

# Sur quelques aspects analytiques de la théorie des systèmes hyperboliques d'équations quasi-linéaires aux dérivées partielles

J. KRAVTCHEKNO et D. RENOARD (GRENOBLE)

LA PREMIERE partie du mémoire est d'abord consacrée au rappel des définitions classiques des systèmes quasi-linéaires ( $E$ ) d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, ainsi que des variables caractéristiques attachées à ( $E$ ). On rappelle ensuite le système d'équations ( $e$ ), dit associé à ( $E$ ), qui, en général, n'est plus quasi-linéaire, et dont les solutions fournissent les représentations paramétriques des solutions de ( $E$ ) au moyen des fonctions des variables caractéristiques. La deuxième partie est consacrée à l'exploitation systématique de ( $e$ ) en vue de l'étude des solutions de ( $E$ ), ce qui ne semble avoir été fait jusqu'ici que pour des cas particuliers. On établit la condition d'équivalence de ( $E$ ) et de ( $e$ ). Lorsque celle-ci n'est pas remplie, on démontre que la solution de ( $E$ ) peut présenter des singularités dont on précise la nature analytique, alors que la solution correspondante de ( $e$ ) est régulière. Ceci ouvre la voie à d'innombrables applications.

Pierwszą, wstępną część pracy poświęcono przypomnieniu klasycznych pojęć i definicji dotyczących układów quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych typu hiperbolicznego ( $E$ ) oraz związanych z ( $E$ ) zmiennych charakterystycznych. Przypomniano następnie pojęcie układu równań ( $e$ ) nazywanego układem stowarzyszonym z ( $E$ ) i nie będącego już układem quasi-liniowym, którego rozwiązania są parametryczną postacią rozwiązań układu ( $E$ ) i wyrażają się jako funkcje zmiennych charakterystycznych. Druga część pracy poświęcona jest systematycznemu wykorzystaniu właściwości układów ( $e$ ) do badania właściwości rozwiązań układów ( $E$ ); jak się wydaje dotychczas takie podejście stosowano tylko do szczególnych typów równań ( $E$ ). Podano warunki równoważności układów ( $E$ ) i ( $e$ ). Wykazano, że przy ich spełnieniu rozwiązanie ( $E$ ) może wykazywać osobliwości (których charakter analityczny daje się określić) natomiast rozwiązanie ( $e$ ), będące parametryczną formą rozwiązania ( $E$ ) jest regularne. Otwiera to nowe możliwości licznych zastosowań proponowanego podejścia.

В первой части работы содержится анализ гиперболических квазилинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных и упоминаются некоторые общие свойства таких систем. Затем введено уравнение, которому должны удовлетворять начальные данные, чтобы они могли быть бихарактеристическим множеством данных. Используя определенные характеристические переменные, введена эквивалентная система. С виду кажется, что это ненужное усложнение, но фактически оно позволяет найти методы преодоления трудностей, связанных с решением системы уравнений вблизи особенности начальных данных. Итак, можем рассматривать гладкие множества данных. Уточнено при каких предположениях, и каким образом это может быть проведено. Хотя большинство материала, представленного в первой части работы, является скорее новым представлением известных уже результатов, чем представлением новых достижений; это позволяет получить в дальнейшей части работы новые инспирации.

## 1. Introduction. Objet de la communication

NOUS PROPOSONS de passer ici en revue les résultats obtenus depuis une trentaine d'années par les équipes spécialisées de l'Institut de Mécanique de Grenoble concernant les propriétés analytiques des solutions singulières des systèmes quasi-linéaires d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. Beaucoup de ces recherches ont déjà donné lieu à des publications citées dans la bibliographie qu'on trouvera "in fine" (cf. [1, 2, 3]). Mais on s'est borné jusqu'ici à l'examen de systèmes particuliers d'équations, ce qui limitait la

portée de la méthode d'investigation que nous avons mise en oeuvre. C'est pourquoi, il nous a paru opportun de présenter un exposé synthétique de la théorie, en dégagant quelques propriétés communes à tous les systèmes hyperboliques et, ensuite, en indiquant quelques critères qui permettent de répartir ceux-ci en plusieurs classes. Nous définirons les traits caractéristiques de quelques-unes de celles-ci, et nous étudierons certains types de singularités que peuvent posséder les solutions des systèmes correspondants. C'est l'extension à des types assez généraux d'équations aux dérivées partielles des résultats obtenus jusqu'ici dans des cas particuliers seulement, ainsi que l'introduction d'une nouvelle espèce de singularités qui constituent le point nouveau du présent travail.

Les applications à la mécanique de la théorie que nous allons développer sont innombrables. On sait, en effet, que beaucoup de problèmes concrets de cette discipline se traduisent analytiquement au moyen d'équations aux dérivées partielles hyperboliques quasi linéaires, qui ne sont qu'exceptionnellement résolubles sous forme explicite. Alors le recours aux méthodes numériques s'impose. Or les solutions cherchées présentent très souvent des singularités, ponctuelles ou non, dans le voisinage desquelles la précision atteinte par les procédés usuels du calcul à l'ordinateur peut devenir insuffisante. C'est pour lever cette difficulté que l'étude a priori de la nature analytique de la singularité peut devenir utile, car elle offre au numéricien un moyen sûr et régulier d'explorer le voisinage de cette dernière. On notera que, dans certains cas, on arrive même à obtenir une expression approchée explicite de la solution dans le voisinage en cause, ce qui peut simplifier sensiblement les calculs et permet d'en contrôler la précision. C'est à des préoccupations de cet ordre que nous tentons de répondre ci-après dans le cas où les singularités sont d'un type particulier que nous introduirons ultérieurement, et auxquelles nous réservons le nom de "régularisables". Ces remarques nous ont paru de nature à justifier la présentation à un symposium de Mécanique d'un travail de pure analyse. Nous espérons être utiles à nos collègues en attirant leur attention sur le parti qu'on peut tirer de l'emploi d'un outil mathématique déjà décrit dans la littérature, mais qui ne semble pas être devenu d'un usage courant chez les numériciens.

