schemat owego postępowania wynika z zastosowania pełnej analogii do zadań optymalizacji ze zmiennymi ciągłymi. O ile jednak w przypadku zadań ze zmiennymi ciągłymi jest to uzasadnione, gdyż zadania te prawdziwie są zadaniami wypukłymi lub poprzez pewne przekształcenie mogą być transformowane do takiej grupy problemów, to w przypadku zadań dyskretnych staje się to niemożliwe i zadanie pierwotne należy do grupy problemów niewypukłych. Mimo to, korzystając z wyników prac szczególnie [Fischer i in., 1975,a], [Shapiro, 1979, a], [Libura, 1984, b], możemy zadanie dualne konstruować i, następnie, z faktu, że funkcja celu dla tego zadania jest wklęsła (wypukła), odcinkami liniowa, prawie wszędzie różniczkowalna, możemy zastosować w rozwiązaniu jeden z algorytmów optymalizacji nieróżniczkowalnej np. metodę subgradientów. Na podstawie teorii dualności wiadomo, że w tym przypadku mamy do czynienia z tzw. słabą dualnością (weak duality), gdy wartość optymalna funkcji celu dla zadania dualnego jest nie większa od wartości optymalnej funkcji celu dla zadania pierwotnego (przy poszukiwaniu minimum). W najgorszym przypadku tzn. gdy występuje *odstęp dualności*, otrzymujemy dobre oszacowanie od dołu wartości funkcji celu. Bardzo często również rozwiązanie zadania dualnego może prowadzić bezpośrednio również do rozwiązania zadania pierwotnego. Oczywiste jest też, że otrzymanie dobrego oszacowania wartości funkcji celu może dać w wyniku rozwiązanie zadania pierwotnego przy wykorzystaniu licznych i efektywnych metod przeglądu. Natomiast niewątpliwą zaletą tej metody jest to, że na żadnym etapie algorytm nie musi akceptować postępowania niedopuszczalnego lub wątpliwego z matematycznego punktu widzenia. W ostatnich latach rozwijane są metody optymalizacji nieróżniczkowalnej [Makela, Neittaanmaki, 1992, i], co gwarantuje m.in. efektywność uzyskiwania rozwiązań dla zadań dualnych optymalizacji dyskretnej. Szczegółową analizę numeryczną, wykazującą efektywność zastosowanych procedur, przeprowadzono dla płyt plastycznych oraz kompozytowych laminowanych.

5. Dualność w optymalizacji dyskretnej

5.1 Ogólny schemat dualizacji

Poniżej przedstawiamy ogólne schematy konstruowania zadań dualnych [Libura 1984, b]. Rozważmy zadanie optymalizacji dyskretnej (1)-(3) w następującej postaci :

$$\inf f(x), \quad x \in S \quad (P) \tag{5.1}$$

przy czym $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jest daną funkcją celu, natomiast zbiór $S \subseteq \mathbf{R}^n$ jest zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. Zbiór S określony jest jako iloczyn dwóch zbiorów X oraz G :

$$S = G \cap X \tag{5.2}$$

w taki sposób, że wszystkie warunki dyskretności dotyczą jedynie zbioru X (w szczególnym przypadku może być $X \subseteq \mathbf{Z}^n$, gdzie $\mathbf{Z}^n$ jest zbiorem liczb całkowitych).

Zbiór G przedstawia się najczęściej w postaci systemu ograniczeń

$$G = \{x \in \mathbf{R}^n : \ g(x) \leq b\} \tag{5.3}$$

gdzie $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $b \in \mathbf{R}^m$. W sformułowaniu ogólnego schematu dualizacji zasadniczą rolę odgrywa pojęcie *relaksacji zadania* (P) (5.1)

Definicja 5.1. Relaksacją zadania (P) nazywa się zadanie (R)

$$\inf f'(x), \quad x \in S' \quad (R) \tag{5.4}$$

takie, że

1) $S \subseteq S' \subseteq \mathbf{R}^n$
2) $f(x) \geq f'(x)$ dla każdego $x \in S$.

Niech v(*) oznacza wartość optymalną zadania (*). Wnioskiem z Definicji 5.1 jest, że dla zadań minimalizacji v(P)≥v(R) dla dowolnej relaksacji (R) zadania (P). Najczęściej stosowaną relaksacją zadania (P) jest zadanie $(\overline{P})$, nazywane związanym zadaniem ciągłym

$$\inf f(x), \quad x \in G \cap \overline{X} \quad (\overline{P}), \tag{5.5}$$

przy czym zbiór $\overline{X}$ otrzymuje się ze zbioru X przez odrzucenie z definiujących go warunków ograniczeń dyskretności zmiennych.

Bardzo często stosowaną relaksacją zadania (P) jest tak zwana relaksacja Lagrange'a z parametrem $\lambda \in \mathbf{R}_+^m$

$$\inf_{x \in X} [f(x) + \lambda(g(x) - b)]. \tag{5.6}$$

Dla nieujemnych wektorów λ otrzymuje się rodzinę relaksacji Lagrange'a parametryzowaną przez λ. W programowaniu całkowitoliczbowym (dyskretnym) dla danego zadania (P) można określić wiele różnych zadań dualnych. Wybór zadania dualnego zależy od wyboru rodziny relaksacji zadania (P).

Niech (R_q) będzie rodziną relaksacji parametryzowanych przez elementy q, należące do pewnego zbioru Q. Zbiór Q nazywany jest zbiorem *zmiennych dualnych* (lub zbiorem *parametrów dualnych*). Np. w przypadku rodziny relaksacji (5.6) zbiór Q jest zbiorem $\mathbf{R}^m_+$ lub dowolnym niepustym jego podzbiorem.

Definicja 5.2. Zadaniem dualnym do zadania (P), wyznaczonym przez rodzinę relaksacji $(R_q), q \in Q$ nazywamy zadanie

$$\sup_{q \in Q} v(R_q). \tag{5.7}$$

Tak zdefiniowane zadanie dualne zależy więc od wyboru typu relaksacji (R_q) i zbioru zmiennych dualnych. Dobór obu tych elementów w sposób zasadniczy wpływa na właściwości zadania dualnego oraz możliwość jego rozwiązania.

Można otrzymać wiele różnych zadań dualnych przyjmując jako zbiór zmiennych dualnych Q zbiór F^m_+ funkcji niemalejących $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$. Zauważmy, że parametr λ w relaksacji Lagrange'a (5.6) jest szczególnym przypadkiem takiego zbioru zmiennych dualnych. Uogólniając w naturalny sposób wspomnianą relaksację Lagrange'a (5.6) otrzymujemy l-relaksację (od lagrangean relaxation) zadania (P). Dla dowolnej funkcji $F \in F^m_+$ l-relaksacja zadania ma postać :

$$\inf_{x \in X} [f(x) - F(b) + F(g(x))] \quad (P^F). \tag{5.8}$$

Można również utworzyć s - relaksację (surrogate relaxation), która zdefiniowana jest następująco :

$$\begin{gathered} \inf f(x) \\ F(g(x)) \le F(b) \quad (P_F) \\ x \in X. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Widzimy więc, że dla każdej funkcji $F \in F^m_+$, zarówno $(P^F) - (5.8)$, jak i $(P_F) - (5.9)$ są relaksacjami zadania (P)-(5.1). Dla l-relaksacji spełniony jest warunek 1 Definicji 5.1, dotyczący zawierania się zbiorów dopuszczalnych, natomiast warunek 2 tzn. $f(x) \ge f(x) - F(b) + F(g(x))$ wynika z tego, że F jest funkcją niemalejącą.

Dla s-relaksacji funkcje celu zadań (P)-(5.1) i $(P_F) - (5.9)$ są takie same. Z kolei, z faktu, że F jest funkcją niemalejącą wynika, że każde rozwiązanie dopuszczalne zadania (P)-(5.1) jest również rozwiązaniem dopuszczalnym zadania $(P_F) - (5.8)$, a zatem warunek 1 Definicji 5.1 jest spełniony. Ponieważ w pracy wykorzystana jest jedynie l-relaksacja, dlatego też dalsze rozważania będą dotyczyć tej konkretnej relaksacji.

W pracy [Libura, 1984, b] przedstawiony został następujący lemat.

Lemat 5.1. Dla dowolnej funkcji $F \in F^m_+$

$$v(P) \ge v(P^F). \tag{5.10}$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolnym niepustym podzbiorem F^m_+. Przyjmując $\mathcal{F}$ jako zbiór zmiennych dualnych dla zdefiniowanej powyżej relaksacji zadania 1 (P), otrzymujemy następujące zadanie dualne :

$$\text{zadanie } l - \text{dualne } \sup_{F \in \mathcal{F}} v(P^F)(D_l). \tag{5.11}$$

Związek zadania (P)-(5.1) ze zdefiniowanym powyżej zadaniem dualnym (D_l) opisuje następujące twierdzenie [Libura, 1984, b] :

Twierdzenie 5.1. (*słabe twierdzenie o dualności*)
Dla dowolnego niepustego zbioru zmiennych dualnych $\mathcal{F} \subseteq F_+^m$

$$v(P) \leq v(D_l).$$

Powyższe twierdzenie wykazuje, że zadanie dualne można stosować do oszacowania wartości optymalnej zadania (P) od dołu.

5.2 Relaksacja Lagrange'a w optymalizacji dyskretnej

Zasadniczym punktem w zastosowaniu relaksacji Lagrange'a jest teoria dualności dla optymalnego wyboru mnożników. Teorię przedstawiamy na podstawie pracy J. Shapiro [1979, a].

Rozważmy problem optymalizacji dyskretnej w ogólnej postaci

$$v = \min f(x) \quad \text{przy ograniczeniach} \quad g(x) \leq b, \quad x \in X \subseteq \mathbf{R}^n \tag{5.12}$$

gdzie f jest skalarną funkcją określoną na $\mathbf{R}^n$, g jest funkcją z $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^m$, a X jest zbiorem dyskretnym. W relaksacji Lagrange'a ograniczenia skalowane są przez nieujemne mnożniki λ włączone do funkcji celu i w taki sposób otrzymujemy problem bez ograniczeń.

Tak więc funkcja Lagrange'a wyprowadzona z (5.1) przyjmuje postać :

$$L(\lambda) = -\lambda b + \min_{x \in X}\{f(x) + \lambda g(x)\}. \tag{5.13}$$

To, co charakteryzuje zastosowanie relaksacji Lagrange'a w optymalizacji dyskretnej - to nieróżniczkowalność L, ze względu na dyskretność zbioru X. Dlatego też zagadnienie dualne jest zagadnieniem optymalizacji nieróżniczkowalnej.

[Shapiro, 1979, a] podaje następujące warunki optymalności dla (5.12) :

Warunki optymalności : Para $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ gdzie $\overline{x} \in X$ i $\overline{\lambda} \geq 0$ spełnia warunki optymalności dla zagadnienia optymalizacji dyskretnej (5.1), jeśli

$$\begin{array}{ll} (i) & L(\overline{\lambda}) = -\overline{\lambda} b + f(\overline{x}) + \overline{\lambda} g(\overline{x}) \\ (ii) & \overline{\lambda}(g(\overline{x}) - b) = 0 \\ (iii) & g(\overline{x}) \leq b. \end{array} \tag{5.14}$$

Twierdzenie 1.1 Jeżeli $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ spełnia warunki optymalności dla zagadnienia (5.12), wówczas $\overline{x}$ jest optymalne dla (5.1).

