Archives of Mechanics • Archiwum Mechaniki Stosowanej • 31, 5, pp. 605–621, Warszawa 1979

II. Equation de Boltzmann non-stationnaire sur la droite: problème linéaire et non linéaire

CH. RIGOLOT-TURBAT (REIMS)

ON CONSIDÈRE l'équation de Boltzmann non-stationnaire, linèaire et nonlinèaire. Dans le cas de l'équation linéaire on démontre l'existence de semi-groupe de contraction, ce qui assure l'existence et l'unicité a la solution du problème de Cauchy pour les problèmes tant homogène que non-homogène. La forme de la solution est donnée avec la distinction de composante appartenant au sous-espace engendré par les invariants de collisions. La théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation non-linèaire est démontré, etant donné que les conditions initiales sont bornées dans l'espace $B_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$.

W pracy rozpatruje się niestacjonarne zlinearyzowane równanie Boltzmanna. W przypadku równania zlinearyzowanego dowodzi się istnienia półgrupy kontrakcji, co zapewnia istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego, zarówno dla problemu jednorodnego jak i niejednorodnego. Podana jest postać rozwiązania z wyróżnieniem składowej należącej do podprzestrzeni rozpiętej przez niezmienniki zderzeń. Dla równania nieliniowego dowodzi się twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego przy założeniu, że warunki początkowe są ograniczone w przestrzeni $B_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$.

В работе рассматривается нестационарное линеаризованное уравнение Больцмана. В случае линеаризованного уравнения доказывается существование полугруппы сжатия, что обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши так для однородной, как и неоднородной проблемы. Дается вид решения с выделением составляющей, принадлежащей к полупространству распятому на инвариантах столкновений. Для нелинейного уравнения доказывается теорема существования и единственности решения задачи Коши при предположении, что начальные условия ограничены в пространстве $B_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$.

NOUS REPRENONS ici le problème de l'étude mathématique de l'équation de Boltzmann, mais dans le cas non stationnaire. Il s'agit du problème en domaine non borné, tout d'abord pour l'équation de Boltzmann linéarisée, puis pour l'équation de Boltzmann complète, mais sur un intervalle de temps fini.

Notons pour le problème linéaire, les travaux utilisant les modèles classiques: CERCIGNANI [2], CHAHINE [3], DARROZES [4] et SIROVICH [10]. Plus récemment, ARCENIEV [1] et FETZ [5] (ce dernier considéra un problème indépendant de la variable d'espace), et SHARF [9], se sont intéressés à l'opérateur linéarisé de Boltzmann pour étudier, en fonction du temps, le comportement de la partie hydrodynamique à l'aide de solutions normales.

Le problème non léneaire n'a pu être abordé que grâce aux inéquations établies par GRAD [6] concernant l'opérateur quadratique de Boltzmann. En domaine borné, Pao s'intéressa au problème de COUETTE [8] et GRAD [6] supposa que le domaine était non borné, mais que la solution cherchée était périodique, évitant ainsi les conditions à la limite.

Réprenons l'équation de Boltzmann sous la forme indiquée en (I), pour une seule variable d'espace:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi\frac{\partial f}{\partial x}+Lf=\mathcal{T}(f,f).$$

Les propriétés de l'opérateur $L=\nu(|\boldsymbol{\xi}|)-A$ et la décomposition de f dans l'espace H (espace des fonctions de $\boldsymbol{\xi}=\xi,\eta,\zeta$ mesurables, de carré sommable, où la norme vaut $||f||_H^2=\int\limits_{\mathbf{R}^3}f^2(\boldsymbol{\xi})d\xi$ suivant $\mathcal{P}H$, noyau de L, et QH sont les mêmes qu'en (I):

$$f(x,\boldsymbol{\xi},t)=\sum_{\alpha=0}^{4}a^\alpha(x,t)\psi_\alpha(\boldsymbol{\xi})+\chi(x,\boldsymbol{\xi},t).$$

Le noyau quadratique $\mathcal{T}(f,f)$ ainsi que la forme bilinéaire associée $\mathcal{T}(f,g)$ sont des éléments de QH et, pour des potentiels "durs" les estimations suivantes, démontrées par Grad, ont lieu:

Posons $\mathcal{T}(f,g)=\gamma(|\boldsymbol{\xi}|)\Gamma(f,g)$

$$r\geqslant 1\quad \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}}[(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}|\Gamma(h,g)|]\leqslant\gamma_0\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}}[(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}|f|]\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}}[(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}|g|],$$

$$r>1\quad \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\xi}}\Big\{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}\Big[\int\limits_{\mathbf{R}^3}\Gamma^2(h,g)dx\Big]^{1/2}\Big\}$$

$$\leqslant\gamma_0\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}}[(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}|f|]\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\xi}}\Big[(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}\Big[\int\limits_{\mathbf{R}^3}g^2d\mathbf{x}\Big]^{1/2}\Big].$$

Ces estimations indiquent que l'étude du problème non linéaire devra être faite dans des espaces où la norme permettra de faire usage de ces inégalités, en effet, aucune estimation n'est valable dans l'espace H, ni dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R},H)$, espace des fonctions de x et $\boldsymbol{\xi}$ mesurables, telles que $x\to||f(x,\boldsymbol{\xi})||_H$ soit de carré sommable, et de norme $|||f|||=$ $=\{\int\limits_{\mathbf{R}}||f||_H^2dx\}^{1/2}$.

Le problème linéaire, non stationnaire, sera étudié dans H et $\mathcal{L}^2(\mathbf{R},H)$ puis repris, en vue d'étudier le problème non linéaire, dans les espaces $\mathcal{B}_r(B)$ définis comme suit: B désignera l'un quelconque des espaces $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$ ou $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$, la norme correspondante sera notée $[f]_B$, à moins que l'on ne précise explicitement B parmi ces trois espaces.

$\mathcal{B}_r(B)$ est l'espace des éléments $f(x,\boldsymbol{\xi})$ de B tels que: $\boldsymbol{\xi}\to[f(x,\boldsymbol{\xi})]_B$ ait un comportement pour la variable $\boldsymbol{\xi}$ tel que $(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}[f]_B$ soit borné, la norme choisie étant alors:

$$\langle f\rangle_{\mathcal{B}_r(B)}=\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^3}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{r/2}[f]_B$$

L'espace X désigne l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}^+,\mathcal{L}^2(\mathbf{R},H))$ des éléments $f(x,\boldsymbol{\xi},t)$ mesurables dans $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ tels que $t\to|||f|||$ soit de carré sommable sur $\mathbf{R}^+$:

$$[f]_X=\Big\{\int\limits_0^\infty|||f|||^2dt\Big\}^{1/2}.$$

Par ailleurs il y a lieu d'introduire $\vartheta(\mathbf{R}, H)$, domaine de l'opérateur $m = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \nu(|\xi|)$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$, et $\vartheta'(\mathbf{R}, H)$ son dual, ainsi que Y le domaine de m dans X, et Y' son dual:

$$||f||_{\vartheta(R,H)} = |||mf|||_{\mathcal{L}^2(\mathbf{R},H)},$$
$$[f]_Y = [mf]_X.$$

Pour le problème non linéaire, étudié sur un intervalle de temps $[0, T]$, borné, on définira $\mathbf{B}_{r,T}(B)$ l'espace des éléments de B dont la norme dans B est bornée sur $[0, T]$ et intégrable sur $[0, T]$, $B = \mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$.