Dans ce qui suit, nous nous bornons à énoncer, presque toujours sans démonstration, les résultats obtenus, en accompagnant ceux-ci de commentaires destinés à en préciser le sens et la portée.

## 2. Notations et généralités sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles

Notons  $p$  le nombre d'inconnues du système considéré;  $q$  le nombre de variables indépendantes;  $E_{p,q}$  le système de  $p$  équations aux dérivées partielles dont l'ordre et la forme analytique sont d'abord supposés quelconques. Rappelons alors ce résultat classique de l'analyse: sans restreindre la généralité, on peut transformer  $E_{p,q}$  en un système de premier ordre au prix d'un accroissement du nombre d'inconnues. Cet énoncé est élémentaire lorsque  $q = 1$ , car  $E_{p,1}$  se réduit alors à un système différentiel ordinaire. La démonstration est plus compliquée si  $q > 2$ . Nous nous bornons ici à indiquer la marche à suivre lorsque  $q > 2$ , en examinant l'exemple banal de l'équation des cordes vibrantes qui est du type  $E_{1,2}$ : en notant  $u(x, y)$  l'inconnue et  $x, y$  les variables indépendantes, elle s'écrit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Introduisant les nouvelles inconnues:  $\xi(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\eta(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ , on vérifie immédiatement que  $\xi$  et  $\eta$  sont solutions du système  $E_{2,2}$  du premier ordre:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

dont la première relation est la conséquence de  $E_{1,2}$  considérée, alors que la seconde traduit la condition de compatibilité entre les définitions de  $\xi$  et  $\eta$ , en sorte que  $E_{1,2}$  et  $E_{2,2}$  qui précèdent ne sont équivalentes que dans l'espace des  $u(x, y)$  continues avec leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, alors que les formules de d'Alembert fournissent la solution de  $E_{2,2}$  ci-dessus dans l'espace des  $(\xi, \eta)$  continues, avec leurs dérivées partielles de premier ordre seulement. Les remarques élémentaires qui précèdent font comprendre les raisons pour lesquelles la démonstration de l'équivalence entre  $E_{p,q}$ ,  $p$  et  $q$  étant quelconques, d'une part, et le système de premier ordre en lequel on le transforme en suivant la marche que l'on vient d'examiner dans un cas très particulier, d'autre part, puisse devenir laborieuse et exigera la mise en oeuvre de raisonnements dont on trouvera en [4] un exposé se rattachant aux travaux de RIQUIER [5] et des références à ceux d'Elie-Cartan dont une analyse exhaustive, avec une bibliographie étendue, est donnée en [6]. Toutefois, notons que ces auteurs se sont placés à un point de vue différent de celui du présent article.

### 3. Systèmes $E_{p,q}$ quasi-linéaires

Pour simplifier nos énoncés, nous nous limiterons dans ce qui suit à l'étude des systèmes  $E_{p,q}$  dont chaque équation se présente comme une forme linéaire par rapport aux dérivées partielles de premier ordre des inconnues, dont chaque coefficient est une fonction des  $p$  inconnues et des  $q$  variables indépendantes. Cela étant, rappelons quelques définitions et résultats classiques. Notons  $x_j, j = 1, 2, \dots, q$  les variables indépendantes,  $u_i(x_1, x_2, \dots, x_q) = u_i(x_j), i = 1, 2, \dots, p$  les inconnues de  $E_{p,q}$  fonctions des  $x_j$ ;  $\Sigma$  une hypersurface que nous supposons définie dans le repère orthonormé  $(Ox_1, x_2, \dots, x_q)$  par l'équation de la forme:  $x_q = \underline{f}(x_1, \dots, x_{q-1})$ , où  $f$  est une fonction assez régulière<sup>(1)</sup> de ses arguments dans un domaine  $D \subset Ox_1, x_2, \dots, x_q$ ; le trait qui souligne  $\underline{f}$  signifie qu'il s'agit d'une fonction des  $(q-1)$  variables seulement. Maintenant si  $g(x_1, x_2, \dots, x_q)$  est une fonction des  $q$  variables  $x$ , nous poserons:

$$\underline{G} = \underline{G}(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) = g(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, \underline{f}),$$

$\underline{G}$  étant la valeur prise par  $g$  sur  $\Sigma$ ; d'après cela, nous avons  $(q-1)$  relations sur cette surface:

$$(3.1) \quad \frac{\partial g}{\partial x_q} = \frac{\partial \underline{G}}{\partial x_k} - \frac{\partial g}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, q-1.$$

<sup>(1)</sup> Nous appelons "régulière" toute fonction de ses arguments qui possède sur  $D$  des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre assez élevé pour justifier toutes les opérations que nous aurons à effectuer, et toutes les propriétés que nous aurons à évoquer.

Ainsi le symbole  $\frac{\partial g}{\partial x_q}$  désigne la valeur de  $\frac{\partial g}{\partial x_q}$ : au point  $(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, \underline{f}) \in \Sigma$ . En particulier, si  $g = u_i$ , la formule précédente s'applique aux valeurs des  $u(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, \underline{f}) = \underline{U}_i(x_1, x_2, \dots, x_{q-1})$  sur  $\Sigma$ . Soit alors la multiplicité de Cauchy  $m(\Sigma, \underline{U}_i)$  constituée par la surface  $\Sigma$  donnée, porteuse des données  $\underline{U}_i$ ; posons nous, relativement à  $E_p, q$  et à  $m$ , le problème de Cauchy dont la résolution exige la détermination des  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Or, d'après

(3.1), il suffit à cet effet de calculer les  $p$  quantités  $\frac{\partial U_i}{\partial x_q}$ . Ecrivons alors  $E_{p,q}$  sous la forme:

$$(3.2) \quad a_{ikl} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + a_{iql} \frac{\partial u_i}{\partial x_q} = b_l, \quad l = 1, 2, \dots, p$$

où les  $a_{ikl}$ ,  $a_{iql}$ , et  $b_l$  sont des fonctions connues a priori des  $u_i$  et  $x_j$  et portons dans