Z dowodu przedstawionego przez Shapiro [1979, a] można wyprowadzić następujące wnioski:

Wniosek 1 (słaba dualność). Dla każdego $\lambda \geq 0$, $L(\lambda) \leq v$.

Celem jest znalezienie takiego λ, które zapewni największe ograniczenie od dołu lub takie λ, które będzie optymalne dla problemu dualnego

$$d = \max L(\lambda) \quad \text{przy ograniczeniach} \quad \lambda \geq 0. \tag{5.15}$$

Wniosek 2 Jeżeli $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ spełnia warunki optymalności dla zagadnienia optymalizacji dyskretnej (5.12), wówczas $\overline{\lambda}$ jest optymalne dla zagadnienia (5.15).

W rozwiązywaniu zagadnienia (5.15) można wyróżnić dwie metody : metodę wzrostu w zagadnieniu optymalizacji nieróżniczkowalnej i metodę programowania liniowego. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do metody optymalizacji nieróżniczkowalnej [Fisher i in., 1975, a] [Shapiro, 1979, a]. Funkcja $L(\lambda)$ jest *funkcją ciągłą, wypukłą, różniczkowalną prawie wszędzie.* W następnym punkcie przedstawimy podstawowe pojęcia optymalizacji nieróżniczkowalnej.

5.3 Optymalizacja niegładka

Oznaczenia :

x, y wektory kolumnowe,

$x^T y$ iloczyn skalarny,

$||x||$ norma w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $\mathbf{R}^n$,

tzn. $||x|| = (x^T x)^{1/2}$ dla $x, y \in \mathbf{R}^n$,

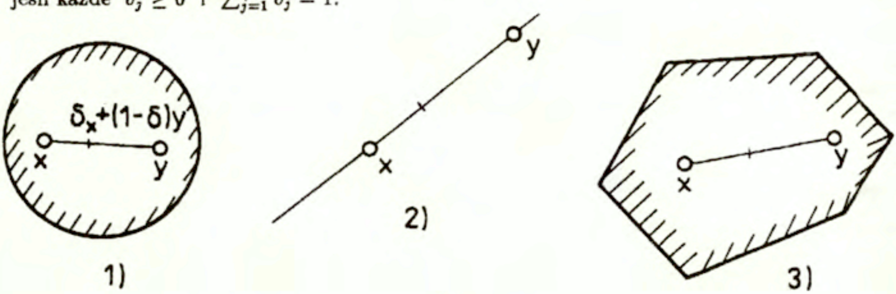
$[x, y]$ domknięty liniowy odcinek łączący x i y tzn.

$$[x, y] = \{z \in \mathbf{R}^n | z = \delta x + (1 - \delta) y \quad \text{for } 0 \leq \delta \leq 1\} \tag{5.16}$$

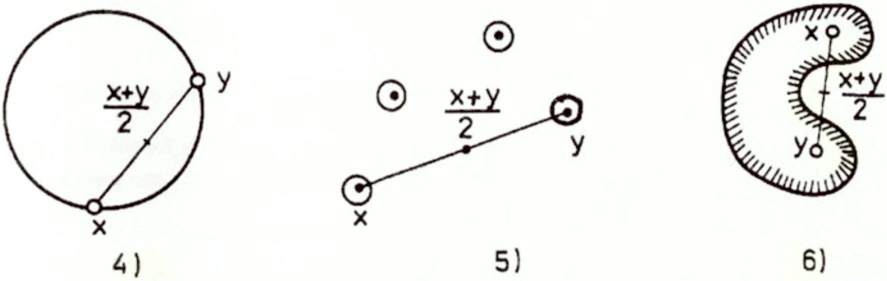
oraz przez (x, y) odpowiedni otwarty odcinek liniowy.

Zbiór $C \subset \mathbf{R}^n$ nazywamy *wypukłym*, jeśli $[x, y] \subset C$ dla każdego x i y należącego do C.

Liniową kombinację $\sum_{j=1}^{k} \delta_j x^j$ nazywamy *kombinacją wypukłą* punktów $x_1, \ldots x_k$ w $\mathbf{R}^n$, jeśli każde $\delta_j \geq 0$ i $\sum_{j=1}^{k} \delta_j = 1$.



zbiory wypukłe (1 – 3)



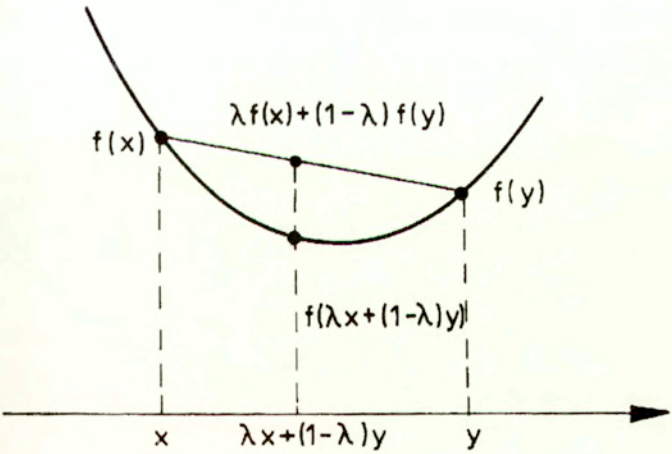
zbiory niewypukłe (4-6) Rys. 2

Np. $\mathbf{R}^n$ jest zbiorem wypukłym, inne przykłady przedstawione są na Rys. 2.

Funkcja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jest *wypukła*, jeśli

$$f(\delta x + (1-\delta)y) \leq \delta f(x) + (1-\delta)f(y) \tag{5.17}$$

dla każdego x i y z $\mathbf{R}^n$ i $\lambda \in [0,1]$ (patrz : Rys.3).



Rys. 3

Funkcja f jest *wklęsła*, jeśli $-f$ jest wypukła.

Funkcja liniowa jest zarówno *wklęsła*, jak i *wypukła*.

Inne przykłady przedstawione są na Rys. 4.

funkcje wypukłe

funkcje wklęsłe

Rys. 4

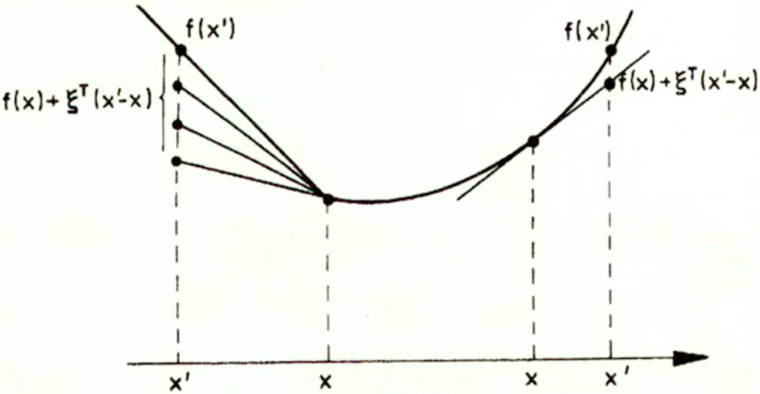
Pochodna kierunkowa f w x w kierunku $\zeta \in \mathbf{R}^n$ zdefiniowana jest następująco :

$$f'(x;\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t}. \tag{5.18}$$

Jeśli f jest różniczkowalna, wówczas pochodna kierunkowa, która istnieje w każdym kierunku $\xi \in \mathbf{R}^n$ jest liniową funkcją ξ i mamy związek

$$f'(x;\xi) = \nabla f(x)^T \xi \tag{5.19}$$

gdzie $\nabla f(x) \in \mathbf{R}^n$ jest wektorem gradientu f w x.



Rys 5

Subróżniczką funkcji wypukłej $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ w $x \in \mathbf{R}^n$ jest zbiór

$$\partial_c f(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^n | f(x') \geq f(x) + \xi^T(x' - x) \text{ dla } x' \in \mathbf{R}^n\} \tag{5.20}$$

każdy element $\xi \in \partial_c f(x)$ nazywamy *subgradientem* f w x (patrz : Rys.5).

5.3.1 Metody subgradientowe

Rozpatrzmy problem wypukły bez ograniczeń

$$(P) \qquad \begin{cases} \min f(x) \\ \text{subject to } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{5.21}$$

Zasadniczą ideą jest uogólnienie metod dla zagadnień gładkich poprzez zmianę gradientu dowolnym subgradientem [Mäkäla i Neittaanmäki, 1992, i]. Ten nieskomplikowany pomysł ma jednak dwa punkty krytyczne i są nimi :

- wybór wielkości kroku iteracyjnego
- istnienie kryterium "stopu" w procesie iteracyjnym.

Można wskazać kilka różnych propozycji odpowiedzi na wymienione wyżej problemy, ale trzeba przy tym przyznać, że brak jednoznacznego kryterium "stopu" jest główną przeszkodą w przypadku stosowania metod subgradientowych. Jak już wspomnieliśmy, zamiast gradientu wykorzystujemy tylko jeden subgradient $\xi_k \in \partial f(x_k)$. Zatem naturalnym uogólnieniem metody gradientowej jest zastąpienie gradientu znormalizowanym subgradientem

$$d_k = -\xi_k/||\xi_k|| \text{ aby } f(x_k + d_k) < f(x_k).$$

(Należy podkreślić, że w rozważaniach tych rozpatrujemy problem poszukiwania minimum f.) Jednakże powyższa strategia niekoniecznie zawsze zapewnia procedurę spadku. Również nie może być wykorzystane stosowane powszechnie kryterium "stopu", ponieważ dowolny subgradient nie zawiera informacji o warunku optymalności $0 \in \partial f(x)$. W związku z tym wielkość kroku iteracyjnego Θ_k ustalamy "a priori". Kolejny punkt w iteracji definiujemy następująco :

$$\begin{cases} x_{k+1} := x_k - \Theta_k \frac{\xi_k}{||\xi_k||}, \text{ gdzie } \xi_k \in \partial f(x_k) \\ \Theta_k > 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

W wyborze kroku iteracyjnego Θ_k mogą okazać się pomocne dwa następujące lematy : [Mäkäla i Neittaanmäki, 1992, i].