Les principaux résultats établis sont les suivants:

a) Résultat concernant le problème linéaire

1. Le problème homogène à valeur initiale non nulle:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (m - A)f = 0, \quad t > 0, \quad m = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \nu(|\xi|), \tag{1}$$
$$f|_{t=0} = f_0(x, \xi),$$

admet une solution unique $f = \mathscr{C}(t) f_0$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$, où $\mathscr{C}(t)$ est le semi-groupe de contraction engendré dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$ par $(-m + A)$, ceci pourvu que f_0 appartienne à $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$. Qf appartient alors à X.

Si de plus f_0 appartient au domaine de m dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$, f est solution forte du problème dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$, $\nu(|\xi|)Qf$ appartient à X et f est tel que dans l'espace Y' soit vérifiée la relation:

$$\frac{\partial}{\partial t} Qf + \sum_{\alpha \neq 1} \frac{\partial a^\alpha}{\partial t} \psi_\alpha + \sum_{\alpha \neq 0} \xi \frac{\partial a^\alpha}{\partial x} \psi_\alpha + \left(\frac{\partial a^1}{\partial t} \psi_1 + \xi \frac{\partial a^0}{\partial x} \psi_0 \right) + Qf - AQf = 0.$$

2. Le problème non homogène à valeur initiale nulle:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (m - A)f = g, \quad t > 0, \tag{1'}$$
$$f|_{t=0} = 0$$

a une solution f unique dans $\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$, f est élément de X si g est un élément de $Q\mathcal{L}^2(\mathbf{R}, H)$ dont la norme est intégrable en t sur $[0, \infty[$.

b) Résultat concernant le problème non linéaire

Si f_0 et toutes ses dérivées en x appartiennent à $\mathscr{B}_r(\mathcal{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}))$, $r \geqslant 5$ et si f_0 et $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ sont bornées dans cet espace, pour $r > 1$ par $[8\Phi_r(T)\Psi_r(T)]^{-1}$, où $\Phi_r(T)$ et $\Psi_r(T)$ sont deux fonctions que nous construirons, le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + (m - A)f = \mathscr{T}(f, f), & t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0(x, \xi) \end{cases} \tag{2}$$

admet une solution pour tout $t \in [0, T]$, f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ appartiennent à $\mathbf{B}_{r,T}(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$ et vérifiant (2) dans $\mathbf{B}_{r-2}(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$ pour $r > 3$.

1. Equation de Boltzmann linéaire sur la droite dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$

L'équation de Boltzmann linéarisée, non stationnaire, avec second membre non nul a la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \xi \dfrac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\xi|)f - Af = g, & t > 0, \quad g \in QH, \\ f(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi), & \qquad f_0 \in \mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H). \end{cases}$$

Le problème se ramène à l'étude du cas homogène

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + mf - Af = 0, \quad t > 0, \quad m = \xi \dfrac{\partial}{\partial x} + \nu(|\xi|), \\ f(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi). \end{cases}$$

On utilisera le semi-groupe d'opérateurs engendré par m, qu'il s'agira de perturber.

LEMME 1.1.

L'opérateur m engendre un semi-groupe fortement continu dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$, dont la norme est majorée pour $t > 0$ par $\exp(-\nu(0)t)$.

L'opérateur résulvant de $(-m)$ est donné par:

$$R(\lambda, -m)f = \varepsilon Y(\varepsilon x)\xi^{-1}\exp\left(-\frac{\nu(|\xi|)+\lambda}{\xi}x\right) \ast f(x, \xi)$$

la convolution ayant lieu pour la variable x, Y est la fonction d'Heavyside, et ε vaut $+1$ pour $\xi > 0$, et -1 pour $\xi < 0$.

Il est aisé d'établir que dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$, $R(\lambda, -m)$ est borné par $\dfrac{1}{\nu(|\xi|)+\lambda}$, et dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ par $\dfrac{1}{\nu(0)+\lambda}$.

LEMME 2.2.

L'opérateur $(-m+A)$ engendre un semi-groupe de contraction dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$, soit $\mathscr{C}(t)$.

L'opérateur A étant borné dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$, la résolvante de $-m+A$ est bornée dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ par $(\nu(0)+\lambda-k)^{-1}$, pour $\lambda > k-\nu(0)$, si bien que $(-m+A)$ engendre un semi-groupe $\mathscr{C}(t)$ dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$. Mais, étant donné que $k-\nu(0)$ peut être positif, il reste à démontrer que $\mathscr{C}(t)$ est contractant.

Soit tout d'abord un élément f_0 appartenant au domaine de m dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$. $f(x, \xi, t) = \mathscr{C}(t)f_0(x, \xi)$ est alors solution forte du problème (1). Il est établi en annexe que, pour $f_0(x, \xi)$ régulier, et nul à l'infini, $(\xi\mathscr{C}(t)f_0, \mathscr{C}(t)f_0)_H$ converge vers zéro quand $x \to \infty$. Il suffit de tenir compte de: $(Lf, f)_H \leqslant -\mu\|Qf\|_H^2$ pour obtenir:

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial t}, f\right)\right) \leqslant 0$$

c'est-à-dire:

$$|||\mathscr{C}(t)f_0||| < |||f_0|||$$

inéquation qui reste vraie, par densité, pour f_0 dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$. Nous utiliserons les notations:

$$Qf = \chi(x, \xi, t),$$

$$\mathscr{P}f = \psi(x, \xi, t) = \sum_{\alpha=0}^{4} a^{\alpha}(x, t)\psi_{\alpha}(x, \xi).$$

LEMME 1.3.

(i) Les opérateurs $Q\mathscr{C}(t)$ et $\nu(|\xi|)^{1/2}Q\mathscr{C}(t)$ sont bornés de $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ dans X par $\dfrac{1}{\sqrt{2\mu}}$ et $\left[\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{k}{\mu}\right)\right]^{1/2}$.

(ii) Les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathscr{C}(t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}[\nu(|\xi|)^{1/2}Q\mathscr{C}(t)]$ sont bornés de $\vartheta(\mathbf{R}, H)$ dans X.

LEMME 1.4.

Si f_0 appartient à $\vartheta(\mathbf{R}, H)$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\xi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ appartient pour tout t à $\vartheta'(\mathbf{R}, H)$, et est un élément de Y'.

Il résulte que $A\chi$ est dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$, et $m\chi$ dans $\vartheta'(\mathbf{R}, H)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ appartient à $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$, ainsi que $\dfrac{\partial\chi}{\partial t}$. $-m\chi+A\chi-\dfrac{\partial\chi}{\partial t}$ appartient de ce fait, pour tout t à $\vartheta'(\mathbf{R}, H)$, il en est donc de même de $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\xi\partial\psi}{\partial x}$ et, pour tout élément φ de $\vartheta(\mathbf{R}, H)$:

$$\left|\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial t}+\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}, \varphi\right\rangle_{\vartheta(\mathbf{R}, H)}\right| \leqslant C_1|\varphi|_{\vartheta(\mathbf{R}, H)}|||\chi|||+C_2\left|\left|\left|\frac{\partial\chi}{\partial t}\right|\right|\right||||\varphi|||.$$

LEMME 1.5.