(3.2) les valeurs des  $\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$  tirées de (3.1). On obtient ainsi le système de  $p$  équations linéaires

par rapport aux  $p$  dérivées  $\frac{\partial u_i}{\partial x_q}$ :

$$(3.3) \quad \left( \underline{a}_{iql} - \underline{a}_{ikl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_q} = \underline{b}_l - \underline{a}_{ikl} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

dont les coefficients ont des valeurs connues sur  $\Sigma$ . Nous reprenons les définitions introduites en [3] qui s'écartent de la terminologie habituelle (cf. [3, 1], alinéa 1, 2, et [3, III], alinéas 2, 3, 4) et que nous rappelons pour la commodité du lecteur. Notant  $H$  le déterminant du système (3.3) en  $\frac{\partial u_i}{\partial x_q}$ , qui est d'ordre  $p$ :

$$(3.4) \quad H = \left\| \underline{a}_{iql} - \underline{a}_{ikl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\|$$

nous dirons que la multiplicité  $m(\Sigma, \underline{U}_i)$  est, relativement à  $E_{p,q}$ : 1) normale si en tout  $P(x) \in \Sigma$ , on a:  $H \neq 0$  (3.5); 2) caractéristique si  $\forall P \in \Sigma$ , on a:  $H = 0$  (3.6), l'une au moins des dérivées  $\frac{\partial u_i}{\partial x_q}$  étant infinie; 3) bicaractéristique, si (3.6) étant vérifiée  $\forall P \in \Sigma$ , l'un au moins des déterminants caractéristiques d'ordre  $p$  de (3.3) est nul, d'une part, et si la matrice de  $H$  est de rang  $(p-1)$ , d'autre part.

On peut alors énoncer les résultats classiques suivants concernant le problème de Cauchy posé relativement à  $E_{p,q}$  et  $m(\Sigma, \underline{U}_i)$ : 1) si  $m$  est normale, la solution est unique, 2) si  $m$  est bicaractéristique, il existe une infinité de solutions régulières<sup>(2)</sup>.

<sup>(2)</sup> On sait que les énoncés d'existence et d'unicité du problème de Cauchy, pour une multiplicité  $m$  normale, d'un système  $E$  quelconque, n'ont été justifiés que moyennant des hypothèses de régularité plus ou moins strictes, concernant  $E$ , et aussi la forme analytique de ce système qui doit être, dans les cas courants, supposé résoluble par rapport à certaines dérivées des inconnues. Dans ce qui suit, nous renonçons aux raisonnements rigoureux et nous adoptons le point de vue de [3, I]. Nous postulons donc la validité des énoncés d'existence et d'unicité des solutions cherchées des  $E_{p,q}$  dès lors qu'on dispose d'un algorithme régulier de calcul approché de la solution d'un problème aux limites, mixte ou non (pour laquelle l'existence peut n'avoir pas encore été établie même relativement aux solutions dites généralisées).

Supposons maintenant qu'il existe une solution régulière  $u_i(x_j) = u_i(P)$  de  $E_{p,q}$ ,  $\forall P \in D$ , admettant une multiplicité  $m(\Sigma, \underline{U}_i)$  soit caractéristique, soit bicaractéristique de  $E_{p,q}$ . Notons  $D1$  le domaine de l'espace à  $(p+q)$  dimensions rapporté au repère  $Ox_1 x_2 \dots \dots, x_q, U_1, U_2, \dots, U_p$  balayé par les  $x_j$  et  $u_i$  quand  $P$  balaie  $D$ . Il est clair que le point  $(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, f, \underline{U}_1, \underline{U}_2, \dots, \underline{U}_p) \subset D1$ . Les coefficients de (3.2):  $a_{ikl}, a_{igt}, b_i$  sont des fonctions données des  $x_k$  et de  $f$ , puisque les  $u_i(x_1, x_2, \dots, x_q, f)$  le sont par hypothèse. On voit donc que (3.6) peut être interprété comme une équation aux dérivées partielles en  $f$ , de premier ordre, qui se présente sous forme d'un polynome en  $\frac{\partial f}{\partial x_q}$  de degré  $p$  égalé à zero. On note alors que la relation ainsi obtenue n'est pas quasi-linéaire et peut dès lors admettre ou non des solutions réelles en  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  lorsque  $P \in D$ .

Pour simplifier les écritures, nous noterons jusqu'à nouvel ordre  $e_{p,q}$  tout système de  $p$  équations aux dérivées partielles de premier ordre à  $p$  fonctions inconnues à  $q$  variables indépendantes; ultérieurement, nous réserverons cette convention d'écriture exclusivement aux systèmes que nous appellerons "associés" à  $E_{p,q}$  et que nous introduirons dans la suite. On notera que, d'après ce qui précède,  $e_{p,q}$  n'est pas supposé quasi-linéaire.

Ainsi l'équation (3.6) en  $f$ , que nous avons formée dans l'éventualité où la solution  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$  a pu être explicitée, est du type  $e_{1,q-1}$ .

Cela étant,  $e_{1,q-1}$  ainsi obtenue peut être interprétée classiquement comme l'équation tangentielle d'un cône  $C(P)$ , de sommet  $P$  supposé fixé, qui est, d'après ce qui précède, de  $p$ ème classe. Comme les  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  définissent les paramètres directeurs de la normale en  $P$  à  $\Sigma$ , on voit que  $C(P)$  est tangent en  $P$  à cette surface, d'où le nom de cône caractéristique qu'on donne à  $C(P)$ .

Ce bref rappel des propriétés élémentaires des  $E_{p,q}$  met bien en évidence le rôle de l'hypothèse de quasi-linéarité de ces systèmes, qui permet de former explicitement l'équation  $e_{1,q-1}$  et de discuter d'une manière relativement simple le problème de la réalité des  $C(P)$  dans les cas concrets. Or il est clair que la réponse à ce préalable est indispensable pour savoir si on peut ou non utiliser les propriétés générales des multiplicités bicaractéristiques que nous allons établir dans l'étude des solutions d'un système  $E_{p,q}$  donné.