<u>Lemat 1.</u> Niech x^* będzie rozwiązaniem problemu (P) (19) i załóżmy, że x^* nie jest rozwiązaniem. Wówczas

$$||x_{k+1} - x^*|| < ||x_k - x^*|| \tag{5.23}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$0 < \Theta_k < 2[f(x_k) - f(x^*)]/||\xi_k|| \tag{5.24}$$

Lemat 2. W każdym kroku iteracyjnym k mamy

$$||x_0 - x_k|| \le \sum_{j=0}^{k} \Theta_j. \tag{5.25}$$

W związku z tym, aby zapewnić globalną zbieżność, muszą być spełnione następujące warunki

$$\Theta_k \to 0 \quad \text{gdy} \quad k \to \infty \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k = \infty. \tag{5.26}$$

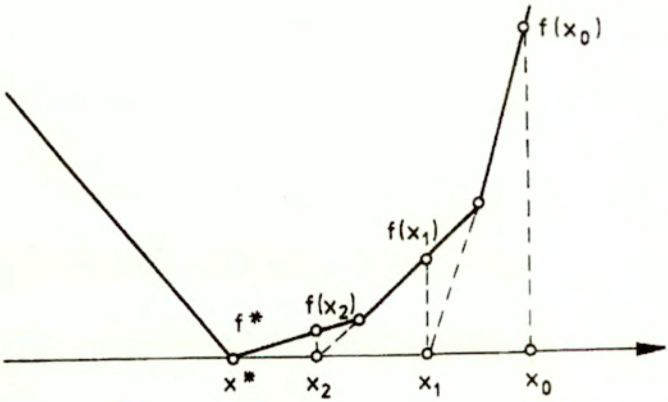
Podobne warunki można znaleźć w monografii Poljaka [1983, g]. Podaje on również przykłady ciągów, które spełniają warunek (5.26)

$$\Theta_k = \frac{\Theta}{k+c}, \quad \Theta_k = \frac{\Theta}{k^{\varrho}}, \quad 0 < \varrho \le 1, \quad \Theta_k = \frac{\Theta}{k \ln k}, \quad \Theta > 0. \tag{5.27}$$

Jest raczej oczywiste, że powyższa metoda nie jest szybko zbieżna. Dlatego [Poljak, 1983, g] proponuje inne metody wyboru wielkości kroku iteracyjnego. W przypadku niektórych zagadnień optymalizacji możemy znać optymalną wartość funkcji celu. Oznaczmy ją przez f^*. Jeśli mamy f^*, wówczas jesteśmy w stanie skonstruować następującą wersję metody subgradientów bez żadnych dodatkowych parametrów

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) - f^*}{||\xi_k||^2} \xi_k. \tag{5.28}$$

Interpretację geometryczną powyższego schematu iteracyjnego przedstawiono na Rys. 6.



Rys. 6

Jeśli nie znamy wartości f^*, wówczas możemy powyższą metodę nieznacznie zmodyfikować. Założymy proces iteracyjny w następującej postaci :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x^k) - \overline{f}}{||\xi_k||^2}\xi_k, \tag{5.29}$$

gdzie $\overline{f}$ jest oszacowaniem optymalnej wartości f^*. Poljak przedstawia również inne propozycje schematów iteracyjnych. Możemy wśród nich wymienić :

$$x_{k+1} = x_k - \Theta\xi_k/||\xi_k||, \quad \Theta > 0 \tag{5.30}$$

$$x_{k+1} = x_k - \Theta_k\xi_k, \quad \Theta_k \to 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\Theta_k = \infty \tag{5.31}$$

$$x_{k+1} = x_k - \Theta_k\xi_k/||\xi_k||, \quad \Theta_k = \Theta_0 q^k, \quad q < 1 \tag{5.32}$$

$$x_{k+1} = x_k - \Theta(f(x_k)) - f^*)\xi_k||\xi_k||^{-2}, \quad 0 < \Theta < 2. \tag{5.33}$$

Podobne sugestie, dotyczące wielkości kroku iteracyjnego Θ_k znajdujemy w monografii [Nemhauser, Wolsey, 1988, f]. Obok znanego nam z poprzednich rozważań ciągu rozbieżnego

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Theta_k \to \infty, \quad \Theta_k \to 0 \quad \text{gdy} \quad k \to \infty \tag{5.34}$$

podajemy propozycję w postaci ciągu geometrycznego

$$\Theta_k = \Theta_0\varrho^k \tag{5.35}$$

lub zależności, przypominającej propozycje Poljaka [(5.30)-(5.32)]

$$\Theta_k = \alpha_k[\overline{f} - f(x^k)]/||\xi_k||^2 \tag{5.36}$$

gdzie $0 < \varrho < 1$, $\varepsilon_1 < \alpha_k < 2 - \varepsilon_2$ dla ε_1, $\varepsilon_2 > 0$, $||\xi_k||$ oznacza normę euklidesową, $\overline{f}$ jest górną granicą optymalnej wartości f (zadanie (5.21)).

Szereg (5.34) jest satysfakcjonujący z teoretycznego punktu widzenia, gdyż dąży do punktu optymalnego. Natomiast w praktyce okazuje się on bardzo wolny. W wielu zastosowaniach np. [Shapiro, 1979, a] zalecana jest zależność (5.35) lub (5.36). Nie spełnia ona, co prawda, wszystkich teoretycznych wymagań np. zależności (5.26), ale szereg testów numerycznych prowadzi do w pełni zadowalających rezultatów. W naszych rozważaniach, dotyczących maksymalizacji funkcji dualnej $L(\lambda)$ (5.15), przyjmujemy do określenia wielkości kroku iteracyjnego zależność (5.36).

W rozwiązaniu zadania dualnego (5.15) stosujemy następujący algorytm :

Step 1. Wprowadzamy wartości początkowe dla zmiennych dualnych λ.
Podstawiamy $k := 0$.

Step 2. Obliczamy $L(\lambda^k)$ i ξ_k. Jeżeli $\xi_k = 0$ (odpowiada to rozwiązaniu dopuszczalnemu) **Stop**. W przeciwnym przypadku **continue**.

Step 3. Wybór kroku w kierunku subgradientu $\lambda_i^{(k+1)} = \max\{0, \lambda_i^k + \Theta_k \xi_k^{(i)}\}$
z wielkością kroku $\Theta_k = \alpha_k(\overline{L} - L(\lambda^k))/||\xi_k||^2$
gdzie $\varepsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $||\xi_k||$ norma euklidesowa.

Step 4. $k := k + 1$ **go to** *Step* 2.

W idealnym przypadku algorytm subgradientowy może być zatrzymany wtedy, gdy w pewnej iteracji "k" znajdziemy $\xi^k = 0 \in \partial f(x^k)$. Jednakże praktycznie występuje to rzadko, gdyż algorytm wybiera tylko jeden subgradient ξ^k i nie ma możliwości wykazania, że $0 \in \partial f(x^k)$ jako wypukłej kombinacji subgradientów. W związku z tym najczęściej stosowaną zasadą stopu jest albo skończenie procesu iteracyjnego po określonej z góry liczbie iteracji, albo wtedy, gdy wartość funkcji nie przekracza określonej wartości podczas pewnej liczby iteracji.

5.3.2 Rozwiązanie zadania optymalizacji dyskretnej bez ograniczeń

Ważnym elementem algorytmów, wykorzystujących sformułowanie dualne zadań optymalizacji, jest rozwiązanie zadania bez ograniczeń ze wzoru (5.13) tzn. $\min\{f(x) + \lambda g(x)\}$. Chociaż w większości przypadków zastosowanie metod przybliżonych prowadzi w krótkim czasie do zadowalających rezultatów np. [Jonson, Larson, 1990, a], [Ringertz 1988, h], to jednak dysponowanie niezawodnym algorytmem rozwiązania jest sprawą niezwykle istotną. Algorytm taki przedstawili w swej pracy [Renpu Ge, Changbin Huang, 1989, g]. Proponują oni metodę funkcji kary - z tą jednak różnicą, że funkcja celu w ich algorytmie nie jest funkcją niegładką, ale dwukrotnie ciągle różniczkowalną w R^n.

Problem rozwiązania zadania optymalizacji dyskretnej bez ograniczeń możemy przedstawić w następującej postaci :

$$\min h(x), \tag{5.37}$$

gdzie x_i są liczbami całkowitymi $|x_i| \leq d_i$

Zdefiniujmy zbiory S_0 oraz S_0'

$$S_0 = \{\underline{x} |\ |x_i| \leq d_i,\ i = 1, 2, ..., n\} \tag{5.38}$$

$$S_0' = \{\underline{x} |\ \underline{x} \in S_0,\ x_i - \text{całkowite},\ i = 1, 2, ..., n\}. \tag{5.39}$$

Zakładamy, że funkcja $h(\underline{x})$ jest dwukrotnie ciągle różniczkowalna oraz że istnieje stałe L_1 i L_2 takie, że

$$||\nabla h(\underline{x})||_1 \leq L_1, \quad ||\nabla^2 h(\underline{x})||_1 \leq L_2 \quad \bigvee \underline{x} \in S_0 \tag{5.40}$$

gdzie $||\underline{z}||_1 = (|z_1| + |z_2| + ... + |z_n|)$ dla pewnego elementu $\underline{z} \in R^n$.

Mówimy, że $\underline{x}'$ jest *punktem całkowitym*, jeśli wszystkie jego składowe x_i' $(i = 1, 2, ..., n)$ są liczbami całkowitymi.

Dla punktu całkowitego $\underline{x}'$, zbiór

$$N(\underline{x}') = \{\underline{x} |\quad ||\underline{x} - \underline{x}'||_\infty \leq \frac{1}{5}\} \tag{5.41}$$

nazywamy $\frac{1}{5}$ *przestrzennym sąsiedztwem* punktu całkowitego $\underline{x}$' gdzie $||\underline{z}_\alpha|| = \max_{1\leq i\leq n}|z_i|$, $z \in R^n$. Dla zagadnienia (5.37) skonstruujemy następującą funkcję kary :

$$\Phi(\underline{x}, k) = h(\underline{x}) - k\sum_{i=1}^{n}\cos 2\Pi x_i. \tag{5.42}$$

We wspomnianej pracy [Renpu Ge, Changbin Huang, 1989, g] udowodniono twierdzenie, będące podstawą efektywnego algorytmu rozwiązywania nieliniowych zadań programowania całkowitoliczbowego bez ograniczeń.

Twierdzenie Ge-Huang [1989, g]

Załóżmy, że $\overset{*}{\underline{x}}$ jest rozwiązaniem globalnym minimum funkcji Φ w S_0 (5.41) oraz że "k" spełnia nierówność

$$k > \max(m_1, m_2, m_3) \tag{5.43}$$

gdzie

$$m_1 = \frac{L_1}{2\Pi\sin\frac{2}{5}\Pi} \tag{5.44}$$

$$m_2 = \frac{L_2}{4\Pi^2\sin\frac{2}{5}\Pi} \tag{5.45}$$

$$m_3 = \frac{nL_1}{2\Pi^2 m_4} \tag{5.46}$$

oraz

$$m_4 = \min[f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1)] \tag{5.47}$$

dla wszystkich liczb całkowitych $\underline{x}_2$ i $\underline{x}_1$ z S_0 takich, że $f(\underline{x}_2) > f(\underline{x}_1)$ oraz jeśli $\overset{*}{\underline{x}}$ jest $\frac{1}{5}$ - sąsiedztwem punktu całkowitoliczbowego $\hat{\underline{x}} \in S_0$, wówczas $\hat{\underline{x}}$ jest rozwiązaniem zadania (5.37) programowania całkowitoliczbowego.

Wydaje się, że m_4 zależy od optymalnej wartości funkcji celu zadania całkowitoliczbowego i mamy do czynienia z "błędnym kołem", ale w rzeczywistości w procesie obliczeniowym powinniśmy przyjmować "k" coraz większe i większe.

Znalezienie rozwiązania zadania całkowitoliczbowego (5.37) wymaga przyjęcia dostatecznie dużego "k" i znalezienie globalnego minimum funkcji $\Phi(\underline{x}, k)$ (5.42). Wówczas punkt $\hat{\underline{x}} \in S$ taki, że

$$||\hat{\underline{x}} - \overset{*}{\underline{x}}||_\alpha \leq \frac{1}{5} \tag{5.48}$$

jest poszukiwanym rozwiązaniem zadania (5.37).

