

Adam Ciarkowski

DYFRAKCJA FAL ELEKTROMAGNETYCZNYCH

NA EKRANACH

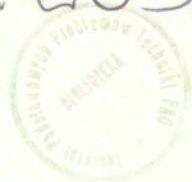
UMIESZCZONYCH NA GRANICY

OŚRODKÓW DIELEKTRYCZNYCH

PRACA HABILITACYJNA

4/1994

P. 269

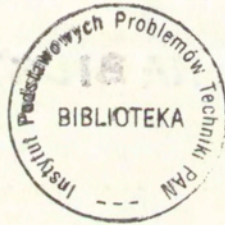


WARSZAWA 1994

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 grudnia 1993 r.

P r a c a h a b i l i t a c y j n a

recenzent - Prof.dr hab.inż.Eugeniusz Danicki



56645



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.5,40 Ark.druk.6,75
Oddano do drukarni w styczniu 1994 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

Dyfrakcja Fal Elektromagnetycznych na Ekranach Umieszczonych na Granicy Ośrodków Dielektrycznych

Adam Ciarkowski

Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Streszczenie

Praca dotyczy zagadnień ugięcia fal elektromagnetycznych na doskonale przewodzących, nieskończenie cienkich ekranach, umieszczonych w płaszczyźnie rozdziału dwóch różnych ośrodków dielektrycznych.

Wychodząc od rozwiązań ścisłych dwuwymiarowych zagadnień dyfrakcji fal płaskich typu E i H na półpłaszczyźnie skonstruowano rozwiązanie ściśle dla przypadku trójwymiarowego (skośny kierunek padania fali płaskiej względem krawędzi półpłaszczyzny). Z wykorzystaniem analizy asymptotycznej całek konturowych znaleziono niejednostajne i quasi-jednostajne, wysokoczęstotliwościowe rozwinięcia asymptotyczne tego rozwiązania. Przeprowadzono interpretację fizyczną zjawisk zachodzących w procesie ugięcia fali padającej oraz związków występujących między falami dyfrakcyjnymi i bocznymi w otoczeniu płaszczyzny rozdziału ośrodków.

Rozwiązania asymptotyczne otrzymane dla szczególnego kształtu ekranu jakim jest półpłaszczyzna oraz uzyskana analiza fizyczna zjawisk falowych posłużyły z kolei do zapostulowania, a następnie znalezienia niejednostajnego i quasi-jednostajnego rozwiązań asymptotycznych dla ekranu z krawędzią krzywoliniową. Przedstawiono opartą na heurystycznych rozważaniach promieniowych procedurę prowadzącą do konstrukcji tych rozwiązań. Rozwiązanie niejednostajne opisane jest przez funkcje elementarne i obowiązuje wszędzie poza otoczeniem granic cienia występujących w zagadnieniu fal i otoczeniem kaustyk fal dyfrakcyjnych. Rozwiązanie quasi-jednostajne wyrażone jest przy pomocy całki Fresnela i funkcji Webera rzędu $1/2$ i $3/2$ i jest ciągle na wspomnianych granicach. Z dala od tych granic przechodzi w rozwiązanie niejednostajne. Podobnie jak rozwiązanie niejednostajne, nie obowiązuje ono w otoczeniu kaustyk fal dyfrakcyjnych — w szczególności w otoczeniu krawędzi ekranu.

Spis treści

1	Wstęp	6
2	Rozwiązanie ściśle zagadnienia trójwymiarowego	11
2.1	Rozwiązania dwuwymiarowe	12
2.2	Synteza rozwiązania trójwymiarowego	16
2.2.1	Rozwiązanie metodą pomocniczych pól typu TEM	17
2.3	Podsumowanie	26
3	Rozwinięcia asymptotyczne całek dyfrakcyjnych	28
3.1	Całki dyfrakcyjne z dwoma punktami krytycznymi	28
3.1.1	Wyrażenie całek kanonicznych poprzez funkcje specjalne	30
3.1.2	Współczynniki rozwinięcia	33
3.1.3	Rozwinięcie niejednostajne	34
3.1.4	Odmienny sposób obchodzenia bieguna	37
3.2	Całki dyfrakcyjne z trzema punktami krytycznymi	38
3.2.1	Konstrukcja rozwinięcia jednostajnego	38
3.2.2	Wyrażenie całek kanonicznych poprzez funkcje specjalne	41
3.2.3	Quasi-jednostajne i niejednostajne rozwinięcia asymptotyczne funkcji u	42
3.3	Podsumowanie	47
4	Niejednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie	48
4.1	Podsumowanie	55
5	Związki między falami dyfrakcyjnymi i bocznymi w zagadnieniu dyfrakcji na półpłaszczyźnie	56
5.1	Podsumowanie	62
6	Quasi-jednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie	63
6.1	Podsumowanie	69
7	Niejednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji na ekranie z krawędzią krzywoliniową	71
7.1	Fale optyki geometrycznej	72
7.2	Fale dyfrakcyjne	74
7.3	Fale boczne	80
7.4	Podsumowanie	86

8	Quasi-jednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji na ekranie z krawędzią krzywoliniową	87
8.1	Podsumowanie	96
9	Zakończenie	97
A	Funkcje $P_g(w)$ i $M_g(w)$	99
B	Rozwiązania asymptotyczne równania Helmholtza	102

1 Wstęp

Niniejsza praca poświęcona jest zagadnieniu ugięcia fal elektromagnetycznych na nieskończenie cienkich ekranach umieszczonych na granicy dwóch różnych ośrodków dielektrycznych. W rozważaniach zakładamy, że ośrodki są jednorodne i izotropowe oraz dla ustalenia uwagi, że fala padająca nadbiega w kierunku krawędzi ekranu od strony ośrodka rzadszego optycznie. Zakładamy także, że rozpatrywane procesy falowe zależą harmonicznie od czasu. Praca dzieli się na dwie części. Pierwsza dotyczy trójwymiarowego zagadnienia dyfrakcji na najprostszym ekranie — półpłaszczyźnie, druga wiąże się z dyfrakcją na ekranach o bardziej ogólnym kształcie. W pierwszej części konstruujemy rozwiązanie ściśle problemu dyfrakcji na półpłaszczyźnie, dopuszczając skośny kierunek rozchodzenia się fali padającej względem krawędzi półpłaszczyzny. Punktem wyjścia do konstrukcji są rozwiązania ściśle dwuwymiarowych skalarnych zagadnień dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie umieszczonej na granicy ośrodków [1], będące modyfikacją rozwiązań Stöckela [2]. Rozwiązania te opisują zjawiska falowe w dwóch niesprzężonych ze sobą zagadnieniach dyfrakcji fali płaskiej padającej prostopadle do krawędzi półpłaszczyzny i spolaryzowanej tak, że w jednym zagadnieniu równoległy do krawędzi jest wektor pola elektrycznego, a w drugim — wektor pola magnetycznego. Z tych rozwiązań syntetyzowane jest rozwiązanie zagadnienia trójwymiarowego [49]. Procedura postępowania opiera się na metodzie zaproponowanej w [3]. W przeciwieństwie do zagadnienia dyfrakcji w jednym ośrodku, rozpatrywany tu problem z dwoma ośrodkami nie daje się już rozdzielić na dwa niezależne zagadnienia z rozwiązaniami wyrażalnymi poprzez jedną funkcję skalarną. Niezależnie od typu pobudzenia w rozwiązaniu pojawiają się pola obu typów: TE i TM, a więc zagadnienie jest także dwumodowe. W danym przypadku dwumodowość pociąga za sobą nieskalaryzowalność: w definiującej rozwiązanie parze funkcji skalarnych jedna opisuje pole typu TE, zaś druga pole typu TM. Występujące w zagadnieniu sprzężenie między oboma typami pól ma charakter krawędziowy; eliminacja krawędzi bądź na drodze usunięcia półpłaszczyzny, bądź na drodze zastąpienia jej płaszczyzną przewodzącą do rozprzężenia zagadnienia na dwa niezależne od siebie typy pól. Warto podkreślić, że rozważany problem stanowi najprostszy model dyfrakcji krawędziowej zachodzącej na granicy ośrodków, zarówno ze względu na rodzaj fali padającej jak i kształt ekranu. Dzięki temu pozwala on na wydobycie interpretacji fizycznej zjawisk stowarzyszonych z problemem ugięcia fali na ekranie występującym się granicy ośrodków, nie zaciemnionej przez inne, wtórne zjawiska nie związane z samą dyfrakcją.

Uzyskane rozwiązanie ściśle zdefiniowane jest przy pomocy całek konturowych określonych na konturach nieskończonych i tym samym niezbyt dogodnych do analizy i zastosowań. W zakresie wysokich częstotliwości rozwiązanie można przybliżyć znacznie wygodniejszym, jego rozwinięciem asymptotycznym. Zabieg ten pozwala odkryć strukturę fizyczną zjawisk falowych zachodzących w rozpatrywanym problemie, a także uzyskać dosyć prostą zależność funkcijną rozwiązania

od jego parametrów. Warto podkreślić, że w tym zakresie częstotliwości metody numeryczne stają się nieefektywne ze względu na ograniczenia pamięciowe komputera.

Konstrukcja rozwinięcia asymptotycznego rozwiązania ścisłego sprowadza się do rozwijania asymptotycznego całek konturowych z trzema punktami krytycznymi: punktem siodłowym, biegunem i punktem rozgałęzienia, przy czym punkty te mogą znajdować się względem siebie dowolnie blisko. W takich przypadkach klasyczna analiza asymptotyczna całek przestaje być słuszną, a stosownym narzędziem staje się teoria Bleisteina [4, 5, 6]. Opierając się na tej teorii znajdujemy niejednostajne i quasi-jednostajne, wysokoczęstotliwościowe rozwiązania asymptotyczne dla rozważanego zagadnienia. Pierwsze z nich, wyrażone poprzez proste funkcje, jest słuszne wszędzie poza otoczeniami krawędzi półpłaszczyzny i granic cienia występujących w zagadnieniu fal. Drugie, opisane przez funkcje Webera rzędu -1 , $1/2$ i $3/2$, jest słuszne również na granicach cienia, a z dala od nich przechodzi w rozwiązanie niejednostajne. Otrzymane rozwiązania asymptotyczne umożliwiają interpretację procesów falowych charakterystycznych dla dyfrakcji fal na granicy ośrodków. W szczególności pozwalają analitycznie potwierdzić hipotezę postawioną w [7, 8] o charakterze związków zachodzących między falami dyfrakcyjnymi i bocznymi.

Uzyskane rozwiązania dla półpłaszczyzny, wraz z ich interpretacją fizyczną, stwarzają podstawę do uogólnienia rozwiązań asymptotycznych na przypadek klasy płaskich ekranów z krawędziami krzywoliniowymi. Opierając się na heurystycznych rozważaniach promieniowych i korzystając z wcześniejszych wyników dotyczących dyfrakcji pól jedno- i dwumodowych na półpłaszczyźnie [9, 16] znajdujemy rozwiązania niejednostajne i quasi-jednostajne dla takich ekranów, przyjmując dodatkowe założenie, że promień krzywizny krawędzi jest duży w stosunku do długości fali padającej i w sposób gładki zmienia się wzdłuż krawędzi. Znalezione rozwiązania mają podobny charakter jak w przypadku półpłaszczyzny. Nowym ograniczeniem jest to, że obowiązują do najbliższej, pomijając krawędź, kaustyki fali dyfrakcyjnej oraz nie uwzględniają wtórnych oddziaływań fal dyfrakcyjnych z fragmentami krawędzi. Uzyskane tu wyniki dają podstawę do uogólnień na inne rodzaje fal padających. Jest to konsekwencją faktu, że pierwszy wyraz rozwinięcia asymptotycznego rozwijanej fali ma lokalnie strukturę fali płaskiej.

W celu umiejscowienia tej pracy na tle innych prac związanych z dyfrakcją na krawędzi przedstawimy krótki przegląd wyników w tej dziedzinie. Cytowane niżej prace zdają się albo wyznaczać główne kierunki rozwoju wiedzy w zakresie dyfrakcji krawędziowej, albo są blisko związane z tematyką niniejszej pracy. Historycznie pierwsze prace dotyczące dyfrakcji opierały się na przybliżeniu Kirchhoffa. Prezentację wyników opartych o to podejście można znaleźć w monografii W. Rubinowicza [11]. Pierwszy ścisły rezultat pochodzi od Sommerfelda [12], który w 1896 roku opublikował klasyczne rozwiązanie dwuwymiarowego zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na doskonale przewodzącej półpłaszczyźnie umieszczonej w ośrodku jednorodnym. W roku 1902 McDonald [13] znalazł rozwiązanie

zagadnienia dyfrakcji na klinie w postaci rozwinięcia na funkcje własne. W 1919 roku Carslaw [14] opublikował rozwiązanie dla tej struktury, wyrażone przy pomocy całki konturowej. Dalsze prace szły w kierunku rozwiązywania bardziej skomplikowanych struktur i ośrodków. Bogatą informację na ten temat można znaleźć w [15]. Milowym krokiem w teorii dyfrakcji była opublikowana w roku 1931 metoda Wienera-Hopfa [16], którą w różnych późniejszych odmianach [17] wykorzystywano do rozwiązywania problemów dyfrakcyjnych. Równoległe do podejmowania szczególnych zagadnień dyfrakcyjnych pojawiły się opracowania wskazujące na nowe podejścia analityczne, prowadzące do rozwiązań przybliżonych dla całych klas zagadnień. Doniosłą rolę odegrała tu tzw. geometryczna teoria dyfrakcji (GTD), zaproponowana w 1962 roku przez Kellera [18]. U podstaw tej wysokoczęstotliwościowej teorii leży założenie o lokalności zjawiska dyfrakcji. GTD zasadza się na idei znajdowania rozwiązań asymptotycznych zagadnień dyfrakcyjnych wzdłuż promieni. Przy całej swej użyteczności teoria ta posiada wady, w szczególności przestaje obowiązywać na granicach cienia fal optyki geometrycznej. Dalsze wysiłki skierowano więc na pokonanie niedostatków GTD, czego rezultatem było powstanie trzech teorii jednolitych: jednolitej asymptotycznej teorii dyfrakcji (JATD) [19, 9] opracowanej przez Ahluwalia, Lewisa i Boersmę, geometrycznej jednolitej teorii dyfrakcji (GJTD) [20] zaproponowanej przez Kuoyumjana i Pathaka oraz metody fal krawędziowych [21], której autorem jest Ufimcew. Odnotujmy, że teorie te zakładają jednorodność ośrodka, w którym zachodzi dyfrakcja. Porównanie tych metod można znaleźć w [22], [23] i w [24]. JATD, sformułowana dla cienkich ekranów, została następnie uogólniona przez Lee i Deschamps [25, 26] na przypadek struktur klinopodobnych. Możliwość dalszego uośkonlenia tego uogólnienia zaproponowali Ciarkowski, Boersma i Mittra [27], interpretując równocześnie rozwiązanie ściśle dyfrakcji na klinie w języku prądów płynących po jego powierzchni. Teorie jednolite pozwoliły w znacznym stopniu poszerzyć klasę analizowalnych problemów w porównaniu z GTD. Testującym problemem było szeroko analizowane zagadnienie dyfrakcji na dwóch równoległych półpłaszczyznach, rozwiązane ściśle w [28] i w [29]. Atrakcyjność tego zagadnienia i jego wersji z przesuniętymi półpłaszczyznami [30, 31] wiązała się z możliwością przetestowania teorii promieniowych przy rozpatrywaniu dyfrakcji wielokrotnej, zachodzącej dokładnie na granicach cienia fal [32, 33, 34, 35]. Boersma [36, 37] pokazał, że wyniki uzyskane przy pomocy JATD w zadziwiająco dokładnością przybliżają rozwiązanie ściśle.

Przejdźmy do krótkiej prezentacji prac blisko związanych z tematyką tej pracy, tj. dotyczących dyfrakcji fal zachodzącej na granicy ośrodków. Pierwsze opracowania na ten temat pojawiły się w związku z modelowaniem propagacji fal elektromagnetycznych w pobliżu brzegu morskiego [38, 39]. Autorom nie udało się przeprowadzić efektywnej faktoryzacji, niezbędnej do konstrukcji rozwiązania. Pierwszą pracą zawierającą kompletnie rozwiązanie jest praca Stöckela [2] z 1963 roku. Autor oparł się na metodzie sprzężonych równań całkowych, a faktoryzację przeprowadził według schematu wykorzystującego odwzorowania konforemne

i zaproponowanego przez Amenta [40]. W kontekście modelowania procesów fotolitograficznych Heitman i van der Berg [41] rozwiązali w 1975 roku zagadnienie dyfrakcji na półpłaszczyźnie umieszczonej na jednej z granic ośrodków w strukturze wielowarstwowej. Coblin i Pearson [8] zanalizowali w 1984 roku problem podobny do rozpatrywanego przez Stöckela, ograniczając się jednak do tylko jednej polaryzacji. Użyli podejścia opartego na równaniu całkowym i innego schematu faktoryzacji. W 1984 roku du Cloux [42] rozwiązał zagadnienie dyfrakcji na półpłaszczyźnie z falą padającą w postaci niestacjonarnej fali cylindrycznej posługując się metodą de Hoopa. Fala padająca reprezentowana jest tam przez całkę po widmie fal płaskich. W 1990 roku Volakis i Collins uzyskali rozwiązanie dla przypadku, gdy półpłaszczyzna nie jest doskonale przewodząca. W [2, 8, 43] przeprowadzono również analizę asymptotyczną rozwiązania, przy czym w pierwszej i trzeciej uzyskano rozwinięcia jednostajne wokół granic cienia fal optyki geometrycznej.

Wszystkie wymienione w poprzednim akapicie prace dotyczą problemów dwuwymiarowych. Metody syntetyzowania rozwiązania zagadnienia trójwymiarowego z rozwiązań zagadnień dwuwymiarowych, z powodzeniem stosowane w przypadku jednego ośrodka, zawiodą w przypadku obecności dwóch ośrodków. Trudność tę pomogła pokonać metoda [3] zaproponowana przez Przeździeckiego w kontekście analizy dyfrakcji na półpłaszczyźnie umieszczonej w ośrodku anizotropowym. Okazała się ona skuteczna dla całej klasy problemów dyfrakcji na półpłaszczyźnie. W szczególności z powodzeniem została użyta do konstrukcji rozwiązań dla półpłaszczyzny z różnymi impedancjami po jej obu stronach [44], półpłaszczyzny leżącej na granicy ośrodka izotropowego i anizotropowego [45], a także półpłaszczyzny częściowo przezroczystej [46].

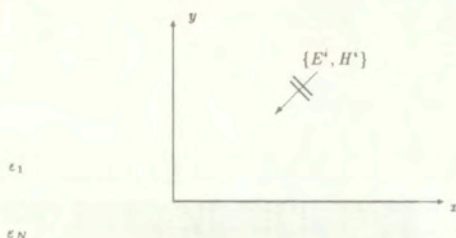
Organizacja niniejszej pracy jest następująca. W Rozdziale 2 syntetyzujemy rozwiązanie ściśle dla zagadnienia trójwymiarowego dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie leżącej na granicy ośrodków. Wykorzystujemy do tego celu metodę Przeździeckiego. W Rozdziale 3 znajdujemy niejednostajne, quasi-jednostajne i jednostajne rozwinięcia całek dyfrakcyjnych, pojawiających się w rozważanych tu zagadnieniach. Analizujemy całki z dwoma punktami krytycznymi: punktem siodłowym i punktem rozgałęzienia albo biegunem, a także całki z trzema punktami krytycznymi: punktem siodłowym, biegunem i punktem rozgałęzienia. Otrzymane rozwinięcia jednostajne i quasi-jednostajne pozostają w mocy także w przypadku, gdy różne punkty krytyczne zlewają się ze sobą. Korzystając z uzyskanych rozwinięć znajdujemy w Rozdziale 4 niejednostajne rozwinięcie asymptotyczne dla otrzymanego rozwiązania ściśłego, a w Rozdziale 6 — rozwinięcie quasi-jednostajne. W Rozdziale 5 przeprowadzamy interpretację fizyczną zjawisk falowych zachodzących w rozpatrywanym problemie. W Rozdziale 7 konstruujemy niejednostajne rozwinięcie asymptotyczne dla problemu, w którym na granicy ośrodków zamiast półpłaszczyzny znajduje się ekran o dowolnym kształcie (z krawędzią krzywoliniową). W Rozdziale 8 znajdujemy dla tego problemu rozwiązanie quasi-jednostajne. To ostatnie rozwiązanie obowiązuje również na

granicach cienia występujących w problemie fal.

Wyniki tej pracy mogą być wykorzystane do analizy praktycznie ważnych problemów, wiążących zjawisko dyfrakcji na granicy ośrodków. W szczególności można tu wymienić zagadnienie rozchodzenia się fal radiowych w otoczeniu brzegu morskiego, zagadnienie symulacji procesu fotolitograficznego przy wytwarzaniu obwodów drukowanych, a także wskazane w [8] zastosowanie w technice anten umieszczanych na obiektach latających. Oczekiwać można również zastosowań w technice sond pola elektromagnetycznego zatapianych w osłonach dielektrycznych i w analizie wzajemnych oddziaływań w drukowanych strukturach prowadzących fale elektromagnetyczne. Otrzymane tu rozwinięcia całek dyfrakcyjnych mogą być również wykorzystane do nieelektromagnetycznych zagadnień brzegowych, których rozwiązania opisane są przy pomocy całek o podobnej postaci.

2 Rozwiązanie ściśle zagadnienia trójwymiarowego

W tym rozdziale konstruujemy rozwiązanie ściśle zagadnienia dyfrakcji elektromagnetycznej fali płaskiej na doskonale przewodzącej półpłaszczyźnie znajdującej się między dwoma ośrodkami dielektrycznymi. Dopuszczamy skośny kierunek padania tej fali względem krawędzi półpłaszczyzny, tzn. zakładamy, że promienie fali padającej mogą tworzyć z krawędzią kąty różne od $\pi/2$. Geometrię zagadnienia przedstawia Rys.1. Półprzestrzeń $y > 0$ wypełniona jest ośrodkiem rzadszym optycznie, scharakteryzowanym stałą dielektryczną ϵ_1 , zaś dopełniająca półprzestrzeń $y < 0$ — ośrodkiem gęstszym optycznie, opisanym stałą dielektryczną ϵ_N . Oba ośrodki mają tę samą przenikalność magnetyczną μ . Na granicy ośrodków



Rysunek 1: Geometria problemu

znajduje się doskonale przewodząca półpłaszczyzna $x \geq 0, y = 0$, na którą pada rozchodząca się w ośrodku $y > 0$ elektromagnetyczna fala płaska

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^i \\ \mathbf{H}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{bmatrix} e^{ik_1(\cos \phi_i \sin \beta_1 x + \sin \phi_i \sin \beta_1 y + \cos \beta_1 z)}, \quad (2.1)$$

której zależność od czasu opisana jest przez $\exp(-i\omega t)$. Występujące tu kąty ϕ_i i β_1 zawierają się w przedziałach $\pi < \phi_i < 2\pi$ oraz $0 < \beta_1 < \pi$. Wektory \mathbf{E}^0 i \mathbf{H}^0 są powiązane ze sobą za pomocą relacji $\mathbf{H}^0 = Z_1^{-1} \hat{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{E}^0$, gdzie $\hat{\mathbf{k}}_1 = [\cos \phi_i \sin \beta_1, \sin \phi_i \sin \beta_1, \cos \beta_1]$. Naszym celem jest znalezienie całkowitego pola elektromagnetycznego, będącego wynikiem dyfrakcji fali (2.1) na półpłaszczyźnie. Pole to winno spełniać równania Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik_g Y_g \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} - ik_g Z_g \mathbf{H} = 0, \quad (2.2)$$

z liczbą falową k_g , impedancją falową Z_g i admitancją falową Y_g ośrodka zdefiniowanymi przez

$$k_g = \omega(\epsilon_g \mu_g)^{1/2}, \quad Z_g = Y_g^{-1} = (\mu_g / \epsilon_g)^{1/2}.$$

W powyższych wzorach $g = 1$ gdy $y > 0$ oraz $g = N$ gdy $y < 0$. Ponadto pole całkowite winno spełniać warunek brzegowy $\hat{y} \times \mathbf{E} = 0$ na półpłaszczyźnie, warunek wybiegania (będący uogólnieniem warunku wypromieniowania, (por. [17, 9]), warunek na krawędzi $|\mathbf{E}|, |\mathbf{H}| = O(\rho^{-1/2})$, gdy $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow 0$ i warunek ciągłości składowych stycznych pól \mathbf{E} i \mathbf{H} na granicy ośrodków $x < 0, y = 0$.

Ze względu na jednorodność struktury względem osi z pole całkowite zależy od tej współrzędnej tak samo jak pole padające, tj. za pośrednictwem czynnika $\exp(ik_1 \cos \beta_1 z)$. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia zależności tego pola od współrzędnych x i y . Niżej realizujemy to zadanie na drodze syntezy szukanego rozwiązania ze znanych rozwiązań otrzymanych w przypadku dwuwymiarowym. W tym celu krótko przedstawimy wyniki analizy odnoszące się do tego przypadku.

2.1 Rozwiązania dwuwymiarowe

W zagadnieniu dwuwymiarowym tj. niezależnym od jednej współrzędnej, rozpatrywany problem brzegowy redukuje się do dwóch niezależnych zagadnień brzegowych dla pól typu TM i TE. Każde z zagadnień sprowadza się do poszukiwania funkcji skalarnej, spełniającej równanie Helmholtza¹

$$(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + k_g^2)\bar{u}(x, y) = 0, \quad (2.3)$$

warunek brzegowy: $\bar{u} = 0$ na półpłaszczyźnie dla pola typu TM i $\partial_y \bar{u} = 0$ na półpłaszczyźnie dla pola typu TE oraz warunki wybiegania, krawędziowy i ciągłości na granicy ośrodków.

Efektywne rozwiązania postawionego tu problemu dla przypadku $\beta_1 = \pi/2$, tj. niezależnego od współrzędnej z , znalazł Stöckel [2]. Zastosował on do tego celu metodę sprzężonych równań całkowych. Podobne rozwiązanie dla pola typu TM otrzymali Coblin i Pearson [8] posługując się metodą równania całkowego. Autor niniejszej pracy uzyskał rozwiązania dla obu polaryzacji [1] metodą Jonesa. Rozwiązania te weryfikują rozwiązania Stöckela, w szczególności eliminując w nich błąd polegający na niespełnieniu warunku brzegowego przez pole typu TE. Również korzystają z odmiennych reprezentacji funkcji podziału (split functions). W obecnej pracy wykorzystujemy te ostatnie rozwiązania.

¹ Pozioma kreska nad występującymi niżej wielkościami służy do zaznaczenia, że odnoszą się do przypadku dwuwymiarowego.

Pole typu TM

W rozważanej strukturze dwuwymiarowe pole elektromagnetyczne typu TM jest postaci

$$E = [0, 0, \bar{u}_e], \quad H = (ik_g Z_g)^{-1} [\partial_y \bar{u}_e, -\partial_x \bar{u}_e, 0], \quad (2.4)$$

gdzie funkcja $\bar{u}_e = \bar{u}_e(x, y)$ jest rozwiązaniem równania (2.3), spełnia warunek brzegowy $\bar{u}_e = 0$ na półpłaszczyźnie $x \geq 0, y = 0$, warunek krawędziowy $\bar{u}_e = O(\rho^{1/2})$ gdy $\rho \rightarrow 0$, warunek ciągłości $\bar{u}_e(x, 0^+) = \bar{u}_e(x, 0^-)$ i $\partial_y \bar{u}_e(x, 0^+) = \partial_y \bar{u}_e(x, 0^-)$ w aperturze $x < 0, y = 0$ oraz warunek wybiegania.

Falę padającą opisuje za pośrednictwem (2.4) funkcja

$$\bar{u}_e^i = e^{ik_1(x \cos \phi_i + y \sin \phi_i)} = e^{-i(\bar{w}_0 x + \bar{v}_0 y)}, \quad (2.5)$$

gdzie

$$\bar{w}_0 = -k_1 \cos \phi_i, \quad \bar{v}_0 = -k_1 \sin \phi_i = (k_1^2 - \bar{w}_0^2)^{1/2} \quad (2.6)$$

i pierwiastek jest brany w sensie wartości głównej.

Pole całkowite jest sumą dwóch pól

$$\bar{u}_e = \bar{u}_e^p + \bar{u}_e^s, \quad (2.7)$$

z których \bar{u}_e^p jest polem pierwotnym, będącym wynikiem rozpraszania fali padającej na granicy ośrodków w nieobecności półpłaszczyzny, zaś \bar{u}_e^s — polem wtórnym, stanowiącym poprawkę do pola pierwotnego w przypadku gdy półpłaszczyzna jest obecna. Pierwsze z tych pól jest postaci

$$\bar{u}_e^p = \begin{cases} \bar{u}_e^i + \bar{R}_e \bar{u}_e^r & y > 0 \\ \bar{T}_e \bar{u}_e^t & y < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Występujące tu funkcje

$$\bar{u}_e^r = e^{-i(\bar{w}_0 x + \bar{v}_0 y)} \quad i \quad \bar{u}_e^t = e^{-i(\bar{w}_0 x + \bar{v}_{N0} y)}$$

związane są odpowiednio z falą odbitą i załamaną, przy czym

$$\bar{v}_{N0} = (k_N^2 - \bar{w}_0^2)^{1/2},$$

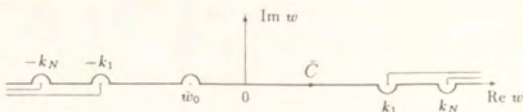
zaś

$$\bar{R}_e = \frac{\bar{v}_0 - \bar{v}_{N0}}{\bar{v}_0 + \bar{v}_{N0}}, \quad \bar{T}_e = \frac{2\bar{v}_0}{\bar{v}_0 + \bar{v}_{N0}}$$

są odpowiednio współczynnikami odbicia i załamania fali padającej na granicy ośrodków.

Pole wtórne opisane jest przy pomocy całki

$$\bar{u}_e^s = \frac{\bar{v}_0 \bar{F}_+(\bar{w}_0)}{i\pi} \int_C \frac{dw}{w - \bar{w}_0} \frac{\bar{F}_-(w)}{\bar{F}_-(\bar{w}_0)} \exp[i(-wx + \eta_g \bar{v}_g y)], \quad (2.9)$$



Rysunek 2: Kontur \bar{C} na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w

gdzie kontur całkowania \bar{C} przedstawiony jest na Rys.2 oraz

$$\bar{F}(w) = \frac{1}{\bar{v}_1 + \bar{v}_N} = \bar{F}_-(w)\bar{F}_+(w),$$

$$\bar{v}_g = (k_g^2 - w^2)^{1/2},$$

$$\eta_g = \text{sgn}(y).$$

Funkcje rozdziału $\bar{F}_-(w)$ i $\bar{F}_+(w)$ są analityczne odpowiednio w dolnej, $\text{Im } w < 0$, i w górnej, $\text{Im } w > 0$, półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej w . W [47] pokazano, że są one następującej postaci

$$\bar{F}_-(w) = [2(k_N - w)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{k_N} \frac{\arctan \left[\left(\frac{\tau^2 - k_1^2}{k_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\},$$

$$\bar{F}_+(w) = \bar{F}_-(-w).$$

Różniczkując (2.8) i (2.9) można przekonać się, że przedstawione tu rozwiązanie istotnie spełnia równanie (2.3).

W celu sprawdzenia spełniania przez \bar{u}_ϵ warunku brzegowego położymy w (2.9) $y = 0$ i zastąpmy kontur \bar{C} przez kontur składający się z odcinka $[-R, R]$ wzdłuż osi rzeczywistej, uzupełnionego o wymagane obejścia punktów osobliwych oraz łuku o promieniu R , poprowadzonego w dolnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej w . Zakładamy, że $R > |\bar{w}_0|$. Całka po tym konturze jest równa residuum funkcji podcałkowej w $w = \bar{w}_0$ i jak łatwo stwierdzić, różni się znakiem od $\bar{u}_\epsilon^p(x, 0)$. Przejdźmy teraz z R do nieskończoności. Ponieważ całka po łuku dąży do zera, więc całka po konturze zdeformowanym zbiega do całki zdefiniowanej w (2.9). Wynika stąd, że suma pola pierwotnego i wtórnego rzeczywiście spełnia warunek brzegowy.

Podobnie możemy postąpić przy badaniu spełnienia przez rozwiązanie warunku ciągłości w aperturze. Bezpośrednia analiza (2.8) pokazuje, że u_ϵ^p i $\partial_y u_\epsilon^p$ są tam ciągłe. Z (2.9) widać, że również ciągła jest tam u_ϵ^s . Weźmy teraz pod uwagę $\partial_y u_\epsilon^s(x, 0^+) - \partial_y u_\epsilon^s(x, 0^-)$. Całka opisująca tę różnicę ma podobną postać do (2.9), z tą różnicą, że występującą w funkcji podcałkowej funkcję $\bar{F}_-(w)$

należy zastąpić przez $[\tilde{F}_+(w)]^{-1}$. Zamienimy w tej całce kontur \tilde{C} przez kontur utworzony z odcinka $[-R, R]$, leżącego na osi $\text{Re } w$ z uwzględnieniem wymaganych obejść punktów osobliwych oraz łuku o promieniu R poprowadzonego w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej w . Ponieważ funkcja podcałkowa jest wewnątrz tego konturu analityczna, sama całka znika. Przejdźmy teraz z R do nieskończoności i zauważmy, że całka po łuku dąży do zera. Zatem całka po konturze zdeformowanym zbiega do całki po konturze \tilde{C} i znika. Wynika stąd, że $\partial_y \tilde{u}_c^+(x, 0^+) = \partial_y \tilde{u}_c^+(x, 0^-)$, zgodnie z wymaganiami narzuconym przez warunek ciągłości.

Warunki na ostrzu i wybiegania dyskutowane są w dalszej części pracy.

Pole typu TE

Reprezentacja dwuwymiarowego pola elektromagnetycznego typu TE jest zadana przez

$$H = [0, 0, \tilde{u}_m], \quad E = -(ik_g Y_g)^{-1} [\partial_y \tilde{u}_m, -\partial_x \tilde{u}_m, 0], \quad (2.10)$$

gdzie funkcja $\tilde{u}_m = \tilde{u}_m(x, y)$ jest rozwiązaniem równania (2.3), spełnia warunek brzegowy $\partial_y \tilde{u}_m = 0$ na półpłaszczyźnie $x \geq 0, y = 0$, warunek krawędziowy $\tilde{u}_m = O(\rho^{1/2})$ gdy $\rho \rightarrow 0$, warunek ciągłości $\tilde{u}_m(x, 0^+) = \tilde{u}_m(x, 0^-)$ i $\varepsilon_1^{-1} \partial_y \tilde{u}_m(x, 0^+) = \varepsilon_N^{-1} \partial_y \tilde{u}_m(x, 0^-)$ w aperturze $x < 0, y = 0$ oraz warunek wybiegania.

Falę padającą opisuje za pośrednictwem (2.10) funkcja

$$\tilde{u}_m^i = e^{-i(\omega_0 x + v_0 y)}. \quad (2.11)$$

Podobnie jak poprzednio pole całkowite jest sumą pola pierwotnego i pola wtórnego

$$\tilde{u}_m = \tilde{u}_m^p + \tilde{u}_m^s. \quad (2.12)$$

Pole pierwotne określone jest przy pomocy funkcji

$$\tilde{u}_m^p = \begin{cases} \tilde{u}_m^i + \tilde{R}_m \tilde{u}_m^r & y > 0 \\ \tilde{T}_m \tilde{u}_m^i & y < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

i

$$\tilde{R}_m = \frac{N^2 \tilde{v}_0 - \tilde{v}_{N0}}{N^2 \tilde{v}_0 + \tilde{v}_{N0}}, \quad \tilde{T}_m = \frac{2N^2 \tilde{v}_0}{N^2 \tilde{v}_0 + \tilde{v}_{N0}}.$$

Pole wtórne opisane jest za pośrednictwem całki konturowej

$$\tilde{u}_m^s = -\eta_g \frac{g^2 \tilde{G}(\tilde{w}_0)}{i\pi} \int_C \frac{dw}{w - \tilde{w}_0} \frac{1}{v_g} \frac{\tilde{G}_-(w)}{\tilde{G}_-(\tilde{w}_0)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)], \quad (2.14)$$

gdzie

$$\bar{G}(w) = \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_N}{N^2 \bar{v}_1 + v_N} = \bar{G}_-(w) \bar{G}_+(w),$$

i funkcje rozdziału $\bar{G}_-(w)$ i $\bar{G}_+(w)$ są analityczne odpowiednio w dolnej $\text{Im } w < 0$ i górnej $\text{Im } w > 0$ półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej w . Znalezione w [47] obie funkcje rozdziału przyjmują postać

$$\bar{G}_-(w) = \left(\frac{k_1 - w}{1 + N^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{k_1}^{k_N} \frac{\arctan \left[N^2 \left(\frac{\tau^2 - k_1^2}{k_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\},$$

$$\bar{G}_+(w) = \bar{G}_-(-w).$$

Weryfikacja spełniania przez to rozwiązanie równania (2.3) oraz warunków brzegowego i ciągłości w aperturze przebiega w podobny sposób, jak to pokazano w przypadku pola TM ([1]). Zagadnienie spełniania przezeń warunków krawędziowego i wybiegania zostanie podjęte w dalszej części pracy.

2.2 Synteza rozwiązania trójwymiarowego

Powróćmy do konstrukcji rozwiązania zagadnienia trójwymiarowego, gdzie fala padająca zgodnie z (2.1) zależy od wszystkich trzech współrzędnych. Zastosujmy procedurę Clemmowa [48, 15] użytą w literaturze do uogólnienia rozwiązań zagadnień dyfrakcji w ośrodku jednorodnym na przypadek trójwymiarowy. W tym celu zastąpmy k_g w funkcjach \bar{u}_h^l , $h = e, m$, $l = i, r, t, s$, przez

$$\kappa_g = k_g \sin \beta_g = (k_g^2 - \Gamma^2)^{1/2}, \quad (2.15)$$

gdzie

$$\Gamma = k_1 \cos \beta_1 \quad (2.16)$$

i tak określone funkcje oznaczmy przez u_h^l . Zauważmy, że (2.15) określa rzuty κ_g , $g = 1, N$, wektorów falowych k_g na płaszczyznę prostopadłą do osi z i definiując kąt β_N .

Różniczkując funkcję $u_h \exp(i\Gamma z)$ i uwzględniając fakt, że \bar{u}_h jest rozwiązaniem (2.3), łatwo stwierdzić, że funkcja u_h spełnia równanie

$$(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2 + k_g^2)u(x, y) = 0. \quad (2.17)$$

Za pośrednictwem wektorów Herta: elektrycznego $\mathbf{II}_e = \hat{z}u_e \exp(i\Gamma z)$ i magnetycznego $\mathbf{II}_m = \hat{z}u_m \exp(i\Gamma z)$ dostajemy pole elektromagnetyczne typu TM

$$E_e = A_g [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{II}_e) + k_g^2 \mathbf{II}_e] = A_g [i\Gamma(\hat{x}\partial_x u_e + \hat{y}\partial_y u_e) + \hat{z}v_g^2 u_e] e^{i\Gamma z},$$

$$H_e = -A_g i k_g Y_g \nabla \times \mathbf{II}_e = -i k_g Y_g A_g (\hat{x}\partial_y u_e - \hat{y}\partial_x u_e) e^{i\Gamma z}$$

i pole elektromagnetyczne typu TE

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m &= B_g i k_g Z_g \nabla \times \Pi_m = i k_g Z_g B_g (\hat{x} \partial_y u_m - \hat{y} \partial_x u_m) e^{i\Gamma z}, \\ \mathbf{H}_m &= B_g [\nabla(\nabla \cdot \Pi_m) + k_g^2 \Pi_m] = B_g [i\Gamma(\hat{x} \partial_x u_m + \hat{y} \partial_y u_m) + \hat{z} v_g^2 u_m] e^{i\Gamma z}, \end{aligned}$$

gdzie A_1 , A_N , B_1 i B_N są stałymi dowolnymi. Przy nałożonych w poprzednim punkcie założeniach oba pola spełniają warunki: brzegowy, krawędziowy i wybiegania. Rozważmy warunek ciągłości w aperturze. Przyrównując tam składowe styczne do granicy rozdziału $y = 0$ w jednym i drugim ośrodku oraz uwzględniając zachowanie funkcji u_h i ich pochodnych na tej granicy, dostajemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} A_1 \Gamma \left(\frac{k_1^2 - \Gamma^2}{k_N^2 - \Gamma^2} - 1 \right) \partial_x u_{e1} &= k_1 Z_1 \left(B_1 - \frac{B_N}{N^2} \right) \partial_y u_{m1}, \\ B_1 \Gamma \left(1 - \frac{k_1^2 - \Gamma^2}{k_N^2 - \Gamma^2} \right) \partial_x u_{m1} &= k_1 Y_1 (A_1 - N^2 A_N) \partial_y u_{e1}, \\ \frac{A_N}{A_1} = \frac{B_N}{B_1} &= \frac{k_1^2 - \Gamma^2}{k_N^2 - \Gamma^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne funkcji u_e i u_m są liniowo niezależne, jedyne nietrywialne rozwiązanie tego układu ma miejsce przy $N = 1$, tj. dla identycznych ośrodków.² Widać więc, że w przypadku różnych ośrodków nie udaje się spełnić warunku ciągłości w aperturze. Pozostawiamy jako otwarty problem, czy przy pomocy podejścia Clemmowa można skonstruować rozwiązanie rozważanego tu zagadnienia trójwymiarowego.