Enonçons maintenant une propriété simple, mais utile des multiplicités bicaractéristiques:

**THÉORÈME.** *Pour une solution régulière et donnée  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$ , la condition nécessaire et suffisante pour que la multiplicité  $m(\Sigma, \underline{U}_i)$  soit bicaractéristique est que  $f$  soit solution régulière de  $e_{1,q-1}$ .*

Par exemple, les  $\text{grad } U_i(x_j)$  sont, d'après ce qui précède, déterminés sur la surface porteuse  $\Sigma$  d'une multiplicité  $m(\Sigma, \underline{U}_i)$  supposée donnée et normale. Il s'ensuit que les  $u_i(x_j)$  seront explicités approximativement dans le voisinage de  $\Sigma$  au moyen de la formule des accroissements finis:

$$u_i(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_q + \Delta x_q) = u_{i0} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 \Delta x_j$$

où on a affecté de l'indice zéro toute quantité dépendant des  $(q-1)$  variables  $x_j$ , calculée au point  $(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}))$  et où les  $\Delta x_j$  sont petits mais arbitraires. C'est là l'exemple le plus banal de la résolution d'un problème aux limites obtenues dans le cadre de l'approximation linéaire.

En effet,  $m(\Sigma, U_i)$  ne peut pas être normal, puisque cette multiplicité vérifie, par hypothèse, la condition (3.6). Par suite  $m$  ne peut être que caractéristique ou bicaractéristique. Or le premier terme de cette alternative est à écarter, car la solution donnée  $u_i(x_j)$  d' $E_{p,q}$  régulière, par hypothèse, peut être interprétée comme une solution du problème de Cauchy posé relativement à  $E_{p,q}$  et à  $m(\Sigma, U_i)$ , en sorte que les  $\overrightarrow{\text{grad}} u_i(x_j)$  sont réguliers sur  $\Sigma$ . Notre assertion est dès lors justifiée. A notre connaissance, le résultat qui précède, en dépit de sa simplicité, n'a été formulé nettement pour la première qu'en [3, III].

REMARQUE 1. Supposons maintenant que la solution  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$  ne soit pas connue. Alors une multiplicité  $m(\Sigma, U_i)$  donnée ne peut être bicaractéristique de ce système que si (cf. la définition 3 ci-dessus) elle vérifie la condition (3.6) et si, de plus, elle annule un déterminant caractéristique du système (3.3), linéaire en  $\frac{\partial u_i}{\partial x_q}$ , et dont tous les coefficients sont connus lorsque  $E_{p,q}$  et  $m(\Sigma, U_i)$  sont des données. Or, d'après (3.3) le déterminant en cause, d'ordre  $p$ , une fois développé, se présente sous forme d'un polynôme de degré  $(p-1)$  par rapport aux  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ , et d'une fonction linéaire des  $\frac{\partial U}{\partial x_k}$ , dont les coefficients dépendent des  $\frac{\partial f}{\partial x_e}$ . Cette remarque évidente nous sera bientôt utile.

REMARQUE 2. Beaucoup d'auteurs, parmi lesquels nous citerons E. Cartan, ont insisté sur le fait que la donnée de  $p$  et de  $q$  seuls n'est pas la meilleure façon de caractériser les systèmes  $E_{p,q}$ , comme le montre l'exemple classique de  $E_{2,2}$  qui peut être ou elliptique, ou hyperbolique, ou parabolique. Voici cependant l'exemple d'une information utile, que l'on peut tirer de la seule considération de la partie de  $p$ . Supposons  $p$  impair:  $p = 2n+1$ . Alors l'équation  $e_{1,q-1}$  que nous avons associée à  $E_{2n+1,q}$  se présente, comme on l'a vu (cf. (3.6)), sous forme d'un polynôme de degré  $(2n+1)$  en  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ , égale à zéro; par suite, elle admet des systèmes de solutions réelles par rapport aux dérivées. On en déduit aisément qu'à toute solution réelle  $u_i(x_j)$  de  $E_{2n+1,q}$  on pourra toujours associer une infinité de multiplicités  $m(\Sigma, U_i)$  bicaractéristiques réelles. Cela montre que les systèmes  $E_{2n+1,q}$  ne peuvent être elliptiques, ce terme étant entendu au sens que nous précisons à l'alinéa suivant. Tel sera, en particulier, le cas de toute équation  $E1, q$ . La théorie en est classique et peut être abordée directement d'une façon élémentaire. Mais les résultats généraux qui suivent permettront, comme on le verra, d'énoncer d'emblée l'essentiel des propriétés des  $E_{1,q}$  uniquement à partir du fait que dans le cas présent on a  $p = 1$ .

#### 4. Systèmes $E_{p,q}$ quasi-linéaires hyperboliques. Systèmes associés à $E_{p,q}$

En adaptant à notre cas le vocabulaire classique, nous dirons que le système (quasi-linéaire)  $E_{p,q}$  (cf. (3.2)) est hyperbolique dans le domaine  $D1$  de l'espace à  $(p+q)$  dimensions  $(x_j, u_i)$  si  $\forall Q(x_1, x_2, \dots, x_q, u_1, u_2, \dots, u_p)$ , point de  $D1$  le cône caractéristique  $C(Q) \subset D \subset O x_1 x_2, \dots, x_q$  de sommet  $Q(x_1, x_2, \dots, x_q)$  possède les deux propriétés suivantes:

1.  $C(Q)$  est réel.

2. Par toute droite issue de  $Q$  et extérieure à  $C(Q)$ , au sens strict, on peut mener à cette hypersurface  $p$  plans tangents réels et distincts. Cette définition n'exclut pas l'éventualité où  $C(Q)$  se décomposerait en des cônes de classe inférieure à  $p$ , dont quelques uns peuvent être dégénérés en des droites  $\subset O x_1, x_2, \dots, x_q$  et issues de  $Q$ . Relativement à  $E_{p,q}$  hyperbolique, nous allons énoncer les résultats suivants qui jouent un rôle central dans la théorie que nous allons développer et qui constituent une extension au cas où  $p$  et  $q$  sont quelconques des propriétés justifiées en [1, 2 et 3] pour des types particuliers des systèmes  $E_{2,2}$  et  $E_{3,3}$ .