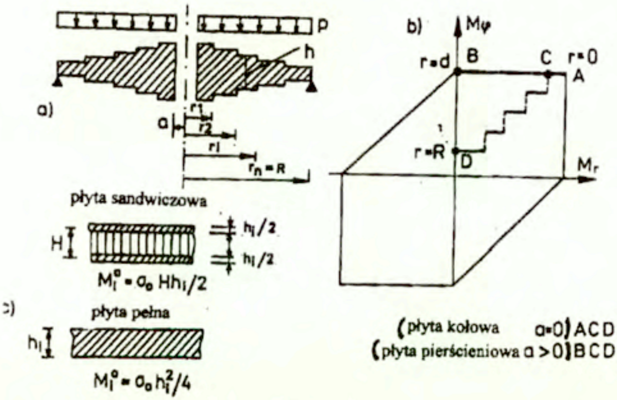
6. Przykłady numeryczne

6.1 Optymalizacja płyt plastycznych kołowych i pierścieniowych o skokowo zmiennej grubości

W większości prac, poświęconych optymalizacji kołowych lub pierścieniowych płyt plastycznych, przyjmowano, że wysokość płyty jest funkcją ciągłą zmiennej niezależnej tzn. promienia płyty. Ciężar takiej płyty jest rzeczywiście minimalny, jednak w wielu przypadkach koszt wykonania jest zbyt wysoki, a dla wielu przypadków takie rozwiązanie ma niewielką wartość praktyczną. Z technologicznego punktu widzenia założenie o skokowo zmiennej grubości (momentu uplastycznienia) jest w pełni uzasadnione. Pierwszą pracą, w której podjęto próbę projektowania takich płyt, była praca Hopkinsa i Pragera 1955a, którzy otrzymali analityczne rozwiązanie dla płyty kołowej o skokowo zmiennej wysokości. Nie wyprowadzono wówczas warunków istnienia rozwiązania optymalnego. Natomiast [Sheu i Prager 1969, b] wyprowadzili warunki konieczne i wystarczające dla kołowych i pierścieniowych sandwiczowych płyt plastycznych o skokowo zmiennej wysokości. Minimalizowano ciężar płyty wykonanej z materiału opisywanego warunkiem plastyczności Treski przy założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia. Warunki optymalności zostały rozszerzone na bardziej złożone przypadki płyt kołowych i pierścieniowych - zarówno pełnych, jak i sandwiczowych oraz w odniesieniu do różnych przypadków obciążenia i warunków brzegowych przez [Lamblin, Guerlement i Save 1985, b]. Zastosowanie liniowego programowania matematycznego w rozwiązywaniu powyższych problemów oraz sformułowaniu kinematycznym zadania optymalizacji plastycznej przedstawiono w pracy [Lamblin, Cinquini i Guerlement 1978, g]. [Salupere, 1992, j] rozwiązał problem maksymalnej nośności granicznej dla płyty pierścieniowej o skokowo zmiennej grubości. Dla określonej objętości płyty rozpatrzone zostały 4 typy grup warunków brzegowych. W powyższych pracach ograniczenia o charakterze technologicznym wyrażano jedynie w postaci skokowo zmiennej grubości płyty (momentu uplastyczniającego). W niektórych przypadkach wprowadzono dodatkowo warunek, że grubość płyty (moment uplastyczniający) zawiera się w pewnym przedziale $[h_{\min}, h_{\max}]$. W związku z tym zmienne projektowania - grubości pierścieni tworzących płytę - były zmiennymi o charakterze ciągłym. W rzeczywistości płyty metalowe konstruowane są z blach, których grubości dane są w postaci skończonego zbioru wartości - katalogu. Również grubości płyt betonowych lub żelbetowych ograniczone są do skończonego zbioru wartości. Uwzględnienie takich wymogów w sformułowaniu zadania optymalizacji płyt plastycznych prowadzi do zadania dyskretnego lub dyskretno - ciągłego programowania matematycznego. Pierwsze rozwiązanie zadania optymalizacji na minimum objętości materiału płyt plastycznych, o skokowo zmiennej grubości przy założeniu, że grubości płyty powinny być dobierane z danego zbioru skończonego - katalogu - przedstawiono na Kongresie GAMM 1991 w Krakowie [Bauer, 1992, d]. W niniejszej pracy zaprezentowane zostało rozwiązanie problemu optymalizacji kołowych płyt plastycznych zarówno pełnych, jak i sandwiczowych, na minimum objętości materiału przy ograniczeniu, że grubości płyty dane są w skończonym zbiorze - katalogu. Zmiennymi projektowania są grubości pierścieni tworzących płytę oraz wartości współrzędnych, określających miejsca zmian grubości płyty. Powyższe sformułowanie prowadzi do zadania dyskretno - ciągłego programowania matematycznego. Zmienne, określające grubości pierścieni, są zmiennymi dyskretnymi, natomiast zmienne, opisujące współrzędne punktów zmian grubości - zmiennymi ciągłymi. Na podstawie zależności, opisujących momenty w przegubach plastycznych można wyrazić współrzędne punktów zmian grubości w funkcji wartości grubości płyty (momentów uplastyczniających). W taki sposób otrzymujemy zadanie dyskretnego programowania matematycznego z dyskretnymi zmiennymi projektowania, wyrażającymi grubości pierścieni tworzących płytę.

6.1.1 Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzmy płytę kołową lub pierścieniową (Rys. 7) zbudowaną z n pierścieni, z których każdy charakteryzuje się stałą grubością (momentem uplastyczniającym).



Rys. 7

Materiał płyty jest sztywno - idealnie plastyczny i opisywany jest warunkiem plastyczności Treski. Obowiązuje stowarzyszone prawo płynięcia.

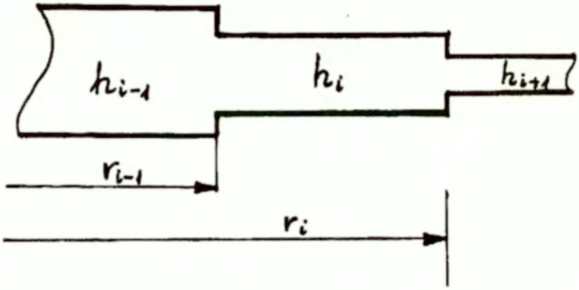
W przypadku płyty obciążonej równomiernie i swobodnie podpartej w pełni uzasadnione jest założenie, że dla

$$0 < r_1 < r_2 < ... < r_{n-1} < R, \qquad M_1^0 > M_2^0 > ... > M_n^0, \tag{6.1}$$

oraz dla pierścienia $r_{i-1} < r < r_i$ (Rys. 2) mamy [Sheu, Prager, 1969, b] [Lambin et ak., 1985, b]

$$\begin{array}{ll} k_i^\theta(r) \geq 0, & k_i^r V(r) = 0 \\ M_i^\theta(r) = M_i^0, & 0 < M_i^r(r) < M_i^0 \end{array} \tag{6.2}$$

gdzie M_i^θ i M_i^r są obwodowymi i promieniowymi momentami zginającymi w rozpatrywanym pierścieniu, r_i - współrzędną punktu zmiany grubości płyty, k_i^θ, k_i^r - odpowiednio prędkościami krzywizny obwodowej i promieniowej.



Rys. 8

Całkując równanie równowagi dla pierścienia $[r_{i-1}, r_i]$ z warunkiem $M_i^r(r_{i-1}) = M_i^0$ otrzymujemy

$$M_i^r(r) = M_i^0 - \frac{1}{6}p[(r^3 - r_{i-1}^3)/r], \tag{6.3}$$

gdzie p jest obciążeniem płyty.

Ponieważ promieniowy moment zginający jest ciągłą funkcją r i w punkcie $r = r_i + 0$ mamy przegub plastyczny, z równania (6.3) wynika

$$M_i^r(r_i) = M_{i+1}^0 = M_i^0 - \frac{1}{6}p[(r_i^3 - r_{i-1}^3)/r_i]. \tag{6.4}$$

Uwzględniając, że dla płyty swobodnie podpartej $M_{n+1}^r = 0$ powyższy wzór przyjmuje dla $i = n$ postać

$$M_n^0 = \frac{1}{6}p[(R^3 - r_{n-1}^3)/R]. \tag{6.5}$$

Wyrażenie (6.4) dla $i = 1, ..., n-1$ oraz zależność (6.5) tworzą układ związków rekurencyjnych, opisujących uplastycznienie płyty.

W pracy rozpatruje się zarówno płyty sandwiczowe, jak i pełne (Rys. 7). W przypadku płyt sandwiczowych przyjmujemy, że grubość rdzenia H jest dana i stała. Dla płyty sandwiczowej mamy więc

$$M_i^0 = \sigma_0 H \frac{h_i}{2} \tag{6.6}$$

i dla płyty pełnej

$$M_i^0 = \sigma_0 \frac{h_i^2}{4} \tag{6.7}$$

gdzie σ_0 jest granicą plastyczności przy prostym ściskaniu lub rozciąganiu. Wartości r_i i h_i wyznaczamy w taki sposób, aby minimalizowały one całkowitą objętość materiału "okładzin" dla płyt sandwiczowych i płyty dla płyt pełnych

$$v = \pi \sum_{i=1}^{n} (r_i^2 - r_{i-1}^2) h_i, \qquad r_0 = 0, \ \ r_n = R. \tag{6.8}$$

Grubości h_i mają być dobierane ze skończonego dyskretnego zbioru - katalogu

$$h_i \in [h_i^{(1)}, ..., h_i^{(q)}]. \tag{6.9}$$

Powyższy problem optymalizacji z minimum funkcji celu opisywaną równaniem (6.8) i warunkami ograniczającymi (6.1), (6.2), (6.3), (6.9) i (6.6) lub (6.7) jest zadaniem nieliniowego programowania dyskretno - ciągłego. Zmienne decyzyjne r_i są zmiennymi ciągłymi, natomiast zmienne h_i - zmiennymi dyskretnymi. Zauważmy, że z zależności (6.5) możemy wyznaczyć r_{n-1} w funkcji M_n^0, a w związku z tym również w funkcji h_n. Z kolei $r_{n-2}, ..., r_1$ możemy wyznaczyć z rekurencyjnych zależności (6.4). Dla $n = 6$ mamy

$$r_5 = [R^3 - \frac{6}{p} R M_6^0]^{1/3} \tag{6.10}$$

$$r_i = [r_{i+1}^3 - \frac{6}{p} r_{i+1} (M_{i+1}^0 - M_{i+2}^0)]^{1/3}, \qquad i = 4, 3, 2, 1. \tag{6.11}$$

W związku z powyższym nasz problem można sformułować następująco :

$$\min v = \pi \sum_{i=1}^{n} (r_i^2 - r_{i-1}^2) h_i \tag{6.12}$$

z ograniczeniami

$$M_2^0 - M_1^0 + p r_1^2 = 0 \tag{6.13}$$

$$r_i - r_{i+1} < 0, \quad i = 1, ..., n-1 \tag{6.14}$$

$$h_i \in [h_i^{(1)}, ..., h_i^{(q)}], \quad i = 1, ..., n \tag{6.15}$$

$$r_{n-1} = [R^3 - \frac{6}{p} R M_n^0]^{1/3} \tag{6.16}$$

$$r_i = [r_{i+1}^3 - \frac{6}{p} r_{i+1} (\dot{M}_{i+1}^0 - M_{i+2}^0)]^{1/3}, \quad i = n-2, ..., 1 \tag{6.17}$$

$$M_i^0 = \sigma_0 H \frac{h_i}{2} \ \text{ lub } \ M_i^0 = \sigma_0 \frac{h_i^2}{4}, \quad i = 1, ..., n \tag{6.18}$$

gdzie : n, $r_n = R$, H, σ_0, p - są wielkościami danymi.
Nasze zagadnienie optymalizacji jest zagadnieniem nieliniowego dyskretnego programowania matematycznego ze zmiennymi h_i.