Si f_0 appartient à $\vartheta(\mathbf{R}, H)$, chacun des éléments suivants est dans Y'

$$\frac{\partial a^i}{\partial t}\psi_i, \quad i\neq 1, \quad \frac{\partial a^j}{\partial x}\psi_j, \quad j\neq 0, \quad \psi_1\frac{\partial a^1}{\partial t}+\psi_0\xi\frac{\partial a^0}{\partial x},$$

et $\nu(|\xi|)\chi$ est élément de X.

Il suffit de prendre pour élément φ de $\vartheta(\mathbf{R}, H)$ les fonctions:

$$\Phi_i = b(x)\psi_i(\xi), \qquad i = 0, \ldots, 4,$$

$$\Phi_{i+4} = b(x)\xi\psi_i(\xi), \qquad i = 1, \ldots, 4,$$

où $b(x)$ appartient à $\mathscr{H}^1(\mathbf{R})$. Le déterminant du système est en effet non nul.

Dans Y' on a:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\chi}{\partial t}m\chi-A\chi = 0.$$

Appliquons U, inverse de $\mathfrak{m}$: il suffit d'établir que $\nu(|\xi|)\,U\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ est élément de X.

On peut ainsi énoncer le résultat suivant:

THÉORÈME 1.1.

Soit $f(x, \xi, t) = \mathscr{C}(t)f_0(x, \xi)$ *où* $\mathscr{C}(t)$ *est le semi groupe de contraction engendré dans* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ *par* $(-\mathfrak{m}+A)$.

a) *Si* $f_0(x, \xi)$ *appartient à* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$, f *est l'unique solution dans* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ *de*

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(\mathfrak{m}-A)f = 0, \quad t > 0,$$

$$f|_{t=0} = f_0(x, \xi),$$

et Qf *est de norme dans* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ *de carré intégrable en* t.

b) *Si* f_0 *appartient au domaine de* $\mathfrak{m}$ *dans* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et } Q\frac{\partial f}{\partial t} \quad \textit{sont dans} \quad X,$$

$$\psi_i\frac{\partial a^i}{\partial t}, \quad i \neq 1; \quad \psi_j\frac{\partial a^j}{\partial x}, \quad j \neq 0; \quad \psi_1\frac{\partial a^1}{\partial t}+\xi\psi_0\frac{\partial a^0}{\partial x} \quad \textit{sont dans } Y',$$

f *est solution forte du problème posé dans* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$.

$\nu(|\xi|)\chi$ *est élément de* X *dans* Y' *on a*:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\sum_{\alpha\neq 1}\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}\psi_\alpha+\sum_{\alpha\neq 0}\xi\frac{\partial a^\alpha}{\partial x}\psi_\alpha+\left(\frac{\partial a^1}{\partial t}\psi_1+\frac{\partial a^0}{\partial x}\xi\psi_0\right)+\mathfrak{m}\chi-A\chi = 0.$$

Le problème non homogène est achevé par l'étude de:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t}+\mathfrak{m}f-Af = g, \quad t > 0, \quad g\in QH,\\ &f|_{t=0} = 0.\end{aligned}$$

La résolution est realisée par

$$f(x, \xi, t) = \int_0^t \mathscr{C}(t-\tau)g(x, \xi, \tau)d\tau,$$

dont le sens est donné dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ par le fait que pour tout élément $\varphi(x, \xi)$ de $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$, on a:

$$\Big(\big(f(x, \xi, t), \varphi(x, \xi)\big)\Big) = \int_0^t \Big(\big(\mathscr{C}(t-\tau)g(x, \xi, \tau), \varphi(x, \xi)\big)\Big)d\tau.$$

La considération du problème adjoint, conduisant à l'opérateur $\mathscr{C}^*(t)$, qui possède les mêmes propriétés que $\mathscr{C}(t)$ permet de conclure:

THÉORÈME 1.2.

Le problème non homogène (II) *admet dans* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ *une solution unique lorsque* $g(x, \xi, t)$ *appartient à* $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$. *Cette solution est donnée par*:

$$f(x, \xi, t) = \int_0^t \mathscr{C}(t-\tau)g(x, \xi, \tau)d\tau .$$

Lorsque $g(x, \xi, t)$ *est un élément de* $Q\mathscr{L}^2(\mathbf{R}, H)$ *dont la norme est intégrable en* t, f *appartient à* X.

2. Problème linéaire, non stationnaire, dans les espaces $\mathscr{B}_r(B)$

Nous intéressons au cas où $\nu(|\xi|)$ est comparable à $|\xi|$ pour $|\xi|$ infini, le problème peut être traité de manière analogue pour un comportement en $|\xi|^\mu$, $\mu > 0$. L'hypothèse $\nu(|\xi|) > b > 0$ est d'autre part fondamentale. Dans $\mathscr{B}_r(B)$, le problème:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + (m - A)f = 0, \quad t > 0,$$
$$f(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi)$$

ne peut être traité directement par la théorie des semi groupes, l'opérateur n'étant pas de domaine dense dans $\mathscr{B}_r(B)$. C'est pourquoi nous introduisons le problème tronqué (I_α) dont la solution est notée f_α, et dont il conviendra d'étudier la limite quand α tend vers l'infini, ceci afin de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 2.1.

Soit $\mathscr{B}_r^k(B)$ *l'espace des éléments qui appartiennent, ainsi que leurs* k *premières dérivées en* x, *à* $\mathscr{B}_r(B)$, *et soit* $\mathscr{D}_r^k(B)$ *le domaine de* m *dans* $\mathscr{B}_r^k(B)$.

1. *Il existe une famille d'opérateurs, non continus en* $t = 0$, *appliquant* $\mathscr{D}_r^k(B)$ *dans* $\mathscr{B}_r(B)$, *et bornée dans* $\mathscr{B}_r(B)$ *par* $\exp(k_r t)$. *Soit* $T(t, -m+A)$ *cette famille.*

11. *Pour* $k \geq 1$, $r \geq 2$, *l'élément* $f(x, \xi, t)$ *défini par*: $f(x, \xi, t) = T(t, -m+A)f_0(x, \xi)$ *est tel que* $\frac{\partial f}{\partial t}$, mf *et* Af *appartiennent à* $\mathscr{B}_{r-2}^{k-1}(B)$, *et vérifie pour* t *borné*:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + (m - A)f = 0, \quad t > 0, \quad \text{dans } \mathscr{B}_{r-2}^{k-1}(B),$$
$$f(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi) \qquad \text{dans } \mathscr{B}_r(B).$$

111. Pour $r > 2$, $f(x, \xi, t)$ *est l'unique solution de* (I) *dans* $\mathscr{B}_r(B)$ *et* $T(t, -m+A)$ *est borné dans* $\mathscr{B}_r\big(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})\big)$ *par*:

$$\exp\big(-\nu(0)t\big)\left\{\{1 + k_r t + k_r k_{r-1}\frac{t^2}{2!} + \ldots + k_r k_{r-1} \ldots k_1 \frac{t^r}{r!} + k_r \ldots k_1 k_0 \pi \frac{e^{k_0 t}}{k_0^r}\right\},$$

et dans $\mathscr{B}_r\big(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\big)$ *par*:

$$\exp\big(-\nu(0)t\big)\left\{1 + k_r t + k_r k_{r-1}\frac{t^2}{2!} + \ldots + k_r k_{r-1} \ldots k_2 k_1 \frac{t^r}{r!} + k_r \ldots k_0 \pi \frac{t^{r+1}}{(r+1)!}\right\}.$$

Définissons (I_α) par troncature de m à $|\xi| = \alpha$:

$$m_\alpha = m \quad \text{si} \quad |\xi| \leqslant \alpha,$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad |\xi| > \alpha$$

$$(\mathrm{I}_\alpha) \qquad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (m_\alpha - A) f_\alpha = 0,$$
$$f_\alpha(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi),$$

nous noterons

$$\nu_\alpha(|\xi|) = \nu(|\xi|) \quad \text{si} \quad |\xi| \leqslant \alpha,$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad |\xi| > \alpha.$$

Etablissons tout d'abord l'existence de f_α, solution de (I_α).