Introduisons un espace auxiliaire à  $q$  dimensions, rapporté au repère orthonormé  $O\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ , et soit  $\mathcal{D}$  un domaine de cet espace de même connexion que  $D$ . Admettons qu'on ait défini sur  $\mathcal{D}$   $q$  fonctions régulières.

$$(4.1) \quad x_j = x_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) = x_j(\alpha_\mu) \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad \mu = 1, 2, \dots, q$$

réalisant l'application bijective  $\mathcal{D} \Leftrightarrow D$ , ce qui impose aux  $x_j(\alpha_\mu)$  la condition nécessaire (cf. [3.II]).

$$(4.2) \quad \Delta = \frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)} = \frac{\mathcal{D}[x_j(\alpha_\mu)]}{\mathcal{D}(\alpha_\mu)} \neq 0 \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu) \in \mathcal{D}.$$

Soit maintenant une solution  $u_i(x_j)$  de  $Ep, q$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , définie et régulière sur  $D$ . Nous poserons (cf. [3.I]):

$$(4.3) \quad U_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) = U_i(\alpha_\mu) = u_i[x_j(\alpha_\mu)].$$

Ainsi les relations (4.1) et (4.3), l'inégalité (4.2) étant satisfaite, constituent une représentation paramétrique de la solution considérée de  $Ep, q$ . Introduisons alors les notations et conventions d'écriture suivantes:  $\nu(\mu)$  est un entier quelconque dans la suite des  $(q-1)$  nombres  $(1, 2, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_q)$ , l'adaptation aux cas où  $\mu = 1$ , ou  $\mu = q$ , étant évidente, et  $F(\alpha_\mu) = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ , on pose<sup>(3)</sup>:

$$(4.4) \quad F_\mu[\alpha_{\nu(\mu)}] = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu = \text{cte}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_q)$$

où  $F$  désigne une fonction quelconque des  $q$  arguments  $\alpha_\mu$  définie et régulière sur  $\mathcal{D}$ ; en particulier, on a les relations:

$$(4.5) \quad \underline{x}_{j,\mu} = \underline{x}_{j,\mu}[\alpha_{\nu(\mu)}], \quad \underline{U}_{i,\mu} = \underline{U}_{i,\mu}[\alpha_{\nu(\mu)}].$$

On pose, en se rappelant que  $k = 1, 2, \dots, q-1$ ,

$$(4.6) \quad \underline{\Delta}_\mu = \frac{\mathcal{D}(\underline{x}_{1,\mu}, \underline{x}_{2,\mu}, \dots, \underline{x}_{q-1,\mu})}{\mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_q)} = \frac{\mathcal{D}(\underline{x}_{k,\mu})}{\mathcal{D}[\alpha_{\nu(\mu)}]},$$

$$\underline{\Delta}_k(\mu) = \frac{\mathcal{D}(\underline{x}_{1,\mu}, \underline{x}_{2,\mu}, \underline{x}_{k-1,\mu}, \underline{x}_{q\mu}, \underline{x}_{k+1,\mu}, \dots, \underline{x}_{q-1,\mu})}{\mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_q)}$$

l'ordre des jacobiens (4.6) étant égal à  $(q-1)$ . Soient, de plus,  $S_\mu$  l'hypersurface définie dans  $\mathcal{D}$  par les équations paramétriques

$$(4.7) \quad \underline{x}_j = \underline{x}_{j\mu}[\alpha_{\nu(\mu)}],$$

<sup>(3)</sup> On place  $\mu$  entre parenthèses, afin que  $\mu$  ne joue pas le rôle de l'indice muet.

$m_\mu = m[S_\mu, \underline{U}_{i,\mu}]$ , la multiplicité définie par (4.5) et (4.7). D'après cela, il existe donc  $q$  hypersurfaces  $S_\mu$  et autant de  $m$  correspondant aux  $u_i(x_j)$  et  $x_j(\alpha_\mu)$  donnés.

Cela étant, formons les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les  $q$  fonctions  $x_{j\mu}(\alpha_{\nu(\mu)})$  pour que chacune des  $q$  multiplicités  $m_\mu$ , construites, rappelons-le, à partir d'une solution  $u_i(x_j)$  donnée, soit bicaractéristique de  $E_{p,q}$  attachée aux  $u_i(x_j)$ . Pour simplifier l'exposé, nous supposons que  $\Delta_\mu \neq 0$  sur  $\mathcal{D}, \forall \mu$ . Mais on peut se passer de cette hypothèse, en adaptant au cas présent les raisonnements de [3.III] et [3.IV]; il suffit d'admettre que la matrice  $\Delta$  (cf. (4.2)) est de rang  $(q-1)$ . Il s'en suit qu'on peut inverser les  $\underline{x}_{k,\mu}$  et les  $\alpha_{\nu(\mu)}$ , en sorte que l'équation cartésienne de  $S_\mu$  peut s'écrire:

$$\underline{x}_{\mu q} = \underline{f}_\mu(\underline{x}_{1\mu}, \underline{x}_{2\mu}, \dots, \underline{x}_{q-1,\mu}) = \underline{f}_\mu(\underline{x}_{k\mu}).$$

On tire de là les  $(q-1)$  relations:

$$(4.8) \quad \frac{\partial \underline{x}_{q\mu}}{\partial \alpha_{\nu(\mu)}} = \frac{\partial \underline{f}_\mu}{\partial \underline{x}_k} \cdot \frac{\partial \underline{x}_k}{\partial \alpha_{\nu(\mu)}}$$

qui sont linéaires et homogènes en  $\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_{\nu(\mu)}}$  et linéaires en  $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_k}$ . Interprétons alors (4.8) comme un système de  $(q-1)$  équations en  $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_k}$ , résolubles, d'après ce qui précède, on a donc:

$$(4.9) \quad \frac{\partial \underline{f}_\mu}{\partial x_k} = \frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta_\mu}.$$

Du théorème de l'alinéa 2, résulte alors, eu égard à (3.4) et (3.6):

**THÉORÈME I.** *La condition nécessaire et suffisante pour que chacune des  $q$  multiplicités  $m_\mu$  associées à la solution  $u_i(x_j)$  donnée de  $E_{p,q}$  et représentée paramétriquement par (4.1) et (4.3) soit bicaractéristique de  $E_{p,q}$  est que, pour chaque  $\mu$  fixé, les fonctions  $\underline{x}_{j\mu}$  vérifient l'équation aux dérivées partielles:*

$$(4.10) \quad H_\mu = \left\| a_{iql} - a_{ikl} \frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta_\mu} \right\| = 0$$

qu'on obtient en reportant dans (3.6) les expressions (4.9) des  $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_k}$ .