6.1.2 Rozwiązania szczegółowe

Rozpatrzone zostały zarówno płyty sandwiczowe, jak i pełne. W każdym przypadku przykłady testowe budowano na podstawie dobrze opracowanych rozwiązań dla płyt plastycznych z ciągłymi zmiennymi decyzyjnymi [Sheu, Prager; 1969, b], [Lamblin, Guerlement, Save; 1985, b]. Wartości, otrzymane z rozwiązań zadań optymalizacji ciągłej, zostały włączone do katalogu zadania optymalizacji dyskretnej i zaznaczono je gwiazdką "*". Oczywiste jest, że dla takiego katalogu rozwiązanie optymalne powinno zawierać powyższe wartości. Rozpatrzono płyty kołowe obciążone równomiernie i swobodnie podparte na brzegu.

a) Płyta sandwiczowa, **n = 2**.

Przyjęto katalog dla h_i

$$h_{1,2} \in [0,036208;\ 0.052083;\ \overset{(*)}{0.192708};\ 0.260416;\ \overset{(*)}{0.380208};\ 0.5] \left[\frac{pR^2}{\sigma_0 H}\right].$$

Wartości początkowe dla $\lambda_0^0 = 0.0$. Współczynnik α_k we wzorze (5.36) określającym długość kroku obliczeniowego przyjęto równy 1.5. Wyniki iteracji przedstawione zostały w Tablicy I.

Tablica I

k	θ_k	$L(\lambda)$	k	θ_k	$L(\lambda)$	k	θ_k	$L(\lambda)$
1	28.6	0.116	16	3.79	0.893	31	0.378	0.934
2	22.3	0.297	17	3.25	0.900	32	0.324	0.935
3	17.4	0.439	18	2.78	0.906	33	0.781	0.935
4	13.6	0.549	19	2.39	0.910	34	0.713	0.936
5	10.6	0.635	20	2.05	0.914	35	0.650	0.936
6	8.25	0.702	21	1.76	0.918	36	0.593	0.936
7	6.43	0.754	22	1.51	0.921	37	0.542	0.937
8	12.9	0.783	23	1.29	0.923	38		0.937
9	11.1	0.806	24	1.11	0.926			
10	9.52	0.825	25	0.95	0.928			
11	8.16	0.841	26	0.82	0.929			
12	7.0	0.855	27	0.699	0.931			
13	6.0	0.867	28	0.599	0.932			
14	5.15	0.877	29	0.514	0.933			
15	4.42	0.886	30	0.441	0.934			

Rozwiązanie :

$$h_1 = 0.380208\frac{pR^2}{\sigma_0 H},\ \ h_2 = 0.192708\frac{pR^2}{\sigma_0 H},\ \ r_1 = 0.75R \quad \min v = \max L(\lambda) = 0.937\frac{pR^4}{\sigma_0 H}.$$

b) Płyta pełna, **n = 2**.

Dla h_i przyjęto następujący katalog

$$h_{1,2} \in [0,2;\ 0.4;\ \overset{(*)}{0.563560};\ 0.7;\ \overset{(*)}{0.866487}] \left[R\sqrt{\frac{p}{\sigma_0}}\right]$$

$$\lambda^0 = 0.0 \quad \alpha_k = 1.5.$$

Przebieg iteracji przedstawiony został w Tablicy II

Tablica II

$n = 2$

k	θ_k	$L(\lambda)$	k	θ_k	$L(\lambda)$
1	66.9	0.741	7	15.5	2,16
2	52.4	1.14	8	12.2	2.25
3	41.1	1.45	9	9.55	2.32
4	32.2	1.70	10	12.6	2.38
5	25.3	1.89	11		2.39
6	19.8	2.04			

Rozwiązanie :

$$h_1 = 0.866487R\sqrt{\frac{p}{\sigma_0}}, \quad h_2 = 0.563560R\sqrt{\frac{p}{\sigma_0}}, \quad r_1 = 0.806R \quad \min v = \max L(\lambda) = 2.39R^3\sqrt{\frac{p}{\sigma_0}}.$$

c) Płyta sandwiczowa, $\mathbf{n} = \mathbf{6}$.

Uzyskano rozwiązanie dla dwu katalogów h_i. Katalog pierwszy zawierał 10 wartości, katalog drugi - 15. Do obydwu katalogów włączono wartości, uzyskane z rozwiązania przypadku ciągłego (bez ograniczeń (6.9)) [Lambin, Guerlement, Save, 1985, b], zaznaczone (*). Katalog 10-elementowy zawierał następujące dopuszczalne wartości dla h_i :

$$h_i \in [0,01;\ 0.07\overset{(*)}{3}771;\ 0.1;\ 0.14\overset{(*)}{7}985;\ 0.2;\ 0.22\overset{(*)}{1}486;\ 0.25; 0.29\overset{(*)}{4}569;\ 0.36\overset{(*)}{6}896;\ 0.43\overset{(*)}{7}429] \left[\frac{pR^2}{\sigma_0 H}\right]$$

$$\lambda_i^0 = 0.0, \quad \alpha_k = 1.2.$$

Przebieg iteracji został przedstawiony w Tablicy III

Tablica III

Katalog 10-elem.			Katalog 15-elem.		
k	θ_k	$L(\lambda)$	k	θ_k	$L(\lambda)$
1	0.524	0.535	1	0.110	0.823
2	0.360	0.634	2	0.032	0.824
3	0.247	0.701	3		0.844
4	0.241	0.747			
5	0.155	0.783			
6	0.099	0.807			
7	0.131	0.820			
8	0.081	0.831			
9	0.050	0.838			
10	0.031	0.843			
11		0.844			

$$\min v(h)([\text{Lambin, Guerlement, Save, 1985, b}]) = \max \mathrm{L}(\lambda) = 0.844 \left[\frac{\mathrm{pR}^4}{\sigma_0 \mathrm{H}}\right].$$

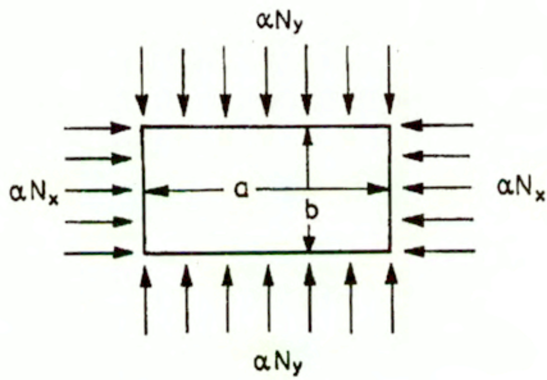
Katalog 15-elementowy zawierał następujące dopuszczalne (dostępne) wartości dla h_i :

$$h_i \in [0.03;\ 0.05;\ 0.0\overset{(\bullet)}{7}3771;\ 0.1;\ 0.1\overset{(\bullet)}{4}7985:\ 0.2;\ 0.2\overset{(\bullet)}{2}1486;\ 0.25;\ 0.2\overset{(\bullet)}{9}4569;$$

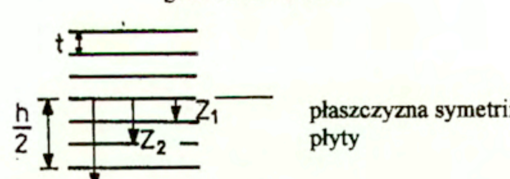
$$0.33;\ 0.3\overset{(\bullet)}{6}6896;\ 0.4;\ 0.4\overset{(\bullet)}{3}7429;\ 0.95;\ 1.5] \left[\frac{pR^2}{\sigma_0 H}\right].$$

Współczynnik $\alpha_k = 1.9$, natomiast jako początkowe wartości λ_i przyjęto wartości λ dla rozwiązania optymalnego z katalogiem 10-elementowym, tzn. $\lambda_1^0 = 0.760$; $\lambda_{2,\ldots,m}^0 = 0.0$. Rozwiązanie optymalne uzyskano już w trzeciej iteracji (Tablica III).

6.2 Optymalizacja płyt kompozytowych laminowanych



geometria warstw



Rys. 9

Swobodnie podparta płyta (Rys.9) obciążona jest w kierunku x i y obciążeniem αN_x i αN_y. Płyta składa się z N warstw, każda z nich o grubości t i możliwej orientacji 0^0, 90^0, $+45^0$, -45^0.

Współczynnik wyboczeniowy α_{cr} w przypadku ściskania dwuosiowego wyraża się następującą zależnością :

$$\alpha_{cr} = \frac{\Pi^2[D_{11}(\frac{m}{a})^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(\frac{m}{a})^2(\frac{n}{b})^2 + D_{22}(\frac{n}{b})^4]}{(\frac{m}{a})^2 N_x + (\frac{n}{b})^2 N_y} \tag{6.19}$$

gdzie współczynniki sztywności D są następujące :

$$\begin{aligned} D_{11} &= U_1V_0 + U_2V_1 + U_3V_3 \\ D_{22} &= U_1V_0 - U_2V_1 + U_3V_3 \\ D_{12} &= U_4V_0 - U_3V_3 \\ D_{66} &= U_5V_0 - U_3V_3 \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \tfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} p_k(z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ V_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cos 2\Theta dz = \tfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} p_k \cos 2\Theta_k(z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ V_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \cos 4\Theta dz = \tfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} p_k \cos 4\Theta_k(z_k^3 - z_{k-1}^3), \end{aligned} \tag{6.21}$$

gdzie z_k - odległość warstwy od płaszczyzny symetrii,
Θ_k - kąt orientacji dla każdej warstwy $[0^0,\ 90^0,\ +45^0,\ -45^0]$,
p_k - zmienna 0-1.
Przyjmując model płyty ortotropowej, stałe materiałowe wyrażają się następująco :

$$\begin{aligned} U_1 &= \tfrac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ U_2 &= \tfrac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 &= \tfrac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 &= \tfrac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_5 &= \tfrac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}), \end{aligned} \tag{6.22}$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \tfrac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\ Q_{22} = \tfrac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \tfrac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \tfrac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\ Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \tag{6.23}$$

E_1, E_2 - współczynniki sprężystości,
ν_{12}, ν_{21} - współczynniki Poissona,
G_{12} - moduł ścinania.
Wprowadzamy wielkości bezwymiarowe wg następujących zależności :

$$n_x = 1.5\frac{N_x a^2}{\Pi^2 E_1 t^3}, \qquad n_y = 1.5\frac{N_y a^2}{\Pi} \tag{6.24}$$

$$d_{ij} = 1.5\frac{D_{ij}}{E_1 t^3}, \qquad i,j = 1,2,6 \tag{6.25}$$

$$v_i = 1.5\frac{V_i}{t^3}, \quad i = 1,...,3, \qquad u_i = \frac{V_i}{E_1}, \quad i = 1,...,5. \tag{6.26}$$