Poniżej stosujemy inną metodę (zob. także [49]), po raz pierwszy użytą przez Przeździeckiego do analizy dyfrakcji na półpłaszczyźnie umieszczonej w ośrodku anizotropowym.

2.2.1 Rozwiązanie metodą pomocniczych pól typu TEM

Wyraźmy pole całkowite w postaci superpozycji pól typu TM i typu TE, tym razem względem kierunku prostopadłego do granicy rozdziału ośrodków. Pola te generowane są przy udziale wzorów

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m &= i k_g Z_g \nabla \times \Pi_m, & \mathbf{E}_e &= k_g^{-2} \nabla \times \nabla \times \Pi_e \\ \mathbf{H}_m &= \nabla \times \nabla \times \Pi_m, & \mathbf{H}_e &= (i k_g Z_g)^{-1} \nabla \times \Pi_e \end{aligned} \quad (2.18)$$

przez potencjały Hertza

$$\Pi_{e,m} = \Pi_{e,m} \hat{y}, \quad \Pi_{e,m} = s_{e,m}(x, y) e^{i\Gamma z}. \quad (2.19)$$

²Zauważmy, że przy nieobecności półpłaszczyzny, funkcje u_h^p są liniowo zależne i układ ten ma rozwiązania dla każdego N .

Zapisany w języku potencjałów warunek brzegowy $\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E} = 0$ na półpłaszczyźnie przyjmuje postać

$$\hat{\mathbf{y}} \times (ik_g Z_g \nabla \times \Pi_m + k_g^{-2} \nabla \times \nabla \times \Pi_e) = 0,$$

a po użyciu operatora $\nabla_{\perp} = \nabla - \hat{\mathbf{y}} \partial_y$ upraszcza się do

$$ik_g Z_g \nabla_{\perp} \Pi_m + k_g^{-2} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla_{\perp} \partial_y \Pi_e = 0. \quad (2.20)$$

Stosując operację ∇_{\perp} do obu stron (2.20) dostajemy warunek dla Π_m

$$\nabla_{\perp}^2 \Pi_m = 0 \quad (2.21)$$

na półpłaszczyźnie, a z kolei mnożąc obie strony (2.20) przez $\hat{\mathbf{y}}$ i powtórnie stosując do wyniku operację ∇_{\perp} — warunek dla Π_e

$$\nabla_{\perp}^2 \partial_y \Pi_e = 0. \quad (2.22)$$

Ze względu na to, że $\Pi_{e,m}$ zależą od z jak $\exp(i\Gamma z)$, warunki (2.21) i (2.22) można zapisać w postaci

$$\left(\partial_{zz}^2 - \Gamma^2\right) \Pi_m = 0 \quad \text{i} \quad \left(\partial_{zz}^2 - \Gamma^2\right) \partial_y \Pi_e = 0 \quad \text{na półpłaszczyźnie.} \quad (2.23)$$

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że w obecnym sformułowaniu problem całkowicie separuje się, a więc że pól typu TM i typu TE możemy poszukiwać zupełnie niezależnie. Mianowicie po podstawieniu na miejsce Π_e i Π_m odpowiednio funkcji u_{ra} i u_e dostajemy za pośrednictwem (2.18) pola spełniające równania Maxwella wraz z warunkami brzegowym, ciągłości i wybiegania. Okazuje się jednak, że tak konstruowane pola nie spełniają warunku krawędziowego. Istotnie, wskutek obecności w wyrażeniach na pole elektromagnetyczne drugich pochodnych $\partial_{xx}^2 \Pi_{e,m}$ i $\partial_{xy}^2 \Pi_{e,m}$, pola te stają się zbyt osobliwe na krawędzi i w konsekwencji warunek ostrza nie jest spełniony ani przez pola składowe obu typów, ani przez pole całkowite.

Jak się okaże w dalszym ciągu, trudność tę daje się jednak pokonać. Zauważmy, że na mocy (2.23) mamy

$$\begin{aligned} \Pi_m &= (A_1 e^{\Gamma x} + A_2 e^{-\Gamma x}) e^{i\Gamma z} \\ \partial_y \Pi_e &= (B_1 e^{\Gamma x} + B_2 e^{-\Gamma x}) e^{i\Gamma z} \end{aligned} \quad \text{na półpłaszczyźnie.} \quad (2.24)$$

Tak więc *jednorodny* warunek brzegowy dla składowej stycznej całkowitego pola elektrycznego przechodzi w *niejednorodne* warunki brzegowe dla funkcji skalarnych Π_m i $\partial_y \Pi_e$. Występujące w nich stałe A_j i B_j , $j = 1, 2$, nie są niezależne. Podstawiając (2.24) do (2.20) dostajemy

$$B_1 = -k_g^3 Z_g A_1, \quad B_2 = k_g^3 Z_g A_2. \quad (2.25)$$

Widać stąd, że pola typu TM i typu TE są sprzężone za pośrednictwem stałych A_1 i A_2 . Wyznamy je z warunku na ostrzu.³ Wpierw jednak znajdziemy potencjały pola pierwotnego.

³Stanowi to potwierdzenie faktu, że sprzężenie między polami obu typów ma charakter krawędziowy.

Pole pierwotne

Usuńmy z zagadnienia półpłaszczyznę $x \geq 0$, $y = 0$. Tak jak w przypadku dwuwymiarowym, rozwiązanie zagadnienia rozpraszania na tej uproszczonej strukturze nazwiemy polem pierwotnym. Znajdziemy potencjały Hertza dla fali padającej (2.1), a następnie, w oparciu o wyniki analizy dwuwymiarowej, dla pola pierwotnego.

Korzystając z (2.18) i (2.19) dostajemy następujące równanie dla funkcji s_m^i , opisującej składową typu TE fali padającej (2.1)

$$(\partial_{yy}^2 + k_1^2)s_m^i = H_{0y}^i e^{-i(w_0x + v_0y)}. \quad (2.26)$$

Wielkości w_0 i v_0 zdefiniowane są przez

$$w_0 = -\kappa_1 \cos \phi_i, \quad v_0 = -\kappa_1 \sin \phi_i = (\kappa_1^2 - w_0^2)^{1/2}. \quad (2.27)$$

Rozwiązanie (2.26) i podobnego równania dla s_e^i ma postać

$$s_{m,e}^i = a_{m,e} e^{-i(w_0x + v_0y)}, \quad (2.28)$$

gdzie

$$a_m = \frac{H_{0y}}{w_0^2 + \Gamma^2}, \quad a_e = \frac{k_1^2 E_{0y}^i}{w_0^2 + \Gamma^2}. \quad (2.29)$$

Tak określone funkcje s_m i s_e jednoznacznie wyznaczają za pośrednictwem (2.18) i (2.19) rozkład fali padającej (2.1) na pole typu TE i pole typu TM.

Potencjałów Hertza dla pola pierwotnego poszukujemy w podobnej postaci

$$\Pi_{e,m}^p = s_{e,m}^p(x, y) e^{i\Gamma z} \hat{y},$$

gdzie

$$s_{e,m}^p = a_{e,m} \begin{cases} u^i + R_{e,m} u^r & y > 0 \\ T_{e,m} u^t & y < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

oraz

$$u^i = e^{-i(w_0x + v_0y)}, \quad u^r = e^{-i(w_0x - v_0y)}, \quad u^t = e^{-i(w_0x + v_{N0}y)}, \\ v_{N0} = (\kappa_N^2 - w_0^2)^{1/2} = -\kappa_N \sin \phi_i. \quad (2.31)$$

Żądając ciągłości składowych stycznych pola elektrycznego i pola magnetycznego na granicy ośrodków, oddzielnie dla typu TE i typu TM, dostajemy

$$R_e = \frac{v_0 - v_{N0}}{v_0 + v_{N0}}, \quad T_e = \frac{2v_0}{v_0 + v_{N0}}, \\ R_m = \frac{N^2 v_0 - v_{N0}}{N^2 v_0 + v_{N0}}, \quad T_m = \frac{2N^2 v_0}{N^2 v_0 + v_{N0}}. \quad (2.32)$$

Łatwo zauważyć, że funkcje s_e^i (s_m^i) oraz s_e^p (s_m^p) otrzymuje się automatycznie z funkcji \tilde{u}_m^i (\tilde{u}_e^i) oraz \tilde{u}_m^p (\tilde{u}_e^p), zastępując w tych ostatnich k_y przez κ_y i mnożąc je przez a_e (a_m).

Pole wtórne

Powracamy do wyjściowego zagadnienia z występującą na granicy ośrodków półpłaszczyzną $x \geq 0, y = 0$. Podobnie jak w przypadku pola padającego i pierwotnego, potencjałów Hertza dla pola wtórnego będziemy poszukiwali w postaci

$$\Pi_{\epsilon, m}^s = s_{\epsilon, m}^s(x, y)e^{i\Gamma z}\hat{y}. \quad (2.33)$$

Zadanie polega na znalezieniu funkcji $s_{\epsilon, m}^s$. Z (2.24) i (2.25) wynika, że na półpłaszczyźnie mają miejsce następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned} s_m^s &= -s_m^p + A_1 e^{\Gamma x} + A_2 e^{-\Gamma x}, \\ \partial_y s_\epsilon^s &= -\partial_y s_\epsilon^p - k_g^3 Z_g A_1 e^{\Gamma x} + k_g^3 Z_g A_2 e^{-\Gamma x}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

W związku z tym funkcji $s_{\epsilon, m}^s$ będziemy poszukiwali w postaci sumy trzech składników

$$s_{\epsilon, m}^s = s_{\epsilon, m0}^s + s_{\epsilon, m1}^s + s_{\epsilon, m2}^s. \quad (2.35)$$

Korzystając z rozwiązań zagadnień dwuwymiarowych, przedstawionych w paragrafie 2.1 oraz uwzględniając równości

$$\begin{aligned} s_m^p(x, 0) &= 2a_m v_0 F(w_0) e^{-i w_0 x}, \\ \partial_y s_\epsilon^p(x, 0) &= -i 2a_\epsilon g^2 G(w_0) e^{-i w_0 x}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

dostajemy od razu dla s_{m0}^s

$$s_{m0}^s = a_m \frac{v_0 F(w_0)}{i\pi} \int_C \frac{dw}{w - w_0} \frac{F_-(w)}{F_-(w_0)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)], \quad (2.37)$$

i dla $s_{\epsilon0}^s$

$$s_{\epsilon0}^s = -a_\epsilon \frac{\eta_g g^2 G(w_0)}{i\pi} \int_C \frac{dw}{w - w_0} \frac{1}{v_g} \frac{G_-(w)}{G_-(w_0)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)]. \quad (2.38)$$

Występujące wyżej funkcje są zdefiniowane przez

$$F(w) = \frac{1}{v_1 + v_N} = F_-(w)F_+(w), \quad F_+(w) = F_-(-w), \quad (2.39)$$

$$F_-(w) = [2(\kappa_N - w)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[\left(\frac{\tau^2 - \kappa_1^2}{\kappa_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\}, \quad (2.40)$$

$$G(w) = \frac{v_1 v_N}{N^2 v_1 + v_N} = G_-(w)G_+(w), \quad G_+(w) = G_-(-w), \quad (2.41)$$

$$G_-(w) = \left(\frac{\kappa_1 - w}{1 + N^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[N^2 \left(\frac{\tau^2 - \kappa_1^2}{\kappa_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\} \quad (2.42)$$

oraz

$$v_g = (\kappa_g^2 - w^2)^{1/2}. \quad (2.43)$$

Z (2.38) otrzymujemy

$$\partial_y s_{e0}^s = -ia_e \frac{\eta_g g^2 G(w_0)}{i\pi} \int_C \frac{dw}{w - w_0} \frac{G_-(w)}{G_-(w_0)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)]. \quad (2.44)$$

Ponieważ residua funkcji opisanych przez całki konturowe w (2.37) i (2.44) w punkcie $w = w_0$ wynoszą $2\pi i \exp(-iw x)$ gdy $y = 0$, więc z porównania (2.36) z (2.37) i (2.44), zgodnie z procedurą przedstawioną na str.14, natychmiast widać, że na półpłaszczyźnie

$$s_{m0}^s = -s_{m0}^p, \quad \partial_y s_{e0}^s = -\partial_y s_{e0}^p.$$

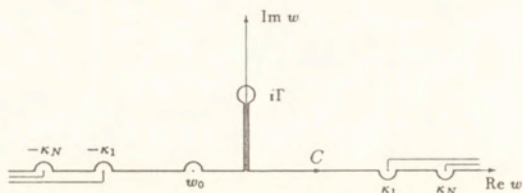
Pozostałe składniki funkcji $s_{e,m}^s$ łatwo skonstruować przez analogię do (2.37) i (2.38) i przy wykorzystaniu (2.34), (2.36) i (2.44). W wyniku otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_{m1}^s &= -\frac{A_1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w - i\Gamma} \frac{F_-(w)}{F_-(i\Gamma)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)], \\ s_{m2}^s &= -\frac{A_2}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w + i\Gamma} \frac{F_-(w)}{F_-(i\Gamma)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)], \\ s_{e1}^s &= -\frac{\eta_g k_g^3 Z_g A_1}{2\pi} \int_C \frac{dw}{w - i\Gamma} \frac{1}{v_g} \frac{G_-(w)}{G_-(i\Gamma)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)] \\ s_{e2}^s &= \frac{\eta_g k_g^3 Z_g A_2}{2\pi} \int_C \frac{dw}{w + i\Gamma} \frac{1}{v_g} \frac{G_-(w)}{G_-(i\Gamma)} \exp[i(-wx + \eta_g v_g y)], \end{aligned} \quad (2.45)$$

a kontur C przedstawiony jest na Rys.3. Wyznamy wkłady pochodzące od biegunów w $w = \pm i\Gamma$ w powyższych całkach. Metodą residuów znajdujemy

$$\begin{aligned} r_{m1} &= A_1 e^{\Gamma x + i\eta_g k_g y} \\ r_{m2} &= A_2 e^{-\Gamma x + i\eta_g k_g y} \\ r_{e1} &= i\eta_g k_g^2 Z_g r_{m1} \\ r_{e2} &= -i\eta_g k_g^2 Z_g r_{m2}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Jeśli podstawimy powyższe funkcje na miejsce s_m^s i s_e^s w (2.33), a następnie za pośrednictwem (2.18) wygenerujemy odpowiadające im pole elektromagnetyczne, wówczas okazuje się, że wkłady te znoszą się w sumarycznym polu elektromagnetycznym. Tego należało oczekiwać, bowiem funkcje $s_{h,n}^s$, $h = e, m$, $n = 1, 2$,



Rysunek 3: Kontur C na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w

nie powinny modyfikować tej części rozwiązania, która jest opisana przez optykę geometryczną. Rolą tych funkcji jest modyfikacja pola związanego z dyfrakcją krawędziową.

Składniki proporcjonalne do A_1 i A_2 w (2.34) można interpretować jako reprezentację w języku potencjałów Hertza "śladów" czterech niejednorodnych fal płaskich na półpłaszczyźnie.

Wyznaczenie stałych A_1 i A_2

Pozostał jeszcze do spełnienia warunków na krawędzi, wymagający by $|E|$, $|H| = O(\rho^{-1+\epsilon})$, $\epsilon > 0$, gdy $\rho \rightarrow 0$. Uczynimy zadość temu warunkowi poprzez odpowiedni dobór nieokreślonych do tej pory stałych A_1 i A_2 . Zaczniemy od pola typu TE i weźmy pod uwagę funkcję s_{m0}^s , która zgodnie z (2.37) ma następującą postać

$$s_{m0}^s = c_0 \int_C \frac{dw}{w - w_0} F_-(w) \exp(-iwx + i\eta_y v_y y), \quad c_0 = \frac{a_m v_0 F_+(w_0)}{i\pi}. \quad (2.47)$$

W szczególnym przypadku $N = 1$

$$s_{m0(1)}^s = c_{0(1)} \int_C \frac{dw}{w - w_0} \frac{e^{-iwx + i\eta_y v_y y}}{[2(\kappa - w)]^{1/2}}, \quad c_{0(1)} = \frac{a_m (\kappa - w_0)^{1/2}}{2^{1/2} i \pi}, \quad (2.48)$$

całkę konturową udaje się wyrazić poprzez sumę całek Fresnela. Po ich rozwinięciu w szereg ułamkowych potęg ρ otrzymujemy

$$s_{m0(1)}^s = -a_m + c_{0(1)} \eta_y 2(2\pi\rho)^{1/2} e^{i\pi/4} \sin \frac{\phi}{2} + i a_m w_0 \rho \cos \phi + O[(\kappa\rho)^{3/2}]. \quad (2.49)$$

Rozwinięcie to składa się z części regularnej, utworzonej przez całkowite potęgi ρ i części nieregularnej, zawierającej ułamkowe potęgi ρ . Nas interesuje głównie wyraz w części nieregularnej, proporcjonalny do $\rho^{1/2}$.

Spróbujmy znaleźć ten wyraz na drodze bezpośredniej analizy całki konturowej w (2.48). Weźmy pod uwagę pochodną

$$\partial_y s_{m0(1)}^s = i\eta_g \frac{c_{0(1)}}{2^{1/2}} \int_C \frac{dw}{w - w_0} (\kappa + w)^{1/2} e^{-iw_x + i\eta_g v_g y}. \quad (2.50)$$

Zbadajmy zachowanie całki, gdy $x = 0$ i $|y| \rightarrow 0$. W tym celu dla dowolnie małego ϵ wybierzmy R takie, że $R^{-1} \leq \epsilon$. Na dwóch częściach konturu C leżących w otoczeniu punktu w nieskończoności i określonych przez $l_- = (-\infty, -R]$ i $l_+ = [R, \infty)$ zastąpmy funkcję podcałkową jej wyrażeniem asymptotycznym, ważnym dla $w \rightarrow \infty$. Całka po pozostałej, ograniczonej części konturu jest zgodnie z [50] funkcją regularną, nie wnoszącą członów osobliwych w otoczeniu ostrza. Przedłużmy teraz półnieskończone kontury całkowania l_- i l_+ odpowiednio do $(-\infty, 0]$ i $[0, \infty)$, zachowując postać funkcji podcałkowej. Różnica między odpowiednimi całkami przed i po przedłużeniu konturów jest znowu opisana funkcją regularną argumentu ρ . Całki po wydłużonych konturach dają się policzyć analitycznie przy wykorzystaniu wzoru

$$\int_0^\infty u^\nu e^{-zu} du = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{z^{\nu+1}}. \quad (2.51)$$

Sumując wkłady od obu całek dostajemy

$$\partial_y s_{m0(1)}^s(0, y) \sim \eta_g c_{0(1)} e^{i\pi/4} \frac{\pi^{1/2}}{|y|^{1/2}}, \quad y \rightarrow 0.$$

Łatwo zobaczyć korzystając z $\partial_y = \sin \phi \partial_\rho + (\cos \phi / \rho) \partial_\phi$, że wynik ten jest w pełni zgodny z wyrikiem uzyskanym na drodze różniczkowania (2.49).

Rozważmy teraz

$$\partial_x s_{m0(1)}^s = -i c_{0(1)} \int_C \frac{dw}{w - w_0} \frac{w}{[2(\kappa - w)]^{1/2}} e^{-iw_x + i\eta_g v_g y}$$

i zbadajmy zachowanie tej funkcji gdy $y = 0$ i $x \rightarrow 0$. Poprowadźmy cięcie wychodzące z punktu $w = \kappa$ wzdłuż półprostej $\text{Re } w = \kappa$, $\text{Im } w \geq 0$ i zdeformujmy kontur C do konturu otaczającego to cięcie. Stosując podobną argumentację jak poprzednio, zastąpmy funkcję podcałkową jej wyrażeniem asymptotycznym dla $w \rightarrow \infty$ i po skorzystaniu z (2.51) zsumujmy wkłady liczone wzdłuż lewej i prawej strony cięcia. Otrzymujemy w ten sposób

$$\partial_x s_{m0(1)}^s(x, 0) = -c_{0(1)} e^{i\pi/4} \frac{(2\pi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}}, \quad x \rightarrow 0,$$

co znowu zgadza się z (2.49). Aby się o tym przekonać, wystarczy zróżniczkować (2.49), zgodnie z $\partial_x = \cos \phi \partial_\rho + (\sin \phi / \rho) \partial_\phi$.

Reasumując: Główny człon rozwinięcia części nieregularnej w (2.49) jest związany z całkowaniem po częściach konturu C rozciągających się do nieskończoności, przy czym ograniczony kraniec całkowania jest dowolny.

Podobne rozważania możemy poprowadzić dla funkcji

$$s_{e0(1)}^s = d_{0(1)} \int_C \frac{dw}{w - w_0} \frac{1}{v} \frac{(\kappa - w)^{1/2}}{2^{1/2}} \exp(-iwx + i\eta_g v_g y),$$

gdzie

$$d_{0(1)} = -a_\epsilon \frac{\eta_g (\kappa + w_0)^{1/2}}{2^{1/2} \pi i}.$$

W tym przypadku

$$s_{e0(1)}^s = -d_{0(1)} 2(2\pi\rho)^{1/2} e^{i\pi/4} \cos \frac{\phi}{2} + ia_\epsilon v_0 \rho \sin \phi + O[(\kappa\rho)^{3/2}]. \quad (2.52)$$

Z (2.49) i (2.52) wynika, że w przypadku $N = 1$ funkcje $s_{e,m(1)}^s$ spełniają warunek na krawędzi.

Przejdźmy teraz do przypadku $N \neq 1$. Obecnie funkcji $s_{e,m}^s$ nie udaje się już wyrazić poprzez znane funkcje specjalne. Przeprowadzona wyżej analiza dotycząca całek branych wzdłuż konturów półnieskończonych może być jednak zastosowana także i w tym przypadku. Obecnie

$$s_{m0}^s = c_0 \int_C \frac{dw}{w - w_0} F_-(w) e^{-iwx + i\eta_g v_g y}, \quad c_0 = a_m \frac{v_0 F_+(w_0)}{\pi i} \quad (2.53)$$

i

$$s_{e0}^s = d_0 \int_C \frac{dw}{w - w_0} \frac{1}{v_g} G_-(w) e^{-iwx + i\eta_g v_g y}, \quad d_0 = -a_m \frac{\eta_g g^2 G_+(w_0)}{\pi i}. \quad (2.54)$$

Chociaż funkcje F_- i G_- mają dla dowolnego N dosyć złożoną postać, to przy wykorzystaniu

$$F(w) = F_-(w)F_+(w) = \frac{1 + \frac{\kappa_1^2 + \kappa_N^2}{4w^2} + O(w^{-4})}{2iw} \chi, \quad w \rightarrow \infty,$$

gdzie

$$\chi = \begin{cases} +1, & -\pi < \text{Arg } w \leq 0 \\ -1, & 0 < \text{Arg } w \leq \pi, \end{cases}$$

dostajemy dla F_- proste wyrażenie asymptotyczne

$$F_-(w) = \frac{1 + O(w^{-1})}{i(2w)^{1/2}}, \quad \text{gdy } w \rightarrow \infty.$$

Wynik ten jest identyczny jak w przypadku $N = 1$, bowiem pierwszy wyraz rozwinięcia funkcji F nie zależy od κ_g .

Podobnie, korzystając z

$$G(w) = G_-(w)G_+(w) = \frac{iw}{1+N^2} \left[1 - \frac{\kappa_1^2 + N^2\kappa_N^2}{2(1+N^2)w^2} + O(w^{-4}) \right] \chi, \quad w \rightarrow \infty,$$

dostajemy wyrażenie asymptotyczne dla G_-

$$G_-(w) = i \left(\frac{w}{1+N^2} \right)^{1/2} [1 + O(w^{-1})], \quad \text{gdy } w \rightarrow \infty.$$

Tym razem pierwszy wyraz w rozwinięciu asymptotycznym funkcji G zależy od N , ale ta zależność zachodzi za pośrednictwem prostego czynnika $(1+N^2)^{-1}$. Zatem dla wyznaczenia zachowania asymptotycznego przy $\rho \rightarrow 0$ pochodnych funkcji s_{hj}^* , $h = e, m$, $j = 0, 1, 2$, możemy posłużyć się podobnym rozważaniem jak w przypadku jednego ośrodka. Wnioskujemy stąd, że zachowanie pola wzdłuż promienia wychodzącego z krawędzi jest opisane podobnym rozwinięciem według potęg ρ jak w (2.49) i (2.52), choć z innymi współczynnikami. Tym samym rozwiązania dwuwymiarowe otrzymane w punkcie (2.1) spełniają warunek na krawędzi. Interesujące nas współczynniki stojące przy głównym wyrazie rozwinięć nieregularnych są dla $j = 0$ dane przez (2.53) i (2.54), a dla $j = 1, 2$ zgodnie z (2.45) wynoszą

$$c_1 = -\frac{A_1}{2\pi i F_-(i\Gamma)}, \quad d_1 = \eta_g \frac{k_g^3 Z_g A_1}{2\pi G_-(i\Gamma)}$$

$$c_2 = -\frac{A_2}{2\pi i F_-(-i\Gamma)}, \quad d_2 = \eta_g \frac{k_g^3 Z_g A_2}{2\pi G_-(-i\Gamma)}$$

Wymieniony wyraz jest źródłem nadmiernej osobliwości pola elektromagnetycznego na ostrzu. Możemy jednak tak dobrać stałe A_1 i A_2 , aby wyraz ten zniknął w polu każdego typu. Jest to równoważne żądaniu by

$$c_0 + c_1 + c_2 = 0 \quad \text{i} \quad d_0 + d_1 + d_2 = 0.$$

W ten sposób otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych na stałe A_1 i A_2 , którego rozwiązanie jest postaci

$$A_1 = \frac{2}{k_1 + k_N} \frac{a_m v_0 F_+(w_0) G_-(i\Gamma) + (ik_1 Z_1)^{-1} a_c G_+(w_0) F_-(i\Gamma)}{F_+(i\Gamma) G_-(i\Gamma) + F_-(i\Gamma) G_+(i\Gamma)}, \quad (2.55)$$

$$A_2 = \frac{2}{k_1 + k_N} \frac{a_m v_0 F_+(w_0) G_+(i\Gamma) + (ik_1 Z_1)^{-1} a_c G_+(w_0) F_+(i\Gamma)}{F_+(i\Gamma) G_-(i\Gamma) + F_-(i\Gamma) G_+(i\Gamma)}. \quad (2.56)$$

Ponieważ, jak przekonamy się w Rozdziale 4, pola obu typów spełniają warunek wybiegania, przeto wszystkie warunki zapewniające jednoznaczność rozwiązania są spełnione. W ten sposób otrzymaliśmy rozwiązanie trójwymiarowego zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej (2.1) na półpłaszczyźnie umieszczonej między dwoma ośrodkami dielektrycznymi.

2.3 Podsumowanie

W tym rozdziale zostało znalezione rozwiązanie ściśle dla problemu dyfrakcji fali płaskiej (2.1) na doskonale przewodzącej półpłaszczyźnie umieszczonej na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych. Otrzymane ono zostało na drodze syntezy pól dwuwymiarowych, z wykorzystaniem metody pomocniczych pól typu TEM. Rozwiązanie to, które nazywamy polem całkowitym, składa się z pola pierwotnego, odpowiedzialnego za odbicie i załamanie fali padającej na granicy ośrodków i pola wtórnego, modyfikującego pole pierwotne w wyniku umieszczenia na tej granicy półpłaszczyzny przewodzącej. Tak więc:

Pole całkowite

$$E = E^p + E^s, \quad H = H^p + H^s. \quad (2.57)$$

Pola składowe wyrażają się poprzez sumy pól typu TE i typu TM względem osi prostopadłej do granicy ośrodków.

Pole pierwotne

$$E^p = E_m^p + E_e^p, \quad H^p = H_m^p + H_e^p, \quad (2.58)$$

gdzie

$$E_m^p = a_m \begin{cases} k_1^2 Z_1 (e^{ik_1 S^i} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i + R_m e^{ik_1 S^r} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ k_N^2 Z_N T_m e^{ik_1 S^t} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t, & y < 0, \end{cases} \quad (2.59)$$

$$H_m^p = a_m \begin{cases} k_1^2 [e^{ik_1 S^i} \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i) + R_m e^{ik_1 S^r} \nabla S^r \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r)], & y > 0, \\ k_N^2 T_m e^{ik_1 S^t} \nabla S^t \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t), & y < 0, \end{cases}$$

oraz

$$E_e^p = a_e \begin{cases} e^{ik_1 S^i} \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i) + R_e e^{ik_1 S^r} \nabla S^r \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ T_e e^{ik_1 S^t} \nabla S^t \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t), & y < 0, \end{cases} \quad (2.60)$$

$$H_e^p = -a_e \begin{cases} Y_1 (e^{ik_1 S^i} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i + R_e e^{ik_1 S^r} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ Y_N T_e e^{ik_1 S^t} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t, & y < 0, \end{cases}$$

zaś

$$S^i = -xw_0 - yv_0 + z\Gamma, \quad S^r = -xw_0 + yv_0 + z\Gamma, \quad S^t = -xw_0 - yv_{N0} + z\Gamma \quad (2.61)$$

i stałe a_m i a_e oraz współczynniki R_m , R_e , T_m i T_e są zdefiniowane w (2.29) i (2.32). Wielkości w_0 , v_0 i v_{N0} określone są w (2.27) i (2.31).

Pole wtórne

$$E^s = E_m^s + E_e^s, \quad H^s = H_m^s + H_e^s, \quad (2.62)$$

gdzie

$$E_m^s = k_g Z_g \sum_{j=0}^2 p_j \int_C \frac{dw}{w - w_j} \frac{F_-(w)}{F_-(w_j)} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{a}_g(w) e^{i(-wx + \eta_g v_g y + \Gamma z)},$$

$$H_m^s = \sum_{j=0}^2 p_j \int_C \frac{dw}{w - w_j} \frac{F_-(w)}{F_-(w_j)} \mathbf{a}_g(w) \times [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{a}_g(w)] e^{i(-wx + \eta_g v_g y + \Gamma z)}$$
(2.63)

oraz

$$E_e^s = \frac{\eta_g}{k_g^2} \sum_{j=0}^2 q_j^g \int_C \frac{dw}{w - w_j} \frac{1}{v_g(w)} \frac{G_-(w)}{G_-(w_j)} \mathbf{a}_g(w) \times [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{a}_g(w)] e^{i(-wx + \eta_g v_g y + \Gamma z)},$$

$$H_e^s = -\frac{\eta_g}{k_g Z_g} \sum_{j=0}^2 q_j^g \int_C \frac{dw}{w - w_j} \frac{1}{v_g(w)} \frac{G_-(w)}{G_-(w_j)} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{a}_g(w) e^{i(-wx + \eta_g v_g y + \Gamma z)}.$$
(2.64)

Występujące w tych wzorach wielkości zdefiniowane są przez

$$\mathbf{a}_g(w) = [-w, \eta_g v_g, \Gamma], \quad |\mathbf{a}_g(w)| = k_g \quad (2.65)$$

oraz

$$p_0 = \frac{a_m T_m}{2\pi i}, \quad p_1 = -\frac{A_1}{2\pi i}, \quad p_2 = -\frac{A_2}{2\pi i},$$

$$q_0^g = i \frac{a_e T_e v_{N0}}{2\pi} \left(\frac{g}{N}\right)^2, \quad q_1^g = -\frac{k_g^3 Z_g A_1}{2\pi}, \quad q_2^g = \frac{k_g^3 Z_g A_2}{2\pi}.$$
(2.66)

Suma składników typu TM i typu TE pola wtórnego spełnia warunek wybiegania, a wraz z polem pierwotnym — warunek brzegowy na półpłaszczyźnie. Każdy ze składników spełnia ponadto równania Makswella, warunek na krawędzi i warunek ciągłości na granicy ośrodków. W szczególności podstawowe dla użytej metody spełnienie warunku krawędziowego zapewniają pola odpowiadające $j = 1, 2$ w (2.63) i (2.64). Generujące te pola fale typu TEM znoszą się w sumarycznym polu wtórnym.

Przedstawiona tu procedura konstrukcji rozwiązania została w skróconej formie opublikowana w [49].

3 Rozwinięcia asymptotyczne całek dyfrakcyjnych

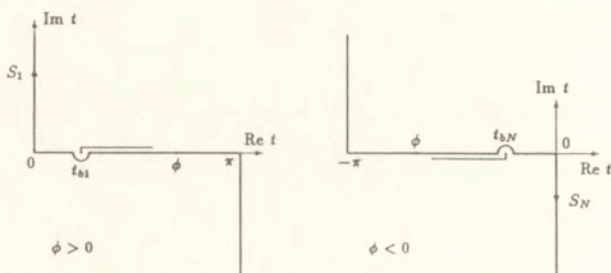
W tym rozdziale zostaną skonstruowane rozwinięcia asymptotyczne całek konturowych z dwoma i trzema punktami krytycznymi.⁴ Otrzymamy dwa rodzaje rozwinięć: jednostajnie i niejednostajnie słuszne względem swoich parametrów. Oba rodzaje rozwinięć wykorzystamy do znalezienia wyrażeń asymptotycznych dla występujących w pracy pól elektromagnetycznych.

3.1 Całki dyfrakcyjne z dwoma punktami krytycznymi

Weźmy pod uwagę całkę konturową postaci

$$J(\phi, \lambda) = \int_{S_g} (t - t_{bg})^r g(t) e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt, \quad r \geq -1, \quad (3.1)$$

gdzie kontur S_g pokrywa się z konturem S_1 gdy $\phi > 0$ i z konturem S_N gdy $\phi < 0$.



Rysunek 4: Kontury S_1 i S_N na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w

Zakładamy, że funkcja $g(t)$ jest analityczna w otoczeniu S_g oraz że całka jest zbieżna. Przyjmujemy również, że $\text{Arg}(t - t_{bg})^r = 0$, gdy $t > t_{bg}$. Z (3.1) wynika, że w pasach: $0 < \text{Re } t < \pi$ oraz $-\pi < \text{Re } t < 0$ rozważana całka ma dwa punkty krytyczne: prosty punkt siodłowy w $t = \phi$ i osobliwość algebraiczną funkcji podcałkowej w $t = t_{bg}$.

Naszym zadaniem jest znalezienie rozwinięcia asymptotycznego $J(\phi, \lambda)$ dla $\lambda \rightarrow \infty$, obowiązującego jednostajnie względem ϕ zmieniającego się w przedziale $\pi - \delta > \phi > \delta > 0$ albo $\delta - \pi < \phi < -\delta$. (Mały parametr δ gwarantuje, że sąsiednie punkty siodłowe $t = \phi \pm \pi$ są odseparowane od przedziału $[0, \pi]$). Gdy $\text{Im } t_{bg} = 0$, wówczas ϕ może znaleźć się dowolnie blisko lub pokryć się z $t = t_{bg}$. W

⁴Punkty wnoszące główny wkład do rozwinięcia asymptotycznego całki.

takim przypadku rozwinięcie asymptotyczne znalezione przy pomocy klasycznych metod zawodzi. Dlatego konstrukcję rozwinięcia oprzemy na metodzie Bleisteina [4, 6], która dopuszcza dowolnie bliskie położenie punktów krytycznych względem siebie.

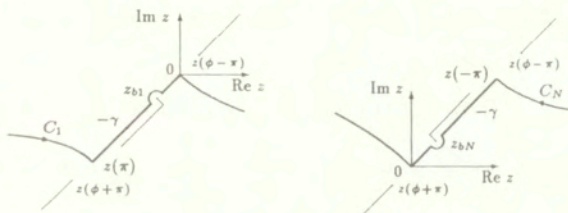
Dokonajmy zamiany zmiennej całkowania

$$z(t) = -\gamma - 2e^{i\pi/4} \sin \frac{t-\phi}{2}, \quad \gamma = 2e^{i\pi/4} \sin \frac{\phi}{2}, \quad (3.2)$$

przekształcającej $J(\phi, \lambda)$ do postaci

$$J(\phi, \lambda) = \int_{C_g} (z - z_{bg})^r G(z) e^{-\lambda p(z; \gamma)} dz. \quad (3.3)$$

Kontur całkowania C_g pokrywa się z konturem C_1 gdy $\phi > 0$ albo z konturem C_N gdy $\phi < 0$ (zob. Rys.5).



Rysunek 5: Kontury C_1 i C_N na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z

Funkcja $G(z)$ (nie należy jej mylić z funkcją $G(w)$ występującą w innych rozdziałach tej pracy) jest równa

$$G(z) = \left(\frac{t - t_{bg}}{z - z_{bg}} \right)^r g(t) \frac{dt}{dz}, \quad (3.4)$$

przy czym $z_{bg} = z(t_{bg})$ oraz $-\gamma = z(\phi)$. Zamiana zmiennej całkowania transformuje funkcję obecną w wykładniku w (3.1) do najprostszej postaci — wielomianu

$$p(z, \gamma) = \frac{(z + \gamma)^2}{2} - i. \quad (3.5)$$

Aby odwzorowanie (3.2) było wzajemnie jednoznaczne, z punktów rozgałęzienia $z(\phi - \pi)$ i $z(\phi + \pi)$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z poprowadzone są cięcia pokazane na Rys.5.

Przedstawmy funkcję $G(z)$ w postaci

$$G(z) = c_0 + c_1(z - z_{bg}) + (z - z_{bg})(z + \gamma)G_1(z), \quad (3.6)$$

gdzie $G_1(z)$ jest funkcją analityczną w pewnym otoczeniu konturu C_g . Po podstawieniu tej reprezentacji do (3.3) dokonajmy całkowania wyraz po wyrazie. Ostatni wyraz, zawierający $G_1(z)$, scałkujemy przez części, a do wyniku zastosujmy tę samą procedurę rozbicia funkcji podcałkowej, jak w (3.6). Kontynuując ten proces nieskończenie dostajemy

$$J(\phi, \lambda) \sim \int_{C_g} (z - z_{bg})^r e^{-\lambda p} dz \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{\lambda^n} + \int_{C_g} (z - z_{bg})^{r+1} e^{-\lambda p} dz \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n+1}}{\lambda^n}, \quad (3.7)$$

$\lambda \rightarrow \infty.$

Asymptotyczny charakter otrzymanego w taki sposób rozwinięcia został udowodniony przez Bleisteina [6]. Rozwinięcie jest jednostajnie słuszne względem ϕ , ponieważ jego współczynniki i obie całki kanoniczne w (3.7) są regularnymi funkcjami zmiennej ϕ . Poniżej wyrazimy całki kanoniczne poprzez znane funkcje i znajdziemy w jawnej postaci dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia.