PROPOSITION 2.2.

L'opérateur $-m_\alpha + A$ engendre dans $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}))$ un semi groupe d'opérateurs, $T(t, -m_\alpha + A)$. $T(t, -m_\alpha + A)$ est borné par $\exp(k_r t)$ dans $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}))$ ainsi que dans l'espace $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$.

Pour chaque ξ, $R(\lambda, -m_\alpha)$ est borné par $(\nu_\alpha(|\xi|) + \lambda)^{-1}$ dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$ et dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$.

L'opérateur m_α est le domaine dense dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$, et $T(t, -m_\alpha)$ est de ce fait un semi-groupe dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$ borné par $\exp(-\nu_\alpha(|\xi|) t)$.

Dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$ par contre, $T(t, -m_\alpha)$ n'est pas un semi groupe.

La relation

$$T(t, -m_\alpha) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{t} R\left(\frac{k}{t}, -m_\alpha\right)^k$$

dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$ a aussi un sens dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$, $T(t, -m_\alpha)$ opère donc dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$, et y est borné par $\exp(-\nu_\alpha(|\xi|) t)$. Notons que dans cet espace, il est discontinu en $t = 0$.

Dans $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}))$, $T(t, -m_\alpha)$ est donc un semi groupe borné par 1, et c'est un opérateur dans $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}_\infty(\mathbf{R}))$ aussi borné par 1, mais non continu en $t = 0$.

La théorie des perturbations achève d'établir notre affirmation.

PROPOSITION 2.3.

Dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$ et $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$, on a:

$$[T(t, -m_\alpha + A) f_0]_B \leqslant \exp(-\nu_\alpha(|\xi|) t) [f_0]_B$$
$$+ \frac{k_r}{(1 + |\xi|^2)^{r/2}} \frac{\exp(k_{r-1} t) - \exp(-\nu_\alpha(|\xi|) t)}{k_{r-1} + \nu_\alpha(|\xi|)} \langle f_0 \rangle_{\mathscr{B}_{r-1}(B)}.$$

Dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$ la théorie des semi groupes permet d'écrire:

$$T(t, -m_\alpha + A) f_0 = T(t, -m_\alpha) f_0 + \int_0^t T(t - \tau, -m_\alpha) A T(\tau, -m_\alpha + A) f_0 \, d\tau,$$

d'où l'on déduit la majoration indiquée, valable aussi dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}) \cap \mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$.

PROPOSITION 2.4.

Si f_0 appartient à $\mathscr{D}_r(B)$, l'élément de $\mathscr{B}_r(B)$ défini par:

$$f_\alpha(x, \xi, t) = T(t, -m_\alpha+A)f_0(x, \xi)$$

converge quand α tend vers l'infini dans $\mathscr{B}_r(B)$, uniformément sur tout intervalle de temps borné. La famille d'opérateurs définie de $\mathscr{D}_r(B)$ dans $\mathscr{B}_r(B)$ par:

$$T(0, -m+A)f_0(x, \xi) = f_0(x, \xi),$$
$$T(t, -m+A)f_0(x, \xi) = \lim_{\alpha\to\infty} T(t, -m_\alpha+A)f_0(x, \xi)$$

est bornée dans $\mathscr{B}_r(B)$ par $\exp(k_r t)$.

Montrons que la suite f_α est de Cauchy dans $\mathscr{B}_r(B)$.

Dans l'étude de $(f_\alpha-f_\beta)$ il convient de rompre la symétrie entre α et β.

$$f_\alpha-f_\beta = \int_0^t T(t-\tau, -m_\alpha+A)\,(m_\beta-m_\alpha)f_\beta(\tau)d\tau$$

notons $\overline{\omega}_{\alpha\beta}(|\xi|)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[\alpha, \beta]$:

$$\langle f_\alpha-f_\beta\rangle_{\mathscr{B}_r(B)} \leqslant \int_0^t \exp\big(k_r(t-\tau)\big)\,\langle\overline{\omega}_{\alpha\beta} m_\beta f_\beta(\tau)\rangle_{\mathscr{B}_r(B)} d\tau.$$

Pourvu que f_0 appartienne à $\mathscr{D}_r(B)$, la relation suivante, vraie dans $\mathscr{B}_r\big(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\big)$ est encore vérifiée dans $\mathscr{B}_r\big(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})\big)$ (étant donné que $R(\lambda, -m_\alpha+A)$ commute avec $-m_\alpha+$ $+A$):

$$(-m_\beta+A)\,T(\tau, -m_\beta+A)f_0(x, \xi) = T(\tau, -m_\beta+A)\,(-m_\beta+A)f_0(x, \xi).$$

On obtiendra une majoration de $m_\beta f_\beta(\tau)$:

$$m_\beta f_\beta(\tau) = T(\tau, -m_\beta+A)\,(m_\beta-A)f_0+AT(\tau, -m_\beta+A)f_0,$$

$$\langle\overline{\omega}_{\alpha\beta}T(\tau, -m_\beta+A)\,(m_\beta-A)f_0\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}$$
$$\leqslant \langle(-m_\beta+A)f_0\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}\left\{\exp\big(-\nu(\alpha)\tau\big)+\frac{k_r}{k_{r-1}+\nu(\alpha)}\,[\exp(k_{r-1}\tau)-\exp\big(-\nu(\alpha)\tau\big)]\right\}.$$

Les calculs font apparaître une borne de $\langle f_\alpha-f_\beta\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}$:

$$\langle(-m+A)f_0\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}\Phi(t)[(1+\alpha^2)^{-1/2}+\nu(\alpha)^{-1}]$$

où $\Phi(t)$ est une fonction bornée sur tout intervalle de temps borné.

La borne de la limite de f_α dans $\mathscr{B}_r(B)$ résulte de celle de f_α.

Il reste à étudier dans quelle mesure $f(x, \xi, t)$, limite de f_α, répond au problème posé.

PROPOSITION 2.5.