Wówczas zależność dla siły krytycznej (6.19) możemy zapisać w następujący sposób :

$$\alpha_{cr}(m,n) = \frac{d_{11}m^4 + 2(d_{12}+2d_{66})m^2n^2(\frac{a}{b})^2 + d_{22}n^4(\frac{a}{b})^4}{m^2n_x + n^2(\frac{a}{b})^2 n_y} \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= u_1v_0 + u_2v_1 + u_3v_3 \\ d_{22} &= u_1v_0 - u_2v_1 + u_3v_3 \\ d_{12} &= u_4v_0 - u_3v_3 \\ d_{66} &= u_5v_0 - u_3v_3. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Wprowadzając zmienne dyskretne 0-1 określające orientację włókien w warstwach w sposób następujący :

$$xd(i) = \begin{cases} 1 & \text{gdy włókna w warstwie są w kierunku } 0^0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$xd9(i) = \begin{cases} 1 & \text{gdy włókna w warstwie są w kierunku } 90^0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$xd45(i) = \begin{cases} 1 & \text{gdy włókna w warstwie są w kierunku } 45^0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$xdm45(i) = \begin{cases} 1 & \text{gdy włókna w warstwie są w kierunku } -45^0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$i = 1, ..., N/2,$$

wówczas zależności, opisujące wielkości bezwymiarowe v_0, v_1, v_3, możemy wyrazić następująco :

$$v_0 = \sum_{k=1}^{N/2} p_k[(\frac{z_k}{t})^3 - (\frac{z_{k-1}}{t})^3] = \sum_{k=1}^{N/2}[k^3-(k-1)^3](xd(k)+xd9(k)+xd45(k)+xdm45(k))$$

$$v_1 = \sum_{k=1}^{N/2} p_k \cos 2\Theta_k[(\frac{z_k}{t})^3 - (\frac{z_{k-1}}{t})^3] = \sum_{k=1}^{N/2}[k^3-(k-1)^3](xd(k)-xd9(k))$$

$$v_2 = \sum_{k=1}^{N/2} p_k \cos 4\Theta_k[(\frac{z_k}{t})^3 - (\frac{z_{k-1}}{t})^3] = \sum_{k=1}^{N/2}[k^3-(k-1)^3](xd(k)+xd9(k)-xd45(k)-xdm45(k))$$

Problem optymalizacji płyty sformułowany jest w następujący sposób :

należy znaleźć taki rozkład warstw w płycie, aby obciążenie krytyczne osiągnęło maksymalną wartość

$$\alpha_{cr} \to \max. \tag{6.29}$$

Zmienne decyzyjne, opisujące układ warstw w płycie, powinny spełniać następujące zależności :

$$xd(i) + xd9(i) + xd45(i) + xdm45(i) = 1, \quad i = 1, ..., N/2 \tag{6.30}$$

$$\text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{N/2} (xd45(i) - xdm45(i)) = 0. \tag{6.31}$$

Szczegółowe obliczenia z wykorzystaniem metody dualnej (relaksacja Lagrange'a z metodą subgradientów) przeprowadzone zostały dla następującej płyty z kompozytu epoksydowego, z włóknami grafitowymi :

$$E_1 = 128\text{GPA}, \quad E_2 = 13.0\text{GPA}$$

$$G_{12} = 6.4\text{GPA}, \quad \nu_{12} = 0.3$$

$$t = 0.0127\text{cm}, \quad N = 16$$

$$a = 50.8\text{cm}, \quad b = 25.4\text{cm}$$

$$\overline{N}_x = 175\text{N/m}.$$

Przeprowadzone zostały obliczenia dla kilku przypadków obciążenia dwuosiowego : $N_y/N_x = 2.1$; $N_y/N_x = 1.5$; $N_y/N_x = 2.4$. Wyniki obliczeń porównano z rezultatami otrzymanymi w pracy [Haftka, Walsh, 1992, c], gdzie zastosowano program komercyjny z wykorzystaniem metody podziału i ograniczeń. Rozkład warstw w płytach przedstawiono na Rys. 10,11,12.

$$\frac{N_y}{N_x} = 2.1$$

$\alpha_{cr} = 35.40$

$$\begin{array}{r} 5 \times (90^0) \\ 45^0 \\ 90^0 \\ -45^0 \end{array}$$

$\alpha_{cr} = 34.60$ $\qquad 8 \times (90^0)$

(b)

Rys. 10

$$\frac{N_y}{N_x} = 1.5$$

$\alpha_{cr} = 46.18$

$$\begin{array}{r} 3 \times (90^0) \\ 45^0 \\ 90^0 \\ 90^0 \\ -45^0 \\ 90^0 \end{array}$$

$\alpha_{cr} = 42.90$ $\qquad 8 \times (90^0)$

(b)

Rys. 11

$$\frac{N_y}{N_x} = 0.24$$

$\alpha_{cr} = 129.28$

45^0
-45^0
90^0
-45^0
45^0
-45^0
90^0
45^0

$\alpha_{cr} = 119.00$ (nb) $\quad 8 \times (45^0)$

$\alpha_{cr} = 114.00$ (b)

45^0
90^0
0^0
-45^0
45^0
90^0
0^0
-45^0

Rys. 12

Spis cytowanej literatury

1953

a. N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller and E. Teller, Equation of state calculations by fast computing machines, *J. Chemical Physics*, **21**, 1087-1092.

b. G.B. Dantzing, Discrete - variable extremum problems, *Operat. Res.*, **5**, 2, 266-277.

1955

a. H. G. Hopkins and W. Prager, Limits of economy of material in plates, *J. Appl. Mech.*, **22**, 372-374.

1957

a. R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, N.J.

1958

a. R.E. Gomory, Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs, *Bull. Amer. Soc. Math.*, **64**, 275-278.

1960

a. A. H. Land and A. G. Doig, An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems, *Econometrica*, **28**, 497-520

1965

a. S. E. Dreyfus, *Dynamic Programming and the Calculus of Variations*, Academic Press, Inc. New York.

b. S. Reiter and G. Sherman, Discrete optimizing, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **13**, 864-889.

1968

a. D. A. Maciulevicius, Sijntez optimalnych szarnirno - sterżnievych konstrukcij po zadannomu sortamentu materiału (czasticzno ciełočislennaja zadača), *Litov. Mech. Sbornik*, **2**, 5-15.

b. A. R. Toakley, Optimum design using available sections, *Proc. ASCE J. Struct. Div.*, **94**, 1219-1241.

c. A. C. Palmer, Optimal Structure Design by Dynamic Programming, *J. Struct. Div. ASCE*, vol.94, No ST 8, 1887-1906.

1969

a. A.A. Korbut and J.J. Finkelsztejn, *Discrete Programming*, (in Russian), Nauka, Moskva.

b. C. Y. Sheu and W. Prager, Optimal plastic design of circular and annular sandwich plates with piecewise constant cross section, *J. Mech. Phys. Solids*, **17**, 11-16.

1970

a. Kim Hen Hij, T. S. Kim, Ispolzovanije dinamičeskogo programirovanija dlja rasčeta mnogoproletnych ferm najmnieszego objema, *Stroitelnaja Mechanica i Rascet Sooruženij*, No 4(70), 18-20.

1971

a. K. F. Reinschmidt, Discrete structural optimization, *Proc. ASCE, J. Struct. Div.*, **97**, 133-156.

b. H. Greenberg, *Integer Programming*, Academic Press, New York.

c. A. M. Geoffrion, Duality in nonlinear programming : a simplified applications - oriented development, *SIAM Review*, **13**, 1, 1-37.

1973

a. A. Cella, K. Soosaar, Discrete variables in structural optimization In: R. M. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, eds., *Optimum Structural Design. Theory and Applications*, Wiley, 201-222.

1974

a. A.A. Korbut, J.J. Finkelsztejn, Programowanie dyskretne (tłum. z j. ros.), PWN, Warszawa.

1975

a. M. L. Fischer, W. D. Northup and J. F. Shapiro, Using duality to solve discrete optimization problem: theory and computational experience, In: M. L. Baliński and Philip Wolfe eds., *Math. Programming Study*, Vol. 3 - Nondifferentiable Optimization, North-Holland, 56-94.

b. Z. R. Leśniak, Some practical applications of structural optimization. In: A. Sawczuk and Z. Mróz, eds., *Optimization in Structural Design*, Springer, Berlin, 563-569.

c. A. Zavelani, G. Maier and L. Binda, Shape optimization of plastic - structures by zero - one programming, In: A. Sawczuk and Z. Mróz, eds. *Optimization in Structural Design*, Springer, Berlin, 541-554.

1976

a. Cz. Eimer and J. Mączyński, On optimal shell prestressing, *J. Struct. Mech.*, **4**, 298-305.

1978

a. Z. K. Leśniak, Z. Grodzki, B. Jakubowska, *OSY - system optymalizacji hal stalowych* Arkady, Warszawa.

b. A. Garstecki, A. Gawęcki and M. Gawęcki, Optymalizacja systemu lekkich hal stalowych, *Prace IPPT PAN, (IFTR Reports)*, Nr 6.

c. R. G. Kelahan and J. L. Gaddy, Application of the adaptive random search to discrete and mixed integer optimization, *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, **12**, 289-298.

d. S. S. Rao, *Optimization. Theory and applications*, Chapter 10-*Integer Programming*, Wiley, New Delhi.

e. R.S. Garfinkel, G.L. Nemhauser, Programowanie całkowitoliczbowe (tłum. z j. ang.), PWN, Warszawa.

f. B.M. Kagunowicz, Diskretnaja optimizacja tepłowych setiej (ros.), Nauka Nowosibirsk.

g. D.O. Lamblin, c. Cinquini, G. Guerlement, Application of linear programming to the optimal plastic design of circular plates subjected to technological constraints, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **13**, 223-243.

1979

a. J. S. Shapiro, A survey of Lagrange'an techniques for discrete optimization, *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, **5**, 113-138.

b. E. J. Haug and J. S. Arora, *Applied Optimal Design, Mechanical and Structural Systems*, Wiley, New York.

c. A. Glankwahmdee, J. Liebman and G. Hogg, Unconstrained discrete nonlinear programming, *Engineering Optimization*, **4**, 95-107.

1980

a. L. A Schmit and C. Fleury, Discrete-continuous variable structural synthesis using dual methods, *AIAA J.*, **18**, 1515-1524.

b. J. Farkas and L. Szabó, Optimum design of beams and frames of welded I-sections by means of backtrack programming, *Acta Technica Academiae Scient. Hung.*, Tom. **91**, 121-135.

c. L.B. Kovács, *Combinatorial Methods of Discrete Programming*, Académiai Kiadó, Budapest.

d. J. Karczewski, W. Paczkowski, Optymalizacja kratownicy przestrzennej metodą pełnego przeglądu wariantów, *Inżynieria i Budownictwo*, **37**, 3, 91-95.

1981

a. J. Bauer, W. Gutkowski, Z. Iwanow, Metody numeryczne w optymalizacji dyskretnej, *Mechanika i Komputer*, Tom **4**, 121-139, Warszawa.

b. D. B. Fox and J. S. Liebman, A discrete nonlinear simplex method for optimized engineering design, *Engineering Optimization*, **5**, 129-149.

c. J. S. Liebman, Narbey Khachaturian and Visarn Chanarana, Discrete structural optimization, *Proc. ASCE, J. Struct. Div.*, **107**, 2177-2197.

d. J. Bauer, W. Gutkowski and Z. Iwanow, A discrete method for lattice structures optimization, *Engineering Optimization*, **5**, 121-128.

e. Z. Iwanow, The method of enumeration according to the increasing value of the objective function in the optimization of bar structures, *Bull. de l'Acad. Polon. des Sc. Ser. des Sc. Techn.*, **XXIX**, 9-14.