3.1.1 Wyrażenie całek kanonicznych poprzez funkcje specjalne

Rozważane całki kanoniczne są postaci

$$I(z_{bg}, \gamma) = \int_{C_g} (z - z_{bg})^s e^{-\lambda p(z; \gamma)} dz, \quad s > -1. \quad (3.8)$$

Przyjmijmy najpierw, że kontur C_g pokrywa się z C_N . Wprowadźmy nowe zmienne

$$\xi = \lambda^{1/2}(z - z_{bN}), \quad q = \lambda^{1/2}(\gamma + z_{bN}). \quad (3.9)$$

Wówczas

$$I(z_{bg}, \gamma) = \lambda^{-\frac{s+1}{2}} e^{i\lambda - \frac{q}{2}} I_1(q), \quad (3.10)$$

gdzie

$$I_1(q) = \int_{C_N} \xi^s e^{-(\frac{\xi^2}{2} + q\xi)} d\xi \quad (3.11)$$

i kontur C_N jest obrazem konturu C_N . Ze względu na wykładnicze malenie funkcji $\exp(-\xi^2/2)$ w sektorach $-\pi/4 < \text{Arg } \xi < \pi/4$, $3\pi/4 < \text{Arg } \xi < \pi$ i $-\pi < \text{Arg } \xi < -3\pi/4$ gdy $\xi \rightarrow \infty$, mamy

$$0 = \int_{C_N} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^{s+1} e^{-(\frac{\xi^2}{2} + q\xi)} \right] d\xi = - \int_{C_N} [\xi^2 + q\xi - (s+1)] \xi^s e^{-(\frac{\xi^2}{2} + q\xi)} d\xi. \quad (3.12)$$

Stąd wynika równanie dla funkcji I_1

$$I_1'' - qI_1' + (s+1)I_1 = 0, \quad (3.13)$$

gdzie prim oznacza różniczkowanie względem q . Poszukajmy I_1 w postaci

$$I_1(q) = U(q)W_1(q). \quad (3.14)$$

Podstawiając (3.14) do (3.13) i żądając by współczynnik stojący przy W_1' zniknął, dostajemy

$$U(q) = e^{\frac{q^2}{4}} \quad (3.15)$$

i

$$W_1(q) = e^{-\frac{q^2}{4}} \int_{C_N} \xi^s e^{-(\frac{\xi^2}{2} + q\xi)} d\xi, \quad (3.16)$$

przy czym W_1 spełnia równanie Webera

$$W_1'' + \left[\frac{1}{2} - \frac{q^2}{4} - (s+1) \right] W_1 = 0. \quad (3.17)$$

Zatem funkcja W_1 jest równa liniowej kombinacji dwóch liniowo niezależnych rozwiązań (3.17):

$$W_1(q) = aD_{-(s+1)}(q) + bD_s(-iq), \quad (3.18)$$

gdzie D_r jest funkcją Webera rzędu r . Współczynniki a i b można wyznaczyć z równań

$$\begin{aligned} aD_{-(s+1)}(0) + bD_s(0) &= W_1(0), \\ aD'_{-(s+1)}(0) + bD'_s(0) &= W_1'(0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Lewą stronę (3.19) łatwo znaleźć korzystając z rozwinięcia $D_n(z)$ w szereg potęg z [51]

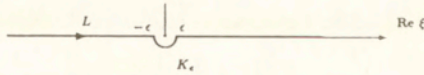
$$D_n(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{n}{2})} + \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})2^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{n}{2})}z + \dots \quad (3.20)$$

Zatem

$$\begin{aligned} a \frac{\Gamma(\frac{1}{2})2^{-\frac{s+1}{2}}}{\Gamma(1 - \frac{s}{2})} + b \frac{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{1-s}{2})} &= - \int_L \xi^s e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \\ a \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})2^{-\frac{s}{2}-1}}{\Gamma(\frac{s+1}{2})} - ib \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})2^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma(-\frac{s}{2})} &= \int_L \xi^{s+1} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \end{aligned} \quad (3.21)$$

gdzie kontur L jest pokazany na Rys.6.

W celu wyznaczenia całek występujących po prawej stronie (3.21) rozważmy dwa przypadki:



Rysunek 6: Kontur L na płaszczyźnie zmiennej zespolonej ξ

(A) $s = -1$

W tym przypadku, gdy $\epsilon \rightarrow 0$ przyczynki pochodzące od prostoliniowych fragmentów L wzajemnie się znoszą, a przyczynki od półokręgu K_ϵ wynoszą

$$\int_L \frac{d\xi}{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} = i\pi \quad (3.22)$$

i

$$\int_L e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = (2\pi)^{1/2}. \quad (3.23)$$

(B) $s > -1$

Obecnie całka brana wzdłuż półokręgu K_ϵ zmierza do zera gdy $\epsilon \rightarrow 0$, a niezerowy przyczynek pochodzi od prostoliniowych części L . Stąd

$$\int_L \xi^s e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = (1 + e^{-is\pi}) \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})}{2^{\frac{1-s}{2}}} \quad (3.24)$$

i

$$\int_L \xi^{s+1} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = (1 - e^{-is\pi}) \frac{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}{2^{-\frac{s}{2}}}. \quad (3.25)$$

Zauważmy, że prawe strony (3.24) i (3.25) przechodzą w prawe strony odpowiednio (3.22) i (3.23) gdy położymy w nich $s = -1$. Podstawiając (3.24) i (3.25) do (3.21) i korzystając z tożsamości wiążących funkcję Gamma ostatecznie dostajemy

$$a = 0, \quad b = -(2\pi)^{1/2} e^{-i\frac{\pi s}{2}}. \quad (3.26)$$

Z (3.18) wynika, że

$$\int_{C_N} (z - z_{bN})^s e^{-\lambda p(z;\gamma)} dz = -(2\pi)^{1/2} \lambda^{-\frac{s+1}{2}} e^{i(\lambda - \frac{\pi s}{2})} e^{-\frac{q^2}{4}} D_s(-iq). \quad (3.27)$$

W zagadnieniach dyfrakcyjnych często spotykane są pary wartości s : $1/2$ i $3/2$ oraz -1 i 0 . W przypadku pierwszej pary otrzymujemy

$$\int_{C_N} (z - z_{bN})^{1/2} e^{-\lambda p(z;\gamma)} dz = -(2\pi)^{1/2} \lambda^{-\frac{3}{4}} e^{i(\lambda - \frac{\pi}{4})} e^{-\frac{q^2}{4}} D_{1/2}(-iq), \quad (3.28)$$

i

$$\int_{C_N} (z - z_{bN})^{3/2} e^{-\lambda p(z;\gamma)} dz = -(2\pi)^{1/2} \lambda^{-\frac{5}{4}} e^{i(\lambda - \frac{3\pi}{4})} e^{-\frac{\pi^2}{4}} D_{3/2}(-iq). \quad (3.29)$$

W przypadku drugiej pary,

$$\int_{C_N} (z - z_{0N})^{-1} e^{-\lambda p(z;\gamma)} dz = -2\pi i e^{-\lambda p(z_0;\gamma)} \mathcal{F}(2^{1/2} e^{i\frac{3\pi}{4}} q), \quad (3.30)$$

gdzie \mathcal{F} jest całką Fresnela

$$\mathcal{F}(x) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x e^{i\mu^2} d\mu \quad (3.31)$$

oraz

$$\int_{C_N} e^{-\lambda p(z;\gamma)} dz = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2} e^{i\lambda}, \quad (3.32)$$

W (3.30) skorzystaliśmy ze związku

$$D_{-1}(-iq) = (2\pi)^{1/2} e^{-\frac{\pi^2}{4}} \mathcal{F}(2^{1/2} e^{i\frac{3\pi}{4}} q). \quad (3.33)$$

Zmienna q wyrażona bezpośrednio poprzez ϕ i t_{bN} wynosi

$$q = 2\lambda^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\phi - t_{bN}}{2}. \quad (3.34)$$

Podobne rozumowanie możemy zastosować do przypadku, gdy $\phi > 0$, tj. do sytuacji w której kontur S_g pokrywa się z konturem S_1 . Zbierając oba wyniki razem dostajemy

$$\begin{aligned} \int_{C_g} (z - z_{bg})^2 e^{-\lambda p(z;\gamma)} dz & \\ &= \eta_g (2\pi)^{1/2} \lambda^{-\frac{4+1}{2}} e^{i(\lambda + \eta_g \frac{\pi}{2})} e^{-i\lambda \sin^2 x} D_g(2\lambda^{1/2} e^{i\frac{1-2\eta_g}{4}\pi} \sin x), \end{aligned} \quad (3.35)$$

gdzie

$$x = \frac{t_{bg} - \phi}{2} \quad (3.36)$$

oraz

$$\eta_g = \begin{cases} +1, & \text{gd}y \quad g = 1 \quad (\phi > 0) \\ -1, & \text{gd}y \quad g = N \quad (\phi < 0). \end{cases} \quad (3.37)$$

3.1.2 Współczynniki rozwinięcia

Z (3.6) oraz z podobnego rozwinięcia funkcji otrzymanej w rezultacie całkowania przez części ostatniego wyrazu w (3.6) wynika

$$\begin{aligned} c_0 &= G(z_{bg}), \\ c_1 &= \frac{G(z_{bg}) - G(-\gamma)}{z_{bg} + \gamma}, \\ c_2 &= \frac{r+1}{z_{bg} + \gamma} \left[G'(z_{bg}) - \frac{G(z_{bg}) - G(-\gamma)}{z_{bg} + \gamma} \right], \\ c_3 &= \frac{1}{z_{bg} + \gamma} \left[(r+1) \frac{G'(z_{bg})}{z_{bg} + \gamma} - \frac{G''(-\gamma)}{2} + r \frac{G'(-\gamma)}{z_{bg} + \gamma} - (2r+1) \frac{G(z_{bg}) - G(-\gamma)}{(z_{bg} + \gamma)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Korzystając w tych wzorach z (3.2) oraz z (3.4) możemy wyrazić otrzymane współczynniki poprzez wielkości kątowe ϕ i t_{bg}

$$\begin{aligned} c_0 &= e^{-i(r+1)(\eta_g + \frac{1}{4})\pi} \frac{g(t_{bg})}{\cos^{r+1} x}, \\ c_1 &= \frac{e^{-i(r+2)(\eta_g + \frac{1}{4})\pi}}{2 \sin x} \left[\frac{g(t_{bg})}{\cos^{r+1} x} - \left(\frac{x}{\sin x} \right)^r g(\phi) \right], \\ c_2 &= (r+1) \frac{e^{-i(r+3)(\eta_g + \frac{1}{4})\pi}}{2 \sin x} \left[\frac{g(t_{bg})}{2 \sin x \cos^{r+1} x} \left(\frac{r+2}{2} \tan^2 x - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g'(t_{bg})}{\cos^{r+2} x} + \frac{x^r}{2 \sin^{r+1} x} g(\phi) \right], \\ c_3 &= \frac{e^{-i(r+4)(\eta_g + \frac{1}{4})\pi}}{2 \sin x} \left\{ \frac{r+1}{2 \sin x \cos^{r+1} x} g'(t_{bg}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4 \cos^{r+1} x} \left[\frac{(r+1)(r+2)}{2 \cos^2 x} - \frac{2r+1}{\sin^2 x} \right] g(t_{bg}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{2x} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^r g'(\phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^r \left[\frac{r(r+3)}{(2 \sin x)^2} - \frac{r(r+1)}{(2x)^2} - \frac{1}{4} \right] g(\phi) \right\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Po uwzględnieniu powyższych wzorów oraz (3.35) w (3.7), dostajemy w postaci jawnej dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia asymptotycznego rozważanej w tym rozdziale całki. Opisane przy ich pomocy wyrażenie asymptotyczne jest jednostajnie słuszne ze względu na zmienną kątową ϕ .

3.1.3 Rozwinięcie niejednostajne

Jeśli punkt osobliwy w $t = t_{bg}$ jest odseparowany od punktu siodłowego w $t = \phi$, a w konsekwencji jeśli wielkość $|q|$ zdefiniowana w (3.34) jest dostatecznie duża,

wówczas rozwinięcie asymptotyczne (3.7) może być uproszczone poprzez zastąpienie funkcji D_s w (3.35) jej rozwinięciem asymptotycznym słusznym dla dużego argumentu. Ograniczenie nałożone na wielkość argumentu powoduje, że rozwinięcie otrzymane w wyniku tego zabiegu obowiązuje niejednostajnie względem zmiennej ϕ . W terminach fizycznych oznacza ono, że kąt ϕ określający położenie punktu obserwacji musi być dostatecznie odległy od kąta t_{bg} , opisującego granicę cienia stosownej fali. Posługując się rozwinięciem asymptotycznym funkcji Webera [51] dostajemy

$$D_s(z) = \begin{cases} e^{-\frac{z^2}{4}} z^s \left[1 - \frac{s(s-1)}{2z^2} + O(z^{-4}) \right], & -\frac{3\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{3\pi}{4}, \\ e^{-\frac{z^2}{4}} z^s \left[1 - \frac{s(s-1)}{2z^2} + O(z^{-4}) \right] & \frac{1}{4}\pi < \text{Arg } z < \frac{5}{4}\pi. \\ -\frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(-s)} e^{-\frac{z^2}{4}} e^{is\pi} z^{-(s+1)} [1 + O(z^{-2})], & \end{cases} \quad (3.40)$$

Zastosujmy teraz to rozwinięcie do (3.35). Podstawiając wynik do (3.7), a następnie grupując wyrazy według potęg λ dochodzimy do rozwinięcia niejednostajnego rozważanej całki gdy $\lambda \rightarrow \infty$

$$J(\phi, \lambda) \sim \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i[\lambda + (\frac{1}{4} + \eta_g \frac{1-2x}{2})\pi]} (2x)^r \left\{ g(\phi) - \frac{i}{2\lambda} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r(r-1)}{x^2} + 1 \right) g(\phi) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r}{x} g'(\phi) + g''(\phi) \right] \right\}, & \text{Arg } x = \eta_g \pi, \\ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i[\lambda + (\frac{1}{4} + \eta_g \frac{1-2x}{2})\pi]} (2x)^r \left\{ g(\phi) - \frac{i}{2\lambda} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r(r-1)}{x^2} + 1 \right) g(\phi) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r}{x} g'(\phi) + g''(\phi) \right] \right\} & \text{Arg } x = 0. \\ + \frac{2\pi}{\Gamma(-r)} \frac{e^{i\lambda \cos 2x}}{(\lambda \sin 2x)^{r+1}} e^{ir\frac{\pi}{2}} g(t_{bg}), & \end{cases} \quad (3.41)$$

Rozpatrzmy teraz najczęściej spotykane trzy przypadki, tj. gdy punkt t_{bg} w (3.1) jest kolejno biegunem, punktem rozgałęzienia odpowiadającym $r = 1/2$ i punktem regularnym (w tym przypadku całka ma tylko jeden punkt krytyczny — punkt siodłowy). Tak więc gdy $\lambda \rightarrow \infty$ otrzymujemy odpowiednio

$r = -1$

$$\int_{S_g} \frac{g(t)}{t - t_0} e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt \sim \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{e^{i[\lambda + (\frac{1}{4} + \eta_g \frac{\pi}{2})\pi]}}{t_0 - \phi} \left\{ g(\phi) - \frac{i}{2\lambda} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{(t_0 - \phi)^2} \right) g(\phi) + \frac{2}{t_0 - \phi} g'(\phi) + g''(\phi) \right] \right\} \\ - 2\pi i e^{i\lambda \cos(t_0 - \phi)} g(t_0), & \text{Arg}(t_0 - \phi) = 0, \\ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{e^{i[\lambda + (\frac{1}{4} + \eta_g \frac{\pi}{2})\pi]}}{t_0 - \phi} \left\{ g(\phi) - \frac{i}{2\lambda} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{(t_0 - \phi)^2} \right) g(\phi) + \frac{2}{t_0 - \phi} g'(\phi) + g''(\phi) \right] \right\}, & \text{Arg}(t_0 - \phi) = \eta_g \pi. \end{cases} \quad (3.42)$$

Łatwo zobaczyć, że człon proporcjonalny do $\lambda^{-1/2}$ może być równoważnie otrzymany metodą najszybszego spadku. Człon rzędu λ^0 interpretujemy jako przyczynkę od residuum w $t = t_0$. Pojawianie się tego przyczynku w rozwinięciu asymptotycznym zależy od tego, czy biegun występuje w obszarze ograniczonym przez kontur S_g i kontur najszybszego spadku przechodzący przez $t = \phi$, czy też nie.

$r = 1/2$

$$\int_{S_g} (t - t_{bg})^{1/2} g(t) e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt \sim \begin{cases} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i(\lambda + \frac{\pi}{4})} (t_{bg} - \phi)^{1/2} \left\{ g(\phi) - \frac{i}{2\lambda} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{(t_{bg} - \phi)^2} \right) g(\phi) - \frac{g'(\phi)}{t_{bg} - \phi} + g''(\phi) \right] \right\} \\ - \pi^{1/2} \frac{e^{i\lambda \cos(t_{bg} - \phi)}}{[\lambda \sin(t_{bg} - \phi)]^{3/2}} g(t_{bg}), & \text{Arg}(t_{bg} - \phi) = 0, \\ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i(\lambda + \frac{\pi}{4})} (t_{bg} - \phi)^{1/2} \left\{ g(\phi) - \frac{i}{2\lambda} \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{(t_{bg} - \phi)^2} \right) g(\phi) - \frac{g'(\phi)}{t_{bg} - \phi} + g''(\phi) \right] \right\}, & \text{Arg}(t_{bg} - \phi) = \eta_g \pi. \end{cases} \quad (3.43)$$

I tutaj człon proporcjonalny do $\lambda^{-1/2}$ interpretuje się jako przyczynkę do rozwinięcia asymptotycznego pochodzący od punktu siodłowego. Człon rzędu $\lambda^{-3/2}$ można równoważnie otrzymać rozwijając asymptotycznie całkę określoną na konturze obiegającym cięcie poprowadzone z punktu rozgałęzienia w $t = t_{bg}$.

$r = 0$

$$\int_{S_g} g(t) e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2} e^{i(\lambda + \frac{1+2\eta_g}{4}\pi)} \left[g(\phi) - \frac{i}{2\lambda} \left(\frac{g(\phi)}{4} + g''(\phi) \right) \right]. \quad (3.44)$$

Prawa strona tej równości asymptotycznej zawiera dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia asymptotycznego całki, które równoważnie można otrzymać metodą najszybszego spadku.

3.1.4 Odmienny sposób obchodzenia bieguna

W analizowanych dotychczas całkach zakładaliśmy, że kontur obiega osobliwość funkcji podcałkowej zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. W niniejszej pracy występują całki, w których sposób obchodzenia bieguna jest odwrotny. Dla takich całek możemy natychmiast znaleźć jednostajne rozwinięcie asymptotyczne, wychodząc od rozwinięcia całki zdefiniowanej na konturze S_g .

To ostatnie rozwinięcie zostało przedstawione w (3.30). Zapiszmy je w równoważnej postaci

$$\int_{S_g} \frac{g(t)}{t-t_0} e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt \sim -i(2\pi)^{1/2} e^{i\lambda} \left\{ \left[e^{\frac{\eta^2}{4}} D_{-1}(u) - \frac{1}{u} \right] g(t_0) + \frac{\sin x}{x} \frac{g(\phi)}{u} \right\},$$

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad (3.45)$$

gdzie

$$u = \eta_g 2\lambda^{1/2} e^{i\frac{3}{4}\pi} \sin x. \quad (3.46)$$

Zdefiniujemy kontur \tilde{S}_g , który różni się od konturu S_g tym, że biegun w $t = t_0$ obchodzony jest w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Zdefiniujemy również kontur K , mający kształt okręgu o małym promieniu i środku w $t = t_0$, obiegający biegun także w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Łatwo sprawdzić, że

$$\int_K \frac{g(t)}{t-t_0} e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt = i(2\pi)^{1/2} e^{i\lambda + \frac{\eta^2}{4}} g(t_0) [D_{-1}(u) + D_{-1}(-u)]. \quad (3.47)$$

Dodając (3.47) i (3.45) stronami dostajemy żądany wynik

$$\int_{\tilde{S}_g} \frac{g(t)}{t-t_0} e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt \sim -i(2\pi)^{1/2} e^{i\lambda} \left\{ \left[-e^{\frac{\eta^2}{4}} D_{-1}(-u) - \frac{1}{u} \right] g(t_0) + \frac{\sin x}{x} \frac{g(\phi)}{u} \right\},$$

$$\lambda \rightarrow \infty. \quad (3.48)$$

3.2 Całki dyfrakcyjne z trzema punktami krytycznymi

Obecnie rozpatrzmy całki o bardziej złożonej budowie, zawierające trzy punkty krytyczne: punkt siodłowy, biegun i punkt rozgałęzienia. Całki tego typu pojawiają się w tej pracy. Także i tutaj posługując się teorią Bleinsteina znajdziemy rozwinięcia jednostajne, słuszne dla dowolnych konfiguracji punktów krytycznych. Rozwinięcia te opisane są przez dosyć złożone funkcje specjalne. W przypadku gdy biegun i punkt siodłowy są wzajemnie odseparowane, rozwinięcia jednostajne redukują się do prostszych rozwinięć quasi-jednostajnych. Natomiast gdy wszystkie trzy punkty krytyczne są wzajemnie odseparowane, rozwinięcia quasi-jednostajne upraszczają się do rozwinięć niejednostajnych. Te ostatnie rozwinięcia mają najprostszą postać i można je uzyskać na drodze klasycznych rozważań asymptotycznych, opartych na analizie residuów oraz asymptotycznym szacowaniu całek branych wzdłuż drogi najszybszego spadku i drogi otaczającej cięcie poprowadzone z punktu rozgałęzienia. Szczegółowe wyprowadzenie przedstawionych tu wyników znajduje się w [52]. W rozważanym w tej pracy problemie będziemy korzystali z quasi-jednostajnych i niejednostajnych rozwinięć całek.

Weźmy pod uwagę całkę

$$u(\phi, \lambda) = \int_{\Gamma_1} \frac{(t - t_b)^r}{t - t_p} g(t) e^{i\lambda \cos(t-\phi)} dt, \quad -1 \leq r < 1, \quad (3.49)$$

gdzie kontur Γ_1 jest pokazany na Rys. 7 (str. 49), a funkcja $g(t)$ jest analityczna w pewnym otoczeniu tego konturu. Naszym celem jest zbadanie asymptotycznego zachowania tej całki, gdy jej punkty krytyczne zmieniają się w przedziałach

$$0 < \delta \leq \phi \leq \pi - \delta, \quad 0 < t_p < \pi, \quad 0 < t_b < \pi \quad (3.50)$$

i w szczególności mogą się pokrywać. Tak jak poprzednio przyjmujemy, że $\text{Arg}(\cdot)^r = 0$ jeśli $\text{Arg}(\cdot) = 0$. Zauważmy, że gdy $r = 0$ albo $g(t_p) = 0$, wówczas rozpatrywana tu całka upraszcza się do całki z dwoma punktami krytycznymi.

3.2.1 Konstrukcja rozwinięcia jednostajnego

Dokonajmy zamiany zmiennej całkowania

$$t \rightarrow \xi : \xi(t, \phi) = 2e^{-i3\pi/4} \sin \frac{t - \phi}{2}, \quad (3.51)$$

przeprowadzającej konforemnie pas $\phi - \pi < \text{Re } t < \phi + \pi$ na zespoloną płaszczyznę ξ z cięciami rozciągającymi się od $\xi = 2e^{-i3\pi/4}$ do $\xi = \infty e^{-i3\pi/4}$ i od $\xi = 2e^{i\pi/4}$ do $\xi = \infty e^{i\pi/4}$. W wyniku tej zamiany całka w (3.49) przyjmuje postać

$$u(\phi, \lambda) = \int_{\mathcal{L}} \frac{(\xi - \xi_b)^r}{\xi - \xi_p} G(\xi) e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\xi, \quad (3.52)$$

gdzie $\xi_b = \xi(t_b, \phi)$ i $\xi_p = \xi(t_p, \phi)$ oraz

$$G(\xi) = \left(\frac{t - t_b}{\xi - \xi_b} \right)^r \frac{\xi - \xi_p}{t - t_p} g(t) \frac{dt}{d\xi} \quad (3.53)$$

jest analityczną funkcją w otoczeniu konturu \mathcal{L} , będącego obrazem Γ_1 w wyniku odwzorowania (3.51). Rozbijmy funkcję $G(\xi)$ na sumę

$$G(\xi) = c_0 + c_1(\xi - \xi_p) + c_2(\xi - \xi_p)(\xi - \xi_b) + (\xi - \xi_p)(\xi - \xi_b)\xi H(\xi), \quad (3.54)$$

gdzie $H(\xi)$ jest analityczna w pewnym otoczeniu \mathcal{L} . Podstawiając $\xi = \xi_p$, $\xi = \xi_b$ i $\xi = 0$ do (3.54) znajdujemy współczynniki rozwinięcia

$$\begin{aligned} c_0 &= g(\xi_b), \\ c_1 &= [G(\xi_b) - G(\xi_p)]/(\xi_b - \xi_p), \\ c_2 &= \frac{1}{\xi_b} \left[\frac{G(0) - G(\xi_p)}{\xi_p} - \frac{G(\xi_b) - G(\xi_p)}{\xi_b - \xi_p} \right]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Podstawmy (3.54) do (3.52) i całkując ostatni człon przez części dostajemy

$$\begin{aligned} e^{-i\lambda} u(\phi, \lambda) &= c_0 \int_{\mathcal{L}} \frac{(\xi - \xi_b)^r}{\xi - \xi_p} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\xi + c_1 \int_{\mathcal{L}} (\xi - \xi_b)^r e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\xi \\ &+ c_2 \int_{\mathcal{L}} (\xi - \xi_b)^{r+1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\xi + \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{L}} (\xi - \xi_b)^r G_1(\xi) e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\xi, \end{aligned} \quad (3.56)$$

gdzie

$$G_1(\xi) = (r+1)H(\xi) + (\xi - \xi_b)dH(\xi)/d\xi \quad (3.57)$$

jest także regularną funkcją w otoczeniu \mathcal{L} . Z szacowania poszczególnych członów wynika, że pierwsze trzy składniki po prawej stronie znaku równości w (3.56) generują główny wyraz rozwinięcia asymptotycznego funkcji $e^{-i\lambda} u(\phi, \lambda)$ gdy $\lambda \rightarrow \infty$, a czwarty człon jest resztą w tym rozwinięciu. Rozwinięcie to jest jednostajnie słuszne ze względu na ξ_p i ξ_b , a więc także i ϕ , t_p i t_b . Ogólny dowód asymptotycznego charakteru tak otrzymanego rozwinięcia jest dany w [6].

Wyższe wyrazy rozwinięcia można otrzymać stosując podobną procedurę do reszty rozwinięcia. Ponieważ całka opisująca resztę ma tylko dwa punkty krytyczne, stosowne rozbitcie funkcji $G_1(\xi)$ na sumę składników jest postaci

$$G_1(\xi) = c_3 + c_4(\xi - \xi_b) + (\xi - \xi_b)\xi H_1(\xi). \quad (3.58)$$

Podstawiając (3.58) do (3.56), całkując ostatni wyraz przez części i powtarzając całą procedurę N -krotnie dostajemy w wyniku

$$\begin{aligned}
 e^{-i\lambda}u(\phi, \lambda) &= c_0 \int_C \frac{(\xi - \xi_b)^r}{\xi - \xi_p} e^{-\frac{\lambda\xi^2}{2}} d\xi \\
 &+ \left[\sum_{n=0}^N \frac{c_{2n+1}}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right] \int_C (\xi - \xi_b)^r e^{-\frac{\lambda\xi^2}{2}} d\xi \\
 &+ \left[\sum_{n=0}^N \frac{c_{2(n+1)}}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right] \int_C (\xi - \xi_b)^{r+1} e^{-\frac{\lambda\xi^2}{2}} d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Współczynniki c_k , $k = 3, 4, \dots$, są dane przez

$$\begin{aligned}
 c_{2n+3} &= (r+1)H_n(\xi_b), \quad H_0(\xi) = H(\xi), \\
 c_{2(n+2)} &= (r+1) \frac{H_n(\xi_b) - H_n(0)}{\xi_b} + \frac{dH_n(0)}{d\xi},
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

zaś funkcje $H_n(\xi)$ są wyznaczane rekurencyjnie z równań

$$\begin{aligned}
 (r+1)H_n(\xi) + (\xi - \xi_b)H'_n(\xi) &= c_{2n+3} + c_{2(n+2)}(\xi - \xi_b) \\
 &+ (\xi - \xi_b)\xi H_{n+1}(\xi), \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

W szczególności współczynniki występujące w drugim członie rozwinięcia (3.59) są równe

$$\begin{aligned}
 c_3 &= (r+1) \left[\frac{G'(\xi_p)}{(\xi_b - \xi_p)\xi_b} - \frac{G(\xi_b)(2\xi_b - \xi_p)}{(\xi_b - \xi_p)^2\xi_b^2} - \frac{G(0)}{\xi_b^2\xi_p} + \frac{G(\xi_p)}{(\xi_b - \xi_p)^2\xi_p} \right], \\
 c_4 &= (r+1) \left[\frac{G'(\xi_b)}{(\xi_b - \xi_p)\xi_b^2} - G(\xi_b) \frac{(3\xi_b - 2\xi_p)}{\xi_b^3(\xi_b - \xi_p)^2} - \frac{G(0)'}{\xi_p\xi_b^2} - G(0) \frac{\xi_b + 2\xi_p}{\xi_b^3\xi_p^2} \right. \\
 &+ \left. \frac{G(\xi_p)}{(\xi_b - \xi_p)^2\xi_p^2} \right] + \frac{G''(0)}{2\xi_b\xi_p} + G'(0) \frac{\xi_b + \xi_p}{(\xi_b\xi_p)^2} + G(0) \frac{\xi_b^2 + \xi_p^2 + \xi_b\xi_p}{(\xi_b\xi_p)^3} \\
 &+ \frac{G(\xi_b)}{\xi_b^3(\xi_b - \xi_p)} - \frac{G(\xi_p)}{\xi_p^3(\xi_b - \xi_p)}.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Odnotujmy, że zastosowaliśmy tu nieco inny sposób rozbicia funkcji podcałkowej (wzory (3.6), (3.54) i (3.58)) niż w oryginalnej procedurze Bleisteina (por. uwagę w [52]). Przyjęty tu sposób prowadzi do prostszej postaci rozwinięcia asymptotycznego i pozwala je łatwo zinterpretować. Istotnie, zapisując (3.52) w postaci

$$\begin{aligned}
 e^{-i\lambda}u(\phi, \lambda) &= G(\xi_p) \int_C \frac{(\xi - \xi_b)^r}{\xi - \xi_p} e^{-\frac{\lambda\xi^2}{2}} d\xi \\
 &+ \int_C (\xi - \xi_b)^r \frac{G(\xi) - G(\xi_p)}{\xi - \xi_p} e^{-\frac{\lambda\xi^2}{2}} d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

widać, że pierwszy składnik po prawej stronie w (3.59) i w (3.63) jest taki sam, a więc pozostałe wyrażenie po prawej stronie (3.59) jest jednostajnym rozwinięciem asymptotycznym drugiej całki w (3.63). Całka kanoniczna zawierająca biegun w funkcji podcałkowej występuje jedynie w pierwszym wyrazie rozwinięcia asymptotycznego, bowiem druga całka w (3.63) ma w punkcie $\xi = \xi_p$ osobliwość usuwalną. Należy podkreślić, że mimo wymienionej modyfikacji w konstrukcji rozwinięcia asymptotycznego jest ono wciąż rozwinięciem typu Bleisteina, ponieważ reszta w każdej sumie częściowej jest taka sama przy zastosowaniu procedury oryginalnej i procedury zmodyfikowanej. Podobny sposób rozbitcia funkcji podcałkowej został zastosowany w konstrukcji rozwinięcia asymptotycznego niepełnej całki dyfrakcyjnej [53].

3.2.2 Wyrażenie całek kanonicznych poprzez funkcje specjalne

Rozwinięcie (3.59) ma postać niedogodną do zastosowań, ponieważ wyraża się poprzez całki konturowe. Całki te wyrazimy poprzez funkcje specjalne.

Wprowadźmy wielkości $\eta_b = \lambda^{1/2}\xi_b$ i $\eta_p = \lambda^{1/2}\xi_p$. Korzystając z (3.27) możemy przedstawić prostszą całkę kanoniczną w postaci

$$\int_{\mathcal{C}} (\xi - \xi_b)^r e^{-\frac{\lambda\xi^2}{2}} d\xi = \lambda^{-(r+1)/2} h(\eta_b; r), \quad (3.64)$$

gdzie

$$h(\eta_b; r) = \int_{\mathcal{L}'} (\eta - \eta_b)^r e^{-\eta^2/2} d\eta = (2\pi)^{1/2} e^{i r \pi/2} f_r(i\eta_b), \quad (3.65)$$

kontur $\mathcal{L}' = \lambda^{1/2}\mathcal{L}$ i

$$f_r(\omega) = e^{\omega^2/4} D_r(\omega). \quad (3.66)$$

Weźmy teraz pod uwagę drugą całkę kanoniczną

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{(\xi - \xi_b)^r}{\xi - \xi_p} e^{-\frac{\lambda\xi^2}{2}} d\xi = \lambda^{-r/2} j(\eta_b, \eta_p; r), \quad (3.67)$$

gdzie

$$j(\eta_b, \eta_p; r) = \int_{\mathcal{L}'} \frac{(\eta - \eta_b)^r}{\eta - \eta_p} e^{-\eta^2/2} d\eta. \quad (3.68)$$

Nietrudno sprawdzić, że j spełnia równanie różniczkowe

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta_b} + \frac{\partial}{\partial \eta_p} + \eta_p \right) j(\eta_b, \eta_p; r) = -h(\eta_b; r). \quad (3.69)$$

Rozwiązując to równanie metodą charakterystyk pokazano w [52], że funkcja j wyraża się za pośrednictwem całek

$$\begin{aligned}
 j(\eta_b, \eta_p; r) \equiv J(b, d) &= e^{-i(b+d)^2} \left[\pi 2^{(r+2)/2} e^{i(r+2)\pi/4} d^r \right. \\
 &\quad \left. - 2\pi^{1/2} e^{i(2r+1)\pi/4} \int_{\infty e^{-i\pi}}^0 e^{i(\omega+d)^2} f_r(\alpha\omega) d\omega \right] \quad (3.70) \\
 &= 2\pi^{1/2} e^{i(2r+1)\pi/4} e^{-i(b+d)^2} \int_0^{\infty e^{i0}} e^{i(\omega+d)^2} f_r(\alpha\omega) d\omega,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha = 2^{1/2} e^{i3\pi/4}, \quad b = 2^{-1/2} e^{-i\pi/4} \eta_b, \quad d = 2^{-1/2} e^{-i\pi/4} (\eta_p - \eta_b) \quad (3.71)$$

i $\text{Arg } d^r = 0$ albo $r\pi$, zależnie od tego czy $d > 0$ ($t_b > t_p$), czy też $d < 0$ ($t_b < t_p$).

W ten sposób całki kanoniczne występujące w (3.59) zostały wyrażone w terminach funkcji Webera.

3.2.3 Quasi-jednostajne i niejednostajne rozwinięcia asymptotyczne funkcji u

Obecnie nałożmy ograniczenie na punkty krytyczne żądając, by $t = t_b$ i $t = t_p$ były od siebie odseparowane, tzn. by $|t_b - t_p| \geq \delta > 0$. Dla ustalenia uwagi założmy, że $t_b > t_p$ ($d > 0$). Przy tym ograniczeniu rozwinięcie (3.59) można istotnie uprościć.