Si f_0 appartient à $\mathscr{D}_r^k(B)$, l'opérateur défini par:

$$T(t, -m+A) = \lim_{\alpha\to\infty} T(t, -m_\alpha+A)$$

est borné dans $\mathscr{B}_r^k(B)$ par $\exp(k_r t)$, et, si $k \geqslant 1$ et $r \geqslant 2$,

$$f(x, \xi, t) = T(t, -m+A)f_0(x, \xi)$$

est tel que $\frac{\partial f}{\partial t}$, mf et Af appartient à $\mathscr{B}_{r-2}^{k-\frac{1}{2}}(B)$ et vérifient dans cet espace

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(m-A)f = 0, \quad t > 0, \quad \text{et, dans} \quad \mathscr{B}_r(B),$$

$$f(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi).$$

La convergence de Af_α vers Af est immédiate, et a lieu dans $\mathscr{B}_{r+1}(B)$. La première partie de la proposition provient du fait que les dérivées en x de f vérifient le même problème.

Pourvu que f_0 appartienne à $\mathscr{D}_r^k(B)$, $U(m_\alpha f_\alpha - mf)$ appartient à $\mathscr{B}_r^k(B)$, et

$$\langle U(m_\alpha f_\alpha - mf)\rangle_{\mathscr{B}_r^k(B)} \leqslant \langle \overline{\omega}_{0\alpha}(f_\alpha - f)\rangle_{\mathscr{B}_r^k(B)} + \langle \overline{\omega}_{\alpha\infty} f\rangle_{\mathscr{B}_r^k(B)}.$$

On en déduit la convergence de $m_\alpha f_\alpha - mf$ dans $\mathscr{B}_{r-2}^{k-\frac{1}{2}}(B)$. La relation $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = m_\alpha f_\alpha - Af_\alpha$ montre que, les limites étant uniformes en t, f est dérivable, et de limite $\frac{\partial f}{\partial t} = (m-A)f$ dans $\mathscr{B}_{r-2}^{k-\frac{1}{2}}(B)$.

Il reste maintenant à établir la troisième partie du théorème 2.1, c'est-à-dire à obtenir des majorations plus fines que $\exp(k_r t)$ pour $T(t, -m+A)$.

Nous utiliserons des majorations vraies dans $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R}))$ encore valables dans $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$, données par la théorie des semi groupes.

Pour cela, établissons l'identité entre $\mathscr{C}(t, -m)$, semi groupe engendré dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$ par $-m$, borné dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$ par $\exp(-\nu(|\xi|)t)$ et dans $\mathscr{B}_r(B)$ par $\exp(-\nu(0)t)$, et $T(t, -m)$, limite pour α infini de $T(t, -m_\alpha)$ dans $\mathscr{B}_r(B)$.

PROPOSITION 2.6.

Si f_0 appartient à $\mathscr{D}(B)$, $T(t, -m_\alpha)f_0(x, \xi)$ converge dans B quand α tend vers l'infini, uniformément en t, vers un élément noté $T(t, -m)f_0(x, \xi)$. $T(t, -m)$ applique $\mathscr{D}_r(B)$ dans $\mathscr{B}_r(B)$, et est limite uniforme de $T(t, -m_\alpha)$ dans $\mathscr{B}_r(B)$.

Si f_0 appartient à $\mathscr{D}_r^k(B)$, $m_\alpha T(t, -m_\alpha)f_0$ converge dans $\mathscr{B}_{r-2}^{k-\frac{1}{2}}(B)$ vers $mT(t, -m)f_0$ uniformément en t, et:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(T(t, -m)f_0\big)+mT(t, -m)f_0 = 0, \quad t > 0 \quad \text{dans} \quad \mathscr{B}_{r-2}^{k-\frac{1}{2}},$$

$$T(0, m)f_0 = f_0.$$

Dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$, $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$ et $\mathscr{B}_r(B)$, on a:

$$T(t, -m) = \mathscr{C}(t, -m)f_0,$$

$$[T(t, -m)f_0]_B \leqslant \exp\big(-\nu(|\xi|)t\big)\,[f_0]_B.$$

La convergence de $T(t, -m_\alpha)$ s'obtient en considérant:

$$f_\alpha - f_\beta = \int_0^t T(t-\tau, -m_\alpha)\,(m_\beta - m_\alpha)f_\beta(\tau)\,d\tau,$$

soit:

$$[f_\alpha - f_\beta]_B \leqslant \int_0^t \exp[-\nu_\alpha(|\xi|)\,(t-\tau)]\,\overline{\omega}_{\alpha\beta} m_\beta f_\beta(\tau)\,d\tau,$$

et pourvu que f_0 appartienne au domaine de m dans B:

$$m_\beta f_\beta(\tau) = T(\tau, -m_\beta)m_\beta f_0$$

d'où

$$[f_\alpha - f_\beta]_B \leqslant \frac{1}{\nu_\beta(|\xi|)}[mf_0]_B.$$

La démonstration faite en 2.5 s'applique pour obtenir la convergence de $m_\beta T(t, -m_\beta)f_0$. L'identité entre $T(t, -m)$ et $\mathscr{C}(t, -m)$ a lieu dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$, étant donné l'unicité de la solution.

Les majorations annoncées en 2.1 sont obtenues par itération de:

$$[T(t, -m+A)f_0]_B \leqslant \exp\big(-\nu(|\xi|)t\big)[f_0]_B + \int_0^t \exp[-\nu(|\xi|)(t-\tau)][AT(\tau, -m)f_0]_B d\tau,$$

dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})$, ou dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$, en utilisant les propriétés de A.

3. Problème non linéaire, non stationnaire

Etudions l'existence de la solution du problème à valeur initiale pour l'équation de Boltzmann non linéaire

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + mf - Af = \mathscr{T}(f, f),$$

$$f(x, \xi, 0) = f_0(x, \xi).$$

Cette étude sera faite sur un intervalle de temps borné, $[0, T]$, en fonction duquel la valeur initiale $f_0(x, \xi)$ devra être choisie, pour obtenir la convergence du processus d'itération employé.

Dans un premier temps, le problème (E) va être remplacé par sa forme intégrale (E′), où $T(t, -m+A)$ a été défini au paragraphe précédent, l'espace indiqué pour traiter le second membre est en effet $\mathscr{B}_r(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$.

$$\text{(E′)} \qquad f(x, \xi, t) = T(t, -m+A)f_0(x, \xi) + \int_0^t T(t-\tau, -m+ \\ +A)\nu(|\xi|)\Gamma\big(f(x, \xi, \tau), f(x, \xi, \tau)\big)d\tau.$$

La présence du facteur $\nu(|\xi|)$ dans l'expression précédente nous obligera à procéder à une intégration en t, afin de faire apparaître un facteur $\nu(|\xi|)^{-1}$ si bien qu'il y a lieu d'introduire les normes suivantes:

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^1_{r,T} = \max_{\xi\in\mathbf{R}^3}(1+|\xi|^2)^{r/2}\int_0^T [f(t)]_{\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})}dt,$$

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle^\infty_{r,T} = \max_{\xi\in\mathbf{R}^3}(1+|\xi|^2)^{r/2}\max_{t\in(0,T)}[f(t)]_{\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})}$$

et soit $\mathbf{B}_{r,T}$ l'espace où la norme vaut

$$\langle\langle f\rangle\rangle_{r,T} = \sup\{ \langle\!\langle f\rangle\!\rangle^{1}_{r,T}, \langle\!\langle f\rangle\!\rangle^{\infty}_{r,T}\}.$$

Reprenons dans cet espace les majorations du paragraphe précédent.