1982

a. D. F. Yates, A. B. Templeman and T. B. Boffey, The complexity of procedures for determining minimum weight trusses with discrete member sizes, *Int. J. Solids Structures*, **18**, 487-495.

b. L. Gawkowska, Optymalizacja przekryć strukturalnych, Praca doktorska, Politechnika Szczecińska.

c. L. Gawkowska, Optymalizacja przekryć strukturalnych o ortogonalnej siatce prętów, Prace IPPT Nr 8.

1983

a. D. F. Yates, T. B. Boffey and A. B. Templeman, A heuristic method for the design of minimum weight trusses using discrete member sizes, *Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, **37**, 37-55.

b. Hsichun M. Hua, Optimization for structures of discrete - size elements, *Computers & Structures*, **17**, 327-333.

c. S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, Jr and M. P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science*, **220**, 671-680.

d. C. Fleury and V. Braibant, Structural optimization involving discrete design variables, In: H. Eschenauer, N. Olhoff, eds., Optimization Methods in Structural Design, Proc. of Euromech-Colloquium 164, Siegen, Oct. 1982, Bibliographisches Institut, Mannheim, 70-77.

e. A. B. Templeman and D.F. Yates, A linear programming approach to the discrete optimum design of trusses, In: H. Eschenauer, N. Olhoff, eds., Optimization Methods in Structural Design, Proc. of Euromech-Colloquium 164, Siegen, Oct. 1982, Bibliographisches Institut, Mannheim, 133-139.

f. A. B. Templeman, D. F. Yates, A segmental method for the discrete optimum design of structures, *Eng. Optimization*, **6**, 3, 145-155.

g. B.T. Poljak, Vviedienije v optimizacju, Nauka, Moskva.

1984

a. J. Bauer, W. Gutkowski and Z. Iwanow, Optimum design of regular space structures, In: H. Nooshin, ed., *Third International Conference on Space Structures*, Elesevier, London, 672-676.

b. M. Libura, Dualność w programowaniu całkowitoliczbowym i jej zastosowanie w analizie pooptymalizacyjnej oraz algorytmach przybliżonych, *Arch. Automatyki i Telemechaniki*, XXIX, 1-2, 75-92.

1985

a. R. T. Haftka and H. M. Adelman, Selection of actuator locations for static shape control of large space structures by heuristic integer programming, *Computers & Structures*, **20**, 575-582.

b. D. O. Lamblin, G. Guerlement and M. A. Save, Solutions de dimensionnement plastique de volume minimal de plaques circulaires pleines et sandwiches en presence de constraintes technologiques, *J. de Mec., teor. et appl.*, **4**, 4. 433-461.

c. L. Gawkowska, Dobór optymalnych przekrojów prętów w strefach sztywności przekryć strukturalnych, *Arch. Inż. Ląd.*, **31**, 1-2, 97-111.

d. I.W. Sergienko, Matematičeskije modeli i metody resenija zadač diskretnoj optimizacji, Naukova Dumka, Kiev.

1986

a. D. E. Grierson and W. H. Lee, Optimal synthesis of frameworks under elastic and plastic performance constraints using discrete sections, *J. Struct. Mech.*, **14**, 401-420.

b. W. Gutkowski, J. Bauer and Z. Iwanow, Minimum weight design of space frames from a catalogue, In: K. Heki ed., *Shells, Membranes and Space Frames Proc IASS Symposium*, Elsevier, Amsterdam, Vol. 3, 229-236.

c. A. Ţ. Janczura and J. Sieczkowski, Komputerowy program wspomagający optymalizację konstrukcji ramowych, *Inż. i Budownictwo*, No. 4-5, 139-142.

d. A. Sepulveda and J. H. Cassis, An efficient algorithm for the optimum design of trusses with discrete variables, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **23**, 1111-1130.

e. R. P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison - Wesley Publishing Company

f. P. Berkowski, J. Boroń, Synteza wybranych konstrukcji prętowych metodą programowania dyskretnego "backtrack", *Inżynieria i Budownictwo*, 6, 204-208.

g. S. Walukiewicz, Programowanie dyskretne, PWN, Warszawa.

h. D.E. Goldberg and M.P. Samanti, Engineering optimization via genetic algorithm, Proc. of the Ninth Conference on Electronic Computation, 471-482.

1987

a. L. Gawkowska, A method for the optimization of space trusses, *Bulletin of the IASS*, **XXVIII-3**, **95**, 59-63.

b. J. Bauer, Optymalizacja konstrukcji z uwzględnieniem dyskretnego charakteru zmiennych decyzyjnych, VIII Konf. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, Jadwisin, 26-30 Maja 1987, Warszawa, t.I, 27-34.

c. M. Pyrz, Optymalizacja dyskretna regularnych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności, *Rozprawy Inżynierskie (Eng. Trans.)*, **35**, 3, 437-494.

1988

a. U. T. Ringertz, Discrete-continuous structural optimization, In: G.I. N. Rozvany, B.l. Karihaloo eds., *Structural Optimization*, Kluwer, 257-264.

b. H.M. Amir and T. Hasegawa, Nonlinear discrete structural optimization, *Structural Eng. / Earthquahe Eng.*, **5**, 39s-49s.

c. A. B. Templeman, Discrete optimum structural design, *Computers & Structures*, **30**, 511-518.

d. M. Weck and G.Kölsch, Optimization of machine tools a mixed - discrete - continuous problem, In: H.A. Eshenauer, G. Thierauf eds., *Discretization Methods and Structural Optimization - Procedures and Applications*, GAMM Seminar, Oct. 5-7, 1988, Lect. Notes in Eng. 42, Springer, 351-359.

e. D.K. Shin, Z. Gurdal and O. H. Griffin, Jr. A penalty approach for nonlinear optimization with discrete design variables, In: H. Eschenauer, G. Thierauf eds., *Discretization Methods and Structural Optimization - Procedures and Applications*, Springer, 326-334.

f. G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York.

g. J. Błażewicz, Złożoność obliczeniowa problemów kombinatorycznych, WNT, Warszawa.

h. U. T. Ringertz, On methods for discrete structural optimization, *Engineering Optimization*, **13**, 47-64.

1989

a. I. N. Kalinin, Diskretnoja optimizacja prostrastviennoj stierżnievoj fermiennoj konstrukcji, *Stroit. Mech. i Rasczet Soor.*, No. 3 (183), 1-5.

b. H.M. Amir and T. Hasegawa, Nonlinear mixed-discrete structural optimization, *J. Struct. Engng.*, **115**, 626-646.

c. H.M. Amir, Unconstrained nonlinear optimization of structure and structural geometry, Phd Thesis, Kyoto University, Kyoto, Japan.

d. P. Hajela and C. J. Shih, Optimal design of laminated composites using a modified mixed integer and discrete programming algorithm, *Computers Structures*, **32**, 213-221.

e. G.R. Olsen and G.N. Vanderplaats, Method for nonlinear optimization with discrete design variables, *AIAA J.* **27**, 1584-1589.

f. P. K. Eswaran, A. Rawindran and H. Moskowitz, Algorithms for nonlinear integer bicriterion problems, *JOTA*, **63**, 261-279.

g. R. Ge and Ch. Huang, A continuous approach to nonlinear integer programming, *Appl. Math. and Comput.*, **34**, 39-60.

h. D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learing*, Addison - Wesley, Reading.

1990

a. Ö. Jonsson and T. Larsson, Lagrange'an relaxation and subgradient optimization applied to optimal design with discrete sizing, *Engineering Optimization*, **16**, 221-233.

b. D. K. Shin, Z. Gürdal and O. H. Griffin, jr. A penalty approach for nonlinear optimization with discrete design variables, *Engineering Optimization*, **16**, 29-42.

c. Ch.-K. Choi and H.-G. Kwak, Optimum RC member design with predetermined discrete sections, *J. Struct. Engng.*, **116**, 2634-2655.

d. K.-Y. Yuan, Ch.-Ch. Liang and Y.-Ch. Ma, The estimation of the accuracy and efficiency of the backtrack programming method for discrete-variable structural optimization problems, *Computers & Structures*, **36**, 211-222.

e. Z. Iwanow, An algorithm for finding an ordered sequence of values of a discrete linear function, *Control and Cybernetics*, **19**, 129-154.

f. M. Pyrz, Discrete optimization of geometrically nonlinear truss structures under stability constraints, *Structural Optimization*, **2**, 125-131.

g. M. Pyrz, Discrete optimization of trusses with stability constraints, *Engineering Optimization*, **16**, 79-89.

h. M. Bremicker, P. V. Papalambros and H. T. Loh, Solution of mixed - discrete structural optimization problems with a new sequential linearization algorithm, Computers & Structures, **37**, 451-461.

i. M. Pyrz, Optymalizacja dyskretna konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności, Prace IPPT, Nr 35.

1991

a. W. Marks and W. Trochymiak, The selection of a system of prestressing tendons in hyperstatic beams as problem of linear integer programming, *Structural Optimization*, **3**, 59-67.

b. R. J. Balling, Optimal steel frame design by simulated annealing, *J. Struct. Engng., ASCE*, 1780-1795.

c. G. N. Vanderplaats and P. B. Thanedar, A survey of discrete variable optimization for structural design, In: O. Ural, T. L. Wang eds., *Proc. of the tenth ASCE Conference on Electronic Computation*, Indianopolis, Indiana ASCE, 173-180.

d. S. Walukiewicz, *Integer Programming*, PWN - Kluwer, Warszawa - Dordrecht.

e. H. T. Loh and P. Y. Papalambros, Computational implementation and tests of sequential linearization approach for solving mixed - discrete nonlinear design optimization, *J. Mech. Design, ASME*, **113**, 335-345.

f. Y. K. Sui, L. X. Qian and J. Liu, Optimum design of continuous beam, In: Y. K. Cheung, J. H. W. Lee and A. Y. T. Leung, eds., *Computational Mechanics*, Proc. Asian Pacific Conf. on Comput. Mech., Hong - Kong, 11-13 Dec. 1991, Balhema, Rotterdam, 367-372.

g. J. Hertz, A. Krogh and R. G. Palmer, Introduction to the Theory of Neural Computation, Addison - Wesley, Reading.

1992

a. J. Mottl, Excavator optimization using the 'voting method', *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **98**, 227-250.

b. S. Rajeev and C. S. Krishnamoorthy, Discrete optimization of structures using genetic algorithms, *J. Struct. Engng.*, **118**, 1233-1250.

c. R. T. Haftka and J. L. Walsh, Stacking - sequence optimization for buckling of laminated plates by integer programming, *AIAA J.*, **30**, 814-819.

d. J. Bauer, Algorithms of nondifferentiable optimization in discrete optimum structural design, *ZAMM*, **72**, T563-T566.

e. S. A. May and R. J. Balling, A filtered simulated annealing strategy for discrete optimization of 3D steel frameworks, *Structural Optimization*, **4**, 142-148.

f. C. M. Chan, An optimality criteria algorithm for tall steel building design using commercial standard sections, *Structural Optimization*, **5**, 26-29.

g. L. M. da Cruz Simões, Reliability of portal frames with discrete design variables, *Structural Optimization*, **5**, 76-83.

h. W. Gutkowski, Controlled enumeration with constraints variations in structural optimization, *ZAMM*, **72**, T447-T452.

i. M. M. Makela and P. Neittaanmaki, *Nonsmooth Optimization*, World Scientific, Singapore.

j. A. Salupere, Optimal design of rigid - plastic annular plates with piecewise constant thickness, *Structural Optimization*, **4**, 186-192.