Najpierw zauważmy, że dla gładkiej funkcji $q(t)$ zachodzi następująca równość

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^b e^{i(t-c)^2} q(t) dt &= \frac{\exp[i(b-c)^2]}{\alpha^2(b-c)} \left[\frac{q'(b)}{\alpha^2 c} - q(b) \right] \\
 &\quad - \left[\frac{q'(c)}{\alpha^2 c} - q(c) \right] \left[\int_{-\infty}^{b-c} e^{i\mu^2} d\mu + \frac{\exp[i(b-c)^2]}{\alpha^2(b-c)} \right] \quad (3.72) \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha^4 c} \int_{-\infty}^b e^{i(t-c)^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{q'(t) - q'(c)}{t-c} - \alpha^2 \frac{tq(t) - cq(c)}{t-c} \right],
 \end{aligned}$$

którą można otrzymać na drodze całkowania przez części. Jeśli funkcja $q(t)$ jest dostatecznie regularna, wówczas wzór ten można stosować wielokrotnie po prawej stronie równości, co w wyniku prowadzi do rozwinięcia asymptotycznego całki w (3.72) gdy $|c| \rightarrow \infty$. Zastosujmy tę procedurę do (3.70), wraz z podstawieniami $c = -d$ i $q(t) = f_r(\alpha t)$. Ponieważ

$$f'_r(\omega) = r f_{r-1}(\omega) = \omega f_r(\omega) - f_{r+1}(\omega), \quad (3.73)$$

zatem wszystkie pochodne funkcji f_r dają się wyrazić tylko przez f_r i f_{r+1} . Ponadto w konsekwencji rozseparowania punktów $t = t_b$ i $t = t_p$ funkcje $f_r(-\alpha d)$

i $f_{r+1}(-\alpha d)$ można zastąpić ich rozwinięciami asymptotycznymi, słusznymi dla $d \rightarrow \infty$. Zauważmy, że

$$f_\nu(\omega) = \omega^r [1 - \nu(1 - \nu)/2\omega^2 + O(\omega^{-4})], \quad |\text{Arg } \omega| < 3\pi/4, \quad \omega \rightarrow \infty,$$

$$f_\nu(\omega) = \omega^r [1 - \nu(1 - \nu)/2\omega^2 + O(\omega^{-4})] - \frac{2\pi}{\Gamma(-\nu)} e^{i\nu\pi} \omega^{r/2} \omega^{-(\nu+1)} \quad (3.74)$$

$$[1 + (\nu + 1)(\nu + 2)/2\omega^2 + O(\omega^{-4})], \quad \pi/4 < \text{Arg } \omega < 5\pi/4, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Ponieważ $\text{Arg}(-\alpha d) = -\pi/4$, więc stosuje się tu pierwsze z powyższych rozwinięć i w ten sposób dochodzimy do następującego rozwinięcia asymptotycznego funkcji J

$$J(b, d) = (2\pi)^{1/2} e^{i(r-1)\pi/2} \left\{ (-\alpha d)^r e^{-i(b+d)^2} \left[\alpha \int_{b+d}^{\infty} e^{i\mu^2} d\mu \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\exp[i(b+d)^2]}{\alpha(b+d)} \left(1 - \frac{1}{[\alpha(b+d)]^2} \right) + O(\lambda^{-2}) \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{(-\alpha d)} \left[\left(1 + \frac{r+1}{(-\alpha d)\alpha(b+d)} + O(\lambda^{-2}) \right) f_r(\alpha b) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(1 - \frac{1}{[\alpha(b+d)]^2} + \frac{r+1}{(-\alpha d)\alpha(b+d)} + O(\lambda^{-2}) \right) \frac{f_{r+1}(\alpha b)}{\alpha(b+d)} \right] \right\}, \quad (3.75)$$

$$t_b - t_p \geq \delta > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Rozważmy teraz następujące trzy przypadki.

$$(a) \quad t_b - \phi \geq \delta_1 > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

W tym przypadku punkt $t = \phi$ jest odseparowany od punktu $t = t_b$, ale może znajdować się dowolnie blisko i w szczególności pokrywać się z punktem $t = t_p$. W konsekwencji $|-b| \gg 1$, a więc zarówno $f_r(\alpha b)$ jak i $f_{r+1}(\alpha b)$ mogą być zastąpione swymi rozwinięciami asymptotycznymi. Ponieważ $\text{Arg}(\alpha b) = -\pi/4$, znowu właściwe jest pierwsze z rozwinięć w (3.74). Prowadzi ono do

$$J(b, d) = (2\pi)^{1/2} e^{i(r-1)\pi/2} \left\{ (-\alpha d)^r \left[e^{-i(b+d)^2} \alpha \int_{b+d}^{\infty} e^{i\mu^2} d\mu \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{[\alpha(b+d)]} \left(1 - \frac{1}{[\alpha(b+d)]^2} \right) + O(\lambda^{-2}) \right] \right. \\ \left. + \frac{(\alpha b)^r}{\alpha(b+d)} \left[1 + \frac{r}{\alpha b \alpha(b+d)} - \frac{1}{[\alpha(b+d)]^2} - \frac{r(r-1)}{2(\alpha b)^2} + O(\lambda^{-2}) \right] \right\}, \quad (3.76)$$

$$\lambda \rightarrow \infty.$$

Podstawiając powyższy wynik na miejsce $j(\eta_b, \eta_p; r)$ w (3.67) dostajemy quasi-jednostajne rozwinięcie całki kanonicznej występującej po lewej stronie tej równości. Podobnie korzystając z rozwinięcia funkcji f_ν w (3.65) otrzymujemy z (3.64)

rozwińnięcie asymptotyczne drugiej całki kanonicznej. Wynikiem podstawienia obu rozwińnięć do (3.59) jest następujące rozwińnięcie asymptotyczne funkcji u

$$\begin{aligned}
 u(\phi, \lambda) = & G(\xi_p) e^{i\lambda} (2\pi)^{1/2} (\xi_p - \xi_b)^r \left[2^{1/2} e^{i\pi/4} e^{-\lambda \xi_p^2/2} \int_{z^{-1/2} e^{-i\pi/4} \lambda^{1/2} \xi_p} e^{i\mu^2} d\mu \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\lambda^{1/2} \xi_p} \left(1 + \frac{1}{\lambda \xi_p^2} \right) + O(\lambda^{-2}) \right] \\
 & - G(0) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i(\lambda+r\pi)} \frac{\xi_b^r}{\xi_p} \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\xi_p^2} - \frac{r}{\xi_b \xi_p} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{r(r-1)}{2\xi_b^2} - \frac{G'(0)}{G(0)} \left(\frac{r}{\xi_b} - \frac{1}{\xi_p} \right) + \frac{1}{2} \frac{G''(0)}{G(0)} \right] + O(\lambda^{-2}) \right\}, \quad \lambda \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

W szczególności gdy $|\phi - t_p| \rightarrow 0$, człony osobliwe w (3.77) znoszą się i w granicy dostajemy

$$\begin{aligned}
 u(\phi, \lambda) = & \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i(\lambda+r\pi)} \xi_b^r \left\{ G(0) \left[i \left(\frac{\lambda\pi}{2} \right)^{1/2} - \frac{r}{\xi_b} \right] \right. \\
 & \left. + G'(0) - \frac{1}{\lambda} \left[G(0) \frac{r(r-1)(r-2)}{6\xi_b^2} - G'(0) \frac{r(r-1)}{2\xi_b^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{G''(0)}{2} \frac{r}{\xi_b} \right] + O(\lambda^{-2}) \right\}, \quad \lambda \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$(b) \quad \phi - t_p \geq \delta_2 > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

Obecnie punkt $t = \phi$ jest odseparowany od punktu $t = t_p$, ale może leżeć dowolnie blisko lub pokrywać się z punktem $t = t_b$. Wynika stąd, że $b + d \gg 1$ i całkę Fresnela w (3.75) możemy zastąpić jej rozwińnięciem asymptotycznym

$$\begin{aligned}
 \alpha \int_{\omega}^{\infty} e^{i\mu^2} d\mu & \\
 = & -(2\pi)^{1/2} U(-\omega) + e^{i\omega^2} [(\alpha\omega)^{-1} - (\alpha\omega)^{-3} + O(\omega^{-5})], \quad \omega \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

W wyniku tej procedury dostajemy z (3.59) odmienne od poprzedniego rozwińnięcie asymptotyczne funkcji u

$$\begin{aligned}
 u(\phi, \lambda) = & \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{e^{ir\pi/2}}{\lambda^{r/2}} \left\{ \left[d_0 + \frac{d_2}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right] f_r(i\lambda^{1/2}\xi_b) \right. \\
 & \left. + \frac{i}{\lambda^{1/2}} \left[d_1 + \frac{d_3}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right] f_{r+1}(i\lambda^{1/2}\xi_b) \right\} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 d_0 &= \frac{G(\xi_b)}{\xi_b - \xi_p}, \\
 d_1 &= \frac{1}{\xi_b} \left[\frac{G(0)}{\xi_p} + \frac{G(\xi_b)}{\xi_b - \xi_p} \right], \\
 d_2 &= \frac{r+1}{\xi_b(\xi_b - \xi_p)} \left[G'(\xi_b) - G(\xi_b) \frac{2\xi_b - \xi_p}{\xi_b(\xi_b - \xi_p)} - G(0) \frac{\xi_b - \xi_p}{\xi_b \xi_p} \right], \\
 d_3 &= \frac{r+1}{\xi_b^2} \left[\frac{G'(\xi_b)}{\xi_b - \xi_p} - \frac{G'(0)}{\xi_p} - \frac{G(\xi_b)}{\xi_b - \xi_p} \left(\frac{1}{\xi_b - \xi_p} + \frac{2}{\xi_b} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{G(0)}{\xi_p} \frac{2\xi_p + \xi_b}{\xi_b \xi_p} \right] + \frac{1}{\xi_b} \left[\frac{G''(0)}{2\xi_p} + \frac{G'(0)}{\xi_p} \frac{\xi_b + \xi_p}{\xi_b \xi_p} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{G(0)}{\xi_p} \left(\frac{1}{\xi_p^2} + \frac{1}{\xi_b^2} + \frac{1}{\xi_b \xi_p} \right) + \frac{G(\xi_b)}{\xi_b^2(\xi_b - \xi_p)} \right].
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Można pokazać, że (3.80) pozostaje słuszne również wówczas, gdy $\xi_b = 0$.

$$(c) \quad |\phi - t_b| \geq \delta_1 > 0, \quad \text{i} \quad |\phi - t_p| \geq \delta_2 > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

W tym przypadku punkt $t = \phi$ jest odseparowany zarówno od punktu $t = t_p$, jak i od punktu $t = t_b$. W związku z tym wszystkie funkcje specjalne występujące w (3.75) mogą być z pomocą (3.74) i (3.79) zastąpione swymi rozwinięciami asymptotycznymi. Należy przy tym użyć w (3.74) pierwszego albo drugiego rozwinięcia, stosownie do tego czy $\phi - t_b$ jest ujemne, czy też dodatnie. W konsekwencji otrzymujemy najprostsze co do postaci rozwinięcie asymptotyczne funkcji u

$$\begin{aligned}
 u(\phi, \lambda) &= G(\xi_p) 2\pi i e^{i\lambda(1-\xi_p^2/2i)} (\xi_p - \xi_b)^r U(t_p - \phi) \\
 &\quad - G(0) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} e^{i(\lambda+r\pi)} \frac{\xi_b^r}{\xi_p^r} \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\xi_p^2} - \frac{r}{\xi_b \xi_p} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{r(r-1)}{2\xi_b^2} - \frac{G'(0)}{G(0)} \left(\frac{r}{\xi_b} - \frac{1}{\xi_p} \right) + \frac{1}{2} \frac{G''(0)}{G(0)} \right] + O(\lambda^{-2}) \right\} \\
 &\quad + G(\xi_b) \frac{2\pi}{\Gamma(-r)} \frac{e^{i(r+1/2)\pi} \exp[i\lambda(1-\xi_b^2/2i)]}{\lambda^{r+1} \xi_b^{r+1} (\xi_b - \xi_p)} \\
 &\quad \cdot \left\{ 1 - \frac{r+1}{\lambda \xi_b} \left[\frac{1}{\xi_b - \xi_p} + \frac{r+2}{2\xi_b} - \frac{G'(\xi_b)}{G(\xi_b)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + O(\lambda^{-2}) \right\} U(\phi - t_b), \quad \lambda \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Rozwinięcia asymptotyczne (3.77) i (3.80) są słuszne, kiedy punkt siodłowy znajduje się dowolnie blisko jednego z pozostałych dwóch punktów krytycznych, ale

przestają obowiązywać, kiedy punkt ten poruszając się w przedziale swej zmienności pokryje się z drugim punktem krytycznym. Dlatego rozwinięcia tego typu noszą nazwę quasi-jednostajnych lub lokalnie jednostajnych. W odróżnieniu od nich rozwinięcie (3.82) zawodzi, jeśli punkt siodłowy znajduje się blisko którekolwiek z pozostałych punktów krytycznych. Takie rozwinięcie asymptotyczne nazywa się niejednostajnym.

Odnotujmy dwa ważne fakty. Po pierwsze założmy, że naszym celem jest znalezienie jednostajnego rozwinięcia asymptotycznego całki (3.49) przy warunku, że biegun i punkt rozgałęzienia są odseparowane, tzn. $|t_b - t_p| \geq \delta > 0$ i że punkt siodłowy może zbliżać się dowolnie blisko tylko jednego z tych punktów. Wówczas takie rozwinięcie może być konstruowane zgodnie z procedurą przedstawioną na początku tego rozdziału, zakładającą występowanie dwóch bliskich punktów krytycznych.⁵ Łatwo zobaczyć, że tak otrzymane rozwinięcie pokrywa się odpowiednio z rozwinięciem (3.77) albo (3.80).

Po drugie, niejednostajnego rozwinięcia asymptotycznego całki (3.49) można równoważnie poszukiwać w oparciu o klasyczne metody. W tym celu zdeformujmy kontur całkowania \mathcal{L} w (3.52) do drogi najszybszego spadku przechodzącej przez punkt siodłowy $\xi = 0$. Jeśli $t_p > \phi$, wówczas w procesie deformacji konturu przekraczamy jest biegun w $\xi = \xi_p$, a więc konieczne jest uwzględnienie przyczynka od residuum w tym punkcie. Łatwo zobaczyć, że przyczynek ten jest równy członowi w (3.82) proporcjonalnemu do $G(\xi_p)$. Może on być interpretowany fizycznie jako opisujący falę płaską rozchodzącą się w sektorze kątowym $0 < \phi < t_p$, w kierunku $\phi = t_p$. Z kolei stosując metodę punktu siodłowego do całki branej wzdłuż drogi najszybszego spadku otrzymujemy przyczynek, który jest identyczny z członem w (3.82) proporcjonalnym do $G(0)$. Przyczynek ten opisuje anizotropową falę cylindryczną, generowaną w $\lambda = 0$. Wreszcie jeśli $\phi > t_b$, uwzględniony musi być także przyczynek pochodzący od całki wziętej wzdłuż konturu otaczającego cięcie wychodzące z $\xi = \xi_b$. Ten przyczynek jest równy członowi w (3.82) proporcjonalnemu do $G(\xi_b)$ i może być interpretowany jako opisujący falę boczną rozchodzącą się w sektorze $t_b < \phi < \pi$, w kierunku $\phi = t_b$.

Na zakończenie zauważmy, że na mocy (3.61) i (3.70) całki kanoniczne występujące w (3.59) zależą od dwóch parametrów rzeczywistych: $(\lambda/2)^{1/2} e^{-i\pi/4} \xi_p$ i $(\lambda/2)^{1/2} e^{-i\pi/4} \xi_b$. Wielkości te łatwo rozpoznać jako parametry obejścia $\lambda^{1/2}[1 - \cos(t_p - \phi)]^{1/2} \text{sgn}(\phi - t_p)$ i $\lambda^{1/2}[1 - \cos(t_b - \phi)]^{1/2} \text{sgn}(\phi - t_b)$, stowarzyszone odpowiednio z falą płaską i falą boczną. Każdy z tych parametrów przyjmuje wartość równą zeru na granicy cienia odpowiadającej mu fali. Dlatego rozwinięcie (3.59) jest przydatne do analizy zjawisk falowych, gdy granice cienia fali płaskiej i fali bocznej są w sensie kątowym wzajemnie bliskie.

⁵W przypadku gdy odseparowanym od punktu siodłowego jest punkt rozgałęzienia, rozwinięcie asymptotyczne całki może być równoważnie znalezione metodą van der Waerdena [54].

3.3 Podsumowanie

Przy użyciu metody Bleisteina zostały znalezione jednostajne rozwinięcia asymptotyczne całek dyfrakcyjnych (3.1) i (3.49) z dwoma i z trzema punktami krytycznymi. Rozwinięcia te są opisane odpowiednio przez (3.7), (3.35) i (3.39) w przypadku całki z punktem siodłowym i punktem osobliwym funkcji podcałkowej oraz (3.59), (3.64) - (3.67), (3.70) w przypadku całki z punktem siodłowym i dwoma punktami osobliwymi funkcji podcałkowej.

Rozwinięcia te są zdefiniowane przy pomocy funkcji Webera, których argumentami są parametry obejścia. Pozostają one słuszne niezależnie od tego, czy wymienione punkty krytyczne są od siebie oddalone, czy też mogą znajdować się względem siebie dowolnie blisko. Jeśli nałożymy ograniczenia na możliwość zbliżania się niektórych lub wszystkich punktów krytycznych, wówczas rozwinięcia jednostajne redukują się do prostszych rozwinięć quasi-jednostajnych (3.77) i (3.80) dla drugiej całki oraz niejednostajnych (3.41) - (3.44) dla pierwszej i (3.82) dla drugiej całki. Rozwinięcie niejednostajne można równoważnie uzyskać stosując klasyczne metody analizy asymptotycznej całek. Dokonano interpretacji fizycznej otrzymanych rozwinięć niejednostajnych, korzystając ze związku między występującymi pod całką punktami krytycznymi, a kątami określającymi położenie granic cienia fal i współrzędną kątową punktu obserwacji.

Szersze ujęcie przedstawionej w tym rozdziale analizy całki z trzema punktami krytycznymi, m.in. obejmujące różne konfiguracje tych punktów względem konturu całkowania, można znaleźć w [52].

4 Niejednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie

Wychodząc od otrzymanego w Rozdziale 2 rozwiązania ścisłego (2.57) - (2.66) zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie znajdziemy teraz jego wysokoczęstotliwościowe rozwinięcie asymptotyczne. W tym celu rozwiązanie ściśle przedstawimy w postaci bardziej dogodnej do analizy asymptotycznej.

Zamieńmy współrzędne kartezjańskie x, y, z na współrzędne cylindryczne ρ, ϕ, z , zgodnie z

$$\rho \cos \phi = x, \quad \rho \sin \phi = y, \quad z = z \quad (4.1)$$

oraz zmienną całkowania w w (2.63) i (2.64) na zmienną t

$$w = -\kappa_g \cos t, \quad v_g = (\kappa_g^2 - w^2)^{1/2} = \eta_g \kappa_g \sin t. \quad (4.2)$$

W wyniku tej zamiany płaszczyzna zmiennej zespolonej w przechodzi w pas $-\pi < \operatorname{Re} t < 0$ gdy $y < 0$ albo w pas $0 < \operatorname{Re} t < \pi$ gdy $y > 0$. W nowej zmiennej funkcja v_g jest analityczna we właściwym pasie, przy czym zachowany jest warunek $\operatorname{Re} v_g > 0$. Funkcję tę można zapisać w postaci

$$v_g = v_g^- v_g^+, \quad (4.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} v_g^- &= (\kappa_g - w)^{1/2} = (2\kappa_g)^{1/2} \cos \frac{t}{2}, \\ v_g^+ &= (\kappa_g + w)^{1/2} = \eta_g (2\kappa_g)^{1/2} \sin \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

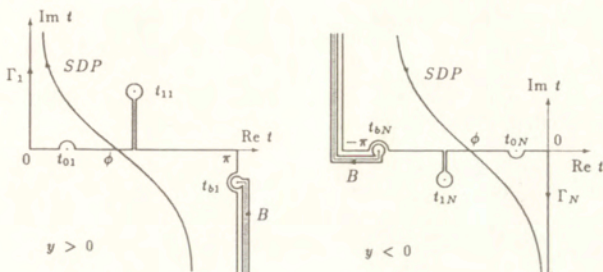
Punkty $w = w_0, w = w_1 = i\Gamma$ i $w = w_2 = -i\Gamma$ przechodzą w punkty $t = t_{jg}$, $j = 0, 1, 2$, zgodnie z

$$t_{0g} = \eta_g \arccos(-w_0/\kappa_g), \quad t_{1g} = \eta_g[\pi/2 + i \operatorname{arsh}(\Gamma/\kappa_g)], \quad t_{2g} = t_{1g}^*, \quad (4.5)$$

przy czym $*$ oznacza zespoloną wielkość sprzężoną, a $\bar{g} = 1(N)$ gdy $g = N(1)$. W rozważaniach asymptotycznych istotny będzie również punkt rozgałęzienia w $t = t_{bg}$, zdefiniowany poprzez równość

$$\kappa_g \cos t_{bg} = -\kappa_{\bar{g}}, \quad \kappa_g \sin t_{bg} = -(\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)^{1/2}. \quad (4.6)$$

Jest on obrazem punktu $w = \kappa_{\bar{g}}$ leżącego na płacie Riemanna $\operatorname{Re} v_g > 0$ w przypadku $g = N$ i na płacie Riemanna $\operatorname{Re} v_g < 0$ w przypadku $g = 1$. Kontur całkowania C odwzorowuje się w kontur różniący się od konturu Γ_g przedstawionego na Rys.7 kierunkiem obiegu na przeciwny.



Rysunek 7: Kontury Γ_1 i Γ_N na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w

Po zamianie zmiennych elektromagnetyczne pole wtórne przyjmuje następującą postać

$$E_m^s = -\frac{k_g Z_g}{2} \sum_{j=0}^2 p_j \int_{\Gamma_g} \left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{jz}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{t+t_{jz}}{2}} \right) \frac{P_g[w(t)]}{P_g[w(t_{jg})]} \cdot \{\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}_g(t)\} e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt, \quad (4.7)$$

$$H_m^s = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^2 p_j \int_{\Gamma_g} \left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{jz}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{t+t_{jz}}{2}} \right) \frac{P_g[w(t)]}{P_g[w(t_{jg})]} \cdot \{\mathbf{b}_g(t) \times [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}_g(t)]\} e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt, \quad (4.8)$$

$$E_c^s = -\frac{\eta_g}{2k_g^2} \sum_{j=0}^2 \frac{q_j^g}{v_g(w_j)} \int_{\Gamma_g} \left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{jz}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{t+t_{jz}}{2}} \right) \frac{M_g[w(t)]}{M_g[w(t_{jg})]} \cdot \{\mathbf{b}_g(t) \times [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}_g(t)]\} e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt, \quad (4.9)$$

$$H_c^s = \frac{\eta_g}{2k_g Z_g} \sum_{j=0}^2 \frac{q_j^g}{v_g(w_j)} \int_{\Gamma_g} \left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{jz}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{t+t_{jz}}{2}} \right) \frac{M_g[w(t)]}{M_g[w(t_{jg})]} \cdot [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}_g(t)] e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt. \quad (4.10)$$

W powyższych wzorach

$$\mathbf{b}_g(t) = \mathbf{a}_g[w(t)] = [\kappa_g \cos t, \kappa_g \sin t, \Gamma] \quad (4.11)$$

oraz

$$P_g(w) = 2^{1/2} v_g^-(w) F_-(w), \quad M_g(w) = \frac{2^{1/2}}{v_g^-(w)} G_-(w). \quad (4.12)$$

Odnajmy, że w przypadku jednakowych ośrodków $P_g(w) = 1$ i $M_g(w) = 1$.

Przejdźmy teraz do rozważań asymptotycznych. W rozpatrywanym przypadku punktami krytycznymi całek w (4.7) - (4.10) są: biegun w $t = t_{0g}$, związany z funkcjami $P_g[w(t)]$ i $M_g[w(t)]$ punkt rozgałęzienia w $t = t_{bg}$ i punkt siodłowy w $t = \phi$. Przyczynki od biegunów w $t = t_{1g}$ i w $t = t_{2g}$ znoszą się w sumarycznym polu rozproszonym, bowiem dla $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} k_g Z_g p_j \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}(t_{jg}) + \frac{\eta_g q_g^j}{k_g^3} \mathbf{b}(t_{jg}) \times [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}(t_{jg})] &= 0 \\ p_j \mathbf{b}(t_{jg}) \times [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}(t_{jg})] - \frac{\eta_g q_g^j}{k_g^2 Z_g} \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}(t_{jg}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dlatego wpływu tych biegunów na cząstkowe rozwinięcia asymptotyczne można nie uwzględniać. Również do pominięcia w tych rozważaniach są leżące na sąsiednich pasach bieguny w $t = -t_{jg}$, $j = 0, 1, 2$.

Jedną z metod otrzymania niejednostajnego rozwiązania asymptotycznego dla pola wtórnego sprowadza się do: (a) zdeformowania konturu Γ_g do konturu najszybszego spadku przechodzącego przez punkt siodłowy $t = \phi$, a także zamkniętego konturu otaczającego biegun i konturu otaczającego cięcie wychodzące z punktu rozgałęzienia, o ile te punkty zostały przechwycone w wyniku deformacji Γ_g , (b) asymptotycznego oszacowania całek wziętych wzdłuż tych trzech konturów. Równoważnie rozwinięcia tego możemy poszukiwać korzystając z rozwinięć niejednostajnych otrzymanych w Rozdziale 3. Zastosujemy to drugie podejście jako szybciej prowadzące do wyniku. W odróżnieniu od rozwiązania ścisłego w którym wyodrębnione są pola pierwotne i wtórne, w przypadku rozwiązania asymptotycznego naturalnym podziałem pola całkowitego jest podział ze względu na występujące w zagadnieniu fale. Poszczególne punkty krytyczne w całkach (4.7) - (4.10) prowadzą do różnych rodzajów fal. Poniżej rozpatrzmy kolejno przyczynki do pola całkowitego pochodzące od bieguna, punktu siodłowego i punktu rozgałęzienia.

Fale opisywane przez optykę geometryczną

Wyznamy residua całek (4.7) - (4.10) w $t = t_{0g}$ i dodajmy je do pola pierwotnego, zdefiniowanego w (2.59) - (2.60). Po uwzględnieniu

$$\mathbf{b}_g(t_{0g}) = [\kappa_g \cos t_{0g}, \kappa_g \sin t_{0g}, \Gamma] = k_g \nabla S_g^\beta, \quad \beta = \begin{cases} r, & g = 1, \\ t, & g = N, \end{cases} \quad (4.14)$$

oraz

$$\begin{aligned} k_1 S^r(t_{01}) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_1(t_{01}) = \kappa_1 \rho \cos(t_{01} - \phi) + \Gamma z, \\ k_N S^t(t_{0N}) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_N(t_{0N}) = \kappa_N \rho \cos(t_{0N} - \phi) + \Gamma z, \end{aligned} \quad (4.15)$$

i skorzystaniu z definicji współczynników p_0 i q_0^2 dostajemy rozwiązanie rozważanego zagadnienia właściwe dla optyki geometrycznej

$$E_m^{GO} = a_m \begin{cases} k_1^2 Z_1 (e^{ik_1 S^i} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i + \mathcal{R}_m e^{ik_1 S^r} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ k_N^2 Z_N \mathcal{T}_m e^{ik_1 S^t} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t, & y < 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$H_m^{GO} = a_m \begin{cases} k_1^2 [e^{ik_1 S^i} \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i) + \mathcal{R}_m e^{ik_1 S^r} \nabla S^r \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r)], & y > 0, \\ k_N^2 \mathcal{T}_m e^{ik_1 S^t} \nabla S^t \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t), & y < 0, \end{cases}$$

i

$$E_e^{GO} = a_e \begin{cases} e^{ik_1 S^i} \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i) + \mathcal{R}_e e^{ik_1 S^r} \nabla S^r \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ \mathcal{T}_e e^{ik_1 S^t} \nabla S^t \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t), & y < 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$H_e^{GO} = -a_e \begin{cases} Y_1 (e^{ik_1 S^i} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i + \mathcal{R}_e e^{ik_1 S^r} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ Y_N \mathcal{T}_e e^{ik_1 S^t} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t, & y < 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\mathcal{R}_m = \begin{cases} -1, & \phi < t_{01}, \\ R_m, & \phi > t_{01}, \end{cases} \quad \mathcal{R}_e = \begin{cases} 1, & \phi < t_{01}, \\ R_e, & \phi > t_{01}, \end{cases} \quad \mathcal{T}_{e,m} = \begin{cases} 0, & \phi > t_{0N}, \\ T_{e,m}, & \phi < t_{0N}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Rozwiązanie to przedstawia w ośrodku rzadszym optycznie trzy fale: falę padającą, falę odbitą od półpłaszczyzny przewodzącej i falę odbitą od granicy ośrodków. W ośrodku gęstszym optycznie opisuje ono falę załamaną. Na granicach cienia fal odbitych i fali załamanej rozwiązanie jest skokowo nieciągłe.

Strukturę promieniową tych i pozostałych fal występujących w problemie zbadamy dokładniej w następnych rozdziałach. Tu odnotujemy jedynie, że każda z fal optyki geometrycznej opisana jest na rodzinie promieni wzajemnie równoległych, skierowanych zgodnie z wektorem $\mathbf{b}_g(t_{0g})$.

Fale dyfrakcyjne

Wyznamy teraz przyczynek do pola całkowitego pochodzący od punktu siodłowego. Wychodząc od (4.7) - (4.10) i korzystając z (3.44) dostajemy dla pola typu TE

$$E_m^{sp} \sim Z_g \frac{e^{ik_g S_g^d}}{(k_g \sigma)^{1/2}} D_m^d(\phi, t_{jg}),$$

$$H_m^{sp} \sim \frac{e^{ik_g S_g^d}}{(k_g \sigma)^{1/2}} \nabla S_g^d \times D_m^d(\phi, t_{jg}) \quad (4.19)$$

oraz dla pola typu TM

$$E_e^{sp} \sim \frac{e^{ik_g S_g^d}}{(k_g \sigma)^{1/2}} D_e^d(\phi, t_{jg}),$$

$$H_e^{sp} \sim Z_g^{-1} \frac{e^{ik_g S_g^d}}{(k_g \sigma)^{1/2}} \nabla S_g^d \times D_e^d(\phi, t_{jg}).$$
(4.20)

W powyższych wzorach

$$k_g S_g^d = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_g(\phi) = \kappa_g(x \cos \phi + y \sin \phi) + \Gamma z$$

$$= \kappa_g \rho + \Gamma z = k_g(\rho \sin \beta_g + z \cos \beta_g),$$

$$\sigma = \frac{\rho}{\sin \beta_g},$$
(4.21)

gdzie kąt β_g zdefiniowany jest przez

$$\Gamma = k_g \cos \beta_g, \quad \kappa_g = k_g \sin \beta_g,$$
(4.22)

a współczynniki dyfrakcji są równe

$$D_m^d(\phi, t_{jg}) = \eta_g \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sin \beta_g} \sum_{j=0}^2 k_g^2 p_j \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - t_{jg}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\phi + t_{jg}}{2}} \right)$$

$$\cdot \frac{P_g[w(\phi)]}{P_g(w_j)} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^d$$
(4.23)

i

$$D_e^d(\phi, t_{jg}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sin \beta_g} \sum_{j=0}^2 \frac{q_j^g}{v_g(w_j)} \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - t_{jg}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\phi + t_{jg}}{2}} \right)$$

$$\cdot \frac{M_g[w(\phi)]}{M_g(w_j)} [\nabla S_g^d \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^d)].$$
(4.24)

Przy znajdowaniu rozwinięcia skorzystano z faktu, że

$$\mathbf{b}_g(\phi) = k_g \nabla S_g^d.$$

Ponieważ $p_j = O(k_g^{-2})$ i $q_j^g = O(k_g)$, więc $D_h^d = O(1)$, $h = e, m$, gdy $k_g \rightarrow \infty$.

Wzory (4.19) i (4.20) opisują fale dyfrakcyjne rozchodzące się od krawędzi półpłaszczyzny w obu ośrodkach. Fale te mają strukturę fal cylindrycznych z charakterystykami kątowymi określonymi przez współczynniki dyfrakcji D_m^d i D_e^d i zachowują się jak $k_g^{-1/2}$ gdy $k_g \rightarrow \infty$. Zauważmy, że fale dyfrakcyjne stają się nieskończone na krawędzi półpłaszczyzny, a także na granicach cienia fal odbitych w ośrodku rzadszym optycznie i na granicy cienia fali załamanej w ośrodku gęstszym optycznie. W tym drugim przypadku jest to wynikiem zerowania się argumentu funkcji \sin w (4.23) i (4.24), w składniku odpowiadającym $j = 0$ na

odpowiedniej granicy cienia. Na wspomnianych granicach eikonaly fal optyki geometrycznej i fal dyfrakcyjnych są identyczne. W obrazie promieniowym pola promienie dyfrakcyjne wybiegające z każdego punktu na krawędzi półplaszczyny tworzą powierzchnie stożkowe z wierzchołkiem w tym punkcie i kątem rozwarcia równym $2\beta_g$ (geometria promieni jest niezależna od j). Promienie skierowane są zgodnie z $\mathbf{b}_g(\phi)$. Wybór promienia na tej powierzchni dokonuje się przez zadanie konkretnej wartości kąta ϕ .

Fale boczne

Obecnie znajdziemy przyczynkę do pola całkowitego związany z punktem rozgałęzienia. Korzystając z definicji funkcji $P_g(w)$ i $M_g(w)$ (4.12) oraz z (2.39) i (2.41) funkcje te możemy zapisać w postaci

$$P_g(w) = \frac{2^{1/2} v_g^- v_g - v_g}{F_+(w) v_g^2 - v_g^2}, \quad M_g(w) = \frac{2^{1/2}}{v_g^- G_+(w)} \frac{\bar{g} v_g v_g^2 - g v_g v_g^2}{(\bar{g} v_g)^2 - (g v_g)^2}. \quad (4.25)$$

Na mocy (4.2) i (4.4) funkcje v_g^- i v_g są regularnymi funkcjami zmiennej t w otoczeniu punktu $t = t_{bg}$. Regularną w pewnym otoczeniu tego punktu jest również funkcja $F_+(w)$ i zgodnie z (4.6), funkcja

$$\frac{v_g}{(t - t_{bg})^{1/2}} = \kappa_g \left(\frac{\cos^2 t_{bg} - \cos^2 t}{t - t_{bg}} \right)^{1/2} = \kappa_g [\sin 2t_{bg} + O(t - t_{bg})]. \quad (4.26)$$

Można zatem przedstawić tam funkcję $P_g(w)$ w postaci

$$P_g(w) = P_{g0}(w) + (t - t_{bg})^{1/2} P_{g1}(w), \quad (4.27)$$

gdzie

$$P_{g0}(w) = \frac{2^{1/2} v_g^-}{v_g^2 - v_g^2} \frac{1}{F_+} v_g, \quad P_{g1}(w) = -\frac{2^{1/2} v_g^-}{v_g^2 - v_g^2} \frac{1}{F_+} \frac{v_g}{(t - t_{bg})^{1/2}} \quad (4.28)$$

są tam funkcjami regularnymi. W podobny sposób wyrażmy w otoczeniu $t = t_{bg}$ funkcję $M_g(w)$

$$M_g(w) = M_{g0}(w) + (t - t_{bg})^{1/2} M_{g1}(w), \quad (4.29)$$

gdzie

$$M_{g0}(w) = \frac{2^{1/2}}{v_g^-} \frac{(g v_g)^2 v_g}{(g^2 v_g^2)^2 - (\bar{g}^2 v_g)^2} \frac{1}{G_+}, \quad (4.30)$$

$$M_{g1}(w) = -\frac{2^{1/2}}{v_g^-} \frac{(\bar{g} v_g)^2}{(g^2 v_g^2)^2 - (\bar{g}^2 v_g)^2} \frac{1}{G_+} \frac{v_g}{(t - t_{bg})^{1/2}}.$$

Zastąpmy teraz funkcje $P_g[w(t)]$ i $M_g[w(t)]$ występujące w (4.7) - (4.10) odpowiednio przez $(t - t_{bg})^{1/2} P_{g1}[w(t)]$ i $(t - t_{bg})^{1/2} M_{g1}[w(t)]$, a następnie skorzystajmy

z (3.43). W wyniku stwierdzamy, że przyczynki do pola całkowitego odpowiadające drugiemu członowi w (3.43) (pierwszy człon został już uwzględniony w (4.19) i (4.20)) wynoszą dla pola typu TE

$$\begin{aligned} E_m^{sb} &\sim Z_g \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2}} H_m^b(\phi, t_{bg}) U(\chi_g), \\ H_m^{sb} &\sim \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2}} \nabla S_g^b \times H_m^b(\phi, t_{bg}) U(\chi_g) \end{aligned} \quad (4.31)$$

i dla pola typu TM

$$\begin{aligned} E_e^{sb} &\sim \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2}} H_e^b(\phi, t_{bg}) U(\chi_g), \\ H_e^{sb} &\sim Z_g^{-1} \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2}} \nabla S_g^b \times H_e^b(\phi, t_{bg}) U(\chi_g). \end{aligned} \quad (4.32)$$

We wzorach tych

$$\begin{aligned} k_g S_g^b &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_g(t_{bg}) = \kappa_g (x \cos t_{bg} + y \sin t_{bg}) + \Gamma z \\ &= k_g [\rho \cos(t_{bg} - \phi) \sin \beta_g + z \cos \beta_g], \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\chi_g = \begin{cases} \phi - \pi + \epsilon, & g = 1, \\ t_{bN} - \phi, & g = N \end{cases} \quad \epsilon > 0, \quad (4.34)$$

i $U(\cdot)$ jest skokową funkcją Heavisidea. Skorzystaliśmy także z

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_g(t_{bg}) &= [\kappa_g \cos t_{bg}, \kappa_g \sin t_{bg}, \Gamma] = \\ &[-\kappa_g, -(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)^{1/2}, \Gamma] = k_g \nabla S_g^b. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Wzory (4.31) - (4.34) opisują fale boczne ze współczynnikami dyfrakcji $H_h^b(\phi, t_{bg})$, $h = e, m$, równymi

$$\begin{aligned} H_m^b(\phi, t_{bg}) &= \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{[\rho \sin \beta_g \sin(t_{bg} - \phi)]^{3/2}} \\ &\cdot \sum_{j=0}^2 k_g^2 P_j \left(\frac{1}{\sin \frac{t_{bg} - t_{j2}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{t_{bg} + t_{j2}}{2}} \right) \frac{P_{g1}(\kappa_g)}{P_g(w_j)} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^b \end{aligned} \quad (4.36)$$

i

$$\begin{aligned} H_m^b(\phi, t_{bg}) &= \eta_g \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{[\rho \sin \beta_g \sin(t_{bg} - \phi)]^{3/2}} \\ &\cdot \sum_{j=0}^2 \frac{q_j^g}{v_g(w_j)} \left(\frac{1}{\sin \frac{t_{bg} - t_{j2}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{t_{bg} + t_{j2}}{2}} \right) \frac{M_{g1}(\kappa_g)}{M_g(w_j)} \nabla S_g^b \times [\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^b]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Fale te maleją wraz z $k_g \rightarrow \infty$ jak $k_g^{-3/2}$.

Podkreślmy, że pomimo symetrii wzorów dla $g = 1$ i $g = N$, struktura fizyczna fal bocznych rozchodzących się w obu ośrodkach jest zasadniczo różna. Jak wynika z definicji t_{bg} , (4.33) i (4.34), fala boczna w ośrodku gęstszym optycznie rozchodzi się w kierunku $\phi = t_{bN}$, $-\pi < t_{bN} < -\pi/2$, wewnątrz sektora $-\pi < \phi < t_{bN}$. Z drugiej strony, na mocy (4.33) i $(\kappa_1^2 - \kappa_N^2)^{1/2} = -i(\kappa_N^2 - \kappa_1^2)^{1/2}$, fala boczna w ośrodku rzadszym optycznie rozchodzi się w kierunku malejących x i wykładniczo zanika ze wzrostem y . Dlatego fala ta jest do zaniebdania poza dowolnie małym otoczeniem granicy ośrodków (por. (4.34)). Odnotujmy, że także i tutaj rozwinięcie asymptotyczne fali bocznej staje się nieograniczone na granicy cienia tej fali i na krawędzi półpłaszczyzny. W interpretacji promieniowej promienie fali bocznej w ośrodku gęstszym optycznie tworzą rodzinę promieni równoległych, podobnie jak w przypadku fali płaskiej. Dlatego mimo tego fala ta zanika z odległością od krawędzi jak $\rho^{-3/2}$, jak również jaki jest związek między obecnością fal bocznych i spełnieniem warunku ciągłości pola na granicy ośrodków zostanie wyjaśnione w następnym rozdziale.

4.1 Podsumowanie

W tym rozdziale skonstruowano rozwinięcie asymptotyczne rozwiązania zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie, obowiązujące dla dużych wartości $\kappa_g \rho$. W konstrukcji wykorzystano wyniki analizy asymptotycznej całek konturowych, przeprowadzonej w poprzednim rozdziale. W szczególności sumując przyczynki od biegunów w funkcjach podcałkowych występujących w reprezentacji (4.7) - (4.10) pola wtórnego z polem pierwotnym znaleziono pole optyki geometrycznej (4.16) - (4.18). Pole to zawiera falę padającą i dwie fale odbite — od półpłaszczyzny i od apertury — w jednym ośrodku oraz falę załamaną w drugim ośrodku. Z kolei uwzględniając przyczynki do asymptotyki całek pochodzące od punktu siodłowego otrzymano wyrażenia asymptotyczne dla fal dyfrakcyjnych (4.19) i (4.20), propagujących się w obu ośrodkach. Fale te są falami cylindrycznymi, których charakterystyki kątowe — współczynniki dyfrakcji są opisane przez (4.23) i (4.24). Znaleziono również przyczynki do asymptotyki całek pochodzący od trzeciego rodzaju punktu krytycznego — punktu rozgałęzienia. Przyczynki ten związany jest z falami bocznymi, (4.31) i (4.32). Współczynniki dyfrakcji tych fal są określone przez (4.36) i (4.37). Zachowanie fal bocznych w ośrodku rzadszym i gęstszym optycznie jest zasadniczo różne.

Fale optyki geometrycznej doznają nieciągłości skokowej na swych granicach cienia, a fale dyfrakcyjne stają się tam nieograniczone. Nieograniczona jest również fala boczna na swej granicy cienia w ośrodku gęstszym optycznie. Z tych względów otrzymane rozwiązanie asymptotyczne zawodzi na granicach cienia występujących w problemie fal. Dlatego nazwaliśmy je rozwiązaniem niejednostajnym.

5 Związki między falami dyfrakcyjnymi i bocznymi w zagadnieniu dyfrakcji na półpłaszczyźnie

W tym rozdziale rozważymy relacje zachodzące między występującymi w rozpatrywanym problemie falami dyfrakcyjnymi i bocznymi (zob. także [55]). Jak pokażemy, relacje te są ściśle związane z warunkiem ciągłości pól w aperturze $y = 0$, $x < 0$.

Weźmy najpierw pod uwagę pole opisywane w ((4.16) - (4.18) przez optykę geometryczną. Dla punktu obserwacji znajdującego się dostatecznie blisko apertury pole to ma strukturę pola pierwotnego, a zatem jego składowe styczne do granicy ośrodków są ciągłe.

Przechodzimy teraz do pola wtórnego i dokonamy bardziej szczegółowej analizy zachowania się fal dyfrakcyjnych i bocznych w otoczeniu apertury. Fale te wyrazimy w postaci nieco odmiennie niż w poprzednim rozdziale.

W wyniku zamiany zmiennych wprowadzonej na początku poprzedniego rozdziału funkcje s_{hj}^* , $h = e, m$, $j = 0, 1, 2$, określone w (2.37), (2.38) i (2.45), przyjmują postać

$$s_{hj}^* = \int_{P_g} g_{hgj}(t) \exp[i\kappa_g \rho \cos(t - \phi)] dt, \quad (5.1)$$

gdzie

$$g_{mgj} = -\eta_g \frac{p_j(\kappa_g - w_j)^{1/2} (\kappa_g + w)^{1/2} P_g(w)}{P_g(w_j) w - w_j}, \quad (5.2)$$

$$g_{egj} = -\frac{q_j g^2}{(\kappa_g - w_j)^{1/2} M_g(w_j)} \frac{(\kappa_g - w)^{1/2} M_g(w)}{w - w_j}, \quad (5.3)$$

i gdzie $w = w(t)$ jest zdefiniowane w (4.2).