Remarquons que nous avons remplacé dans (4.10) les expressions  $\underline{a}_{iql}$ ,  $\underline{a}_{ikl}$ ,  $\underline{\Delta}_k(\mu)$  et  $\underline{\Delta}_\mu$  qui figurent dans (3.6), par  $a_{iql}$ ,  $a_{ikl}$ ,  $\Delta_k(\mu)$ ,  $\Delta_\mu$  respectivement. Cela tient à ce que les opérateurs  $\underline{\Delta}_\mu$  et  $\underline{\Delta}_k(\mu)$  ne font pas intervenir l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial \alpha_\mu}$  pour un  $\mu$  fixé, d'une part, et que les  $a_{iql}$  et  $a_{ikl}$  sont des fonctions données des  $x_j$  et  $u_i(x_j)$  et non de leurs dérivées, d'autre part. Il s'en suit que  $\alpha_\mu$  joue dans  $H_\mu$  le rôle d'un paramètre, en sorte que (4.6) peut être interprétée comme une équation aux dérivées partielles que sont astreintes à vérifier les  $q$  fonctions  $x_{\nu(\mu)}$  des  $q^{-1}$  variables indépendantes  $\alpha_{\nu(\mu)}$  (cf. (4.1) et (4.3)) lorsque les  $p$  fonctions  $u_i(x_j)$  sont considérées comme des données. Ces remarques achèvent d'établir le résultat que nous avons en vue. On voit donc que lorsque la solution  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$  est connue sur  $D$ , on obtient, en faisant varier  $\mu$  dans (4.10), un système de  $q$  équations aux dérivées



partielles de ler ordre, dont les  $x_j(\alpha_\mu)$  sont les inconnues, qui n'est plus quasi-linéaire. En dépit de cette dernière circonstance, on peut indiquer plusieurs propriétés des solutions de (4.6) en utilisant les méthodes décrites en [3] à propos de cas particulier. Citons le:

**THÉORÈME II.** *Etant donné une solution  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$  définie et régulière dans  $D$ , on peut lui associer une représentation paramétrique (4.1), (4.3), solution régulière de (4.10), vérifiant (4.2), et telle que la multiplicité  $m_\mu = m(S_\mu, U_{i\mu}), \forall \mu$ , définie par (4.1) et (4.3) où on fait  $\alpha_\mu = cte$ , soit bicaractéristique de  $E_{p,q}$ . Cela étant, on déduit du théorème de l'alinéa 2, et de ce qui précède:*

**THÉORÈME III.** *Soient  $u_i(x_j)$  une solution de  $E_{p,q}$  définie et régulière dans  $D$ ;  $x_j(\alpha_\mu), U_i(\alpha_\mu)$  une représentation paramétrique des  $u_i(x_j)$  définie et régulière dans  $\mathcal{D}$ . Alors les  $x_j(\alpha_\mu)$  et les  $U_i(\alpha_\mu)$  vérifient le système d'équations:*

$$(4.11) \quad G_\mu = \left\| b_i - a_{ikl} \frac{\partial U_l}{\partial x_k}, a_{2ql} - a_{2kl} \frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta\mu}, \dots, a_{qql} - a_{qkl} \frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta\mu} \right\| = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, p, l = 1, 2, \dots, p.$

En effet les  $G_\mu$  ainsi définis sont les déterminants caractéristiques du système (3.3) obtenus en remplaçant dans  $H_\mu$  les  $\left[ a_{iql} - a_{ikl} \frac{\Delta_k(\mu)}{\Delta\mu} \right]$  par les  $\left[ b_i - a_{ikl} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right]$ . Or chaque  $G_\mu$  doit être nul, la multiplicité  $m_\mu$  étant bicaractéristique (cf. théorème I et la définition des bicaractéristiques énoncés en alinéa 2). Notons alors  $e_{p+q,q}$  le système constitué par l'ensemble des  $(p+q)$  équations (4.10) et (4.11), à  $(p+q)$  fonctions inconnues  $U_i(\alpha_\mu)$  et  $x_j(\alpha_\mu)$  (cf. (4.1) et (4.3)), à  $q$  variables indépendantes  $\alpha_\mu$ . Reprenant alors la terminologie utilisée en [2] et [3], nous réserverons désormais exclusivement à  $e_{p+q,q}$  le nom de système associé à  $E_{p,q}$ ; on notera que la notion ainsi introduite, plus ou moins classique, a été souvent utilisée dans la littérature dans des cas particuliers, mais peut-être d'une manière moins systématique qu'on le fait dans le présent travail. On peut alors résumer comme suit les résultats précédents:

**THÉORÈME IV.** *La condition nécessaire pour que la représentation paramétrique (4.1) et (4.3) vérifiant (4.2) d'une solution régulière  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$  soit telle que chacune des  $q$  multiplicités  $m_\mu$  correspondantes soit bicaractéristique de  $E_{p,q}$  est que les seconds membres de (4.1) et (4.3) définissent une solution régulière de  $e_{p+q,q}$ . A chaque solution  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$  correspond au moins une solution de  $e_{p+q,q}$ .*

La réciproque de cette proposition est exacte pour tout  $E_{p,q}$ . Mais il semble difficile de la justifier en toute généralité par le calcul seul. Cela tient à ce que la marche à suivre change beaucoup avec la forme analytique de  $e_{p+q,q}$ , et, de toute façon, elle exige la mise en oeuvre de calculs, élémentaires certes, mais toujours très laborieux (cf. [3.I]). Nous donnerons ailleurs une démonstration directe du

**THÉORÈME (PRÉSUMÉ) D'ÉQUIVALENCE V.** *Les systèmes  $E_{p,q}$  et  $e_{p+q,q}$  sont équivalents lorsque la condition (4.2) est remplie: toute solution régulière de  $E_{p,q}$  admet au moins une représentation paramétrique (4.1) et (4.9) qui est solution régulière de  $e_{p+q,q}$ , et inversement.*