1993

a. Ch. Zhang and H.-P. (Ben) Wang, Mixed-Discrete nonlinear optimization with simulated annealing, *Engineering Optimization*, **21**, 277-291.

b. J. Cai and G. Thierauf, Discrete optimization of structures using an improved penalty function method, *Engineering Optimization*, **21**, 293-306.

c. E. Salajegheh and G. N. Vanderplaats, Optimum design of trusses with discrete sizing and shape variables, *Structural Optimization*, **6**, 79-85.

d. S. Jendo and W. M. Paczkowski, Multicriteria discrete optimization of large scale truss systems, *Structural Optimization*, **6**, 238-249.

e. M. Libura, Analiza wrażliwości rozwiązań zadań optymalizacji dyskretnej, IBS PAN, Badania Systemowe t. 17, SYNPRESS, Warszawa.

1994

a. W. Gutkowski and J. Bauer, eds., *Discrete Structural Optimization*, Proc. Symp. IUTAM, Zakopane, 30 August - 3 September, 1993, Springer, Berlin.

1. Ph. Trompette, J. L. Marcelin and C. Schmeding, Optimal Damping of Beams and Plates by Genetic Algorithms, 1-11.

2. J. Mottl, Optimization by the Voting Method of Structures Formed of Planar Constitutive Parts, 12-21.

3. M. Kishi, T. Kodera, Y. Iwao and R. Hosoda, Neuro-Optimizer, Its Application to Discrete Structural Optimization, 22-29.

4. P. Hajela and E. Lee, Genetic Algorithms in Topological Design of Grillage Structures, 30-39.

5. J. Mączyński, Optimization of a Linear Objective Function with Logical Constraints, 40-46.

6. K. Dems and Z. Mróz, On Optimal Structural Segmentation Problem, 47-60.

7. E. Schäfer, J. Geilen and H. A. Eschenauer, Application of Discrete Optimization Techniques to Optimal Composite Structures, 61-70.

8. A. Osyczka and J. Montusiewicz, A Random Search Approach to Multicriterion Discrete Optimization, 71-79.

9. A. O. Rasskazov and A. S. Dekhtjar, Optimal Arrangement of Ribs in Rib Reinforced Plates and Shells, 80-87.

10. J. Niczyj and W. Paczkowski, Application of the Expert System for Discrete Optimization of Space Truss, 88-97.

11. V. V. Toropov, V. L. Markin and H. Carlsen, Discrete Structural Optimization Based on Multipoint Explicit Approximations, 98-107.

12. E. P. Petrov, Optimization of Perturbation Parameters for Forced Vibration Stress Levels of Turbomachinery Blade Assemblies, 108-117.

13. G. I. N. Rozvany and M. Zhou, New Discretized Optimality Criteria Methods - State of the Art., 118-134.

14. G. I. N. Rozvany, M. Zhou, T. Birker and T. Lewiński, Discretized Methods for Topology Optimization, 135-147.

15. N. Yoshikawa and S. Nakagiri, Homology Design of Flexible Structure by the Finite Element Method, 148-157.

16. S. Shevchenko, Optimization of Structure and Development of Production System, 158-167.

17. W. Gutkowski, J. Bauer and Z. Iwanow, Support Number and Allocation for Optimum Structure, 168-177.

18. J. Korbicz and D. Uciński, Sensor Allocation for State and Parameter Estimation of Distributed Systems, 178-189.

19. J. Holnicki-Szulc, F. Lopez-Almansa and A. Mackiewicz, Optimal Location of Piezoelectric Actuators, 190-199.

20. A. Čižas and S. Stupak, Optimal Discrete Design of Elastoplastic Structures, 200-208.

21. S. Jendo and W. M. Paczkowski, Multicriterion Discrete Optimization of Space Trusses with Serviceability Constraints, 209-220.

22. M. Pyrz, Symbolic Computations Approach in Controlled Enumeration Methods Applied to Discrete Optimization, 221-227.

23. A. T. Janczura, General P-△ Method in Discrete Optimization of Frames, 228-240.

24. A. A. Belal, A More General Optimization Problem for Uniquely Decodable Codes, 241-250.

b. J.A.Karczewski and W.M. Paczkowski, Discrete multicriterion optimization of a space truss, *Int. J. Space Structures*, **9**, 1, 27-38.

c. A.S. Hoback and K.Z. Truman, A new method for finding the global and discrete optima of structural systems, *Computers and Structures*, **52**, 1, 127-134.

d. H.M. Amir and T. Hasegawa, Shape optimization of skeleton structures using mixed-discrete variables, *Structural Optimization*, **8**, 2/3, 125-130.

e. J.S. Arora, M.W. Huang and C.C. Hsieh, Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: a review, *Structural Optimization*, **8**, 69-85.

f. H.-L. Li and Ch.-T. Chou, A global approach for nonlinear mixed discrete programming in design optimization, *Engineering Optimization*, **22**, 109-122.

g. J. Bauer, A survey of methods for discrete optimum structural design, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, **1**, 27-38.

1995

a. P.B. Thanedar and G.N. Vanderplaats, Survey of discrete variable optimization for structural design, *J. Struct. Engng.*, **121**, 2, 301-306.

b. C.H. Tseng, L.W. Wang and S.F. Ling, Enhancing branch - and - bound method for structural optimization, *J. Struct. Engng.*, **121**, 5, 831-837.

c. Ch.-M. Chan, D.E. Grierson and A. N. Sherbourne, Automatic optimal design of tall steel building frameworks, *J. Struct. Engng.*, **121**, 5, 838-847.

d. A.E. Sepulveda, Optimal material selection using branch and bound techniques, *AIAA J.*, **33**, 2, 340-347.

e. C.J. Shih and T.K. Lai, Mixed - discrete fuzzy programming for nonlinear engineering optimization, *Engineering Optimization*, **23**, 187-199.

f. S.-S. Lin, Ch. (Chuck) Zhang and H.-P. (Ben) Wang, On mixed - discrete nonlinear optimization problems: a comparative study, *Engineering Optimization*, **23**, 287-300.

g. S.-J. Wu and P.-T. Chow, Integrated discrete and configuration optimization of trusses using genetic algorithms, *Computers and Structures*, **55**, 4, 695-702.

h. S.-J. Wu and P.-T. Chow, Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of trusses, *Computers & Structures*, **56**, 6, 979-991.

i. J. Bauer, Discrete variable optimization of nonhomogeneous circular and annular plastic plates, In: N. Olhoff and G.I.N. Rozvany eds., *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Pergamon, 933-938.

j. J. Bauer and W. Gutkowski, Discrete Structural Optimization: A Review, In: N. Olhoff and G.I.N. Rozvany eds, *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Pergamon, 901-908.

k. W. Gutkowski, J. Bauer, Z. Iwanow, Optimum support of large span structures, Bulletin of IASS, **36**, 3, 183-190.

l. J.A. Hoogeveen and S.L. van de Velde, Lagrangian bounds by use of slack variables; applications to machine scheduling problems, *Mathematical Programming*, **70**, 2, 173-190.

1996

a. E. Salajegheh, Discrete variable optimization of plate structures using dual variables, *Computers & Structures*, **58**, 6, 1131-1138.

b. Z. Michalewicz, Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewoluacyjne, WNT, Warszawa.

1997

a. W. Gutkowski, Structural optimization with discrete design variables, *Eur. J. Mech., A/Solids*, **16**, 107-126.

b. S. Jendo, W.M. Paczkowski, Decomposition in discrete polyoptimization problems, 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, W. Gutkowski and Z. Mróz Eds., Vol. 1, 79-84.

c. W. Gutkowski, J. Zawidzka, Sequential algorithm of discrete minimum weight design of structures, 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, W. Gutkowski and Z. Mróz Eds., Vol. 1,313-318.

d. S. Kaliszky, I. Kirchner, J. Lógó, Discrete optimization of elasto-plastc trusses with plastic deformation and stability constraints, 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, W. Gutkowski and Z. Mróz Eds., Vol. 1, 319-324.

e. W.M. Paczkowski, J.A. Karczewski, On some problems of the discrete prferable solution choice, 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, W. Gutkowski and Z. Mróz Eds., Vol. 1, 325-330.

f. T. Turkkila, Discrete multicriteria optimization of truss structures with material selection, 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, W. Gutkowski and Z. Mróz Eds., Vol. 1, 331-336.

g. W. Gutkowski, (Ed.), Discrete structural optimization, CISM Courses and Lectures No.373, Springer, Wien.

h. J.W. Baugh Jr., S.C. Caldwell, E.D. Brill Jr., A mathematical programming approach for generating alternatives in discrete structural optimization, *Engineering Optimization*, **28**, 1-2, 1-31.

i. T.B. Boffey, D.F. Yates, A simplex - based approach to a class of problems associated with truss design, *Engineering Optimization*, **28**, 1-2, 127-156.

j. F.Y. Kocer and J.s. Arora, Standarization of steel, pole design using discrete optimization, *J. Structural Engineering*, **123**, 3(1997), 345-349.

k. P. Hajela, Stochastic Search in Discrete Structural Optimization Simulated Annealing, Genetic Algorithms and Neural Networks, [w:] W.Gutkowski, (Ed.) *Discrete Structural Optimization, Chapter 2*, CISM Courses and Lectures No. 373, Springer, Wien, 55-133.

l. A.B. Templeman, Heuristic Methods in Discrete Structural Optimization, [w:] W.Gutkowski, (Ed.) *Discrete Structural Optimization, Chapter 3*, CISM Courses and Lectures No. 373, Springer, Wien, 135 165.

m. J. Farkas and K. Jarmai, Backtrach Method with Applications to DSO, [w:] W.Gutkowski, (Ed.) *Discrete Structural Optimization, Chapter 4*, CISM Courses and Lectures No. 373, Springer, Wien, 167-231.

1998

a. D.E. Goldberg, Algorytmy genetyczne i ich zastosowania, WNT, Warszawa (tłum. z j. angielskiego).

b. S. Wang, K. L. Teo, H. W. J. Lee, A new approach to nonlinear mixed discrete programming problems, *Engineering Optimization*, **30**, 249-262.

c. Jong Hyup Lee and Chang Sup Sung, Joint configuration of backbone and logical networks on a reconfigurable pachet - switched network with ureliable links, *Engineering Optimization*, **30**, 3-4, 309-331.

1999

a. W. Gutkowski, Z. Iwanow and J. Bauer, Minimum Weight Design Using Genetic Algorithm with Controlled Mutation, [w:] Proc. 3nd WCSMO, C.L. Bloebaun, K.E. Lewis, R.W. Mayne (Eds.), May 17-21, Buffalo, New York, vol. 1, 275-276.

b. W. M. Paczkowski, Wybrane problemy dyskretnej optymalizacji ewolucyjnej, *Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej*, **Nr544**, Instytut Inżynierii Lądowej Nr 33, Szczecin.

2000

a. W. Gutkowski, J. Bauer and J. Zawidzka, An effective method for discrete structural optimization, *Engineering Computations*, **17**, 4, 417-426.

2001

a. R. Stocki, K. Kolanek, S. Jendo, M. Kleiber, Study on discrete techniques in reliability - based optimization of truss structures, *Computer and Structures*, **79**, 2235-2247.

b. W. Gutkowski, Z. Iwanow, J. Bauer, Controlled mutation in evolutionary structural optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **21**, 5, 355-360.

c. J. Błachut, H.A. Eschenauer (Eds.), Energing methods for multidisciplinary optimization, CISM Courses and Lectures No.425, Springer, Wien-New York.

2002

a. ....

Spis treści