Tak jak w poprzednim rozdziale, rozwinięcie asymptotyczne fali dyfrakcyjnej odpowiadającej funkcji s_{mj}^* można uzyskać zastępując $g(t)$ w (2.32) przez $g_{mgj}(t)$ i λ przez $\kappa_g \rho$. Korzystając z (4.12) łatwo zauważyć, że główny wyraz rozwinięcia, będący rzędu $(\kappa_g \rho)^{-1/2}$, w otoczeniu apertury zachowuje się jak $\sin \phi$ i w samej aperturze znika. W konsekwencji pierwszy znaczący człon w aperturze jest rzędu $(\kappa_g \rho)^{-3/2}$ i jest proporcjonalny do drugiej pochodnej g_{mgj} . Korzystając z (A.7) i (A.9) oraz z $dw/dt = \eta_g(\kappa_g^2 - w^2)^{1/2}$ i $d^2w/dt^2 = -w$ można zobaczyć, że w otoczeniu apertury ta pochodna jest równa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_{mgj}}{d\phi^2} &= -\eta_g \frac{p_j(\kappa_g - w_j)^{1/2}}{P_g(w_j)} \left(\frac{\kappa_g + w}{\kappa_g - w} \right)^{1/2} \frac{1}{w - w_j} \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{2(\kappa_g - w)^{1/2}} \left(w - \frac{\kappa_g + w}{2} \right) - \left[\frac{\kappa_g}{2(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} \left(w + \frac{\kappa_g + w}{2} \right) + \right. \\ &\left. O[(\kappa_g - w)^{1/2}] \right\} P_g(w). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Powyższy wzór jest dogodny do naszych rozważań, ponieważ zgodnie z (4.2), gdy ϕ dąży do π albo do $-\pi$, wówczas $w(\phi)$ dąży odpowiednio do κ_1 albo do κ_N . Podstawiając (5.4) do (2.32) i przechodząc z wynikiem do granicy gdy $|\phi| \rightarrow \pi$ dostajemy

$$s_{mj}^a \Big|_{\substack{SDP \\ |\phi|=\pi}} = \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)}}{\rho^{3/2}} \frac{p_j}{P_g(w_j)} \left[\frac{2\pi \kappa_g}{(\kappa_g - w_j)(\kappa_{\bar{g}} - \kappa_g)(\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} \cdot P_{\bar{g}}(\kappa_g) \{1 + O[(\kappa_g \rho)^{-1}]\}. \quad (5.5)$$

Przejdźmy teraz do funkcji s_{ej}^a i stosując podobną procedurę jak poprzednio podstawmy na miejsce $g(t)$ w (3.44) funkcję g_{egj} . Łatwo zauważyć, że pierwszy wyraz rozwinięcia asymptotycznego funkcji s_{ej}^a także znika w aperturze, zachowując się tym razem w jej otoczeniu jak $\cos(\phi/2)$. W celu znalezienia drugiego wyrazu korzystamy z (A.14) i (A.15) i w wyniku stwierdzamy, że druga pochodna $g_{egj}(t)$ wynosi

$$\frac{d^2 g_{egj}}{d\phi^2} = -\frac{q_j}{(\kappa_g - w_j)^{1/2} M_g(w_j)} \frac{1}{w - w_j} \cdot \left\{ \frac{g^2}{2(\kappa_g - w)^{1/2}} \left(w - \frac{\kappa_g + w}{2} \right) - \bar{g}^2 \left[\frac{\kappa_g}{2(\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} \left(w + \frac{\kappa_g + w}{2} \right) + O[(\kappa_g - w)^{1/2}] \right\} M_g(w). \quad (5.6)$$

Podstawienie (5.6) do (3.44), a następnie przejście graniczne $|\phi| \rightarrow \pi$ prowadzi do

$$s_{ej}^a \Big|_{\substack{SDP \\ |\phi|=\pi}} = \eta_g \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)}}{\rho^{3/2}} \frac{q_j \bar{g}^2}{(\kappa_g - w_j)^{3/2} M_g(w_j)} \left(\frac{\pi}{\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2} \right)^{1/2} \cdot M_g(\kappa_g) \{1 + O[(\kappa_g \rho)^{-1}]\}. \quad (5.7)$$

Znajomość granicznych wartości s_{hj}^a pozwala znaleźć składowe x -owe pola elektrycznego typu TE i pola magnetycznego typu TM w aperturze. Wyznaczenie wszystkich składowych pól dyfrakcyjnych wymaga rozwijania asymptotycznego pochodnych funkcji s_{hj}^a występujących w (2.18). Zauważmy jednak, że każda składowa pola wtórnego wyraża się poprzez całkę postaci (5.1), ze stosownie zmodyfikowaną funkcją amplitudy. Modyfikacja sprowadza się do pomnożenia $g_{hgj}(t)$ przez funkcję całkowitą, wynikającą z różniczkowania pod znakiem całki względem odpowiedniej współrzędnej. W rezultacie odpowiednich rachunków dostajemy z dokładnością do pierwszego wyrazu rozwinięcia asymptotycznego

$$E_{m_{gj}}^s \Big|_{\substack{SDP \\ |\phi|=\pi}} = \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)} P_{\bar{g}}(\kappa_g)}{\rho^{3/2} P_g(w_j)} \left[\frac{2\pi \kappa_g}{(\kappa_g - w_j)(\kappa_{\bar{g}} - \kappa_g)(\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} e^{i\Gamma z} \\ \cdot k_g Z_g P_j[\Gamma, 0, \kappa_g], \quad (5.8)$$

$$H_{m_{gj}}^s \Big|_{\substack{SDP \\ |\phi|=\pi}} = \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)} P_{\bar{g}}(\kappa_g)}{\rho^{3/2} P_g(w_j)} \left[\frac{2\pi \kappa_g}{(\kappa_g - w_j)(\kappa_{\bar{g}} - \kappa_g)(\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} e^{i\Gamma z} \\ \cdot P_j[\eta_{\bar{g}} \kappa_g (\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)^{1/2}, k_g^2, \eta_g \Gamma (\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)^{1/2}], \quad (5.9)$$

i

$$E_{e_{gj}}^s \Big|_{\substack{SDP \\ |\phi|=\pi}} = \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)} M_g(\kappa_g)}{\rho^{3/2} M_g(w_j)} \frac{1}{(\kappa_g - w_j)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2} \right)^{1/2} e^{i\Gamma z} \\ \cdot \frac{q_{\bar{g}} \bar{g}^2}{k_{\bar{g}}^2} [-\kappa_g (\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)^{1/2}, \eta_g k_{\bar{g}}^2, \Gamma (\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2)^{1/2}], \quad (5.10)$$

$$H_{e_{gj}}^s \Big|_{\substack{SDP \\ |\phi|=\pi}} = - \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)} M_g(\kappa_g)}{\rho^{3/2} M_g(w_j)} \frac{1}{(\kappa_g - w_j)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{\kappa_{\bar{g}}^2 - \kappa_g^2} \right)^{1/2} e^{i\Gamma z} \\ \cdot \frac{q_{\bar{g}} \bar{g}^2 \eta_{\bar{g}}}{k_{\bar{g}} Z_g} [\Gamma, 0, \kappa_g]. \quad (5.11)$$

Oczywiście wartości graniczne fal dyfrakcyjnych rozchodzących się w obu ośrodkach są różne gdy $|\phi| \rightarrow \pi$. Wynika stąd, że fale dyfrakcyjne obu polaryzacji są nieciągłe na granicy ośrodków. Dlatego naturalnym jest oczekiwanie, że spełnienie warunku ciągłości w aperturze wymaga równoczesnego rozpatrzenia fal dyfrakcyjnych i fal bocznych.

W tym celu, podobnie jak w poprzednim rozdziale, dokonujemy w otoczeniu punktu rozgałęzienia t_{bg} rozbicia amplitudy w (5.1) na sumę

$$g_{hgj}(t) = g_{hgj0}(t) + (t - t_{bg})^{1/2} g_{hgj1}(t), \quad (5.12)$$

gdzie $g_{hgj0}(t)$ i $g_{hgj1}(t)$ są analityczne w tym otoczeniu. Do znajomości pierwszego wyrazu rozwinięcia asymptotycznego fali bocznej wystarczy znajomość $g_{hgj1}(t_{bg})$. Z (5.12) wynika

$$g_{hgj1}(t_{bg}) = 2 \lim_{t \rightarrow t_{bg}} \left(\frac{t - t_{bg}}{\kappa_{\bar{g}} - w} \right)^{1/2} (\kappa_{\bar{g}} - w)^{1/2} \frac{dg_{hgj}[t(w)]}{dw} \frac{dw}{dt}. \quad (5.13)$$

Z pomocą (4.2) nietrudno stwierdzić, że pierwszy czynnik pod znakiem granicy dąży do

$$\left(\frac{t - t_{bg}}{\kappa_{\bar{g}} - w} \right)^{1/2} \xrightarrow{t \rightarrow t_{bg}} (-\kappa_g \sin t_{bg})^{-1/2} = (\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)^{-1/4}.$$

Następnie korzystając z (A.4) i (A.8) oraz z $P_g(w)/(\kappa_g - w)^{1/2} = P_{\bar{g}}(w)/(\kappa_{\bar{g}} - w)^{1/2}$ znajdujemy

$$\frac{dg_{m\bar{g}j}[t(w)]}{dw} = \eta_{\bar{g}} \frac{P_j(\kappa_{\bar{g}} - w_j)^{1/2}}{P_{\bar{g}}(w_j)} \cdot \left\{ \frac{(\kappa_g + w)^{1/2}}{w - w_j} \left[\frac{\kappa_{\bar{g}}}{2(\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{(\kappa_{\bar{g}} - w)^{1/2}} + O(1) \right\} P_g(w), \quad t \rightarrow t_{bg}.$$

Zatem z (5.13),

$$g_{m\bar{g}j1}(t_{bg}) = - \frac{P_j}{P_{\bar{g}}(w_j)} \frac{1}{(\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)^{1/4}} \left[\frac{2\kappa_{\bar{g}}(\kappa_g + \kappa_{\bar{g}})}{\kappa_{\bar{g}} - w_j} \right]^{1/2} P_g(\kappa_{\bar{g}}). \quad (5.14)$$

Zastępując teraz $g(t)$ w (3.43) przez $g_{m\bar{g}j1}(t_{bg})$ i λ przez $\kappa_g \rho$ oraz stosując (5.14) dostajemy dla $\phi = \eta_g \pi$,

$$s_{mj}^s \Big|_B \Big|_{|\phi|=\pi} = \frac{e^{i(\kappa_{\bar{g}}\rho + \pi/4)}}{\rho^{3/2}} \frac{P_j}{P_{\bar{g}}(w_j)} \left[\frac{2\pi\kappa_{\bar{g}}}{(\kappa_{\bar{g}} - w_j)(\kappa_g - \kappa_{\bar{g}})(\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)} \right]^{1/2} \cdot P_g(\kappa_{\bar{g}}) \{1 + O[(\kappa_g \rho)^{-1}]\}. \quad (5.15)$$

W podobny sposób uzyskujemy dla drugiej polaryzacji

$$g_{e\bar{g}j1}(t_{bg}) = - \frac{q_j g^2}{M_{\bar{g}}(w_j)} \frac{(\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)^{1/4}}{(\kappa_{\bar{g}} - w_j)^{3/2}} M_{\bar{g}}(\kappa_{\bar{g}}),$$

a w konsekwencji

$$s_{ej}^s \Big|_B \Big|_{|\phi|=\pi} = \eta_{\bar{g}} \frac{e^{i(\kappa_{\bar{g}}\rho + \pi/4)}}{\rho^{3/2}} \frac{q_j g^2}{(\kappa_{\bar{g}} - w_j)^{1/2} M_{\bar{g}}(w_j)} \left(\frac{\pi}{\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2} \right)^{1/2} \cdot M_{\bar{g}}(\kappa_{\bar{g}}) \{1 + O[(\kappa_g \rho)^{-1}]\}. \quad (5.16)$$

Modyfikując funkcję $g_{h\bar{g}j1}(t)$ stosownie do rozpatrywanej składowej kartezjańskiej fali bocznej dostajemy z dokładnością do głównego wyrazu rozwinięcia asymptotycznego następujące wyrażenie dla fal bocznych w płaszczyźnie apertury

$$E_{m\bar{g}j}^s \Big|_B \Big|_{|\phi|=\pi} = \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)}}{\rho^{3/2}} \frac{P_{\bar{g}}(\kappa_g)}{P_g(w_j)} \left[\frac{2\pi\kappa_g}{(\kappa_g - w_j)(\kappa_{\bar{g}} - \kappa_g)(\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)} \right]^{1/2} e^{i\Gamma z} \cdot k_g Z_g p_j[\Gamma, 0, \kappa_g], \quad (5.17)$$

$$H_{m\bar{g}j}^s \Big|_B \Big|_{|\phi|=\pi} = \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)}}{\rho^{3/2}} \frac{P_{\bar{g}}(\kappa_g)}{P_g(w_j)} \left[\frac{2\pi\kappa_g}{(\kappa_g - w_j)(\kappa_{\bar{g}} - \kappa_g)(\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)} \right]^{1/2} e^{i\Gamma z} \cdot p_j[\eta_{\bar{g}} \kappa_g (\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)^{1/2}, k_g^2, \eta_g \Gamma (\kappa_g^2 - \kappa_{\bar{g}}^2)^{1/2}], \quad (5.18)$$

$$E_{e\beta j}^s \Big|_B \Big|_{|\phi|=\pi} = \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)} M_g(\kappa_g)}{\rho^{3/2}} \frac{1}{M_g(w_j) (\kappa_g - w_j)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{\kappa_g^2 - \kappa_g^2} \right)^{1/2} e^{i\Gamma z} \cdot \frac{q_j \bar{g}^2}{k_g^2} [-\kappa_g (\kappa_g^2 - \kappa_g^2)^{1/2}, \eta_g k_g^2, \Gamma (\kappa_g^2 - \kappa_g^2)^{1/2}], \quad (5.19)$$

$$H_{e\beta j}^s \Big|_B \Big|_{|\phi|=\pi} = - \frac{e^{i(\kappa_g \rho + \pi/4)} M_g(\kappa_g)}{\rho^{3/2}} \frac{1}{M_g(w_j) (\kappa_g - w_j)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{\kappa_g^2 - \kappa_g^2} \right)^{1/2} e^{i\Gamma z} \cdot \frac{q_j \bar{g}^2 \eta_g}{k_g Z_g} [\Gamma, 0, \kappa_g]. \quad (5.20)$$

Porównanie (5.17) - (5.20) z (5.8) - (5.11) pokazuje, że z dokładnością do głównego wyrazu rozwinięcia asymptotycznego składowe styczne fali dyfrakcyjnej rozchodzącej się w jednym ośrodku są w aperturze równe składowym stycznym fali bocznej rozchodzącej się w drugim ośrodku. Natomiast składowe normalne odpowiednich pól elektrycznych różnią się tam czynnikiem $(k_g/k_g)^2$. Tak więc główny wyraz rozwinięcia asymptotycznego pola wtórnego spełnia wynikający z równań Makswella warunek ciągłości na granicy ośrodków. Jest to konsekwencją opisanego wyżej związku zachodzącego między falami dyfrakcyjnymi i falami bocznymi, rozchodzącymi się w komplementarnych ośrodkach.

Ten fakt podpowiada następującą interpretację zjawisk falowych zachodzących w rozważanym problemie. Padając na granicę nieciągłości ośrodków $y = 0$ fala płaska generuje fale odbite od przewodzącej półpłaszczyzny i od granicy ośrodków, a także falę załamaną rozchodzącą się w drugim ośrodku. Ponadto w wyniku ugięcia padającej fali płaskiej na krawędzi półpłaszczyzny pojawiają się dwie fale dyfrakcyjne, rozchodzące się w obu ośrodkach z różnymi prędkościami. Te fale stają się z kolei źródłem fal bocznych. Proces tworzenia się tych fal można opisać następująco. Weźmy pod uwagę graniczny promień fali dyfrakcyjnej propagującej się w jednym ośrodku, styczny do płaszczyzny rozdziału ośrodków. Każdy punkt na tym promieniu jest punktem początkowym dla promienia fali bocznej rozchodzącej się w drugim ośrodku. Tak więc prócz załamania fal mamy tu do czynienia z innym mechanizmem przekazywania energii z jednego ośrodka do drugiego.⁶

Można oczekiwać, że warunki ciągłości na granicy ośrodków są spełnione przez wszystkie dalsze wyrazy w rozwinięciu asymptotycznym pola wtórnego. Podstawą dla takich oczekiwań jest fakt, że składowe styczne pola wtórnego w

⁶Powyższa interpretacja jest inspirowana pracą [10] dotyczącą ugięcia fali sprężystej na pęknięciu (tam jednakże zjawiska falowe przebiegają nieco inaczej).

rozwiązaniu ścisłym są ciągle na tej granicy. Istotnie, z (5.1) - (5.3) oraz z $k_1 Z_1 = k_N Z_N$ wynika, że

$$s_{m_j}^*(x, 0^+) = s_{m_j}^*(x, 0^-), \quad \frac{\partial s_{m_j}^*(x, 0^+)}{\partial x} = \frac{\partial s_{m_j}^*(x, 0^-)}{\partial x}$$

i

$$\frac{1}{k_1^2} \frac{\partial s_{e_j}^*(x, 0^+)}{\partial y} = \frac{1}{k_N^2} \frac{\partial s_{e_j}^*(x, 0^-)}{\partial y}, \quad \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial^2 s_{e_j}^*(x, 0^+)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{k_N^2} \frac{\partial^2 s_{e_j}^*(x, 0^-)}{\partial x \partial y}.$$

Następnie z (5.1) - (5.3) oraz (2.39) i (2.41) dostajemy

$$\frac{\partial s_{m_j}^*(x, 0^+)}{\partial y} - \frac{\partial s_{m_j}^*(x, 0^-)}{\partial y} = \frac{p_j}{F_-(w_j)} \int_C \frac{dw}{w - w_j} \frac{\exp(-iwx)}{F_+(w)}$$

i

$$s_{e_j}^*(x, 0^+) - s_{e_j}^*(x, 0^-) = \frac{q_j}{G_-(w_j)} \int_C \frac{dw}{w - w_j} \frac{\exp(-iwx)}{G_+(w)}.$$

Zastąpmy kontur całkowania C w dwóch ostatnich wzorach przez kontur C_R , złożony z części konturu C ograniczonej punktami $w = -R$ i $w = R$, $R > k_N$ oraz z półokręgu $|w| = R$ w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej w . W obszarze wewnątrz C_R funkcje podcałkowe są analityczne, a więc obie całki zerują się. Jeśli $x < 0$ i $R \rightarrow \infty$, całki wzdłuż półokręgu dążą wykładniczo do zera, a więc całki na pozostałej części C_R , w granicy równej C , także zdążają do zera. Zatem

$$\frac{\partial s_{m_j}^*(x, 0^+)}{\partial y} = \frac{\partial s_{m_j}^*(x, 0^-)}{\partial y}, \quad \text{i} \quad s_{e_j}^*(x, 0^+) = s_{e_j}^*(x, 0^-).$$

W podobny sposób można pokazać, że

$$\frac{\partial s_{e_j}^*(x, 0^+)}{\partial x} = \frac{\partial s_{e_j}^*(x, 0^-)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 s_{m_j}^*(x, 0^+)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 s_{m_j}^*(x, 0^-)}{\partial x \partial y}.$$

W rezultacie tych równości składowe styczne pola wtórno są ciągle na granicy ośrodków $y = 0$, $x < 0$.

Przedstawiona wyżej interpretacja związku między falami dyfrakcyjnymi i bocznymi może być wykorzystana do wyjaśnienia postaci funkcji, jaka opisuje falę boczną. Dla prostoty założmy $\Gamma = 0$, tj. prostopadły kierunek padania fali płaskiej na krawędź. Jak wynika z (3.43) (zob. także [55], wzór (24)), amplituda fali bocznej jest proporcjonalna do $[\rho \sin(\phi - t_{b_g})]^{-3/2}$. W obszarze oświetlonym front falowy tej fali przechodzący przez punkt (ρ, ϕ, z) jest opisany przez $\rho \cos(\phi - t_{b_g}) = \text{const}$. Zatem w kierunku prostopadłym do tego frontu, pokrywającym się z kierunkiem promienia fali bocznej jaki przechodzi przez punkt (ρ, ϕ, z) , mamy $\rho \cos(\phi - \pi/2 - t_{b_g}) = \rho \sin(\phi - t_{b_g}) = \text{const}$. Innymi słowami,

amplituda fali bocznej wzdłuż jej promienia jest stała; w szczególności jest taka sama jak w punkcie początkowym, leżącym na granicy ośrodków. (Nie jest to dziwne, ponieważ promienie fali bocznej są równoległe względem siebie.) Tak więc czynnik $[\rho \sin(\phi - t_{b_g})]^{-3/2}$ w amplitudzie fali bocznej musi wynikać ze zmienności amplitudy fali dyfrakcyjnej wzdłuż jej promienia stycznego do granicy ośrodków, z którego to promienia generowany jest rozważany promień fali bocznej. Istotnie, amplituda fali dyfrakcyjnej na promieniu stycznym do granicy ośrodków jest proporcjonalna do $a_g^{-3/2}$, gdzie a_g jest odległością mierzoną wzdłuż promienia dyfrakcyjnego od krawędzi do punktu początkowego rozważanego promienia fali bocznej i jest równa $a_g = \rho \sin(\phi - t_{b_g}) / (\sin t_{b_g} \sin \beta_g)$.

5.1 Podsumowanie

Przedmiotem analizy prowadzonej w niniejszym rozdziale było zachowanie fal dyfrakcyjnych i bocznych w otoczeniu granicy ośrodków, powiązane z warunkiem ciągłości pola całkowitego na tej granicy. Stwierdzono, że warunek ten jest spełniony przez pole pierwotne, ale nie spełnia go pole dyfrakcyjne będące składnikiem pola wtórnego. Ze względu na fakt, że fale boczne są niższego rzędu wielkości niż fale dyfrakcyjne, a więc zasadniczo z nimi nieporównywalne, powstaje trudność związana ze spełnieniem warunku ciągłości przez pole wtórne, a w konsekwencji przez pole całkowite. Bliższa analiza pokazała jednak, że trudność ta jest pozorna. Okazało się, że główny wyraz asymptotyki fal dyfrakcyjnych znika na granicy ośrodków i asymptotyka tych fal jest tam opisana przez wyrażenia (5.8) - (5.11) wywodzące się z następnego wyrazu rozwinięcia asymptotycznego, co do rzędu wielkości porównywalnego z falą boczną. Porównanie głównych wyrazów (5.17) - (5.20) asymptotyki fal bocznych propagujących się w jednym ośrodku z odpowiednimi wyrazami fal dyfrakcyjnych rozchodzących się w drugim ośrodku pokazało, że na granicy ośrodków wartości graniczne obu fal są takie same i w konsekwencji pole wtórne, a zatem i pole całkowite, spełnia warunek ciągłości.

Przeprowadzona analiza pozwoliła znaleźć interpretację fizyczną zjawiska generacji fal bocznych na granicy ośrodków przez fale dyfrakcyjne. Umożliwiła także wyjaśnienie postaci funkcyjnej fali bocznej.

Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały również opublikowane w [55].

6 Quasi-jednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie

W Rozdziale 4 zostało skonstruowane rozwiązanie asymptotyczne rozważanego problemu oparte na potęgowym ciągu asymptotycznym. Umożliwia ono interpretację zachodzących w zakresie wysokoczęstotliwościowym zjawisk fizycznych, a także daje prostą zależność funkcyjną rozwiązania od parametrów zagadnienia w tym zakresie. Wadą otrzymanego tam rozwiązania jest jego nieprzydatność w otoczeniu granic cienia fal optyki geometrycznej oraz granicy cienia fali bocznej w ośrodku gęstszym optycznie. Na tych granicach cienia rozwinięcia asymptotyczne fal odbitych i fali załamanej doznają nieciągłości skokowej, a rozwinięcia fal dyfrakcyjnych i fali bocznej rozchodzącej się w ośrodku gęstszym optycznie stają się nieograniczone. Tymczasem rozwiązanie ściśle jest regularną funkcją punktu obserwacji, włączając w to wspomniane granice cienia.

Przedstawione wyżej osobliwości są wynikiem nieuprawnionego przedłużenia niejednostajnej asymptotyki całki na przypadek blisko siebie położonych punktów krytycznych. Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną w Rozdziale 3, właściwe w tym przypadku wyrażenie asymptotyczne dla całki opisane jest przez funkcje Webera. Jak pokazano w wymienionym rozdziale, rozwinięcie niejednostajne całki powstaje w wyniku zastąpienia funkcji Webera ich rozwinięciami asymptotycznymi słusznymi dla dużego argumentu (por. paragraf 3.1.3). W przypadku występujących blisko siebie punktu siodłowego i drugiego punktu krytycznego ten zabieg staje się niedozwolony ze względu na małe wartości tego argumentu i jego użycie prowadzi do wymienionych osobliwości w otoczeniu granic cienia fal.

Opisane trudności mają miejsce gdy punkty osobliwe funkcji podcałkowych są rzeczywiste. W przypadku zespolonego punktu rozgałęzienia, $t = t_{b1}$, fala boczna zanika wykładniczo wraz z odległością od płaszczyzny rozdziału ośrodków, a więc jest ważna tylko w pewnym otoczeniu tej płaszczyzny. W tym przypadku pojęcie granicy cienia traci swój sens. Ponadto pola optyki geometrycznej pochodzące od zespolonych biegunów wzajemnie się kompensują, a więc nie sprawiają żadnych trudności.

W tym rozdziale skonstruujemy rozwiązanie asymptotyczne rozpatrywanego problemu, które będzie obowiązywało również na granicach cienia poszczególnych fal. Punktem wyjścia do analizy będzie jednostajne rozwinięcie asymptotyczne całki dyfrakcyjnej z trzema punktami krytycznymi: punktem siodłowym, biegunem i punktem rozgałęzienia. Rozwinięcie takie zostało znalezione w [52] i jest cytowane w Rozdziale 3. Wyraża się ono poprzez funkcje specjalne i jest jednostajnie słuszne ze względu na wzajemne usytuowanie punktów krytycznych całki. Z analizy tego rozwinięcia wynika ważny wniosek: jeśli jeden z punktów osobliwych jest odseparowany od pozostałych dwóch punktów krytycznych, wówczas rozwinięcie jednostajne redukuje się do prostszego co do postaci rozwinięcia quasi-jednostajnego. Pokrywa się ono z rozwinięciem jednostajnym uży-

skanym dla całki z tymi dwoma punktami krytycznymi, które mogą znajdować się względem siebie dowolnie blisko. W rozpatrywanym problemie $t_{0g} \neq t_{bg}$, bowiem padająca fala płaska nie może rozchodzić się w kierunku stycznym do granicy rozdziału ośrodków (por. (2.1) oraz (4.5)). Zakładając ponadto że $|t_{0g} - t_{bg}| \geq \epsilon > 0$ przyjmujemy, że w przestrzeni fizycznej granice cienia fal załamanej i bocznej w ośrodku gęstszym optycznie są odseparowane. W świetle cytowanego wyżej wniosku to założenie pozwala wykorzystać do analizy pola w pobliżu granic cienia rozwinięcia otrzymane w paragrafie 3.1, jako znacznie prostsze od rozwinięcia jednostajnego dla całki z trzema punktami krytycznymi. Drugim powodem użycia rozwinięcia quasi-jednostajnego zamiast jednostajnego jest fakt, że funkcje podcałkowe w rozpatrywanym problemie daje się sprowadzić do postaci przyjętej w paragrafie 3.2 tylko na części odcinka $(-\pi, \pi)$ na którym zmienia się kąt obserwacji ϕ . W konsekwencji tylko na tej części obowiązuje otrzymane w paragrafie 3.2 rozwinięcie jednostajne. Jeśli jednak warunek separowalności punktów osobliwych nie jest spełniony, właściwym do analizy asymptotycznej pola w otoczeniu wspomnianych wyżej granic cienia jest rozwinięcie jednostajne.

Całki opisujące pole wtórne można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_g} \left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{jg}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{t+t_{jg}}{2}} \right) \frac{Q_g[w(t)]}{Q_g[w(t_{jg})]} l_g(t) e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt \\ &= l_g(t_{jg}) \int_{\Gamma_g} \frac{e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z}}{\sin \frac{t-t_{jg}}{2}} dt \\ &+ \int_{\Gamma_g} \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{jg}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{t+t_{jg}}{2}} \right) \frac{Q_g[w(t)]}{Q_g[w(t_{jg})]} l_g(t) - \frac{l_g(t_{jg})}{\sin \frac{t-t_{jg}}{2}} \right] e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt, \end{aligned} \quad (6.1)$$

gdzie funkcja Q_g odpowiada za P_g albo M_g , zaś wektor l_g staje się równy $\hat{y} \times b_g(t)$ albo $b_g(t) \times [\hat{y} \times b_g(t)]$.

Pierwsza całka po prawej stronie znaku równości wyraża się poprzez całkę Fresnela

$$\int_{\Gamma_g} \frac{e^{i\kappa_g \rho \cos(t-\phi)}}{\sin \frac{t-t_{jg}}{2}} dt = 4\pi i e^{i\kappa_g \rho \cos(t_{jg}-\phi)} \mathcal{F} \left[\eta_g (2\kappa_g \rho)^{1/2} \sin \frac{t_{jg}-\phi}{2} \right] \quad (6.2)$$

gdzie

$$\mathcal{F}(x) = \pi^{-1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^x e^{i\tau^2} d\tau. \quad (6.3)$$

Ponieważ funkcja Fresnela jest funkcją analityczną na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, prawa strona (6.2) jest regularną funkcją zmiennej ϕ .

Zajmijmy się drugą całką po prawej stronie znaku równości w (6.1), w której osobliwość w punkcie $t = t_{jg}$ ma charakter usuwalny. W całce tej pozostaje nadal osobliwy punkt rozgałęzienia w $t = t_{bg}$. Rozpatrzmy dwa przypadki: $g = 1$ i $g = N$. W pierwszym przypadku punkt siodłowy $t = \phi$ i punkt rozgałęzienia

$t = t_{b1}$ są odseparowane. Zatem do konstrukcji rozwinięcia asymptotycznego tej całki można użyć (3.43) i (3.44) i otrzymane rozwinięcie będzie obowiązywało dla dowolnych wartości ϕ z przedziału $[0, \pi]$. W drugim przypadku punkty $t = t_{bN}$ i $t = \phi$ mogą znaleźć się dowolnie blisko siebie lub się pokryć. Dlatego w tym przypadku właściwe jest skorzystanie z rozwinięcia quasi-jednostajnego (3.7), (3.35), (3.39) i (3.48).

Po uwzględnieniu tych uwag dochodzimy do następującego rozwinięcia asymptotycznego całki stojącej po lewej stronie znaku równości w (6.1):

$$g = 1 \quad (\text{Ośrodek rzadszy optycznie})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{j1}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{t+t_{j1}}{2}} \right) \frac{Q_1[w(t)]}{Q_1[w(t_{j1})]} l_1(t) e^{i\kappa_1 \rho \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt \\ & \sim 4\pi i e^{i\kappa_1 \rho \cos(t_{j1}-\phi) + i\Gamma z} \mathcal{F} \left[(2\kappa_1 \rho)^{1/2} \sin \frac{\phi - t_{j1}}{2} \right] l_1(t_{j1}) \\ & + \left(\frac{2\pi}{\kappa_1 \rho} \right)^{1/2} e^{i(\kappa_1 \rho + \Gamma z + \frac{3\pi}{4})} \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - t_{j1}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{\phi + t_{j1}}{2}} \right) \frac{Q_1[w(\phi)]}{Q_1[w(t_{j1})]} l_1(\phi) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{l_1(t_{j1})}{\sin \frac{\phi - t_{j1}}{2}} \right] \\ & - \frac{\pi^{1/2}}{(\kappa_1 \rho)^{3/2}} \frac{e^{i[\kappa_1 \rho \cos(t_{b1}-\phi) + \Gamma z + \pi/4]}}{\sin^{3/2}(t_{b1} - \phi)} \left(\frac{1}{\sin \frac{t_{b1}-t_{j1}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{t_{b1}+t_{j1}}{2}} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \cdot \frac{Q_{11}(\kappa_N)}{Q_1[w(t_{j1})]} l_1(t_{b1}) U(\phi - \pi + \epsilon), \end{aligned} \quad (6.4)$$

gdzie $U(\cdot)$ jest jednostkową funkcją Heavisidea, $\epsilon > 0$, funkcja $Q_{11}[w(t)]$ jest zdefiniowana przez

$$Q_g[w(t)] = Q_{g0}[w(t)] + (t - t_{bg})^{1/2} Q_{g1}[w(t)], \quad g = 1, N, \quad (6.5)$$

a funkcje $Q_{g0}[w(t)]$ i $Q_{g1}[w(t)]$ są analityczne w pewnym otoczeniu punktu $t = t_{bg}$.

Na granicy cienia fal odbitych człony osobliwe wzajemnie znoszą się i zachowanie asymptotyczne całki w otoczeniu tej granicy jest regularne i określone zachowaniem całki Fresnela \mathcal{F} . Jeśli argument tej całki jest co do modułu duży, wówczas możemy zastąpić ją wyrażeniem asymptotycznym

$$\mathcal{F}(x) = U(x) - \frac{e^{i(x^2 + \frac{\pi}{4})}}{2\pi^{1/2} x} + O(x^{-3}). \quad (6.6)$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do (6.4) jego pierwszy wyraz określa wkład wyjściowej całki do rozwiązania optyki geometrycznej, zaś drugi wyraz znosząc się z

członem proporcjonalnym do $l_1(t_{j1})/\sin \frac{\phi-t_{j1}}{2}$ daje w wyniku właściwą postać fali dyfrakcyjnej. Procedura ta jest zasadna dla dostatecznie dużego k_1 w obszarze znajdującym się z dala od granicy cienia fal odbitych i od krawędzi.

$g = N$ (Ośrodek gęstszy optycznie)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_N} \left(\frac{1}{\sin \frac{t-t_{jN}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{t+t_{jN}}{2}} \right) \frac{Q_N[w(t)]}{Q_N[w(t_{jN})]} l_N(t) e^{i\kappa_{N\rho} \cos(t-\phi) + i\Gamma z} dt \\
 & \sim 4\pi i e^{i\kappa_{N\rho} \cos(t_{jN}-\phi) + i\Gamma z} \mathcal{F} \left[-(2\kappa_{N\rho})^{1/2} \sin \frac{\phi-t_{jN}}{2} \right] l_N(t_{jN}) \\
 & - \left(\frac{2\pi}{\kappa_{N\rho}} \right)^{1/2} e^{i(\kappa_{N\rho}\rho + \Gamma z + \frac{3\pi}{4})} \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\phi-t_{jN}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{\phi+t_{jN}}{2}} \right) \frac{Q_{N0}[w(\phi)]}{Q_N[w(t_{jN})]} l_N(\phi) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{l_N(t_{jN})}{\sin \frac{\phi-t_{jN}}{2}} \right] \quad (6.7) \\
 & + \frac{(2\pi)^{1/2}}{(\kappa_{N\rho})^{3/4}} e^{i\left[\kappa_{N\rho} \cos^2 \frac{t_{bN}-\phi}{2} + i\Gamma z - \frac{\pi}{8}\right]} \left\{ \frac{1}{\cos^{3/2} \frac{t_{bN}-\phi}{2}} \left(\frac{1}{\sin \frac{t_{bN}-t_{jN}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{t_{bN}+t_{jN}}{2}} \right) \right. \\
 & \quad \cdot \frac{Q_{N1}(\kappa_1)}{Q_N[w(t_{jN})]} l_N(t_{bN}) \left[D_{1/2}(u) - \frac{D_{3/2}(u)}{u} \right] \\
 & \left. + \left(\frac{t_{bN}-\phi}{\sin \frac{t_{bN}-\phi}{2}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi-t_{jN}}{2}} \pm \frac{1}{\sin \frac{\phi+t_{jN}}{2}} \right) \frac{Q_{N1}[w(\phi)]}{Q_N[w(t_{jN})]} l_N(\phi) \frac{D_{3/2}(u)}{u} \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$u = 2(\kappa_{N\rho})^{1/2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \sin \frac{t_{bN}-\phi}{2}, \quad t_{bN} - \phi = e^{-i\pi}(\phi - t_{bN}). \quad (6.8)$$

Na granicy cienia fali bocznej człony osobliwe w (6.7) znoszą się i asymptotyka całki jest opisana funkcją regularną w otoczeniu tej granicy. Powyższa asymptotyka obowiązuje w przedziale zmienności kąta ϕ odpowiadającym przedziałowi, w którym jest słuszny rozkład (6.5). Występujące na zewnątrz tego przedziału osobliwości funkcji Q_{N0} i Q_{N1} nie mają znaczenia fizycznego, bowiem znoszą się w funkcji Q_N . W związku z tym poza wspomnianym przedziałem funkcje Webera mogą być zastąpione swymi wyrażeniami asymptotycznymi. W wyniku tego dostajemy

$$\frac{D_{3/2}(u)}{u} \sim e^{i\kappa_{N\rho} \sin^2 \frac{t_{bN}-\phi}{2}} \left(2 \sin \frac{t_{bN}-\phi}{2} \right)^{1/2} (\kappa_{N\rho})^{1/4} e^{i\frac{3\pi}{8}}.$$

Po podstawieniu prawej strony tej równości asymptotycznej do (6.7) uzyskujemy kompensowanie się członów osobliwych również na granicy cienia $\phi = t_{jN}$ fali załamanej.

Wykorzystamy powyższe wyniki do skonstruowania quasi-jednostajnego rozwinięcia asymptotycznego pola wtórnego. Przedtem zdefiniujemy

$$\xi_g^\gamma = \epsilon_g (S_g^d - S^\gamma)^{1/2}, \quad \text{gdzie} \quad \gamma = \begin{cases} r, & g = 1, \\ t, & g = N. \end{cases} \quad (6.9)$$

Czynnik

$$\epsilon_g = \eta_g \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{t_{0g} - \phi}{2} \right). \quad (6.10)$$

jest równy -1 w obszarze oświetlonym i $+1$ w obszarze cienia fali odbitej od półpłaszczyzny gdy $g = 1$ albo załamanej gdy $g = N$. Podobnie definiujemy

$$\xi_N^b = \epsilon_N^b (S_N^d - S_N^b)^{1/2}, \quad (6.11)$$

gdzie czynnik

$$\epsilon_N^b = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{t_{bN} - \phi}{2} \right) \quad (6.12)$$

jest równy $+1$ w obszarze oświetlonym fali bocznej i -1 w jej obszarze zacięniomym. Wielkości ξ_g i ξ_N^b mają sens "parametrów obejścia" (detour parameters, [25]).