LEMME 3.1.

Pourvu que $f_0(x, \xi)$ appartienne à $\mathscr{D}^k_\varrho(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R}))$, $k \geq 1$, $\varrho \geq 2$, $T(t, -m+A)\times$ $\times f_0(x, \xi)$ admet les majorations suivantes:

$$\langle\!\langle T(t, -m+A)f_0\rangle\!\rangle^{1}_{r,T} \leq \left\langle \frac{f_0}{\nu(|\xi|)}\right\rangle_{\mathscr{B}_r(B)} + \frac{k_{r-1}}{\nu(0)} \langle\!\langle T(t, -m+A)f_0\rangle\!\rangle^{1}_{r-1,T},$$

$$\langle\langle T(t, -m+A)f_0\rangle\rangle_{r,T} \leq \frac{1}{\inf(1, \nu(0))} \langle f_0\rangle_{\mathscr{B}_r(B)} + \frac{k_{r-1}}{\nu(0)} \langle\langle T(t, -m+A)f_0\rangle\rangle_{r-1,T}.$$

Reprenons la majoration obtenue au paragraphe 2, dans $\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$:

$$[T(t, -m+A)f_0]_B \leq \exp(-\nu(\xi)t)[f_0]_B + \int_0^t \exp(-\nu(\xi)(t-\tau))[AT(\tau, -m+A)]_B d\tau$$

par application de

$$|f * g|_{\mathscr{L}^1(0,T)} \leq |f|_{\mathscr{L}^1(0,T)}|g|_{\mathscr{L}^1(0,T)},$$

on déduit le ler résultat, tandis que

$$|f * g|_{\mathscr{L}^\infty(0,T)} \leq |f|_{\mathscr{L}^\infty(0,T)}|g|_{\mathscr{L}^1(0,T)}$$

donne la deuxième inégalité.

On en déduit, par itération de ces inégalités.

LEMME 3.2.

Dans les hypothèses du lemme précédent:

$$\langle\!\langle T(t, -m+A)f_0\rangle\!\rangle^{1}_{r,T} \leq \langle f_0 \nu(\xi)^{-1}\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}(P_r + K_r e^{k_0 T}),$$

$$\langle\langle T(t, -m+A)f_0\rangle\rangle_{r,T} \leq \langle f_0\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}(P_r + K_r e^{k_0 T}),$$

$$P_r = \frac{1}{\inf(1, \nu(0))}\left\{1 + \frac{k_{r-1}}{\nu(0)} + \frac{k_{r-1}k_{r-2}}{\nu(0)^2} + \ldots + \frac{k_{r-1}\ldots k_2 k_1}{\nu(0)^{r-1}}\right\},$$

$$K_r = \frac{k_{r-1}k_{r-2}\ldots k_1 k_0}{\nu(0)^r} \sup\left(1, \frac{1}{k_0}\right).$$

Il est aisé d'atablir, à partir des majorations de Grad pour $\Gamma(f, g)$:

LEMME 3.3.

Pour $r > 1$, il existe une constante γ_0 telle que:

$$\langle\langle \Gamma(h, g)\rangle\rangle_{r,T} \leq \gamma_0 \langle\langle h\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle g\rangle\rangle_{r,T}.$$

L'étude se fait par l'itération suivante:

$$f_1 = T(t, -m+A)f_0,$$

$$f_{n+1} = T(t, -m+A)f_0 + \int_0^t T(t-\tau, -m+A)\nu(|\xi|)\Gamma(f_n(x, \xi, \tau), f_n(x, \xi, \tau))d\tau.$$

Il y a lieu d'établir qu'une telle itération a un sens dans l'espace choisi, et qu'elle converge, sous certaines conditions à préciser. C'est pourquoi nous étudierons la quantité:

$$\Phi(f, g) = \int_0^t T(t-\tau, -m+A)\nu(|\xi|)\Gamma\big(f(x, \xi, t), g(x, \xi, t)\big)d\tau.$$

PROPOSITION 3.4.

Pourvu que $h(x, \xi, t)$ et $g(x, \xi, t)$ appartiennent à D_ϱ^k, $k \geqslant 1$, $\varrho \geqslant 2$, on a, pour $r > 1$:

$$\langle\langle\Phi(h, g)\rangle\rangle_{r,T} < \Phi_r(T)\langle\langle h\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle g\rangle\rangle_{r,T}$$

où

$$\Phi_r(T) = \gamma_0\left\{1+k_r\left[P_{r-1}\sup(1, T)+K_{r-1}\exp(k_0 T)\sup\left(1, \frac{1}{k_0}\right)\right]\right\}.$$

Nous savons que, pourvu que $\nu(|\xi|)\Gamma(h, g)$ appartienne au domaine de m dans $\mathscr{B}_\varrho^k$, $k \geqslant 1$, $\varrho \geqslant 2$, on a

$$[T(t-\tau, -m+A)\nu(|\xi|)\Gamma(h(\tau), g(\tau))]_B \leqslant \exp\big(-\nu(|\xi|)\,(t-\tau)\big)\nu(|\xi|)\,[\Gamma\big(h(\tau), g(\tau)\big)]_B$$
$$+\int_0^{t-\tau} du\exp\big(-\nu(|\xi|)\,(t-\tau-u)\big)\,[AT(u, -m+A)\nu(|\xi|)\Gamma\big(h(\tau), g(\tau)\big)]_B.$$

Posons:

$$[\alpha]_B = \int_0^t \exp\big(-\gamma(|\xi|)\,(t-\tau)\big)\nu(|\xi|)\,[\Gamma\big(h(\tau), g(\tau)\big)]_B d\tau,$$

$$[\beta]_B = \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} du\exp\big(-\nu(|\xi|)\,(t-\tau-u)\big)\,[AT(u, -m+A)\nu(\xi)\Gamma\big(h(\tau), g(\tau)\big)]_B.$$

Etablissons tout d'abord que:

$$\langle\langle\alpha\rangle\rangle_{r,T} \leqslant \gamma_0\langle\langle h\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle g\rangle\rangle_{r,T}.$$

Il suffit de reconnaître dans $[\alpha]_B$ le produit de convolution en t de $\exp\big(-\nu(|\xi|)t\big)$ et de $[\nu(|\xi|)\Gamma\big(h(t), g(t)\big)]_B$. Pour le deuxième terme on a:

$$\langle\beta\rangle_{\mathscr{B}_r(B)} \leqslant k_r \int_0^t d\tau \left\langle\!\left\langle T(u, -m+A)\nu(|\xi|)\Gamma\big(h(\tau), g(\tau)\big)\right\rangle\!\right\rangle_{r-1, t-\tau}.$$

Appliquons alors le lemme 3.2, pourvu que $\nu(|\xi|)\,\Gamma\big(h(t), g(t)\big)$ appartienne à $\mathscr{D}_\varrho^k(B)$, $k \geqslant 1$, $\varrho \geqslant 2$:

$$\langle\beta\rangle_{\mathscr{B}_r(B)} \leqslant k_r \int_0^t \langle\Gamma\big(h(\tau), g(\tau)\big)\rangle_{\mathscr{B}_{r-1}(B)}\{P_{r-1}+K_{r-1}\exp[k_0(t-\tau)]\}\,d\tau,$$

d'où l'on déduit le résultat.