Les résultats précédents justifient le nom de variables caractéristiques données ax  $\alpha_\mu$ . Du théorème V, il résulte que pour calculer une solution de  $E_{p,q}$  définie et régulière dans  $D$ , il suffit de déterminer dans ce domaine  $q$  multiplicités  $m_\mu$ , bicaractéristiques de  $E_{p,q}$ , dont les  $q$  surfaces porteuses  $S_\mu$  définissent, d'après (4.2), un système de coordonnées

curvilignes dans  $D$ . Ce résultat justifie donc, a priori, la méthode usuelle de résolution approchée des problèmes aux limites, posé relativement à  $E_{p,q}$  et qui est fondée sur l'emploi des bicaractéristiques. Ce résultat explique aussi l'origine du nom de génératrices des solutions de  $E_{p,q}$  donné aux.

**THÉORÈME D'INVARIANCE VI.** *Soit le changement de variables indépendantes  $\alpha_\mu$ , défini par les formules:*

$$(4.12) \quad \alpha_\mu = \alpha_\mu(\beta_\mu), \quad \mu = 1, 2, \dots, q$$

*où chaque  $\alpha_\mu(\beta_\mu)$  est une fonction régulière de la seule variable  $\beta_\mu$  dont l'ensemble est astreint seulement à vérifier la condition:*

$$(4.13) \quad \frac{d\alpha_1}{d\beta_1} \cdot \frac{d\alpha_2}{d\beta_2} \cdot \dots \cdot \frac{d\alpha_q}{d\beta_q} \neq 0$$

*dans tous les intervalles des variations des  $\alpha_\mu(\beta_\mu)$ . Alors le système  $e_{p+q,q}$  est invariant par la transformation (4.12).*

Ce résultat, comme beaucoup de précédents, a été souvent exploité dans des cas particuliers depuis les travaux fondamentaux d'Ampere et de Drach, dont on trouvera en [4, I] un exposé suggestif. Mais il ne semble pas avoir été énoncé pour les systèmes généraux. La démonstration est la conséquence immédiate des deux propriétés évidentes: 1) les quotients  $[\Delta_k(\mu)]/\Delta\mu$  sont invariants par les transformations (4.12), 2) les coefficients  $b_i$ ,  $a_{iq}$  et  $a_{ikl}$  sont indépendants des variables  $\alpha_\mu$ .

Observons d'ailleurs que ces remarques sont valables, quelle que soit la forme du système hyperbolique donné d'équations aux dérivées partielles de premier ordre, et dès lors ne s'appliquent pas seulement aux  $E_{q,q}$  quasi-linéaires.

**REMARQUE.** Supposons alors qu'on ait réussi à établir un résultat analogue au théorème V pour un système hyperbolique quelconque d'équations aux dérivées partielles de l'ordre  $n$  et à expliciter un système équivalent en variables caractéristiques. Alors le raisonnement précédent prouve que ce dernier système est invariant par les transformations du type (4.12) vérifiant (4.13). On notera que, moyennant (4.13), les transformations (4.12) forment un groupe.

## 5. Solutions régularisables de $E_{p,q}$

Soit une solution  $x_j(\alpha_\mu)$ ,  $U_i(\alpha_\mu)$  de  $e_{p+q,q}$  associée à  $E_{p,q}$ , régulière dans le voisinage du point  $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \in \mathcal{D}$ . Nous dirons que les formules (4.1) et (4.3) définissent alors paramétriquement une solution régularisable en  $A$  de  $E_{p,q}$ . Ainsi une solution régularisable est régulière en  $A$  si elle satisfait la condition (4.2), mais la réciproque n'est pas vraie. Nous dirons que la solution considérée de  $e_{p+q,q}$  est régularisable, mais non nécessairement régulière, sur un ensemble  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ , si elle l'est en  $A$ ,  $\forall A \in \mathcal{C}$ . Introduisons alors un système de coordonnées polaires  $(\varrho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1})$ ,  $\varrho$  étant le rayon vecteur d'un point courant du voisinage de  $A$ . Alors le point  $A$  est régulier relativement à la solution considérée de  $e_{p+q,q}$  si les  $q$  fonctions régulières de  $\mathcal{C}$  et  $\theta_k$ :

$$u_i[x_j(\alpha_\mu)] = W_i(\varrho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1}) = W_i(\varrho, \theta_k), \quad k = 1, \dots, q-1$$

vérifient la condition:

$$(5.1) \quad W_i(0, \theta_k) = \text{cte } \forall k, \quad \forall \theta_k.$$

Sinon, la solution (4.1) et (4.3) est seulement régularisable, et il en résulte:

**THÉORÈME VII.** *La condition nécessaire et suffisante pour que la solution de  $E_{p,q}$  correspondant à une solution régulière en  $A$   $e_{p+q,q}$  soit seulement régularisable (ou régulière) est que l'on ait en ce point (cf. (4.2)):*

$$(5.2) \quad \Delta = \frac{\mathcal{D}[x_j(\alpha_\mu)]}{\mathcal{D}(\alpha_\mu)} = 0,$$

et que (5.1) y soit en défaut (ou vérifié).