Korzystając z definicji eikonaliów S_g^d , S^r , S^t oraz S_N^b (zob. (4.21), (4.15), (4.33)) widać, że argumenty całek Fresnela i funkcji Webera w (6.4) i (6.7) wyrażają się poprzez parametry obejścia:

$$\eta_g (2\kappa_g \rho)^{1/2} \sin \frac{t_{0g} - \phi}{2} = k_g^{1/2} \xi_g^\gamma \quad (6.13)$$

i

$$u = 2^{1/2} e^{i\frac{3\pi}{4}} k_N^{1/2} \xi_N^b. \quad (6.14)$$

Zamiast funkcji $D_\nu(z)$ posłużymy się wygodniejszą do naszych celów funkcją $W_\nu(z)$, zdefiniowaną za pomocą całki

$$W_\nu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} s^\nu e^{-\frac{z}{2} - \nu s} ds. \quad (6.15)$$

Cięcie w funkcji podcałkowej poprowadzone jest z punktu $s = 0$ do dolnej półpłaszczyzny, $\operatorname{Im} z < 0$. Funkcje $D_\nu(z)$ i $W_\nu(z)$ powiązane są ze sobą zależnością [6]

$$W_\nu(z) = (2\pi)^{1/2} e^{\frac{z}{4} + i\nu\frac{\pi}{2}} D_\nu(iz). \quad (6.16)$$

Stosując rozwinięcia (6.4) i (6.7) wraz z powyższymi oznaczeniami do (2.63) i (2.64) otrzymujemy quasi-jednostajne rozwinięcia asymptotyczne pola wtórnego w obu ośrodkach

$$E_g^s = E_g^F + E_g^{sp} + E_g^B, \quad (6.17)$$

gdzie

$$E_g^F = -2\pi i e^{ik_g S^\gamma} \mathcal{F}(k_g^{1/2} \zeta_g^\gamma) \left[k_g Z_g p_0 c_g(t_{0g}) + \frac{\eta_g}{k_g^2} \frac{q_0^g}{v_g(w_0)} d_g(t_{0g}) \right], \quad (6.18)$$

$$\gamma = \begin{cases} r, & g = 1, \\ t, & g = N, \end{cases}$$

$$E_g^{sp} = -\eta_g \left(\frac{\pi}{2\kappa_g \rho} \right)^{1/2} e^{ik_g S_g^g + i\frac{3\pi}{4}} \sum_{j=0}^2 \left\{ \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - t_{jg}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\phi + t_{jg}}{2}} \right) \frac{P_g[w(\phi)]}{P_g[w(t_{jg})]} c_g(\phi) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{c_g(t_{jg})}{\sin \frac{\phi - t_{jg}}{2}} \right] k_g Z_g p_j \right. \quad (6.19) \\ \left. + \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - t_{jg}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\phi + t_{jg}}{2}} \right) \frac{\mathcal{M}_g[w(\phi)]}{M_g[w(t_{jg})]} d_g(\phi) - \frac{d_g(t_{jg})}{\sin \frac{\phi - t_{jg}}{2}} \right] \frac{\eta_g}{k_g^2} \frac{q_j^g}{v_g(w_j)} \right\},$$

$$E_1^B \sim \frac{\pi^{1/2}}{2(\kappa_1 \rho)^{3/2}} \frac{e^{ik_1 S_1^t + i\frac{\pi}{4}}}{\sin^{3/2}(t_{b1} - \phi)} \sum_{j=0}^2 \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{t_{b1} - t_{j1}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{t_{b1} + t_{j1}}{2}} \right) \right. \\ \left. \frac{P_{11}(\kappa_N)}{P_1[w(t_{j1})]} c_1(t_{b1}) k_1 Z_1 p_j \right. \quad (6.20) \\ \left. + \left(\frac{1}{\sin \frac{t_{b1} - t_{j1}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{t_{b1} + t_{j1}}{2}} \right) \frac{M_{11}(\kappa_N)}{M_1[w(t_{j1})]} d_1(t_{b1}) \frac{1}{k_1^2} \frac{q_j^1}{v_1(w_j)} \right] U(\phi - \pi + \epsilon),$$

i

$$\begin{aligned}
E_N^B \sim & -\frac{e^{i k_N S_N^b - i \frac{3\pi}{8}}}{2(\kappa_N \rho)^{3/4}} \sum_{j=0}^2 \left\{ \left[\frac{1}{\cos^{3/2} \frac{t_{bN} - \phi}{2}} \left(\frac{1}{\sin \frac{t_{bN} - t_{jN}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{t_{bN} + t_{jN}}{2}} \right) \frac{P_{N1}(\kappa_1)}{P_N[w(t_{jN})]} \right. \right. \\
& \cdot \left. \left[W_{1/2}(h) + \frac{W_{3/2}(h)}{h} \right] c_N(t_{bN}) - \left(\frac{t_{bN} - \phi}{\sin \frac{t_{bN} - \phi}{2}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - t_{jN}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\phi + t_{jN}}{2}} \right) \right. \\
& \cdot \left. \frac{P_{N1}[w(\phi)]}{P_N[w(t_{jN})]} \frac{W_{3/2}(h)}{h} c_N(\phi) \right] k_N Z_N P_j - \left[\frac{1}{\cos^{3/2} \frac{t_{bN} - \phi}{2}} \left(\frac{1}{\sin \frac{t_{bN} - t_{jN}}{2}} \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{\sin \frac{t_{bN} + t_{jN}}{2}} \right) \frac{M_{N1}(\kappa_1)}{M_N[w(t_{jN})]} \left[W_{1/2}(h) + \frac{W_{3/2}(h)}{h} \right] d_N(t_{bN}) \right] - \left(\frac{t_{bN} - \phi}{\sin \frac{t_{bN} - \phi}{2}} \right)^{1/2} \\
& \cdot \left. \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - t_{jN}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\phi + t_{jN}}{2}} \right) \frac{M_{N1}[w(\phi)]}{M_N[w(t_{jN})]} \frac{W_{3/2}(h)}{h} d_N(\phi) \right] \frac{1}{k_N^2} \frac{q_j^N}{v_N(w_j)} \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

W powyższych wzorach

$$c_g(t) = \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}_g(t), \quad \mathbf{d}_g(t) = \mathbf{b}_g(t) \times [\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{b}_g(t)], \tag{6.22}$$

gdzie $\mathbf{b}_g(t)$ jest zdefiniowane w (4.11),

$$P_g = \begin{cases} P_1, & g = 1, \\ P_{N0}, & g = N, \end{cases} \quad M_g = \begin{cases} M_1, & g = 1, \\ M_{N0}, & g = N, \end{cases} \tag{6.23}$$

funkcje P_{gn} i M_{gn} , $n = 0, 1$, są określone w (4.28) i (4.30) oraz

$$h = 2^{1/2} e^{i \frac{\pi}{4}} k_N^{1/2} \xi_N^b. \tag{6.24}$$

Pole magnetyczne ma podobną postać jak pole elektryczne z tą różnicą, że dla jego otrzymania należy w (6.17) - (6.21) zastąpić $k_g Z_g c_g(t)$ przez $\mathbf{d}_g(t)$ oraz $\mathbf{d}_g(t) k_g^{-2}$ przez $-c_g(t)/(k_g Z_g)$ przy zachowaniu aktualnej wartości argumentu t .

6.1 Podsumowanie

Otrzymane w tym rozdziale quasi-jednostajne rozwiązanie asymptotyczne oparte jest na teorii Bleisteina analizy asymptotycznej całek. Wyodrębnienie w całkach opisujących pole wtórne członu związanego z całką Fresnela pozwoliło uzyskać ciągłość asymptotyki pola wtórnego, a zatem i pola całkowitego, na granicach cienia fal optyki geometrycznej. W przypadku fali bocznej podejście do jednostajnej asymptotyki zależało od tego, czy pole rozważane jest w ośrodku rzadszym, czy gęstszym optycznie. W pierwszym przypadku punkt rozgałęzienia w funkcjach podcałkowych jest zespolony i odseparowany od rzeczywistego punktu siodłowego. W konsekwencji w ośrodku rzadszym optycznie nie ma granicy cienia i

asymptotyka fali bocznej otrzymana w Rozdziale 4 jest jednostajnie słuszna. W ośrodku gęstszym optycznie oba punkty są rzeczywiste i mogą znajdować się dowolnie blisko siebie. W przestrzeni fizycznej odpowiada to dowolnie bliskiemu położeniu punktu obserwacji względem granicy cienia fali bocznej. Zgodnie z analizą przeprowadzoną w Rozdziale 3 ciągła asymptotyka na granicy cienia fali bocznej wymagała w tym przypadku użycia funkcji Webera. Argumentami całki Fresnela, jak i funkcji Webera są odpowiednie parametry obejścia.

Asymptotyka pola wtórnego mająca powyższe cechy przedstawiona jest w (6.17) - (6.21). Opisuje ono w sposób ciągły pole w otoczeniu granic cienia występujących w zagadnieniu fal. Z dala od tych granic, gdzie argumenty całki Fresnela i pozostałych funkcji Webera są co do modułu duże, rozwinięcie to redukuje się do rozwinięcia niejednostajnego.

7 Niejednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji na ekranie z krawędzią krzywoliniową

W poprzednich trzech rozdziałach przeprowadziliśmy analizę asymptotyczną zagadnienia dyfrakcji elektromagnetycznej fali płaskiej na ekranie o szczególnej postaci, mianowicie ekranie z krawędzią prostoliniową. Otrzymane tam wyniki zostaną teraz wykorzystane na drodze rozważań heurystycznych do syntezy rozwiązań asymptotycznych dla ekranów z krawędziami krzywoliniowymi. W tym i w następnym rozdziale będziemy korzystali z technik promieniowych, rozwiniętych przez Lewisa, Boersmę, Ahluwalię [9], [19] i Witloxa [10].

Podobnie jak poprzednio zakładamy, że półprzestrzenie $y > 0$ i $y < 0$ wypełnione są ośrodkami rzadszym i gęstszym optycznie, scharakteryzowanymi przez liczby falowe k_1 i k_N . Na granicy tych ośrodków, $y = 0$, występuje doskonale przewodzący ekran z krawędzią krzywoliniową C . Ekran może składać się z rozłącznych części, może też mieć jedną lub kilka apertur.⁷ Znaczna dowolność rozpatrywanych geometrii wynika z faktu, że nasze rozważania będą miały charakter lokalny — pole elektromagnetyczne będzie konstruowane w pewnym otoczeniu krawędzi, rozciągającym się do pierwszej kaustyki (nie licząc samej krawędzi) pola dyfrakcyjnego. Nie będą brane pod uwagę przyczynki do pola pochodzące od wzajemnych oddziaływań różnych fragmentów krawędzi ze sobą. Zakładamy, że krawędź jest opisana krzywą regularną

$$C: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(s), \quad (7.1)$$

gdzie s oznacza długość łuku mierzonego wzdłuż krzywej. Przyjmujemy ponadto, że promień krzywizny brzegu ekranu jest dużo większy niż długość fali padającej.

Zalóżmy, że na ekran pada elektromagnetyczna fala płaska

$$\begin{Bmatrix} E^i(\mathbf{x}) \\ H^i(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{Bmatrix} e^{ik_1 S^i(\mathbf{x})}, \quad (7.2)$$

której eikonał jest rzeczywisty i dany przez

$$S^i(\mathbf{x}) = \nu_1 x - \nu_2 y + \nu_3 z, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad \nu_2 > 0, \quad (7.3)$$

zaś wektory E_0 i H_0 są równe

$$E_0 = E_{m0} + E_{e0}, \quad H_0 = H_{m0} + H_{e0}, \quad (7.4)$$

przy czym

$$\begin{aligned} E_{m0} &= k_1^2 Z_1 a_m \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i, & E_{e0} &= a_e \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i), \\ H_{m0} &= k_1^2 a_m \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i), & H_{e0} &= -Y_e a_e \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i \end{aligned} \quad (7.5)$$

⁷Przez aperturę rozumiemy część granicy ośrodków, nie zajęta przez ekran.

$$a_e = \frac{E_{0y}}{\nu_1^2 + \nu_3^2}, \quad a_m = \frac{H_{0y}}{k_1^2(\nu_1^2 + \nu_3^2)}. \quad (7.6)$$

Konstrukcję rozwiązania w zakresie wysokoczęstotliwościowym oprzemy na założeniu, że występują w nim te same rodzaje fal jak w przypadku półpłaszczyzny: fala padająca, fale odbite od ekranu i od granicy ośrodków, fala załamana oraz fale dyfrakcyjne i boczne. Zakładamy, że sposób generowania fal jest również podobny do tego, jaki opisano na str. 60, a rozwinięcia asymptotyczne tych fal są postaci (B.2). Posłużymy się rozważaniami promieniowymi do znalezienia tych rozwinięć. Struktur promieniowych analizowanych fal będziemy poszukiwali wychodząc z zasady zgodności faz fali generującej i fali generowanej na rozmaitości początkowej tej drugiej fali (rozmaitości, na której biorą początek promienie fali generowanej). Ogólnie rzecz biorąc, w naszych rozważaniach ograniczymy się do głównych wyrazów rozwinięć asymptotycznych. Jak stwierdziliśmy poprzednio, zaniedbamy także wtórne procesy dyfrakcyjne wynikające ze wzajemnych oddziaływań różnych fragmentów ekranu ze sobą.

Przy tych założeniach rozwiązanie asymptotycznego dla rozważanego tu problemu będziemy poszukiwali w postaci sumy fal ⁸

$$\left\{ \begin{array}{l} E_g(\mathbf{x}) \\ H_g(\mathbf{x}) \end{array} \right\} = \sum_{h=e,m} \sum_{\gamma=r1,r2,t,d,b} \left\{ \begin{array}{l} E_{hg}^\gamma(\mathbf{x}) \\ H_{hg}^\gamma(\mathbf{x}) \end{array} \right\}, \quad (7.7)$$

których rozwinięcia asymptotyczne są postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{hg}^\gamma(\mathbf{x}) \\ H_{hg}^\gamma(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \sim \delta_g^\gamma(\mathbf{x}) q^\gamma(k_g) e^{ik_g S_g^\gamma(\mathbf{x})} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} e_{gm}^\gamma(\mathbf{x}) \\ h_{gm}^\gamma(\mathbf{x}) \end{array} \right\} (ik_g)^{-m}, \quad (7.8)$$

$$k_g \rightarrow \infty.$$

Dla fali z indeksem γ czynnik $\delta^\gamma(\mathbf{x})$ jest równy +1 w jej obszarze oświetlonym oraz 0 w obszarze cienia, zaś $q^\gamma(k_g)$ określa rząd wielkości tej fali. W pozostałej części tego rozdziału zajmiemy się wyznaczeniem rozwinięć fal występujących w (7.7).

7.1 Fale optyki geometrycznej

Fale postulowane przez rozwiązanie optyki geometrycznej dają główny wkład do rozwiązania asymptotycznego analizowanego zagadnienia. Są to: fala padająca, fala odbita od ekranu, fala odbita od granicy ośrodków oraz fala załamana. Dla wszystkich tych fal $q^\gamma(k_g) = 1$. Trzy pierwsze z wymienionych fal występują wyłącznie w obszarze $y > 0$, a ostatnia fala — tylko w obszarze $y < 0$. Dlatego w dalszym ciągu przy opisywaniu tych fal będziemy pomijali indeks g .

⁸Indeks r1 oznacza falę odbitą od ekranu, a indeks r2 — falę odbitą od granicy ośrodków.

Fala padająca zdefiniowana jest przez (7.2) - (7.6). W szczególności dla tej fali zachodzi $\delta^t(\mathbf{x}) = 1$ w całej górnej półprzestrzeni $y > 0$.

Przejdźmy do fal odbitych i fali załamanej. Z żądania zgodności faz

$$k_1 S^i = k_1 S^{r1} = k_1 S^{r2} = k_N S^t \quad (7.9)$$

w płaszczyźnie $y = 0$ i z (B.3) wynika, że

$$S^{r1,r2}(\mathbf{x}) = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z, \quad (7.10)$$

$$S^t(\mathbf{x}) = \frac{\nu_1}{N} x - \left(1 - \frac{\nu_1^2 + \nu_3^2}{N^2}\right)^{1/2} y + \frac{\nu_3}{N} z.$$

Promienie fali odbitej od ekranu wybiegają z jego powierzchni w kierunku określonym przez ∇S^{r1} (zgodnie z poprzednim określeniem $\nu_2 > 0$, a więc promienie biegną w kierunku rosnących wartości y). Granica cienia tej fali jest powierzchnią walcową, której tworzące stanowią promienie wychodzące z krawędzi ekranu. Obszar oświetlony jest zawarty między granicą cienia i powierzchnią ekranu. Promienie fali odbitej od granicy ośrodków wybiegają z apertury i biegną w tym samym kierunku. Granica cienia tej fali pokrywa się z granicą cienia poprzedniej fali, a jej obszar oświetlony zawiera się między granicą cienia i aperturą.

Promienie fali załamanej wybiegają z apertury w kierunku wyznaczonym przez ∇S^t . Granica cienia utworzona jest przez promienie tej fali wychodzące z krawędzi ekranu. Obszar oświetlony zawarty jest między granicą cienia i aperturą.

Wartości amplitud rozpatrywanych fal wynikają z warunku ciągłości składowych stycznych pola danego przez rozwiązanie optyki geometrycznej, a jego konstrukcja nie różni się od konstrukcji w przypadku półpłaszczyzny. Dlatego skorzystamy z gotowych już wyników. W konsekwencji sumaryczne pole optyki geometrycznej jest takiej samej postaci jak w (4.16), lecz z nieco inaczej zdefiniowanymi współczynnikami odbicia i załamania. Pełna reprezentacja tego pola jest następująca

$$E_m^{GO} = a_m \begin{cases} k_1^2 Z_1 \left(e^{ik_1 S^t} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i + \mathcal{R}_m e^{ik_1 S^r} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r \right), & y > 0, \\ k_N^2 Z_N \mathcal{T}_m e^{ik_1 S^t} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t, & y < 0, \end{cases} \quad (7.11)$$

$$H_m^{GO} = a_m \begin{cases} k_1^2 \left[e^{ik_1 S^i} \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i) + \mathcal{R}_m e^{ik_1 S^r} \nabla S^r \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r) \right], & y > 0, \\ k_N^2 \mathcal{T}_m e^{ik_1 S^t} \nabla S^t \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t), & y < 0, \end{cases}$$

oraz

$$E_e^{GO} = a_e \begin{cases} e^{ik_1 S^i} \nabla S^i \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i) + \mathcal{R}_e e^{ik_1 S^r} \nabla S^r \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ T_e e^{ik_1 S^t} \nabla S^t \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t), & y < 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

$$H_e^{GO} = -a_e \begin{cases} Y_1 (e^{ik_1 S^i} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^i + \mathcal{R}_e e^{ik_1 S^r} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^r), & y > 0, \\ Y_N T_e e^{ik_1 S^t} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S^t, & y < 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\mathcal{R}_m = \begin{cases} -1, & \text{ośw. } r^1, \\ R_m, & \text{ośw. } r^2, \end{cases} \quad \mathcal{R}_e = \begin{cases} 1, & \text{ośw. } r^1, \\ R_e, & \text{ośw. } r^2, \end{cases} \quad T_{e,m} = \begin{cases} 0, & \text{cień } t^1, \\ T_{e,m}, & \text{ośw. } t^2 \end{cases} \quad (7.13)$$

Przyjęto tu skrótowe oznaczenia "ośw.?" i "cień?" dla obszaru oświetlonego i obszaru cienia fali z indeksem γ . Współczynniki odbicia $R_{e,m}$ i załamania $T_{e,m}$ są dane przez

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{\nu_2 - (N^2 - \nu_1^2 - \nu_3^2)^{1/2}}{\nu_2 + (N^2 - \nu_1^2 - \nu_3^2)^{1/2}}, & T_m &= \frac{2\nu_2}{\nu_2 + (N^2 - \nu_1^2 - \nu_3^2)^{1/2}}, \\ R_e &= \frac{N^2 \nu_2 - (N^2 - \nu_1^2 - \nu_3^2)^{1/2}}{N^2 \nu_2 + (N^2 - \nu_1^2 - \nu_3^2)^{1/2}}, & T_e &= \frac{2N^2 \nu_2}{N^2 \nu_2 + (N^2 - \nu_1^2 - \nu_3^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

7.2 Fale dyfrakcyjne

Fale dyfrakcyjne stanowią drugi co do rzędu wielkości rodzaj fal w rozważanym zagadnieniu. Są one wzbudzane na krawędzi ekranu przez falę padającą. W tym przypadku $q^d(k_g) = k_g^{-1/2}$. Obszary oświetlone tych fal pokrywają się z półprzestrzeniami $y > 0$ i $y < 0$, a więc fale te nie mają obszarów cienia i stąd $\delta_g^d = 1$. Przejdziemy teraz do wyznaczenia ich faz i amplitud.

Funkcje fazy

Punktem wyjścia do znalezienia struktury promieniowej fal dyfrakcyjnych rozchodzących się w obu ośrodkach jest postulat zgodności faz fali padającej i fal dyfrakcyjnych na krawędzi \mathcal{C} ekranu

$$k_1 S^i = k_g S_g^d \quad \text{na } \mathcal{C}, \quad g = 1, N. \quad (7.15)$$

W wybranym punkcie dyfrakcji na krawędzi \mathcal{C} wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych t_1, t_2, t_3 taki, że wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{t}}_1(s)$ jest ortogonalny do krawędzi i skierowany do wewnątrz ekranu, $\hat{\mathbf{t}}_2(s) = \hat{\mathbf{y}}$ oraz $\hat{\mathbf{t}}_3(s) = \hat{\mathbf{t}}_1 \times \hat{\mathbf{t}}_2$. Wektor

\hat{t}_3 jest styczny do C . Różniczkując obie strony (7.15) względem s dostajemy w rozważanym punkcie

$$k_1 \dot{\hat{t}}_3 \cdot \nabla S^i = k_g \dot{\hat{t}}_3 \cdot \nabla S_g^d. \quad (7.16)$$

Zdefiniujemy kąty β_1 i β_N za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} \dot{\hat{t}}_3 \cdot \nabla S^i &= \dot{\hat{t}}_3 \cdot \nabla S_1^d = \cos \beta_1(s), \\ \dot{\hat{t}}_3 \cdot \nabla S_N^d &= \cos \beta_N(s), \end{aligned} \quad 0 < \beta_g < \pi. \quad (7.17)$$

Wówczas z (7.16) dostajemy związek

$$k_g \cos \beta_g(s) = k_g \cos \beta_g(s) \quad (7.18)$$

mówiący o tym, że rodziny promieni fal dyfrakcyjnych wybiegających z punktu $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o(s)$ tworzą powierzchnie stożkowe, których kąty rozwarcia są powiązane ze sobą za pośrednictwem ilorazu liczb falowych w obu ośrodkach. Z (7.17) wynika, że kąt rozwarcia stożka w ośrodku w którym propaguje się fala padająca jest równy podwojonemu kątowi, jaki tworzy promień fali padającej ze styczną do krawędzi w rozważanym punkcie dyfrakcji.

Zatem promienie dyfrakcyjne obu fal dyfrakcyjnych można zapisać w postaci

$$\mathbf{x}_g = \mathbf{x}_{o_g}(s) + \sigma_g^d \nabla S_g^d, \quad (7.19)$$

gdzie

$$\nabla S_g^d = \sin \beta_g(s) \cos \varphi \hat{t}_1 + \sin \beta_g(s) \sin \varphi \hat{t}_2 + \cos \beta_g(s) \hat{t}_3, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (7.20)$$

Eikonal fali dyfrakcyjnej na promieniu wynosi

$$S_g^d(\mathbf{x}) = \frac{k_1}{k_g} S^i[\mathbf{x}_o(s)] + \sigma_g^d. \quad (7.21)$$

Funkcje amplitudy

Postać głównego wyrazu fali dyfrakcyjnej jest wyznaczona przez (B.11) i wyraża się poprzez jacobian odwzorowania współrzędnych promieniowych do współrzędnych kartezjańskich. W danym przypadku współrzędne promieniowe σ_1 , σ_2 i σ_3 (por. Dodatek B) wynoszą

$$\sigma_1 = \sigma_g^d, \quad \sigma_2 = \varphi, \quad \sigma_3 = s. \quad (7.22)$$

Korzystając z (B.7), (7.19) i (7.20), a także z

$$\dot{\mathbf{x}}_o(s) = \dot{\hat{t}}_3, \quad \dot{\hat{t}}_1 = -\kappa \hat{t}_3, \quad \dot{\hat{t}}_2 = 0, \quad \dot{\hat{t}}_3 = \kappa \hat{t}_1, \quad (7.23)$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie względem s , a κ jest krzywizną "ze znakiem" krawędzi \mathcal{C} , dostajemy

$$j_g^d = \sigma_g^d \sin^2 \beta_g \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right), \quad (7.24)$$

gdzie

$$\rho_g^d = - \frac{\sin \beta_g}{\dot{\beta}_g + \kappa \cos \varphi}. \quad (7.25)$$

Przyjmujemy, że $\kappa > 0$ gdy krawędź ekranu jest lokalnie wypukła i $\kappa < 0$ gdy krawędź ekranu jest lokalnie wklęsła. Występującą w ostatnim wzorze pochodną kąta β można wyliczyć różniczkując pierwszą równość w (7.17) oraz (7.18) względem s i korzystając z (7.23). Wówczas ρ_g^d przyjmuje równoważną postać

$$\rho_g^d = \frac{1}{\kappa} \frac{\sin \beta_g}{\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_g} \cos \varphi_i - \cos \varphi}, \quad (7.26)$$

gdzie kąt φ_i , $\pi < \varphi_i < 2\pi$, jest mierzony między \hat{t}_1 i rzutem promienia fali padającej na płaszczyznę t_1, t_2 . Jak widać z (7.24), front fali dyfrakcyjnej ma jeden główny promień krzywizny równy ρ_g^d , zaś drugi równy zeru.

Zgodnie z (B.11), do pełnego wyznaczenia pierwszego wyrazu w rozwinięciu fal dyfrakcyjnych potrzebna jest znajomość warunku początkowego, zależnego od parametrów φ i s . Znajdziemy go odwołując się do rozwiązania asymptotycznego otrzymanego w przypadku półpłaszczyzny.

Przyjęte poprzednio założenie, że promień krzywizny krawędzi ekranu jest duży w porównaniu z długością fali możemy wyrazić poprzez krzywiznę krawędzi i liczbę falową ośrodka

$$\frac{|\kappa|}{k_g} \leq \epsilon, \quad \epsilon \ll 1. \quad (7.27)$$

Wprowadźmy współrzędne krzywoliniowe ρ, ϕ i s , gdzie ρ i ϕ są odległością od krawędzi i kątem mierzonym od powierzchni ekranu w płaszczyźnie przechodzącej przez punkt \mathbf{x} i ortogonalnej do krawędzi ekranu. Punkt przecięcia tej płaszczyzny z krawędzią określony jest trzecią współrzędną s . Zdefiniujmy obszar "wewnętrzny" przez

$$|\kappa| \rho \leq \epsilon. \quad (7.28)$$

Zakładamy, że pole w tym obszarze można przybliżyć polem, jakie wynikałoby z dyfrakcji tej samej fali padającej na *półpłaszczyźnie*, której krawędź jest styczna w punkcie $\mathbf{x}_0(s)$ do krzywoliniowej krawędzi rozważanego ekranu. Przesłanką do przyjęcia tego założenia jest fakt, że dla współrzędnych ρ, ϕ i s współczynniki metryczne wynoszą odpowiednio $h_r = 1$, $h_\phi = \rho$ i $h_s = 1 - \kappa \rho \cos \phi$, a więc w obszarze

wewnętrzny są z dokładnością do $O(\epsilon)$ takie same jak w przypadku ekranu z krawędzią prostoliniową. Rozwiązanie zagadnienia dyfrakcji na półpłaszczyźnie, opisane przez (2.57) - (2.64), jest iloczynem dwóch czynników: $\exp(ik_1 \cos \beta_1 t_3)$ i czynnika zależnego od współrzędnych ρ i ϕ (lub t_1 i t_2). Jeśli oznaczymy pole elektryczne wynikające z dyfrakcji na półpłaszczyźnie przez $E_p[t; \phi^i(s), \beta_1(s)]$, to nasze przybliżenie opisane jest przez

$$E(\mathbf{x}) = e^{ik_1 S(s) - ik_1 \cos \beta_1 t_3} E_p[t; \phi^i(s), \beta_1(s)], \quad (7.29)$$

gdzie $\phi^i(s)$ i $\beta_1(s)$ opisują położenie promienia fali padającej w punkcie $\mathbf{x}_0(s)$, a $S(s) = S^i[\mathbf{x}_0^i(s)]$. Obecność czynnika $\exp(-ik_1 \cos \beta_1 t_3)$ wynika z faktu, że zgodnie z tym co napisano poprzednio $\exp(-ik_1 \cos \beta_1 t_3) E_p$ nie zależy od t_3 , a jedynie od ρ i ϕ . Podobne wyrażenie dostajemy dla pola H . Tak określone przybliżenie nazwiemy rozwiązaniem wewnętrznym.⁹

Poszukiwana tu fala dyfrakcyjna jest składnikiem rozwiązania zewnętrznego (7.7), słusznego w obszarze "zewnątrznym" $k_g \rho \gg 1$. Obszar wewnętrzny i zewnętrzny mają wspólne niepuste przecięcie

$$k_g^{-1} \ll \rho \leq \frac{\epsilon}{|\kappa|}, \quad (7.30)$$

możemy więc porównać w nim oba rozwiązania. W tym celu rozwinimy asymptotycznie rozwiązanie wewnętrzne gdy $k_g \rho \gg 1$ i rozwiązanie zewnętrzne gdy $\epsilon \ll 1$ i porównajmy główne człony obu rozwinięć w przecięciu obszarów wewnętrznego i zewnętrznego. Pierwszy wyraz rozwinięcia pola elektrycznego związanego z falą dyfrakcyjną w rozwiązaniu wewnętrznym wynosi

$$\begin{aligned} E_g^d(\mathbf{x}) &= -\eta_g \left(\frac{\pi}{2k_g \rho \sin \beta_g} \right)^{1/2} e^{ik_1 S(s) + ik_g \sin \beta_g \rho + i\frac{3\pi}{4}} \\ &\cdot \left[\sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\csc \frac{\phi - \phi_{jg}}{2} + \csc \frac{\phi + \phi_{jg}}{2} \right) \frac{P_g[w(\phi)]}{P_g[w(\phi_{jg})]} c_g(\phi) k_g^2 Z_g p_j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\csc \frac{\phi - \phi_{jg}}{2} - \csc \frac{\phi + \phi_{jg}}{2} \right) \frac{M_g[w(\phi)]}{M_g[w(\phi_{jg})]} d_g(\phi) \frac{\eta_g q_j^g}{v_g(w_j)} \right\} \right] \\ &\quad + O[(k_g \rho)^{-3/2}] + O(\epsilon) \\ &= e^{ik_g \tilde{S}_g^d} \{ k_g^{-1/2} E_{g0}^d[t; \phi^i(s), \beta_1(s)] + O[(k_g \rho)^{-3/2}] \}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

gdzie

$$\tilde{S}_g^d(\mathbf{x}) = \frac{k_1}{k_g} S(s) + \sin \beta_g(s) \rho, \quad (7.32)$$

⁹W [56] znajdujemy to rozwiązanie wewnętrzne metodą warstwy granicznej.

E_{gv}^d jest główną amplitudą rozwinięcia zewnętrznego rozwiązania wewnętrznego, zdefiniowaną równością (7.31) i

$$c_g = \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^d, \quad d_g = [\nabla S_g^d \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^d)], \quad (7.33)$$

i gdzie φ w (7.20) jest zastąpione przez ϕ . Występujące w (7.31) kąty i funkcje od nich zależne definiowane są lokalnie we współrzędnych ρ, ϕ, s w podobny sposób, jak we współrzędnych ρ, ϕ, z w przypadku krawędzi prostoliniowej (por. (4.23) i (4.24)).

Z drugiej strony, pierwszy wyraz rozwiązania zewnętrznego opisujący falę dyfrakcyjną jest postaci

$$E_g^d(\mathbf{x}) \sim \frac{e^{ik_g S_g^d}}{\left[k_g \sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho \beta_g} \right) \right]^{1/2}} D_g^d(\varphi, s), \quad S_g^d = \frac{k_1}{k_g} S(s_g^d) + \sigma_g^d. \quad (7.34)$$

Pole to opisane jest za pomocą współrzędnych promieniowych $\sigma_g^d = R \csc \beta_g(s)$, φ i s . Współrzędne R, φ, t_3 są współrzędnymi cylindrycznymi związanymi z punktem dyfrakcji $\mathbf{x}_0(s_g^d)$. Dla ustalonego punktu obserwacji \mathbf{x} można pokazać, że z dokładnością do $O(\epsilon)$ ma miejsce $R = \rho$ i $\varphi = \phi$ oraz $s = s_g^d + R \cot \beta_g(s_g^d)$, gdzie współrzędna s_g^d opisuje punkt początkowy promienia fali dyfrakcyjnej przechodzącego przez \mathbf{x} . Rozwijając $S(s)$ w szereg potęgowy wokół $s = s_g^d$ i korzystając z (7.32) i (7.18) łatwo stwierdzić, że w obszarze wewnętrznym $\hat{S}_g^d(\mathbf{x}) = S_g^d(\mathbf{x}) + O(\epsilon)$. Także, $\sin \beta_g(s_g^d) = \sin \beta_g(s) + O(\epsilon)$ oraz $\sigma_g^d / \rho \beta_g^d = O(\epsilon)$. Zatem rozwinięcie wewnętrzne rozwiązania zewnętrznego jest z dokładnością do głównego członu równe

$$E_g^d \sim \frac{e^{ik_g \hat{S}_g^d}}{k_g^{1/2} \left[\frac{\rho}{\sin \beta_g(s)} \right]^{1/2}} D_g^d(\phi, s) \{ 1 + O[(k_g \rho)^{-1}] + O(\epsilon) \}. \quad (7.35)$$

Przyrównując rozwinięcia (7.31) i (7.35) do siebie dostajemy

$$D_g^d(\phi, s) = \left(\frac{\rho}{\sin \beta_g(s)} \right)^{1/2} E_{g0}^d[t; \phi^i(s), \beta_1(s)]. \quad (7.36)$$

Przechodząc w tej funkcji do współrzędnych promieniowych φ i s , a następnie rozwijając wynik wokół ich wartości branych w punkcie dyfrakcji dostajemy z dokładnością do $O(\epsilon)$

$$D_g^d(\varphi, s) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sin \beta_g(s)} \cdot \sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\csc \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2} + \csc \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2} \right) \frac{P_g[w(\varphi)]}{P_g(w_j)} c_g(\varphi) \eta_g k_g^2 \gamma_g p_j \right. \\ \left. - \left(\csc \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2} - \csc \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2} \right) \frac{M_g[w(\varphi)]}{M_g(w_j)} d_g(\varphi) \frac{q_j^g}{v_{gj}} \right\}, \quad (7.37)$$

gdzie

$$\begin{aligned} w(\varphi) &= -k_g \sin \beta_g \cos \varphi, \quad w_0 = -k_1 \sin \beta_1 \cos \varphi_1, \quad w_1 = -w_2 = ik_1 \cos \beta_1 \\ v_{g0} &= [(k_g \sin \beta_g)^2 - w_0^2]^{1/2}, \quad v_{g1} = v_{g2} = k_g, \end{aligned} \quad (7.38)$$

kąty β_1 i β_N są wyznaczone przez (7.17) i (7.18), a kąt φ_i określa równanie $\hat{\mathbf{t}}_2 \cdot \nabla S^i = \sin \beta_1 \sin \varphi_i$. Ponadto (por. (4.5))

$$\begin{aligned} \varphi_{0g} &= \eta_g \arccos \left(-\frac{w_0}{k_g \sin \beta_g} \right), \\ \varphi_{1g} &= \eta_g \left[\frac{\pi}{2} + i \operatorname{arsh} (\cot \beta_g) \right], \quad \varphi_{2g} = \varphi_{1g}^*. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Rozbijmy pole dyfrakcyjne na sumę pól typu TE i TM (okaże się to pomocne w następnym rozdziale). Wówczas dostajemy dla pola typu TE

$$\begin{aligned} E_m^d &\sim Z_g \frac{e^{ik_g S_g^d}}{\left[k_g \sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{1/2}} D_{m_g}^d(\varphi, s), \\ H_m^d &\sim \frac{e^{ik_g S_g^d}}{\left[k_g \sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{1/2}} \nabla S_g^d \times D_{m_g}^d(\varphi, s) \end{aligned} \quad (7.40)$$

i dla pola typu TM

$$\begin{aligned} E_c^d &\sim \frac{e^{ik_g S_g^d}}{\left[k_g \sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{1/2}} D_{e_g}^d(\varphi, s), \\ H_c^d &\sim Z_g^{-1} \frac{e^{ik_g S_g^d}}{\left[k_g \sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{1/2}} \nabla S_g^d \times D_{e_g}^d(\varphi, s), \end{aligned} \quad (7.41)$$

gdzie współczynniki dyfrakcji $D_{h_g}^d(\varphi, s)$, $h = m, e$, są równe

$$D_{m_g}^d(\varphi, s) = D_{m_g}^d(\varphi, s) \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^d, \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} D_{e_g}^d(\varphi, s) &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sin \beta_g(s)} \\ &\cdot \sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\csc \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2} + \csc \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2} \right) \frac{P_{jg}[w(\varphi)]}{P_{jg}(w_j)} k_g^2 \eta_g P_j \right\} \end{aligned} \quad (7.43)$$

i

$$D_{e_g}^d(\varphi, s) = D_{e_g}^d(\varphi, s) \nabla S_g^d \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^d), \quad (7.44)$$

$$D_{\epsilon_g}^d(\varphi, s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sin \beta_g(s)} \cdot \sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\csc \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2} - \csc \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2} \right) \frac{M_g[w(\varphi)] q_j^g}{M_g(w_j) v_{jg}} \right\}. \quad (7.45)$$

W ten sposób główny wyraz rozwinięcia asymptotycznego fal dyfrakcyjnych został wyznaczony.

Odnotujmy, że otrzymana reprezentacja asymptotyczna fal dyfrakcyjnych zawodzi na granicy cienia fal odbitych $\varphi = \varphi_{01}$ i granicy cienia fali załamanej $\varphi = \varphi_{0N}$, ze względu na osobliwości wnoszone do (7.43) i (7.45) na tych granicach przez $\csc[(\varphi - \varphi_{jg})/2] = 0$.

7.3 Fale boczne

Fale boczne są falami generowanymi na granicy ośrodków przez fale dyfrakcyjne. W ich przypadku $q^b(k_g) = k_g^{-3/2}$. Wyznamy teraz strukturę promieniową tych fal.

Funkcje fazy

Zgodnie z analizą przeprowadzoną w Rozdziale 5 zasada zgodności fazy stanowi w danym przypadku, że

$$k_g S_g^b = k_g S_g^d \quad \text{w aperturze.} \quad (7.46)$$

Różniczkując (7.46) w kierunkach stycznych do płaszczyzny rozdziału ośrodków dostajemy

$$k_g \nabla_{\perp} S_g^b = k_g \nabla_{\perp} S_g^d \quad \text{w aperturze,} \quad \nabla_{\perp} = \hat{\mathbf{t}}_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \hat{\mathbf{t}}_3 \frac{\partial}{\partial t_3}. \quad (7.47)$$

Promień dyfrakcyjny mający za początek punkt $\mathbf{x}_0(s)$ na krawędzi i biegnący stycznie do płaszczyzny apertury opisany jest za pomocą wektora kierunkowego

$$\nabla S_g^d = \nabla_{\perp} S_g^d = -\sin \beta_g \hat{\mathbf{t}}_1 + \cos \beta_g \hat{\mathbf{t}}_3. \quad (7.48)$$

Stąd, z (7.47) i (B.3) wynika, że

$$\nabla S_g^b = \frac{k_g}{k_g} \left(-\sin \beta_g \hat{\mathbf{t}}_1 + \cos \beta_g \hat{\mathbf{t}}_3 \right) + \eta_g \left(1 - \frac{k_g^2}{k_g^2} \right)^{1/2} \hat{\mathbf{t}}_2, \quad (7.49)$$

gdzie $(\cdot)^{1/2}$ jest rozumiany w sensie wartości głównej i jak poprzednio η_g równa się +1 gdy $y > 0$ i -1, gdy $y < 0$. Widać stąd, że ∇S_g^b tworzy z płaszczyzną rozdziału

ośrodków kąt równy $\arccos(k_g/k_g)$, zależny tylko od ilorazu liczb falowych w obu ośrodkach.

Zdefiniujmy kąt φ_g^b za pomocą równości¹⁰

$$\cos \varphi_g^b = -\frac{k_g \sin \beta_g}{k_g \sin \beta_g}, \quad \sin \varphi_g^b = \eta_g (1 - \cos^2 \varphi_g^b)^{1/2}. \quad (7.50)$$

Korzystając z (7.18) dostajemy

$$\left(1 - \frac{k_g^2}{k_g^2}\right)^{1/2} = \eta_g \sin \beta_g \sin \varphi_g^b,$$

a zatem ∇S_g^b możemy równoważnie zapisać w postaci (por. ∇S_g^d)

$$\nabla S_g^b = \sin \beta_g(s) \cos \varphi_g^b \hat{t}_1 + \sin \beta_g(s) \sin \varphi_g^b \hat{t}_2 + \cos \beta_g(s) \hat{t}_3. \quad (7.51)$$

Jak stąd widać, kąt utworzony przez ∇S_g^b ze styczną do krawędzi w punkcie dyfrakcji jest równy $\beta_g(s)$, zaś kąt zawarty między ekranem a rzutem ∇S_g^b na płaszczyznę ortogonalną do krawędzi w tym punkcie wynosi φ_g^b .