Ainsi si h et g appartiennent, ainsi que leurs deux premières dérivées, à $\mathscr{B}_r(B)$, $r \geqslant 4$, $\nu(|\xi|)\Gamma(h, g)$ appartient à $\mathscr{D}_\varrho^k(B)$, $k \geqslant 1$; $\varrho \geqslant 2$ et $\Phi(h, g)$ appartient à $\mathscr{B}_r(B)$, $r \geqslant 4$ ainsi que sa dérivée première en x. On peut alors conclure.

LEMME 3.5.

Si f_0 est élément de $\mathscr{B}_5^\infty(B)$, $\nu(|\xi|)\Gamma(f_n, f_n)$ appartient à $\mathscr{D}_2^\infty(B)$ pour tout n et l'itération a un sens.

Etudions pour quelle valeur de f_0 cette itération est convergente, l'intervalle $(0, T)$ étant donné.

Il est aisé d'établir les inégalités suivantes, conséquences de 3.4:

LEMME 3.6.

$$\langle\langle f_{n+1}-f_n\rangle\rangle_{r,T} < \Phi_r(t)\langle\langle f_n+f_{n-1}\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle f_n-f_{n-1}\rangle\rangle_{r,T},$$
$$\langle\langle f_n\rangle\rangle_{r,T} < \Psi_r(t)\langle\langle f_0\rangle\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}+\Phi_r(t)\langle\langle f_{n-1}^2\rangle\rangle_{r,T},$$
$$\Psi_r(t) = P_r+K_r\exp(k_0 T).$$

THÉORÈME 3.7.

Si f_0 et toutes ses dérivées en x appartiennent à $\mathscr{B}_5\big(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})\big)$ l'équation intégrale

$$f(x, \xi, t) = T(t, -m+A)f_0(x, \xi)+\int_0^t T(t-\tau, -m+A)\nu(|\xi|)\Gamma\big(f(x, \xi, \tau), g(x, \xi, \tau)\big)d\tau$$

admet, pour t appartenant à l'intervalle $(0, T)$ une solution dans $\mathbf{B}_{r,T}$ pourvu que f_0 appartienne, dans $\mathscr{B}_r\big(\mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})\big)$ à la boule définie pour chaque T par:

$$4\Phi_r(T)\Psi_r(T)\langle f_0\rangle_{\mathscr{B}_r(B)} < 1, \quad r > 1, \quad B = \mathscr{L}^2(\mathbf{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbf{R})$$

et la solution $f(x, \xi, t)$ vérifie

$$\langle\langle f(x, \xi, t)\rangle\rangle_{r,T}\, 2\Phi_r(T) < 1,$$

et est unique dans $\mathbf{B}_{r,T}$.

Le processus d'itération est en effet convergent si f_n appartient dans $\mathbf{B}_{r,T}$ à la boule de rayon A tel que:

$$\Psi_r(T)\langle f_0\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}+\Phi_r(T)A^2 < A, \quad 2A\Phi_r(T) < 1$$

(il en est alors de même de f_{n+1}).

L'existence étant établie pour la solution du problème intégral, montrons qu'elle est solution du problème (E) initialement posé: tout d'abord montrons que la solution de (E′) est dérivable par rapport à x, si f_0 est convenable.

THÉORÈME

Si f_0 et toutes ses dérivées en x appartiennent à $\mathscr{B}_5(B)$, si f_0 et $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}$ sont bornées dans $\mathscr{B}_r(B)$, $r > 1$, par $\big(8\Phi_r(T)\Psi(T)\big)^{-1}$, la solution du problème (E′) est dérivable en x, f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont bornées dans $\mathbf{B}_{r,T}$.

Dérivons formellement le problème (I) par rapport à x; et étudions le problème intégral associé:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = T(t, -m+A)\frac{\partial f_0}{\partial x}+\int_0^t T(t-\tau, -m+A)\nu(|\xi|)2\Gamma\left(f(x, \xi, \tau), \frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi, \tau)\right)d\tau.$$

L'étude précédente nous montrera, l'existence de f ayant été établie, à quelle condition $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, ceci par étude de l'itération:

$$F_1 = T(t, -m+A)F_0,$$
$$\vdots$$
$$F_{n+1} = T(t, -m+A)F_0+2\int_0^t T(t-\tau, -m+A)\nu(|\xi|)\Gamma\big(f_n(\tau), F_n(\tau)\big)d\tau.$$

On établit alors que:

$$\langle\langle F_{n+1}\rangle\rangle_{r,T} \leqslant \Psi_r(T)\left\langle\frac{\partial f_0}{\partial x}\right\rangle_{\mathscr{B}_r(B)}+2\Phi_r(T)\langle\langle f_n\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle F_n\rangle\rangle_{r,T},$$

$$\langle\langle F_{n+1}-F_n\rangle\rangle_{r,T} \leqslant 2\Phi(T)\langle\langle f_n-f_{n-1}\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle F_n\rangle\rangle_{r,T}+\langle\langle F_n-F_{n-1}\rangle\rangle_{r,T}\langle\langle f_{n-1}\rangle\rangle_{r,T}.$$

Il faut alors reprendre la majoration de $\langle\langle f_n\rangle\rangle_{r,T}$ pour montrer que si F_{n-1} et f_{n-1} sont bornées par $[4\Phi_r(T)]^{-1}$ il en est de même de F_n et f_n, ceci étant réalisé pour les conditions indiquées, la convergence de F_n ayant alors lieu.

Comme $F_n = \frac{\partial f_n}{\partial x}$, et comme la convergence a lieu uniformément en x, la limite de F_n est bien la dérivée en x de f.

Le paragraphe 2 permet d'en déduire le résultat suivant, en effet, si f_0 et ses k premières dérivées appartiennent à $\mathscr{B}_r^k(B)$, $k \geqslant 1$, $r \geqslant 2$ on a

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t, -m+A)f_0 = (-m+A)T(t, -m+A)f_0,$$

dans $\mathscr{B}_{r-2}^{k-1}(B)$ soit:

Théorème

Si f_0 appartient à $\mathscr{B}_5^\infty(B)$, la solution f du problème (E′) *vérifie le problème* (E) *dans $\mathscr{B}_{r-2}(B)$, pour $r > 3$, pourvu que f_0 et $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ soient bornées dans $\mathscr{B}_r(B)$ par* $\big(8\Phi_r(T)\Psi_r(T)\big)^{-1}$.

Annexe

Théorème

Si $f_0(x, \xi)$ est un élément de $\vartheta(R, H)$, à support compact en ξ,

$$||\mathscr{C}(t, -m+A)f_0||_H \quad et \quad ||\xi\mathscr{C}(t, -m+A)f_0||_H$$

convergent vers zéro quand x tend vers l'infini, pour t borné.