Jeśli $g = N$, wówczas $(1 - k_g^2/k_g^2)^{1/2} > 0$, φ_N^b jest rzeczywiste i $-\pi/2 > \varphi_N^b > -\pi$. Jeśli natomiast $g = 1$, wówczas $(1 - k_g^2/k_g^2)^{1/2} = i(k_g^2/k_g^2 - 1)^{1/2}$ i $\varphi_1^b = \pi + \text{Im} \varphi_1^b$, przy czym $\text{Im} \varphi_1^b < 0$. Promienie fali bocznej są dane przez

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_{g0}^b + \sigma_g^b \nabla S_g^b = [\mathbf{x}_0(s) + a_g^b \nabla_{\perp} S_g^d] + \sigma_g^b \nabla S_g^b \\ &= \mathbf{x}_0(s) + \left(a_g^b + \frac{k_g}{k_g} \sigma_g^b\right) (-\sin \beta_g \hat{t}_1 + \cos \beta_g \hat{t}_3) + \eta_g \left(1 - \frac{k_g^2}{k_g^2}\right)^{1/2} \sigma_g^b \hat{t}_2. \end{aligned} \quad (7.52)$$

We współrzędnych R, φ, s równanie tych promieni przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0(s) + R \cos \varphi \hat{t}_1 + R \sin \varphi \hat{t}_2 + t_3 \hat{t}_3 \\ &= \mathbf{x}_0(s) + R \cos \varphi \hat{t}_1 + R \sin \varphi \hat{t}_2 - R \sin \varphi \cos \beta_g \hat{t}_3. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Z porównania (7.52) i (7.53) dostajemy

$$\sigma_g^b = \eta_g \frac{R \sin \varphi}{\left(1 - \frac{k_g^2}{k_g^2}\right)^{1/2}} \quad (7.54)$$

oraz

$$a_g^b = \frac{R \sin(\varphi - \varphi_g^b)}{\sin \beta_g \sin \varphi_g^b}. \quad (7.55)$$

¹⁰Porównując (7.50) z (4.6): $\kappa_g \cos t_{ig} = -\kappa_g$ widać, że w przypadku półpłaszczyzny φ_g^b pokrywa się z t_{ig} .

Na promieniach fali bocznej eikonał tej fali wynosi

$$S_g^b(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{k_1}{k_g} S[\mathbf{x}_o(s)] + \sigma_g^d \right\} \frac{k_g}{k_g} + \sigma_g^b = \frac{k_1}{k_g} S[\mathbf{x}_o(s)] + \frac{k_g}{k_g} a_g^b + \sigma_g^b, \quad (7.56)$$

lub we współrzędnych R, φ, s

$$S_g^b(\mathbf{x}) = \frac{k_1}{k_g} S[\mathbf{x}_o(s)] - \frac{k_g}{k_g} \frac{R \cos \varphi}{\sin \beta_g} + \eta_g \left(1 - \frac{k_g^2}{k_g^2} \right)^{1/2} R \sin \varphi. \quad (7.57)$$

Gdy $g = 1$, wówczas $(1 - k_g^2/k_g^2)^{1/2} = i(k_N^2/k_1^2 - 1)^{1/2}$. Po wstawieniu (7.57) do (7.8) i uwzględnieniu że $R \sin \varphi = y$ widać, że fala boczna w ośrodku rzadszym optycznie maleje wykładniczo jak $\exp[-(k_N^2 - k_1^2)^{1/2} y]$ przy oddalaniu się od granicy ośrodków. Dlatego w obszarze rzadszym optycznie przyjmujemy, że $\delta^b(\mathbf{x}) = U(\phi - \pi + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. W obszarze gęstszym optycznie granica cienia fali bocznej jest powierzchnią walcową o tworzących generowanych przez promienie przechodzące przez krawędź \mathcal{C} i skierowane równoległe do ∇S_N^b (por. (7.51)). Obszar oświetlony tej fali jest zawarty między granicą cienia i aperturą, natomiast obszar jej cienia zawiera się między granicą cienia i ekranem.

Funkcje amplitudy

Na mocy (B.11) postać głównej amplitudy rozwinięcia asymptotycznego fali bocznej jest określona przez jacobian odwzorowania współrzędnych promieniowych do współrzędnych kartezjańskich. W danym przypadku współrzędne promieniowe są równe

$$\sigma_1 = \sigma_g^b, \quad \sigma_2 = a_g^b, \quad \sigma_3 = s. \quad (7.58)$$

Stosując (B.7) do (7.52) i korzystając z (7.49) i (7.23) dostajemy

$$j_g^b = \eta_g \frac{k_g}{k_g} \left(1 - \frac{k_g^2}{k_g^2} \right)^{1/2} (\kappa - \beta_g)(\rho_g^b + \sigma_g^b), \quad (7.59)$$

gdzie

$$\rho_g^b = \frac{k_g}{k_g} \left(a_g^b + \frac{\sin \beta_g}{\kappa - \beta_g} \right) = \frac{k_g}{k_g} \left(a_g^b + \rho_g^d \Big|_{\varphi=\pi} \right). \quad (7.60)$$

Z (7.59) widać, że jeden z głównych promieni krzywizny frontu fali bocznej wynosi ρ_g^b , zaś drugi jest równy nieskończoności. W związku z tym wnosimy, że główne wyrazy rozwinięć fal bocznych są następującej postaci:

dla fali typu TE

$$\begin{aligned}
 E_m^b(\mathbf{x}) &\sim \delta_g^b(\mathbf{x}) Z_g \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2} \left(1 + \frac{\sigma_g^b}{\rho_g^b}\right)^{1/2}} D_{mg}^b(a_g^b, s), \\
 H_m^b(\mathbf{x}) &\sim \delta_g^b(\mathbf{x}) \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2} \left(1 + \frac{\sigma_g^b}{\rho_g^b}\right)^{1/2}} \nabla S_g^b \times D_{mg}^b(a_g^b, s),
 \end{aligned}
 \tag{7.61}$$

dla fali typu TM

$$\begin{aligned}
 E_c^b(\mathbf{x}) &\sim \delta_g^b(\mathbf{x}) \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2} \left(1 + \frac{\sigma_g^b}{\rho_g^b}\right)^{1/2}} D_{cg}^b(a_g^b, s), \\
 H_c^b(\mathbf{x}) &\sim \delta_g^b(\mathbf{x}) Z_g^{-1} \frac{e^{ik_g S_g^b}}{k_g^{3/2} \left(1 + \frac{\sigma_g^b}{\rho_g^b}\right)^{1/2}} \nabla S_g^b \times D_{cg}^b(a_g^b, s).
 \end{aligned}
 \tag{7.62}$$

Naszym celem jest znalezienie $D_{hg}^b(a_g^b, s)$.

Punktem wyjścia do konstrukcji tych funkcji są wyniki analizy dotyczące relacji między falami dyfrakcyjnymi i bocznymi w przypadku dyfrakcji na półplaszczynie (Rozdział 5). Opierając się na tych wynikach żądamy, by na granicy ośrodków składowe styczne pola elektromagnetycznego związanego z falą dyfrakcyjną rozchodzącą się w jednym ośrodku, były równe składowym stycznemu pola elektromagnetycznego związanego z falą boczną rozchodzącą się w drugim ośrodku. W szczególności żądamy, by ta równość była spełniona w kierunku promienia dyfrakcyjnego stycznego do granicy rozdziału ośrodków \mathcal{A}

$$\mathbf{E}_{hg}^d \cdot \nabla S_g^d = \mathbf{E}_{hg}^b \cdot \nabla S_g^d \quad \text{i} \quad \mathbf{H}_{hg}^d \cdot \nabla S_g^d = \mathbf{H}_{hg}^b \cdot \nabla S_g^d \quad \text{na } \mathcal{A}. \tag{7.63}$$

Z (7.61), (7.62) i (7.46) dostajemy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{eg}^b \cdot \nabla S_g^d &\sim k_g^{-3/2} e^{ik_g S_g^d} \nabla S_g^d \cdot D_{eg}^b(a_g^b, s) \\
 \mathbf{H}_{mg}^b \cdot \nabla S_g^d &\sim k_g^{-3/2} e^{ik_g S_g^d} \nabla S_g^d \cdot \nabla S_g^b \times D_{mg}^b(a_g^b, s)
 \end{aligned}
 \tag{7.64}$$

Z drugiej strony, zgodnie z (7.34) i (7.8) mamy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{eg}^d &\sim k_g^{-1/2} e^{ik_g S_g^d} \sum_{n=0}^{\infty} (ik_g)^{-n} \mathbf{e}_{egn}^d \\
 \mathbf{H}_{mg}^d &\sim k_g^{-1/2} e^{ik_g S_g^d} \sum_{n=0}^{\infty} (ik_g)^{-n} \mathbf{h}_{mgn}^d.
 \end{aligned}
 \tag{7.65}$$

Na mocy (B.13)

$$\nabla S_g^d \cdot D_{hg}^d = 0, \tag{7.66}$$

więc dla dowolnego φ ma miejsce

$$\begin{aligned} i \quad E_{e\bar{g}}^d \cdot \nabla S_{\bar{g}}^d &\sim -ik_{\bar{g}}^{-3/2} e^{ik_{\bar{g}} S_{\bar{g}}^d} \nabla S_{\bar{g}}^d \cdot e_{e\bar{g}1} \\ H_{m\bar{g}}^d \cdot \nabla S_{\bar{g}}^d &\sim -ik_{\bar{g}}^{-3/2} e^{ik_{\bar{g}} S_{\bar{g}}^d} \nabla S_{\bar{g}}^d \cdot h_{m\bar{g}1}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Z kolei z (B.14) wynika związek między pierwszym i drugim wyrazem rozwinięcia

$$\nabla S_{\bar{g}}^d \cdot e_{e\bar{g}1}^d + \nabla \cdot e_{e\bar{g}0}^d = 0 \quad i \quad \nabla S_{\bar{g}}^d \cdot h_{m\bar{g}1}^d + \nabla \cdot h_{m\bar{g}0}^d = 0. \quad (7.68)$$

Zgodnie z (7.42) - (7.45) występujące tu funkcje $e_{e\bar{g}0}^d$ i $h_{m\bar{g}0}^d$ są równe

$$\begin{aligned} i \quad e_{e\bar{g}0}^d &= [k_{\bar{g}} \sigma_{\bar{g}}^d (1 + \sigma_{\bar{g}}^d / \rho_{\bar{g}}^d)]^{-1/2} D_{e\bar{g}}^d(\varphi, s) \nabla S_{\bar{g}}^d \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_{\bar{g}}^d) \\ h_{m\bar{g}0}^d &= [k_{\bar{g}} \sigma_{\bar{g}}^d (1 + \sigma_{\bar{g}}^d / \rho_{\bar{g}}^d)]^{-1/2} D_{m\bar{g}}^d(\varphi, s) \nabla S_{\bar{g}}^d \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_{\bar{g}}^d). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Obecne w (7.68) dywergencje wyznaczmy za pomocą $D_{h\bar{g}}^d$. Najpierw przypomnijmy, że promienie fali dyfrakcyjnej rozchodzącej się w ośrodku komplementarnym do tego w którym rozważamy falę boczną, opisane są przez

$$\mathbf{x}_{\bar{g}} = \mathbf{x}_{0\bar{g}} + \sigma_{\bar{g}}^d \nabla S_{\bar{g}}^d. \quad (7.70)$$

Posługując się kosinusami kierunkowymi $a(s)$ i $b(s)$ otrzymujemy

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = a(s)\hat{\mathbf{x}} + b(s)\hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{\mathbf{t}}_3 = -b(s)\hat{\mathbf{x}} + a(s)\hat{\mathbf{z}}, \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (7.71)$$

a następnie korzystając z (7.20) dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\bar{g}} &= [x_{0\bar{g}} + \sigma_{\bar{g}}^d (a \sin \beta_{\bar{g}} \cos \varphi - b \cos \beta_{\bar{g}})] \hat{\mathbf{x}} + \sigma_{\bar{g}}^d \sin \beta_{\bar{g}} \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + [z_{0\bar{g}} + \sigma_{\bar{g}}^d (b \sin \beta_{\bar{g}} \cos \varphi + a \cos \beta_{\bar{g}})] \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \cdot \nabla \\ &= -\sigma_{\bar{g}}^d a \sin \beta_{\bar{g}} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_{\bar{g}}^d \sin \beta_{\bar{g}} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_{\bar{g}}^d b \sin \beta_{\bar{g}} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (7.73)$$

i w końcu

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{\sigma_{\bar{g}}^d \sin \beta_{\bar{g}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{dla } \varphi = \pm \pi, \quad (\text{na } \mathcal{A}). \quad (7.74)$$

Ponieważ na \mathcal{A} mają miejsce równości $\nabla S_{\bar{g}}^d \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_{\bar{g}}^d) = \hat{\mathbf{y}}$, $D_{m\bar{g}}^d(\pi, s) = D_{e\bar{g}}^d(\pi, s) = 0$ oraz $\nabla \cdot [\nabla S_{\bar{g}}^d \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_{\bar{g}}^d)] = 0$, więc

$$\begin{aligned} i \quad \nabla \cdot e_{e\bar{g}0}^d &= k_{\bar{g}}^{-1/2} (\sigma_{\bar{g}}^d)^{-3/2} (1 + \sigma_{\bar{g}}^d / \rho_{\bar{g}}^d)^{-1/2} \eta_{\bar{g}} \csc \beta_{\bar{g}} D_{e\bar{g},\varphi}^d(\pi, s) \\ \nabla \cdot h_{m\bar{g}0}^d &= k_{\bar{g}}^{-1/2} (\sigma_{\bar{g}}^d)^{-3/2} (1 + \sigma_{\bar{g}}^d / \rho_{\bar{g}}^d)^{-1/2} \eta_{\bar{g}} \csc \beta_{\bar{g}} D_{m\bar{g},\varphi}^d(\pi, s). \end{aligned} \quad \text{na } \mathcal{A}. \quad (7.75)$$

lub

$$i \begin{aligned} E_{cg}^d \cdot \nabla S_g^d &\sim \frac{e^{ik_g S_g^d}}{(k_g \sigma_g^d)^{3/2} (1 + \sigma_g^d / \rho_g^d)^{1/2}} i \eta_g \csc \beta_g D_{cg, \varphi}^d(\pi, s) \\ H_{mg}^d \cdot \nabla S_g^d &\sim \frac{e^{ik_g S_g^d}}{(k_g \sigma_g^d)^{3/2} (1 + \sigma_g^d / \rho_g^d)^{1/2}} i \eta_g \csc \beta_g D_{mg, \varphi}^d(\pi, s) \end{aligned} \quad \text{na } \mathcal{A}. \quad (7.76)$$

Zauważmy, że D_{cg}^b jest spolaryzowana w kierunku opisanym przez wektor

$$\mathbf{w} = \frac{k_g}{k_g} \nabla S_g^b \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^b) = \nabla S_g^b \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_{g\pi}^d), \quad (7.77)$$

gdzie $\nabla S_{g\pi}^d$ jest równe ∇S_g^d wziętemu w $\varphi = \eta_g \pi$. Skorzystajmy z tożsamości

$$\nabla S_{g\pi}^d \times (\mathbf{w} \times \mathbf{E}_{cg}^b) = \mathbf{w} (\nabla S_{g\pi}^d \cdot \mathbf{E}_{cg}^b) - \mathbf{E}_{cg}^b (\nabla S_{g\pi}^d \cdot \mathbf{w}). \quad (7.78)$$

Ograniczając się do głównego wyrazu rozwinięcia asymptotycznego pola \mathbf{E}_{cg}^b widać, że wyrażenie w nawiasie po lewej stronie równości znika, a więc w ramach tego ograniczenia

$$\mathbf{E}_{cg}^b = \frac{\nabla S_{g\pi}^d \cdot \mathbf{E}_{cg}^b}{\nabla S_{g\pi}^d \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}. \quad (7.79)$$

Ostatecznie korzystając z (7.62) - (7.64) i (7.76), a także uwzględniając $\nabla S_{g\pi}^d \cdot \mathbf{w} = -\sin \beta_g \sin \varphi_g^b$ i $a_g^b = \sigma_g^d$ dostajemy

$$D_{cg}^b(a_g^b, s) = \left(\frac{k_g}{k_g} \right)^{3/2} \frac{i \eta_g (a_g^b)^{-3/2} D_{cg, \varphi}^d(\pi, s)}{\left(1 + \frac{a_g^b}{\rho_g^d} \right)^{1/2} \sin \beta_g \sin \beta_g \sin \varphi_g^b} \nabla S_g^b \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^b). \quad (7.80)$$

Postępując w podobny sposób w przypadku pola typu TE znajdujemy

$$D_{mg}^b(a_g^b, s) = - \left(\frac{k_g}{k_g} \right)^{3/2} \frac{i \eta_g (a_g^b)^{-3/2} D_{mg, \varphi}^d(\pi, s)}{\left(1 + \frac{a_g^b}{\rho_g^d} \right)^{1/2} \sin \beta_g \sin \beta_g \sin \varphi_g^b} \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^b. \quad (7.81)$$

W ten sposób zostały określone główne wyrazy fal bocznych obu typów.

Parametr a_N^b można wyrazić w postaci

$$a_N^b = \frac{\sigma_1^d \sin(\varphi - \varphi_N^b)}{\sin \varphi_N^b}, \quad (7.82)$$

gdzie σ_1^d jest odległością punktu obserwacji od punktu dyfrakcji, mierzoną wzdłuż tworzącej stożka dyfrakcyjnego o kącie rozwarcia $2\beta_1$ (por. (7.55)). Stąd, z (7.80) i (7.81) wynika, że na granicy cienia $\varphi = \varphi_N^b$ współczynniki D_{hN}^b dążą do nieskończoności i tym samym rozwinięcia fal bocznych w otoczeniu tej granicy przestają być słuszne.

7.4 Podsumowanie

W tym rozdziale zostało skonstruowane rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej na przewodzącym ekranie z krawędzią krzywoliniową, umieszczonym w płaszczyźnie rozdziału dwóch ośrodków dielektrycznych. Przyjęto, że krawędź jest opisana krzywą regularną, której promień krzywizny jest dużo większy od długości fali. Konstrukcję rozwiązania oparto na rozważaniach promieniowych.

Do konstrukcji rozwiązania przyjęto założenie, że w rozwiązaniu występują te same rodzaje fal, jakie pojawiły się w przypadku ekranu z krawędzią prostoliniową. Postać rozwiązania jest dana przez (7.7) i (7.8). Wychodząc z zasady równości faz fali generowanej i fali generującej na rozmaitości początkowej znaleziono strukturę promieniową fal występujących w zagadnieniu.

Na tych promieniach wyznaczono główne wyrazy w rozwinięciach asymptotycznych poszczególnych fal. W szczególności przy wyznaczaniu współczynników dyfrakcji określających główne amplitudy fal dyfrakcyjnych fale te, będące składnikami rozwiązania zewnętrznego, porównano we wspólnym obszarze słuszności z rozwiązaniem wewnętrznym (7.29). To drugie rozwiązanie obowiązuje w pewnym otoczeniu krawędzi ekranu i jego postać została zapostulowana przy wykorzystaniu rozwiązania ścisłego w przypadku krawędzi prostoliniowej. Z kolei w procesie znajdowania fal bocznych wykorzystano dyskusowane w Rozdziale 5 związki zachodzące między tymi falami i falami dyfrakcyjnymi.

Uzyskane wyrażenia asymptotyczne dla fal optyki geometrycznej są dane przez (7.11) - (7.13), dla fal dyfrakcyjnych — przez (7.40) - (7.45) i dla fal bocznych — przez (7.61), (7.62), (7.80) i (7.81). Znalezione rozwiązanie jest dogodne do zastosowań z dala od granic cienia fal odbitych, fali załamanej oraz fali bocznej w ośrodku gęstszym optycznie, ale zawodzi w otoczeniu tych granic. Dlatego rozwiązanie to nazwaliśmy niejednostajnym.

8 Quasi-jednostajne rozwiązanie asymptotyczne zagadnienia dyfrakcji na ekranie z krawędzią krzywoliniową

W tym rozdziale powtórnie rozważymy zagadnienie dyfrakcji fali płaskiej na ekranie z krzywoliniową krawędzią, umieszczonym na granicy ośrodków. Skonstruujemy quasi-jednostajne rozwiązanie asymptotyczne, które będzie ciągle na granicach cienia wszystkich fal. W konstrukcji oprzemy się na podejściu zastosowanym przez Witloxa w [10]. Podobnie jak w Rozdziale 6 założymy, że w strefie przejściowej pomiędzy obszarem oświetlonym i obszarem cienia fal optyki geometrycznej pole opisane jest przez całkę Fresnela, zaś w strefie przejściowej fali bocznej — przez funkcje Webera rzędu $1/2$ i $3/2$. Argumentami tych funkcji specjalnych są parametry obejścia, wyrażone poprzez różnice eikonarów fali dyfrakcyjnej oraz fali analizowanej w jej strefie przejściowej. Na granicy cienia tej grubej fali oba eikonary są identyczne i parametr obejścia staje się równy zeru. Dostatecznie daleko od granic cienia, gdzie parametry obejścia przyjmują duże wartości, funkcje specjalne mogą być rozwinięte asymptotycznie. Prowadzi to w wyniku do rozwiązania pokrywającego się z rozwiązaniem niejednostajnym, znalezionym w poprzednim rozdziale.

Zakładamy, że ogólna postać rozwiązania quasi-jednostajnego jest taka sama, jak znaleziona w Rozdziale 6 dla przypadku ekranu z krawędzią prostoliniową. Postulujemy więc, że pole całkowite jest równe sumie pola pierwotnego E_g^p zdefiniowanego w Rozdziale 2 i pola wtórnego E_g^s , które jest opisane przez

$$E_g^s = E_g^F + E_g^{sp} + E_g^B. \quad (8.1)$$

W podobny sposób wyrażone jest pole magnetyczne.

Pole E_g^F definiujemy jako

$$E_g^F = E_g^\gamma \mathcal{F}(k_g^{1/2} \xi_g^\gamma), \quad \gamma = \begin{cases} r1, & g = 1, \\ t, & g = N, \end{cases} \quad (8.2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \xi_g^\gamma &= \epsilon_g^\gamma (S_g^d - S_g^\gamma)^{1/2} \\ S_g^d &= S^d(s) + \sigma_g^d, \quad \sigma_g^d = \frac{R}{\sin \beta_g}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

a pole E_g^γ jest falą płaską

$$E_g^\gamma(\mathbf{x}) = e^{ik_g S_g^\gamma(\mathbf{x})} e_g^\gamma, \quad (8.4)$$

o amplitudzie równej

$$e_g^\gamma = -2\pi i \left[k_g^2 Z_g p_0 \hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^\gamma + \frac{\eta_g q_0^g}{v_{g0}} \nabla S_g^\gamma \times (\hat{\mathbf{y}} \times \nabla S_g^\gamma) \right]. \quad (8.5)$$

Współczynnik ϵ_g^γ jest równy $+1$ w obszarze oświetlonym fali z indeksem γ i -1 w obszarze cienia tej fali. Zakładamy, że funkcja eikonalu S_g^γ jest przedłużona analitycznie na całą półprzestrzeń, $y > 0$ albo $y < 0$, w której występuje fala z tym eikonalem. W ten sposób pole E_g^F jest również określone w całej tej półprzestrzeni. Nietrudno stwierdzić, że $e_g^\gamma = O(1)$ gdy $k_g \rightarrow \infty$.

Rozwinięć asymptotycznych pól E_g^{sp} i E_g^B gdy $k_g \rightarrow \infty$ będziemy poszukiwali w postaci

$$E_g^{sp}(\mathbf{x}) \sim k_g^{-1/2} e^{ik_g S_g^d(\mathbf{x})} \sum_{n=0}^{\infty} (ik_g)^{-n} w_{gn}(\mathbf{x}) \quad (8.6)$$

i

$$E_N^B \sim k_N^{-3/4} e^{ik_N S_N^b(\mathbf{x})} \left[W_{1/2} \left(2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \xi_N^b \right) \sum_{n=0}^{\infty} (ik_N)^{-n} g_{2n}(\mathbf{x}) + 2^{1/2} e^{-i\pi/4} k_N^{-1/2} W_{3/2} \left(2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \xi_N^b \right) \sum_{n=0}^{\infty} (ik_N)^{-n} g_{2n+1}(\mathbf{x}) \right], \quad (8.7)$$

gdzie

$$\xi_N^b = \epsilon_N^b (S_N^d - S_N^b)^{1/2}, \quad (8.8)$$

natomiast rozwinięcie pola E_1^B przyjmujemy w niezmienionej postaci w porównaniu z poprzednim rozdziałem.

Drogą rugowania pól z równań Makswella nietrudno pokazać, że całkowite pola elektryczne i magnetyczne spełniają w obu ośrodkach równania Helmholtza

$$(\Delta + k_g^2) \mathbf{E} = 0 \quad \text{i} \quad (\Delta + k_g^2) \mathbf{H} = 0. \quad (8.9)$$

Równania te będą spełnione, jeśli zażądamy, by spełniały je pola $E_g^F + E_g^{sp}$ i E_g^B

$$(\Delta + k_g^2)(E_g^F + E_g^{sp}) = 0 \quad \text{i} \quad (\Delta + k_g^2) E_g^B = 0. \quad (8.10)$$

Naturalnie zakładamy, że podobne równania spełniają pola magnetyczne.

Podstawiając do pierwszego z tych równań rozwinięcia (8.2) i (8.6) oraz korzystając z

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{F}(k_g^{1/2} \xi_g^\gamma) &= \left(\frac{k_g}{\pi} \right)^{1/2} e^{ik_g(S_g^d - S_g^\gamma)} e^{-i\pi/4} \nabla \xi_g^\gamma, \\ \Delta \mathcal{F}(k_g^{1/2} \xi_g^\gamma) &= \left(\frac{k_g}{\pi} \right)^{1/2} e^{ik_g(S_g^d - S_g^\gamma)} e^{-i\pi/4} \\ &\quad \cdot [\Delta \xi_g^\gamma + ik_g \nabla \xi_g^\gamma \cdot (\nabla S_g^d - \nabla S_g^\gamma)], \end{aligned} \quad (8.11)$$

a następnie grupując wyrazy stojące przy tych samych potęgach k_g dostajemy z głównego wyrazu równanie

$$2(\nabla S_g^d \cdot \nabla) \mathbf{w}_{g0} + \mathbf{w}_{g0} \Delta S_g^d = \pi^{-1/2} e^{i\pi/4} [2(\xi_g^\gamma \cdot \nabla) e_g^\gamma + e_g^\gamma \Delta \xi_g^\gamma]. \quad (8.12)$$

Zanim postąpimy w podobny sposób z polem E_g^B , wypiszmy przydatne związki, z których będziemy korzystali w dalszej części konstrukcji. Z

$$(\xi_g^\gamma)^2 = S_g^d - S_g^\gamma, \quad \gamma = r, t, b, \quad (8.13)$$

dostajemy

$$2\xi_g^\gamma \nabla \xi_g^\gamma = \nabla S_g^d - \nabla S_g^\gamma. \quad (8.14)$$

Z kolei stąd i z równania eikonalu (B.3) wynika

$$\nabla \xi_g^\gamma \cdot (\nabla S_g^d + \nabla S_g^\gamma) = 0. \quad (8.15)$$

Wreszcie korzystając z (8.14) i (8.15) mamy

$$2\xi_g^\gamma (\nabla \xi_g^\gamma)^2 = -2\nabla \xi_g^\gamma \cdot \nabla S_g^\gamma, \quad (8.16)$$

skąd

$$\nabla \xi_g^\gamma \cdot \nabla S_g^\gamma + \xi_g^\gamma (\nabla \xi_g^\gamma)^2 = 0. \quad (8.17)$$

Przejdźmy teraz do pola E_g^B i podstawmy jego rozwiązanie (8.7) do równania Helmholtza (8.10). Uwzględniając przy różniczkowaniu związki

$$\begin{aligned} \nabla W_{1/2}(h) &= -W_{3/2}(h) \nabla h, \\ \nabla W_{3/2}(h) &= \left[-\frac{3}{2} W_{1/2}(h) + h W_{3/2}(h) \right] \nabla h, \\ \Delta W_{1/2}(h) &= \frac{3}{2} W_{1/2}(h) (\nabla h)^2 - W_{3/2}(h) [h(\nabla h)^2 + \Delta h], \\ \Delta W_{3/2}(h) &= -\frac{3}{2} W_{1/2}(h) [h(\nabla h)^2 + \Delta h] \\ &\quad + W_{3/2}(h) \left[(\nabla h)^2 \left(\frac{5}{2} + h^2 \right) + h \Delta h \right], \end{aligned} \quad (8.18)$$

a następnie grupując w wyniku wyrazy według potęg k_g stojących przy $W_{1/2}$ i przy $W_{3/2}$ oraz korzystając z (8.17) dostajemy następujące równania transportu

$$2(\nabla S_N^b \cdot \nabla) \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \Delta S_N^b + 3\mathbf{g}_0 (\nabla \xi_N^b)^2 = 0 \quad (8.19)$$

i

$$2 \left(\nabla S_N^b \cdot \nabla \right) \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1 \Delta S_N^b + 2\xi_N^b \left[2 \left(\nabla \xi_N^b \cdot \nabla \right) \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1 \Delta \xi_N^b \right] + 5\mathbf{g}_1 \left(\nabla \xi_N^b \right)^2 \\ = 2 \left(\nabla \xi_N^b \cdot \nabla \right) \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \Delta \xi_N^b. \quad (8.20)$$

Rozwiązań równań (8.12), (8.19) i (8.20) będziemy poszukiwali we współrzędnych promieniowych. Najpierw posłużmy się (8.14), (8.15) oraz równaniem

$$2 \left[\left(\nabla \xi_g^\gamma \right)^2 + \xi_g^\gamma \Delta \xi_g^\gamma \right] = \Delta S_g^\gamma - \Delta S_g^\gamma \quad (8.21)$$

wynikającym z (8.14), do otrzymania związku

$$2 \left(\nabla \xi_g^\gamma \cdot \nabla \right) z_0^\gamma + z_0^\gamma \Delta \xi_g^\gamma = \frac{1}{y_g^d} \frac{\partial}{\partial \sigma_g^d} \left\{ \frac{y_g^d z_0^\gamma}{\xi_g^\gamma} \right\} - \frac{2 \left(\nabla S_g^\gamma \cdot \nabla \right) z_0^\gamma + z_0^\gamma \Delta S_g^\gamma}{2\xi_g^\gamma}, \quad (8.22)$$

w którym z_0^γ jest główną amplitudą w rozwinięciu asymptotycznym fali z indeksem γ . W wyprowadzeniu skorzystaliśmy z faktu, że fala ta jest rozwiązaniem równania Helmholtza, a więc zgodnie z (B.8) z_0^γ spełnia równanie

$$2 \left(\nabla S_g^\gamma \cdot \nabla \right) z_0^\gamma + z_0^\gamma \Delta S_g^\gamma = \frac{2}{y_g^d} \frac{\partial}{\partial \sigma_g^d} \left\{ y_g^\gamma z_0^\gamma \right\}. \quad (8.23)$$

W (8.22) i (8.23) stosujemy oznaczenie $y_g^\gamma = (j_g^\gamma)^{1/2}$, gdzie j jest jacobianem odwzorowania współrzędnych promieniowych do współrzędnych kartezjańskich.

Powróćmy do równania (8.12). Traktując odległość wzdłuż promienia jako zmienną, a pozostałe współrzędne promieniowe jako parametry oraz korzystając z (8.22), (8.23) i z wynikającego z (B.4) równania

$$2 \left(\nabla S_g^\gamma \cdot \nabla \right) \mathbf{e}_g^\gamma + \mathbf{e}_g^\gamma \Delta S_g^\gamma = 0 \quad (8.24)$$

stwierdzamy, że na promieniach dyfrakcyjnych równanie (8.12) przyjmuje postać

$$\frac{d}{d\sigma_g^d} \left[y_g^d \left(\mathbf{w}_{g0} - \frac{e^{i\pi/4}}{2\pi^{1/2}} \frac{\mathbf{e}_g^\gamma}{\xi_g^\gamma} \right) \right] = 0, \quad \gamma = \begin{cases} r1, & g = 1, \\ t, & g = N. \end{cases} \quad (8.25)$$

Zajmijmy się obecnie równaniem (8.19). Zauważmy, że na mocy (8.15) i (8.17)

$$\left(\nabla \xi_g^\gamma \right)^2 = -\frac{1}{\xi_g^\gamma} \frac{d\xi_g^\gamma}{d\sigma_g^\gamma} = \frac{1}{\xi_g^\gamma} \frac{d\xi_g^\gamma}{d\sigma_g^d}. \quad (8.26)$$

Z kolei z (8.22) wynika

$$3\mathbf{g}_0 \left(\nabla \xi_N^b \right)^2 = -3 \frac{\mathbf{g}_0}{\xi_N^b} \frac{d\xi_N^b}{d\sigma_N^b}. \quad (8.27)$$

Stąd i z (8.23) dostajemy

$$\frac{2}{y_N^b} \frac{d}{d\sigma_N^b} (y_N^b g_0) - 3 \frac{g_0}{\xi_N^b} \frac{d\xi_N^b}{d\sigma_N^b} = 0. \quad (8.28)$$

W wyniku prostych przekształceń tego równania ostatecznie stwierdzamy, że równanie (8.19) na promieniach fali bocznej transformuje się do

$$\frac{d}{d\sigma_N^b} \left(\frac{y_N^b g_0}{|\xi_N^b|^{3/2}} \right) = 0. \quad (8.29)$$

Rozpatrzmy wreszcie równanie (8.20). Korzystając z (8.22) i (8.26) oraz z (8.19) nietrudno sprowadzić je do postaci

$$\frac{2\xi_N^b}{y_N^d} \frac{d}{d\sigma_N^d} \left\{ \frac{y_N^d g_1}{\xi_N^b} \right\} + 5 \frac{g_1}{\xi_N^b} \frac{d\xi_N^b}{d\sigma_N^d} = \frac{1}{y_N^d} \frac{d}{d\sigma_N^d} \left\{ \frac{y_N^d g_0}{\xi_N^b} \right\} + \frac{3}{2} \frac{g_0}{(\xi_N^b)^2} \frac{d\xi_N^b}{d\sigma_N^d}. \quad (8.30)$$

Po nieskomplikowanych przekształceniach stwierdzamy, że na promieniach dyfrakcyjnych równanie (8.20) redukuje się do

$$\frac{d}{d\sigma_N^d} \left[y_N^d |\xi_N^b|^{1/2} (g_0 - 2\xi_N^b g_1) \right] = 0. \quad (8.31)$$

Po uwzględnieniu (7.24) i (7.59), z równań (8.25), (8.29) i (8.31) znajdujemy w prosty sposób

$$w_{g0} = \left[\sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{-1/2} J_g(\varphi, s) + \frac{e^{i\pi/4}}{2\pi^{1/2}} \frac{e_g^\gamma}{\xi_g^\gamma}, \quad \gamma = \begin{cases} r1, & g = 1, \\ t, & g = N, \end{cases} \quad (8.32)$$

$$g_0 = \left(1 + \frac{\sigma_N^b}{\rho_N^b} \right)^{-1/2} |\xi_N^b|^{3/2} G_0(a_N, s), \quad (8.33)$$

$$g_1 = \frac{g_0}{2\xi_N^b} + \left[\sigma_N^d \left(1 + \frac{\sigma_N^d}{\rho_N^d} \right) \right]^{-1/2} |\xi_N^b|^{-3/2} G_1(\varphi, s). \quad (8.34)$$

W wyniku podstawienia tych wielkości do (8.6) i (8.7) otrzymujemy szukane rozwinięcia asymptotyczne pól E_g^{sp} i E_g^B dla $k_g \rightarrow \infty$,

$$E_g^{sp} \sim k_g^{-1/2} e^{ik_g S_g^d} \left\{ \left[\sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{-1/2} J_g(\varphi, s) + \frac{e^{i\pi/4}}{2\pi^{1/2}} \frac{e_g^\gamma}{\xi_g^\gamma} \right\}, \quad (8.35)$$

$$\begin{aligned}
E_N^B \sim k_N^{-3/4} e^{ik_N S_N^b} & \left\{ \left[W_{1/2} \left(2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \xi_N^b \right) + \frac{W_{3/2} \left(2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \xi_N^b \right)}{2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \xi_N^b} \right] \right. \\
& \cdot \left(1 + \frac{\sigma_N^b}{\rho_N^b} \right)^{-1/2} \left| \xi_N^b \right|^{3/2} G_0(a_N, s) \\
& + W_{3/2} \left(2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \xi_N^b \right) 2^{1/2} e^{-i\pi/4} k_N^{-1/2} \left[\sigma_N^d \left(1 + \frac{\sigma_N^d}{\rho_N^d} \right) \right]^{-1/2} \left| \xi_N^b \right|^{-3/2} G_1(\varphi, s) \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{8.36}$$

W otrzymanych rozwinięciach nieznanne są jeszcze wielkości $J_g(\varphi, s)$, $G_0(a_N, s)$ i $G_1(\varphi, s)$.

Do wyznaczenia tych wielkości zastosujemy podobne podejście jak w poprzednim rozdziale, polegające na przyrównaniu we wspólnym obszarze słuszności rozwinięcia zewnętrznego rozwiązania wewnętrznego, z rozwinięciem wewnętrznym rozwiązania zewnętrznego. W odróżnieniu od poprzedniego rozdziału obecnie posłużymy się rozwinięciami quasi-jednostajnymi, a nie niejednostajnymi. Tak jak poprzednio, punktem wyjścia jest rozwiązanie wewnętrzne (7.29). Postępując podobnie jak w Rozdziale 6, dostajemy dla $k_g \rightarrow \infty$ następujące quasi-jednostajne rozwinięcie zewnętrzne rozwiązania wewnętrznego

$$\begin{aligned}
E_g^{2p} \sim -\eta_g \left(\frac{\pi}{2\kappa_g \rho} \right)^{1/2} e^{ik_g S_g^d + i\frac{3\pi}{4}} \sum_{j=0}^2 & \left\{ \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - \phi_{j2}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\phi + \phi_{j2}}{2}} \right) \frac{P_g[w(\phi)]}{P_g[w(\phi_{jg})]} c_g(\phi) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{c_g(\phi_{jg})}{\sin \frac{\phi - \phi_{j2}}{2}} \right] k_g Z_g P_j \right. \\
& \left. + \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - \phi_{j2}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\phi + \phi_{j2}}{2}} \right) \frac{M_g[w(\phi)]}{M_g[w(\phi_{jg})]} d_g(\phi) - \frac{d_g(\phi_{jg})}{\sin \frac{\phi - \phi_{j2}}{2}} \right] \frac{\eta_g}{k_g^2} \frac{q_j^o}{v_g(w_j)} \right\},
\end{aligned} \tag{8.37}$$

oraz

$$\begin{aligned}
E_N^B \sim -\frac{e^{ik_N S_N^b - i\frac{3\pi}{4}}}{2(\kappa_N \rho)^{3/4}} \sum_{j=0}^2 & \left\{ \left[\frac{1}{\cos^{3/2} \frac{\phi_{bN} - \phi}{2}} \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi_{bN} - \phi_{jN}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\phi_{bN} + \phi_{jN}}{2}} \right) \frac{P_{N1}(\kappa_N)}{P_N[w(\phi_{jN})]} \right. \right. \\
& \cdot \left[W_{1/2}(\tilde{h}) + \frac{W_{3/2}(\tilde{h})}{\tilde{h}} \right] c_N(\phi_{bN}) - \left(\frac{\phi_{bN} - \phi}{\sin \frac{\phi_{bN} - \phi}{2}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - \phi_{jN}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\phi + \phi_{jN}}{2}} \right) \\
& \cdot \frac{P_{N1}[w(\phi)]}{P_N[w(\phi_{jN})]} \frac{W_{3/2}(\tilde{h})}{\tilde{h}} c_N(\phi) \left. \right] k_N Z_N P_j - \left[\frac{1}{\cos^{3/2} \frac{\phi_{bN} - \phi}{2}} \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi_{bN} - \phi_{jN}}{2}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\sin \frac{\phi_{bN} + \phi_{jN}}{2}} \right) \frac{M_{N1}(\kappa_N)}{M_N[w(\phi_{jN})]} \left[W_{1/2}(\tilde{h}) + \frac{W_{3/2}(\tilde{h})}{\tilde{h}} \right] d_N(\phi_{bN}) \right] - \left(\frac{\phi_{bN} - \phi}{\sin \frac{\phi_{bN} - \phi}{2}} \right)^{1/2} \\
& \cdot \left. \left(\frac{1}{\sin \frac{\phi - \phi_{jN}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\phi + \phi_{jN}}{2}} \right) \frac{M_{N1}[w(\phi)]}{M_N[w(\phi_{jN})]} \frac{W_{3/2}(\tilde{h})}{\tilde{h}} d_N(\phi) \right] \frac{1}{k_N^2} \frac{q_j^N}{v_N(w_j)} \left. \right\},
\end{aligned} \tag{8.38}$$

gdzie

$$\tilde{S}_g^d = \frac{k_1}{k_g} S(s) + \rho \sin \beta_g, \quad (8.39)$$

$$\tilde{S}_N^b = \frac{k_1}{k_N} S(s) + \rho \cos(\phi_{bN} - \phi) \sin \beta_N \quad (8.40)$$

i

$$\begin{aligned} \bar{h} &= 2(k_N \rho \sin \beta_N)^{1/2} e^{i\pi/4} \sin \frac{\phi_{bN} - \phi}{2} \\ &= 2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} (2\sigma_N^d)^{1/2} \sin \beta_N \sin \frac{\phi_{bN} - \phi}{2}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

W ostatniej równości skorzystano z faktu, że z dokładnością do $O(\epsilon)$ ma miejsce $\sigma_g^d = \rho / \sin \beta_g$.

Teraz przejdźmy do rozwiązania zewnętrznego (8.35) i (8.36). Wprowadźmy oznaczenia

$$\tilde{\xi}_1^r = (2\rho \sin \beta_1)^{1/2} \sin \frac{\phi_{01} - \phi}{2} = (2\sigma_1^d)^{1/2} \sin \beta_1 \sin \frac{\phi_{01} - \phi}{2}, \quad (8.42)$$

$$\tilde{\xi}_N^t = -(2\rho \sin \beta_N)^{1/2} \sin \frac{\phi_{0N} - \phi}{2} = (2\sigma_N^d)^{1/2} \sin \beta_N \sin \frac{\phi_{0N} - \phi}{2}, \quad (8.43)$$

$$\tilde{\xi}_N^b = (2\sigma_N^d)^{1/2} \sin \beta_N \sin \frac{\phi_{bN} - \phi}{2}. \quad (8.44)$$

Zgodnie z [[19], wzór (4.14)], zachodzi związek $\xi_g^\gamma = \tilde{\xi}_g^\gamma + O[(\sigma_g^d)^{3/2}]$. Stosując ten związek w (8.35) i (8.36) dochodzimy do następujących rozwinięć wewnętrznych rozwiązania zewnętrznego

$$E_g^{sp} \sim k_g^{-1/2} e^{ik_g \tilde{S}_g^d} \left[\left(\frac{\sin \beta_g}{\rho} \right)^{1/2} \mathbf{J}_g(\phi, s) + \frac{e^{i\pi/4}}{2\pi^{1/2}} \frac{e_{\frac{\gamma}{2}}}{\tilde{\xi}_g^\gamma} \right], \quad \gamma = r, t \quad (8.45)$$

i

$$\begin{aligned} E_N^B &\sim k_N^{-3/4} e^{ik_N \tilde{S}_N^b} \left\{ W_{1/2} \left(2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \tilde{\xi}_N^b \right) \left| \tilde{\xi}_N^b \right|^{3/2} G_0(a_N, s) \right. \\ &\quad + 2^{1/2} e^{-i\pi/4} k_N^{-1/2} W_{3/2} \left(2^{1/2} e^{i\pi/4} k_N^{1/2} \tilde{\xi}_N^b \right) \left[\frac{1}{2} \epsilon_N^b \left| \tilde{\xi}_N^b \right|^{3/2} G_0(a_N, s) \right. \\ &\quad \left. \left. + \rho^{-1/2} (\sin \beta_N)^{1/2} \left| \tilde{\xi}_N^b \right|^{-3/2} G_1(\phi, s) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Przyrównamy teraz do siebie rozwinięcia zewnętrzne (8.37) i wewnętrzne (8.45) we wspólnym obszarze ich obowiązywania. Korzystając z (8.42) - (8.44) i z (4.13), a następnie przechodząc do współrzędnych promieniowych dostajemy

$$J_g(\varphi, s) = \frac{-\eta_g}{\sin \beta_g} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2}} \right) \frac{P_g[w(\varphi)]}{P_g[w(\varphi_{jg})]} c_g(\varphi) k_g Z_g p_j \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2}} \right) \frac{M_g[w(\varphi)]}{M_g[w(\varphi_{jg})]} d_g(\varphi) \frac{\eta_g}{k_g^2} \frac{q_j^g}{v_g(w_j)} \right\}. \quad (8.47)$$

W podobny sposób wyznaczmy $G_0(a_N, s)$ i $G_1(\varphi, s)$. Z przyrównania współczynników stojących przy $W_{1/2}(\cdot)$ i $W_{3/2}(\cdot)$, w rozwinięciach zewnętrznym (8.38) i wewnętrznym (8.46) we wspólnym obszarze ich obowiązywania dostajemy dwa równania dla dwóch nieznanych funkcji $G_0(a_N, s)$ i $G_1(\varphi, s)$. W szczególności przyrównanie współczynników stojących przy $W_{1/2}(\cdot)$, przy równoczesnym skorzystaniu z

$$a_N^b = -\sigma_1^d \frac{\sin(\varphi_{bN} - \varphi)}{\sin \varphi_{bN}}, \quad (8.48)$$

(por. (7.55)) oraz z (8.44) daje w wyniku

$$G_0(a_N, s) = 2^{-1/4} e^{i5\pi/8} |a_N^b|^{-3/2} (\sin \beta_1 \sin \beta_N \sin \varphi_{bN})^{-3/2} \cdot \sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi_{bN} - \varphi_{jN}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\varphi_{bN} + \varphi_{jN}}{2}} \right) \frac{P_{N1}(k_1 \sin \beta_1)}{P_N[w(\varphi_{jN})]} c_N(\varphi_{bN}) k_N Z_N p_j \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi_{bN} - \varphi_{jN}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\varphi_{bN} + \varphi_{jN}}{2}} \right) \frac{M_{N1}(k_1 \sin \beta_1)}{M_N[w(\varphi_{jN})]} d_N(\varphi_{bN}) \frac{1}{k_N^2} \frac{q_j^N}{v_N(w_j)} \right\}. \quad (8.49)$$

Z kolei z przyrównania współczynników stojących przy $W_{3/2}(\cdot)$ dostajemy

$$G_1(\varphi, s) = 2^{-7/4} e^{-i3\pi/8} \frac{c_N^b \left| \sin \frac{\varphi_{bN} - \varphi}{2} \right|^{1/2}}{\sin \beta_N} \left(\frac{\varphi_{bN} - \varphi}{\sin \frac{\varphi_{bN} - \varphi}{2}} \right)^{1/2} \cdot \sum_{j=0}^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi - \varphi_{jN}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\varphi + \varphi_{jN}}{2}} \right) \frac{P_{N1}[w(\varphi)]}{P_N[w(\varphi_{jN})]} c_N(\varphi) k_N Z_N p_j \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi - \varphi_{jN}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\varphi + \varphi_{jN}}{2}} \right) \frac{M_{N1}[w(\varphi)]}{M_N[w(\varphi_{jN})]} d_N(\varphi) \frac{1}{k_N^2} \frac{q_j^N}{v_N(w_j)} \right\}. \quad (8.50)$$

Tak więc quasi-jednostajne rozwinięcie asymptotyczne pola elektrycznego w rozważanym problemie zostało znalezione. W taki sam sposób można otrzymać mające podobną postać rozwinięcie pola magnetycznego.

Uzyskane rozwinięcie quasi-jednostajne nietrudno zredukować do rozwinięcia niejednostajnego, jeśli argumenty funkcji specjalnych występujących w tym pierwszym rozwinięciu są duże. Taka sytuacja ma miejsce, gdy $k_g \rightarrow \infty$ i punkt obserwacji nie leży na granicy cienia odpowiedniej fali.

Załóżmy najpierw, że punkt obserwacji leży dostatecznie daleko od granicy cienia fal odbitych lub fali załamanej tak, że $k_g \xi_g^\gamma$ jest duże. Wielkość ξ_g^γ jest zdefiniowana w (6.9). Wówczas korzystając z rozwinięcia asymptotycznego (6.6) całki Fresnela oraz z (8.2) i (8.6) dostajemy

$$\begin{aligned}
 E_g^F + E_g^{SP} \sim & -2\pi i e^{ik_g S^\gamma} U(\epsilon_g^\gamma) \left[k_g Z_g \rho_0 c_g(\varphi_{0g}) + \frac{\eta_g}{k_g^2 v_g(w_0)} d_g(\varphi_{0g}) \right] \\
 & - e^{ik_g S_g^d} \frac{\eta_g}{\sin \beta_g} \left(\frac{\pi}{2k_g} \right)^{1/2} e^{i3\pi/4} \left[\sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{-1/2} \\
 & \cdot \sum_{j=0}^2 \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2}} \right) \frac{P_g[w(\varphi)]}{P_g[w(\varphi_{jg})]} c_g(\varphi) k_g Z_g P_j \right. \\
 & \left. - \left(\frac{1}{\sin \frac{\varphi - \varphi_{jg}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\varphi + \varphi_{jg}}{2}} \right) \frac{M_g[w(\varphi)]}{M_g[w(\varphi_{jg})]} d_g(\varphi) \frac{\eta_g}{k_g^2 v_g(w_j)} \right].
 \end{aligned} \tag{8.51}$$

Jeżeli natomiast punkt obserwacji nie leży na granicy cienia fali bocznej i $k_N \rightarrow \infty$, wówczas w (8.36) możemy posłużyć się rozwinięciami asymptotycznymi

$$W_{1/2}(z) + \frac{W_{3/2}(z)}{z} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} e^{\frac{z^2}{2} - i\pi/2} z^{3/2} [1 + O(z^{-2})] & -\frac{5\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4}, \\ \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} e^{\frac{z^2}{2} - i\pi/2} z^{3/2} [1 + O(z^{-2})] & -\frac{\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{3\pi}{4}, \\ + \pi^{1/2} z^{3/2} [1 + O(z^{-2})] & \end{cases} \tag{8.52}$$

oraz

$$W_{3/2}(z) = \begin{cases} (2\pi)^{1/2} e^{\frac{z^2}{2} + i\frac{3}{2}\pi} z^{3/2} [1 + O(z^{-2})] & -\frac{5\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4}, \\ (2\pi)^{1/2} e^{\frac{z^2}{2} + i\frac{3}{2}\pi} z^{3/2} [1 + O(z^{-2})] + O(z^{-\frac{1}{2}}) & -\frac{\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases} \tag{8.53}$$

W wyniku tego rozwinięcie quasi-jednostajne pola E_N^B przechodzi w rozwinięcie

niejednostajne

$$E_N^B = k_N^{-1/2} e^{ik_N S_N^d - i3\pi/8 \sigma_2^{7/2} \pi^{1/2} (\epsilon_N^b)^{3/2}} \left[\sigma_g^d \left(1 + \frac{\sigma_g^d}{\rho_g^d} \right) \right]^{-1/2} G_1(\varphi, s) \\ + k_N^{-3/2} e^{ik_N S_N^b - i3\pi/8 \sigma_2^{-3/4} \pi^{1/2}} \left(1 + \frac{\sigma_N^b}{\rho_N^b} \right)^{-1/2} G_0(a_N, s). \quad (8.54)$$

Nietrudno zobaczyć, że suma członów proporcjonalnych do $\exp(ik_N S_N^d)$ w (8.51) i (8.54) jest równa głównemu wyrazowi rozwinięcia niejednostajnego fali dyfrakcyjnej w ośrodku gęstszym optycznie. Człon proporcjonalny do $\exp(ik_N S_N^b)$ przedstawia tam sobą główny wyraz rozwinięcia niejednostajnego fali bocznej.

8.1 Podsumowanie

Przedmiotem rozważań prowadzonych w tym rozdziale jest konstrukcja quasi-jednostajnego rozwiązania asymptotycznego dla analizowanego zagadnienia dyfrakcji na ekranie z krawędzią krzywoliniową. W rozważaniach założono, że struktura rozwiązania jest taka sama jak w przypadku ekranu z krawędzią prostoliniową i jest określona przez (8.1). Dwa składniki tego rozwiązania — E_g^F i E_g^{sp} zapewniają ciągłość pola całkowitego w otoczeniu granic cienia fal optyki geometrycznej, zaś trzeci składnik — E_N^B odpowiada za ciągłość tego pola w otoczeniu granicy cienia fali bocznej w ośrodku gęstszym optycznie. W ośrodku rzadszym optycznie reprezentacja fali bocznej, nie mającej tu granicy cienia, pozostaje bez zmiany w porównaniu z poprzednim rozdziałem. Asymptotykę wymienionych wyżej trzech pól założono w postaci (8.2), (8.6) i (8.7).

Rozwinięcia asymptotyczne pól E_g^{sp} i E_N^B zawierają nieznanne funkcje amplitudowe. Ograniczono się do wyznaczenia funkcji w_{g0} , g_0 i g_1 , występujących w głównych wyrazach rozwinięć obu pól. W wyniku podstawienia rozwinięć pól $E_g^F + E_g^{sp}$ i E_N^B do wektorowych równań Helmholtza znaleziono równania różniczkowe (8.12), (8.19) i (8.20) spełniane przez te funkcje. Na promieniach fal dyfrakcyjnych i bocznej równania te redukują się do prostych równań zwyczajnych (8.25), (8.29) i (8.31). Ich rozwiązania (8.32) - (8.34) zależą od trzech nieznananych funkcji $J_g(\varphi, s)$, $G_0(a_N, s)$ i $G_1(\varphi, s)$. Podobnie jak w poprzednim rozdziale funkcje te zostały znalezione na drodze porównania konstruowanego tu rozwiązania quasi-jednostajnego z rozwiązaniem wewnętrznym, opartym na rozwiązaniu ścisłym otrzymanym dla ekranu z krawędzią prostoliniową. Są one określone przez (8.47), (8.49) i (8.50). Tym samym zostało wyznaczone rozwiązanie quasi-jednostajne.

Rozwiązanie to jest ciągle na wszystkich granicach cienia występujących w zagadnieniu fal. Z dala od granic cienia, gdzie całka Fresnela i funkcje Webera mogą być zastąpione swymi rozwinięciami asymptotycznymi słusznymi dla dużego argumentu, rozwiązanie to redukuje się do rozwiązania niejednostajnego.

9 Zakończenie

W niniejszej pracy rozważono zagadnienie dyfrakcji fal elektromagnetycznych na przewodzących ekranach, umieszczonych na granicy dwóch różnych ośrodków dielektrycznych. Zagadnienie to jest znacznie bardziej złożone niż problem dyfrakcji w jednym ośrodku. W szczególności pojawiają się tu nowe typy fal — fale boczne, które wraz z falami dyfrakcyjnymi zapewniają spełnienie warunku ciągłości na granicy ośrodków. Niezależnie od atrakcyjności problemu od strony zastosowaniami technicznymi, np. przy modelowaniu procesów fotolitograficznego i propagacji fal w pobliżu brzegu morskiego, w technice zatapiających sond pola elektromagnetycznego i w technice antenowej.

Punktem wyjściowym do prowadzonych tu rozważań są rozwiązania ściśle dwuwymiarowych zagadnień dyfrakcji fal typu TE i TM na ekranie o szczególnym kształcie, jakim jest półpłaszczyzna. Zgodnie z przyjętą konwencją w literaturze oś podziału pół na typy pokrywa się z krawędzią półpłaszczyzny. Rozwiązania te posłużyły do znalezienia rozwiązania ściśłego w przypadku trójwymiarowym, gdzie padająca fala płaska rozchodzi się w kierunku skośnym względem krawędzi półpłaszczyzny. Sposób konstrukcji tego rozwiązania opiera się na podejściu zaproponowanym przez Przędzieckiego. Otrzymane rozwiązanie zawiera pola obu typów: TM i TE, niezależnie od typu pola padającego. Podział pola na typy obecnie odbywa się względem osi prostopadłej do granicy ośrodków. Pola te są sprzężone za pośrednictwem warunku określającego zachowanie pola całkowitego w otoczeniu krawędzi. Rozwiązanie ściśle wyraża się poprzez całki konturowe zdefiniowane na nieograniczonych konturach w płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

W dalszej części analizy skupiono się na zachowaniu rozwiązania w zakresie wysokoczęstotliwościowym. Posłużono się w tym celu rozważaniami wykorzystującymi techniki asymptotyczne. Skonstruowano niejednostajne i quasi-jednostajne rozwinięcia asymptotyczne rozwiązania ściśłego. Krokiem w tym kierunku było znalezienie na gruncie teorii Bleisteina rozwinięć asymptotycznych dla klasy całek dyfrakcyjnych obejmującej całki występujące w rozważanym problemie. Uzyskane rozwinięcie niejednostajne rozwiązania jest opisane przy pomocy funkcji elementarnych. Daje ono prostą zależność funkcyjną pola od parametrów zagadnienia. Posłużyło ono także do wyjaśnienia procesów falowych zachodzących w analizowanym zagadnieniu w zakresie wysokoczęstotliwościowym. Rozwinięcie to zawodzi jednak na granicach cienia występujących w zagadnieniu fal. Natomiast rozwinięcie quasi-jednostajne jest słuszne również na tych granicach, a z dala od nich przechodzi w rozwinięcie niejednostajne. Opisane jest ono przy pomocy funkcji cylindra parabolicznego. Otrzymane rozwinięcia niejednostajne i quasi-jednostajne nazwalismy odpowiednio (asymptotycznym) rozwiązaniem niejednostajnym i quasi-jednostajnym.

Korzystając z rozwiązań asymptotycznych otrzymanych dla półpłaszczyzny oraz posługując się heurystycznymi rozważaniami promieniowymi zapostulowano

i znaleziono podobne rozwiązania dla ekranu z krawędzią krzywoliniową. Otrzymano je przy założeniu, że długość fali jest mała w porównaniu z promieniem krzywizny krawędzi ekranu. Rozwiązania te obowiązują w obszarach określonych położeniem kaustyk fal dyfrakcyjnych i nie uwzględniają wtórnych oddziaływań pól dyfrakcyjnych z elementami ekranu.

Uzyskane tu rozwiązania asymptotyczne wykorzystują łatwo interpretowalny fizycznie obraz zjawisk fizycznych i związków zachodzących pomiędzy różnymi rodzajami fal. Dają one tym lepsze przybliżenie, im większa jest częstotliwość. Tym samym rozwiązania te stwarzają pożyteczną alternatywę wobec metod numerycznych, których przydatność maleje ze wzrostem częstotliwości. Pozwalają one wreszcie śledzić w sposób ciągły zależność rozwiązania od jego różnych parametrów.

Problemy analizowane w tej pracy były formułowane w ten sposób, by uwzględniały interesujący proces generacji różnych rodzajów fal w wyniku dyfrakcji zachodzącej dokładnie na granicy ośrodków, ale poza tym by były możliwie proste. Zakres stosowalności tych problemów modelowych jest niemały. Otrzymane tu wyniki mogą również stanowić punkt wyjściowy do dalszych praktycznie ważnych uogólnień, idących na przykład w kierunku zakrzywienia powierzchni rozdzielającej oba ośrodki i wprowadzenia niejednorodności lub anizotropii w tych ośrodkach.

A Funkcje $P_g(w)$ i $M_g(w)$

W tym dodatku przedstawione są wzory opisujące zachowanie funkcji $P_g(w)$ i $M_g(w)$ oraz ich pochodnych gdy $w \rightarrow \kappa_g$ i $w \rightarrow \kappa_{\bar{g}}$.

Korzystając z (2.40) i (4.12) funkcja $P_g(w)$ może być zapisana w jednej z dwóch równoważnych postaci

$$\begin{aligned} P_1(w) &= \left(\frac{\kappa_1 - w}{\kappa_N - w} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[\left(\frac{\tau^2 - \kappa_1^2}{\kappa_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[\left(\frac{\kappa_N^2 - \tau^2}{\tau^2 - \kappa_1^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

jeśli $g = 1$ oraz

$$\begin{aligned} P_N(w) &= \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[\left(\frac{\tau^2 - \kappa_1^2}{\kappa_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\} \\ &= \left(\frac{\kappa_N - w}{\kappa_1 - w} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[\left(\frac{\kappa_N^2 - \tau^2}{\tau^2 - \kappa_1^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

jeśli $g = N$. Zauważmy, że

$$\frac{P_g(w)}{P_{\bar{g}}(w)} = \left(\frac{\kappa_g - w}{\kappa_{\bar{g}} - w} \right)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

i

$$P_g(w) = O \left[(\kappa_g - w)^{1/2} \right], \quad w \rightarrow \kappa_g. \quad (\text{A.4})$$

Różniczkowanie P_g przez części prowadzi do

$$\frac{dP_g(w)}{dw} = P_g \left[-\frac{1}{2(\kappa_g - w)} + \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{d\tau}{\tau - w} \frac{\tau}{(\tau^2 - \kappa_1^2)^{1/2} (\kappa_N^2 - \tau^2)^{1/2}} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Korzystając w (A.5) z równości [57]

$$\frac{1}{\pi} \int_{ab} \frac{d\tau}{(\tau - w)(\tau - a)^\gamma} = \frac{e^{-i\pi\gamma}}{\sin \gamma\pi} \frac{1}{(w - a)^\gamma} + L(w), \quad (\text{A.6})$$

gdzie a i b są końcowymi punktami całkowania i $L(w)$ jest funkcją analityczną w pewnym otoczeniu $w = a$, dostajemy następujące reprezentacje asymptotyczne

$$\frac{dP_g(w)}{dw} = \left\{ -\frac{1}{2(\kappa_g - w)} + \left[\frac{\kappa_g}{2(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{(\kappa_g - w)^{1/2}} + O(1) \right\} P_g(w),$$

$w \rightarrow \kappa_g, \quad (A.7)$

i

$$\frac{dP_g(w)}{dw} = \left\{ \frac{1}{(\kappa_g - w)^{1/2}} \left[\frac{\kappa_g}{2(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} + O(1) \right\} P_g(w), \quad w \rightarrow \kappa_g. \quad (A.8)$$

Wreszcie z (A.7),

$$\frac{d^2 P_g(w)}{dw^2} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2(\kappa_g - w)^2} + \left[\frac{\kappa_g}{2(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{(\kappa_g - w)^{3/2}} + O[(\kappa_g - w)^{-1}] \right\} P_g(w), \quad w \rightarrow \kappa_g. \quad (A.9)$$

Funkcja $M_g(w)$, zdefiniowana w (4.12) i (2.42), przyjmuje jedną z równoważnych postaci

$$M_1(w) = \left(\frac{2}{1 + N^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[N^2 \left(\frac{\tau^2 - \kappa_1^2}{\kappa_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\} \quad (A.10)$$

$$= \left(\frac{2}{1 + N^2} \right)^{1/2} \left(\frac{\kappa_N - w}{\kappa_1 - w} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[\frac{1}{N^2} \left(\frac{\kappa_N^2 - \tau^2}{\tau^2 - \kappa_1^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\},$$

jeśli $g = 1$ oraz

$$M_N(w) = \left(\frac{2}{1 + N^2} \right)^{1/2} \left(\frac{\kappa_1 - w}{\kappa_N - w} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[N^2 \left(\frac{\tau^2 - \kappa_1^2}{\kappa_N^2 - \tau^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\}$$

$$= \left(\frac{2}{1 + N^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\kappa_1}^{\kappa_N} \frac{\arctan \left[\frac{1}{N^2} \left(\frac{\kappa_N^2 - \tau^2}{\tau^2 - \kappa_1^2} \right)^{1/2} \right]}{\tau - w} d\tau \right\}, \quad (A.11)$$

jeśli $g = N$. Zauważmy, że

$$\frac{M_g(w)}{M_{\bar{g}}(w)} = \left(\frac{\kappa_{\bar{g}} - w}{\kappa_g - w} \right)^{1/2} \quad (A.12)$$

i

$$M_g(w) = O(1), \quad w \rightarrow \kappa_g. \quad (\text{A.13})$$

Postępując jak w przypadku $P_g(w)$ dostajemy

$$\frac{dM_g(w)}{dw} = \left\{ \left[\frac{\kappa_g}{2(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} \frac{N^{2\eta_g}}{(\kappa_g - w)^{1/2}} + O(1) \right\} M_g(w), \quad w \rightarrow \kappa_g \quad (\text{A.14})$$

oraz

$$\frac{dM_g(w)}{dw} = \left\{ \frac{\kappa_g - \kappa_g}{2(\kappa_g - w)^{1/2}(\kappa_g - w)^{3/2}} + O(1) \right\} M_g(w), \quad w \rightarrow \kappa_g.$$

Wreszcie,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_g(w)}{dw^2} = & \frac{N^{2\eta_g}}{2} \left\{ \left[\frac{\kappa_g}{2(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)} \right]^{1/2} \frac{1}{(\kappa_g - w)^{3/2}} \right. \\ & \left. + \frac{\kappa_g N^{2\eta_g}}{(\kappa_g^2 - \kappa_g^2)(\kappa_g - w)} + O[(\kappa_g - w)^{-1/2}] \right\} M_g(w), \quad w \rightarrow \kappa_g. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

B Rozwiązania asymptotyczne równania Helmholtza

Weźmy pod uwagę funkcję $u(\mathbf{x})$, będącą rozwiązaniem skalarnego równania Helmholtza

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (\text{B.1})$$

i załóżmy, że rozwiązanie to można rozwinąć asymptotycznie do postaci

$$u(\mathbf{x}) \sim e^{ikS(\mathbf{x})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_m(\mathbf{x})}{(ik)^m} \quad k \rightarrow \infty. \quad (\text{B.2})$$

Podstawiając powyższe rozwinięcie do (B.1) i grupując wyrazy przy jednakowych potęgach k dostajemy równanie eikonału dla funkcji $S(\mathbf{x})$

$$(\nabla S)^2 = 1 \quad (\text{B.3})$$

i nieskończony, rekurencyjny układ równań transportu dla amplitud $z_m(\mathbf{x})$

$$2\nabla S \cdot \nabla z_m + z_m \Delta S = -\Delta z_{m-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad z_{-1} \equiv 0. \quad (\text{B.4})$$

Wyberzmy powierzchnię stałego poziomu $S(\mathbf{x}) = S_0$ i wprowadźmy rodzinę promieni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma, \sigma_2, \sigma_3)$, utworzoną z prostych ortogonalnych do $S(\mathbf{x}) = S_0$. Parametr σ jest długością mierzoną wzdłuż promienia, a σ_2 i σ_3 wybierają promień z rodziny (są stałe na promieniu). Mówiąc o promieniach będziemy dalej traktowali wielkość σ jako zmienną. Z określenia promieni wynika, że ∇S jest równoległy do $d\mathbf{x}/d\sigma$. Ale $|\nabla S| = 1$ oraz $|d\mathbf{x}/d\sigma| = 1$, a zatem

$$\nabla S = \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma}. \quad (\text{B.5})$$

W konsekwencji $1 = \nabla S \cdot d\mathbf{x}/d\sigma = dS(\mathbf{x})/d\sigma$, a więc eikonał wzdłuż promienia zmienia się zgodnie z

$$S(\mathbf{x}) = S_0 + \sigma. \quad (\text{B.6})$$

Na promieniu zachodzi również

$$\nabla S \cdot \nabla z_m = \frac{dz_m}{d\sigma}.$$

Równania $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma, \sigma_2, \sigma_3)$ można potraktować jako równania zadające odwzorowanie współrzędnych promieniowych do współrzędnych kartezjańskich. Jakobian tego odwzorowania jest równy

$$j = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \sigma_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \sigma_\nu} \operatorname{cof} \frac{\partial x_i}{\partial \sigma_\nu}, \quad \sigma_1 = \sigma. \quad (\text{B.7})$$

Nietrudno pokazać, że

$$\frac{dj}{d\sigma} = j \nabla \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = j \Delta S. \quad (\text{B.8})$$

Stąd i z (B.4) wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} (|j|^{1/2} z_m) &= |y|^{1/2} \left(\frac{dz_m}{d\sigma} + \frac{z_m}{2j} \frac{dj}{d\sigma} \right) \\ &= \frac{|j|^{1/2}}{2} (2\nabla S \cdot \nabla z_m + z_m \Delta S) - \frac{|j|^{1/2}}{2} \Delta z_{m-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Rozwiązanie tego układu równań można zapisać w postaci

$$z_m(\sigma) = \left| \frac{j(\sigma_0)}{j(\sigma)} \right|^{1/2} z_m(\sigma_0) - \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left| \frac{j(\sigma')}{j(\sigma)} \right|^{1/2} \Delta z_{m-1}(\sigma') d\sigma'. \quad (\text{B.10})$$

W szczególności,

$$z_0(\sigma) = \left| \frac{j(\sigma_0)}{j(\sigma)} \right|^{1/2} z_0(\sigma_0) = \frac{D(\sigma_2, \sigma_3)}{|j|^{1/2}(\sigma)}. \quad (\text{B.11})$$

Ponieważ w obszarze bez źródeł każda składowa pola elektromagnetycznego spełnia równanie Helmholtza (B.1), więc powyższa analiza przenosi się na przypadek pola elektromagnetycznego. W tym przypadku funkcje amplitud z_m zostają zastąpione przez funkcje wektorowe \mathbf{e}_m bądź \mathbf{h}_m , opisujące rozwinięcia asymptotyczne pól elektrycznego i magnetycznego

$$\mathbf{E} \sim e^{ikS(\mathbf{x})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{e}_m(\mathbf{x})}{(ik)^m}, \quad \mathbf{H} \sim e^{ikS(\mathbf{x})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{h}_m(\mathbf{x})}{(ik)^m}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (\text{B.12})$$

Odnajmijmy jeszcze pewne związki dotyczące amplitud \mathbf{e}_0 i \mathbf{e}_1 oraz \mathbf{h}_0 i \mathbf{h}_1 . Stosując operację dywergencji do (B.12) i zgodnie z $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ oraz $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ przyrównując do zera główny człon w rozwinięciach obu pól dostajemy

$$\nabla S \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \quad \text{i} \quad \nabla S \cdot \mathbf{h}_0 = 0. \quad (\text{B.13})$$

Natomiast z przyrównania do zera kolejnego członu wynika związek między główną i następną amplitudą w rozwinięciu asymptotycznym

$$\nabla S \cdot \mathbf{e}_1 + \nabla \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \quad \text{i} \quad \nabla S \cdot \mathbf{h}_1 + \nabla \cdot \mathbf{h}_0 = 0. \quad (\text{B.14})$$

Stosując wreszcie operację rotacji do rozwinięć w (B.12) i korzystając z równań Makswella otrzymujemy związek

$$\nabla S \times \mathbf{e}_0 = Z \mathbf{h}_0, \quad (\text{B.15})$$

który wraz z (B.13) pokazuje, że ∇S , \mathbf{e}_0 i \mathbf{h}_0 są wzajemnie prostopadłe, tak jak w przypadku elektromagnetycznej fali płaskiej.

Cytowana literatura

- [1] A. Ciarkowski, "Rozwiązanie ściśle zagadnienia dyfrakcji elektromagnetycznej fali płaskiej na przewodzącej półpłaszczyźnie umieszczonej na granicy ośrodków," Raport, Inst. Podst. Probl. Techn. PAN, 1991.
- [2] H. Stöckel, "Die Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer bzw. zwei idealeitenden Halbebenen in der Trennebene zwischen zwei homogenen isotropen Medien," *Annalen der Physik*, vol. 12, no. 3-4, str. 283-307, 1963.
- [3] S. Przeździecki, "Diffraction by a half-plane perpendicular to the distinguished axis of a uniaxially anisotropic medium," *J. Appl. Phys.*, vol. 37, str. 2768-2775, 1966.
- [4] N. Bleistein, "Uniform asymptotic expansion of integrals with stationary point near algebraic singularity," *Comm. Pure Appl. Math.*, no. 4, str. 353-370, 1966.
- [5] N. Bleistein, "Uniform asymptotic expansions of integrals with many nearby stationary points and algebraic singularities," *J. Math. Mech.*, vol. 17, str. 533-559, 1967.
- [6] N. Bleistein i R. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, rozdz. 9. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975.
- [7] L. Felsen i N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, rozdz. 1.7. New York: Prentice-Hall, 1973.
- [8] R. Coblin i L. Pearson, "A geometrical theory of diffraction for a half-plane residing on the interface between dissimilar media: transverse magnetic polarized case," *Radio Sci.*, vol. 19, no. 5, str. 1277-1288, 1984.
- [9] D. Ahluwalia, R. Lewis, i J. Boersma, "Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 16, str. 783-807, 1968.
- [10] H. Witlox, *High-frequency diffraction of elastic waves by a plane surface*. Master's thesis, Eindhoven University of Technology, Dept. Math. and Comput. Sci., 1983.
- [11] A. Rubinowicz, *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*. Warszawa: PWN, 1957.
- [12] A. Sommerfeld, "Mathematische Theorie der Diffraktion," *Math. Ann.*, vol. 47, str. 317-374, 1896.

- [13] H. Macdonald, *Electric Waves*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1902.
- [14] H. Carslaw, "Diffraction of waves by a wedge of any angle," *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 18, str. 291-306, 1919.
- [15] J. Bowman, T. Senior, i P. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*. Amsterdam: North Holland, 1969.
- [16] N. Wiener i E. Hopf, "Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen," *Sitz. Berlin. Preuss. Akad. Wiss.*, str. 696-706, 1931.
- [17] B. Noble, *Methods based on the Wiener-Hopf Technique*. London: Pergamon Press, 1958.
- [18] J. Keller, "Geometric theory of diffraction," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, str. 116-130, 1962.
- [19] R. Lewis i J. Boersma, "Uniform asymptotic theory of edge diffraction," *J. Math. Phys.*, vol. 10, no. 12, str. 2291-2305, 1969.
- [20] R. Kouyoumjian i P. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface," *Proc. IEEE*, vol. 62, str. 1448-1461, 1974.
- [21] P. Ufimcew, *Metod Krajewych Woln v Fizycznej Teorii Difrakcji*. Moskwa: Sow. Radio, 1962.
- [22] S. Lee, "Comparison of uniform asymptotic theory and Ufimtsev's theory in electromagnetic edge diffraction," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-25, str. 162-170, 1977.
- [23] J. Boersma i Y. Rahmat-Samii, "Comparison of two leading uniform theories of edge diffraction with the exact uniform asymptotic solution," *Radio Sci.*, vol. 15, no. 6, str. 1179-1194, 1980.
- [24] J. Boersma, G. Deschamps, i S. Lee, "Three papers on electromagnetic half-plane diffraction," Tech. Rep. 84-14, Electromagnetics Lab., Dept. Electrical and Computer Eng., University of Illinois, Urbana, 1984.
- [25] S. Lee i G. Deschamps, "A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved edge," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-24, str. 25-34, 1976.
- [26] S. Lee, "Uniform asymptotic theory of electromagnetic edge diffraction: A review," w *Electromagnetic Scattering*, (P. Uslenghi, ed.), str. 67-119, New York: Academic Press, 1978.

- [27] A. Ciarkowski, J. Boersma, i R. Mittra, "Plane-wave diffraction by a wedge — A spectral domain approach," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-32, no. 1, str. 20–29, 1984.
- [28] A. Heins, "The radiation and transmission properties of a pair of semi-infinite parallel plates," *Quart. Appl. Math.*, vol. 6, str. 157–166, 215–220, 1948.
- [29] L. Wajnstejn, *Teorija Difrakcii i Metod Faktorizacji*. Moskwa: Sow. Radio, 1966.
- [30] S. Lee, "Ray theory of diffraction by open-ended waveguides. I. Field in waveguides," *J. Math. Phys.*, vol. 11, str. 2830–2850, 1970.
- [31] S. Lee, "Ray theory of diffraction by open-ended waveguides. II. Applications," *J. Math. Phys.*, vol. 13, str. 656–664, 1972.
- [32] H. Yee, L. Felsen, i J. Keller, "Ray theory of reflection from the open end of a waveguide," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 16, no. 2, str. 268–300, 1968.
- [33] P. Ufimcew, "Asimptotyczna teoria difrakcji na odkrytym koncu wolnowoda," w *Teoria Elektromagnitnych Woln. Tezisy Dokladow Międzynarodowego Sympoziuma URSI*, 1971.
- [34] A. Ciarkowski, "Plane wave diffraction by a pair of parallel half-planes and by a pair of wedges," *Bull. l'Acad. Polon. Sciences, Sér. Sci. Techn.*, vol. 24, no. 7–8, str. 1–2, 1976.
- [35] J. Bowman, "Comparison of ray theory with exact theory for scattering by open waveguides," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 18, str. 818–829, 1970.
- [36] J. Boersma, "Ray-optical analysis of reflection in an open-ended parallel-plane waveguide. II: TE case," *Proc. IEEE*, vol. 62, str. 1475–1481, 1974.
- [37] J. Boersma, "Ray-optical analysis of reflection in an open-ended parallel-plane waveguide. I: TM case," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 29, str. 164–195, 1975.
- [38] E. Copson, "An integral equation method of solving plane diffraction problems," *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 186, str. 100–118, 1946.
- [39] P. Clemmow, "Radio propagation over a flat earth across a boundary separating two different media," *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 246, str. 1–55, 1953.
- [40] W. Ament, "Application of a Wiener-Hopf technique to certain diffraction problems," Tech. Rep. 4334, Naval Research Laboratory, Washington, 1954.

- [41] W. Heitman i P. van den Berg, "Diffraction of electromagnetic waves by a semi-infinite screen in a layered medium," *Can J. Phys.*, vol. 53, no. 14, str. 1305–1317, 1975.
- [42] R. du Cloux, "Pulsed electromagnetic radiation from a line source in the presence of a semi-infinite screen in the plane interface of two different media," *Wave Motion*, vol. 6, str. 459–476, 1984.
- [43] J. Volakis i J. Collins, "Electromagnetic scattering from a resistive half plane on a dielectric interface," *Wave Motion*, vol. 12, str. 81–96, 1990.
- [44] H. Kudrewicz i S. Przeździecki, "Dyfrakcja na asymetrycznej półpłaszczyźnie impedancyjnej w ośrodku jednoosiowo anizotropowym," Raport, Inst. Podst. Probl. Techn. PAN, 1980.
- [45] B. Jaskorzyńska-Dziedzic, "Dyfrakcja fali płaskiej na półpłaszczyźnie umieszczonej na granicy ośrodka izotropowego i jednoosiowo anizotropowego," Raport, Inst. Podst. Probl. Techn. PAN, 1980.
- [46] S. Przeździecki, "Diffraction by a transmissive half-plane," w *1989 URSI Int. Symp. on Electrom. Theory*, 1989.
- [47] A. Ciarkowski, "Faktoryzacja dwóch funkcji z punktami rozgałęzienia," Raport, Inst. Podst. Probl. Techn. PAN, 1990.
- [48] M. Born i E. Wolf, *Principles of Optics*, rozdz. 11. New York: Pergamon Press, 4th ed., 1970.
- [49] A. Ciarkowski, "Three-dimensional electromagnetic half-plane diffraction at the interface of different media," *Radio Sci.*, vol. 22, no. 6, str. 969–975, 1987.
- [50] G. Fichtengolc, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom II*, rozdz. 14. Warszawa: PWN, 1962.
- [51] E. Whittaker i G. Watson, *Kurs Analizy Współczesnej*, rozdz. 16.5. PWN, 1968.
- [52] A. Ciarkowski, "Uniform asymptotic expansion of an integral with a saddle point, a pole and a branch point," *Proc. R. Soc. Lond.*, no. A 426, str. 273–286, 1989.
- [53] A. Ciarkowski, "Uniform and quasi-uniform asymptotic expansions of incomplete diffraction integrals," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 48, no. 6, str. 1217–1226, 1988.

- [54] B. van der Waerden, "On the method of saddle points," *Appl. Sci. Res.*, no. B 2, str. 33-45, 1952.
- [55] A. Ciarkowski, "On the field continuity condition in the problem of electromagnetic plane wave diffraction by a half-plane residing between two media," *Wave Motion*, 1993. (w druku).
- [56] A. Ciarkowski, "Analiza fal dyfrakcyjnych w problemie ugięcia fal na granicy ośrodków," (w przygotowaniu do druku).
- [57] F. Gachow, *Krajowe zadacze*, rozdz. 1. Moskwa: Nauka, 3 wyd., 1977.