La démonstration repose sur le théorème de la convergence dominée. Soit une suite de fonctions φ_k,

a) intégrables,

b) convergeant presque partout vers une fonction φ, $k \to \infty$,

c) $|\varphi_k|$ restent majorées par une fonction intégrable fixe alors:

$$\int \varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int \varphi_k(x)dx.$$

Rappelons que pour presque tout ξ, $\mathscr{C}(t, -m)f_0$ et $\xi\mathscr{C}(t, -m)f_0$ tendent vers zéro quand x tend vers l'infini, en effet, si f_0 est élément de $\vartheta(\mathbf{R}, H)$, il en est de même de $\mathscr{C}(t, -m)f_0$, si bien que, pour presque tout ξ, $\mathscr{C}(t, -m)f_0$ et $\xi\mathscr{C}(t, -m)f_0$ appartiennent à $\mathscr{H}^1(\mathbf{R})$, ce sont donc des fonctions continues de x, nulles à l'infini, pour presque tout ξ [cf LIONS et MAGENES [7] p. 52].

Le résultat annoncé utilise la relation:

$$\mathscr{C}(t, -m+A)f_0 = \mathscr{C}(t, -m)f_0 + \int_0^t \mathscr{C}(t-\tau, -m)A\mathscr{C}(t, -m+A)f_0\,d\tau,$$

$$\mathscr{C}(t, -m+A) = \mathscr{C}(t).$$

Nous étudierons séparément les deux termes.

PROPOSITION A.1.

Si f_0 appartient à $\vartheta(\mathbf{R}, H)$, et est tel que $\operatorname{Max}_x|f_0(x, \xi)|$ et $\operatorname{Max}_x|\xi f_0(x, \xi)|$ sont des éléments de H, $\|\mathscr{C}(t, -m)f_0\|_H$ et $\|\xi\mathscr{C}(t, -m)f_0\|_H$ convergent vers zéro quand x tend vers l'inifini.

$(\mathscr{C}(t, -m)f_0)^2$ et $(\xi\mathscr{C}(t, -m)f_0)^2$ sont des fonctions intégrables en ξ dans $\mathbf{R}^3$ et convergent pour presque tout ξ vers zéro quand $x \to \infty$.

Il s'agit donc d'établir que ces quantirés sont bornées indépendamment de x par des fonctions intégrables en ξ.

L'expression de la résolvante de $-m$ permet en effet de montrer que

$$\operatorname{Max}_x|\mathscr{C}(t, -m)f_0| \leqslant \exp\big(-\nu(0)t\big)\operatorname{Max}_x|f_0(x, \xi)|,$$

$$\operatorname{Max}_x|\xi\mathscr{C}(t, -m)f_0| \leqslant \exp\big(-\nu(0)t\big)\operatorname{Max}_x|\xi f_0(x, \xi)|.$$

Une propriété analogue, énoncée à la proposition suivante utilise le lemme:

LEMME A.1.

Si $\operatorname{Max}_x|f_0(x, \xi)|$ est élément de H, on a

$$\operatorname{Max}_x\|\mathscr{C}(t, -m+A)f_0\|_H \leqslant \exp[(-\nu(0)+k)t]\operatorname{Max}_x\|f_0(x, \xi)\|_H.$$

En effet, la relation entre $R(\lambda, -m)$ et $R(\lambda, -m+A)$ permet d'établir:

$$\max_x|R(\lambda, -m+A)\varphi(x, \xi)| \leqslant \frac{1}{\nu(0)+\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{Max}_x|(AR(\lambda, -m))^n\varphi(x, \xi)|$$

soit:

$$\|\operatorname{Max}_x|R(\lambda, -m+A)\varphi(x, \xi)|\|_H \leqslant \frac{1}{\nu(0)+\lambda-k}\,\|\operatorname{Max}|f_0(x, \xi)|\|_H.$$

PROPOSITION A.2.

Si f_0 appartient à $\vartheta(\mathbf{R}, H)$, et si $\operatorname{Max}_x|f_0|$ est élément de H pour t borné,

$$\left\|\int_0^t \mathscr{C}(t-\tau, -m)A\mathscr{C}(\tau, -m+A)f_0\,d\tau\right\| \quad \text{et} \quad \left\|\xi\int_0^t \mathscr{C}(t-\tau, -m)A\mathscr{C}(\tau, -m+A)\,d\tau\right\|$$

tendent vers zéro quand x tend vers l'infini.

Si f_0 est élément de $\vartheta(\mathbf{R}, H)$, il en est de même de

$$\mathscr{C}(t, -m+A)f_0 \quad \text{et de} \quad A\mathscr{C}(t, -m+A)f_0 \quad \text{puisque} \quad \|\xi Af\|_H \leqslant k_1\|f\|_H.$$

$$\mathscr{C}(t-\tau, -m)A\mathscr{C}(\tau, -m+A)f_0 \quad \text{et} \quad \xi\mathscr{C}(t-\tau, -m)A\mathscr{C}(\tau, -m+A)f_0$$

convergent donc pour presque tout ξ vers zéro quand x tend vers l'infini, de même pour leurs intégrales entre 0 et t, t étant borné.

Les propositions précédentes permettant de majorer par des fonctions indépendantes de x, de carré intégrable en ξ, ces deux intégrales:

$$\operatorname*{Max}_x \int_0^t |\mathscr{C}(t-\tau, -m)A\mathscr{C}(\tau, -m+A)f_0|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant K\int_0^t \exp[-\gamma(0)(t-\tau)]\exp[(-\nu(0)+k)\tau]\,d\tau \,\|\operatorname*{Max}_x|f_0|\|_H.$$

De même pour la deuxième expression à étudier:

La majoration $\|\xi Af\|_H \leqslant k_1\|f\|_H$ permet d'obtenir une expression du même type.

Etant donné que

$$\mathscr{C}(t, -m+A)f_0 = \mathscr{C}(t, -m)f_0 + \int_0^t \mathscr{C}(t-\tau, -m)A\mathscr{C}(\tau, -m+A)f_0\,d\tau,$$

l'étude précédente montre le théorème.

Bibliographie

1. ARCENIEV, *Problème de Cauchy pour l'équation de Boltzmann linéarisée*, J. Calcul numérique U.R.S.S., 5, 5, 1965.
2. CERCIGNANI, *Mathematical methods in kinetic theory*, Plenum Press, New York 1969.
3. CHAHINE, *The structure of strong shock waves in the Krook Collision model. Rarefied gaz dynamic*, Laurmann 1963.
4. DARROZES, *Etude de la structure d'un choc faible avec le modèle cinétique de Krook Boltzmann*, La recherche aerospatiale, 95, 1963.
5. FETZ, *7th Symposium on rarefied gaz dynamics*, Pise 1970.
6. GRAD, *Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non-linear Boltzmann equation*, Proc. Amer. Math. Soc., Symposium on Applications of Partial Differential Equations, New York 1964.
7. LIONS et MAGENES, *Problemes aux limites non homogènes et applications*, 1, Dunod, Paris 1968.
8. PAO (YOUNG PING), *Boundary value problem for the linearized and weakly non-linear Boltzmann equation*, J. of Math. Phys., 8, 9, 1967.
9. SHARF, *Normal solutions of the linearized Boltzmann equation*, Helv. Phys. Acta, 42, 1, 1968.
10. SIROVICH, *On some mathematical aspects of the kinetic model equations*, Brown University Lectures Notes.

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE THÉORIQUE, PARIS,
ET FACULTE DES SCIENCES DE REIMS, FRANCE.

Received November 24, 1977.