D'après cela, l'ensemble  $\mathcal{C}$  de points  $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) \in \mathcal{D}$ , s'il en existe, vérifie l'équation (5.2), laquelle est de la forme:  $F(\alpha_\mu) = 0$ , lorsque la solution de (4.1) et (4.3) de  $e_{p+q,q}$  est connue. Ainsi  $\mathcal{C}$  se compose d'une ou de plusieurs surfaces à  $q_1 \leq (q-1)$  dimension. Appelons alors  $\mu_1$  (ou  $\mu_2$ ) un entier de la suite  $1, 2, \dots, q_1$  (ou  $q_1+1, q_1+2, \dots, q$ ). On sait que, dans cette éventualité, il est possible de numérotter les  $\alpha_\mu$  de façon que la solution générale de (5.2) s'écrive sous la forme de  $(q-q_1)$  relations:

$$(5.3) \quad \alpha_{\mu_2} = \alpha_{\mu_2}(\alpha_{\mu_1})$$

où  $\alpha_{\mu_2}(\alpha_{\mu_1})$  est une fonction régulière des  $q$  arguments  $\alpha_{\mu_1}$ . Les formules (4.1), (4.3) et (5.3) représentent alors paramétriquement dans  $D$  une hypersurface  $\Sigma$  qui peut éventuellement dégénérer, et qui peut être l'enveloppe de certaines surfaces  $S_\mu$  ou soit le lieu de points singuliers de certaines autres. Nous ne pouvons, faute de place, développer ces remarques, et nous nous bornons ici à signaler une de leurs applications importantes. On montre en particulier que la solution  $u_i(x_j)$  peut être discontinue le long de  $\Sigma$ . Or on sait que dans de nombreux cas concrets, les conditions aux limites auxquelles sont astreintes les inconnues des problèmes mixtes posés relativement aux systèmes  $E_{p,q}$  entraînent l'apparition de singularités pour les solutions le long de certains éléments  $\Sigma_1$  de la frontière  $\bar{D}$  du domaine  $D$ . On établit alors que, dans la grande majorité de telles situations, il est possible de construire une solution régularisable de  $E_{p,q}$  qui vérifie toutes les conditions aux limites requises. On montre alors que  $\Sigma_1 \equiv \Sigma$ . Il importe de ne pas perdre de vue que l'ensemble  $\sigma \subset \mathcal{D}$  de points homologues de  $\Sigma$  dans l'application  $(D+\bar{D}) \Leftrightarrow (\mathcal{D}+\bar{\mathcal{D}})$  peut être de dimension inférieure à celle de  $\Sigma$ . On trouvera des exemples explicites des situations qu'on vient de décrire en [1] et [2] dans le cas d'un système  $E_{1,2}$  et en [3.IV] et [3.V] d'un  $E_{3,3}$ . Plusieurs résultats énoncés en ces publications s'étendent au cas des systèmes  $E_{p,q}$  quelconques. Mais il convient de souligner que l'emploi des solutions régularisables de  $E_{p,q}$  permet de résoudre d'autres problèmes aux limites, d'un type qui semble nouveau (et posés, par exemple, pour les  $E_{p,q}$  dont les paramètres  $p$  et  $q$  sont des entiers élevés): à titre d'exemple, citons l'étude de la singularité que présente la solution du problème de Cauchy, posé relativement à  $E_{p,q}$  et à une multiplicité normale, dont la surface porteuse possède une ligne arête, ou la résolution approchée du problème analogue à celui de Cauchy-Goursat, lorsque les inconnues présentent une discontinuité le long de l'intersection des surfaces porteuses des multiplicités bicaractéristiques données, etc... Enfin, observons que les solutions ainsi construites peuvent n'être pas uniques, et introduire plusieurs solutions régularisables à la fois. Résumons ce qui précède. Soit  $a \in D$  un point homologue de  $A$ . Alors la solution  $u_i(x_j)$  sera régulière ou non en  $A$  selon que (5.1) y est vérifié ou non. Mais dans le premier cas une au moins des surfaces  $S_\mu \ni a$  présentera une singularité en  $a$ . Sinon  $a$  appartient à l'enveloppe d'une au moins des  $S_\mu$  et peut être un point de discontinuité des  $u_i(x_j)$ .

## 6. Comparaison entre les avantages et les inconvénients respectifs de l'emploi de $E_{p,q}$ et $e_{p+q,q}$

Le nombre d'inconnues de  $e_{p+q,q}$  est plus élevé que celui de  $E_{p,q}$ . Mais surtout  $e_{p+q,q}$  n'est quasi-linéaire en général que relativement aux inconnues  $U_i$  (cf. (4.2)) et non pas par rapport à  $x_j$ . En revanche  $e_{p+q,q}$  révèle souvent les propriétés des  $u_i(x_j)$  que l'examen des  $E_{p,q}$  ne permet pas de reconnaître immédiatement. Voici quelques exemples, que l'on pourrait multiplier, de nature à illustrer cette assertion.

a. On fait souvent grief aux méthodes résolutive fondées sur l'emploi des multiplicités bicaractéristiques d'exiger, en même temps que le calcul des inconnues aux noeuds de maillage de  $D$ , la détermination pas à pas de celui-ci. Or ces difficultés sont aisément surmontées dans  $\mathcal{D}$  en utilisant  $e_{p+q,q}$  et le théorème d'invariance de leurs solutions.

b. Le recours aux solutions régularisables offre un double avantage lorsque les solutions  $u_i(x_j)$  de  $E_{p,q}$  présentent des singularités régularisables: on peut alors préciser a priori la nature analytique de celles-ci, d'une part, et en donner des expressions approchées locales, sous forme de fonctions régulières des variables caractéristiques, d'autre part. Ainsi on ramène l'étude des problèmes aux limites singuliers posés dans  $D$  relativement à  $E_{p,q}$  à celle des problèmes réguliers posés dans  $\mathcal{D}$  relativement à  $e_{p+q,q}$ , ce qui peut être utile lors de la discussion des questions d'existence et d'unicité des solutions. Mais on ne perdra pas de vue qu'en procédant ainsi, on risque d'éliminer a priori l'examen des solutions non régularisables qui peuvent avoir un intérêt physique. Enfin, il y a lieu de remarquer que les résultats qui précèdent offrent au numéricien un moyen sûr de traiter certains types de problèmes singuliers abordés, parfois, d'une manière un peu artisanale.

## Bibliographie

1. J. L. AURIAULT, J. KRAVTCHENKO, R. NEGRE, R. SIBILLE, *Etude des singularités du champ statique en plasticité coulombienne et leurs applications*, Actes du Symposium franco-polonais Nice, "Problèmes de rhéologie et de mécanique des sols", publiés par l'Institut des Problèmes Fondamentaux de la Technique, série Mécanique, p. 17-67, Varsovie 1974.
2. J. L. AURIAULT, J. KRAVTCHENKO, R. SIBILLE, *Etude analytique et numérique de deux types de singularité s du champ des contraintes plan dans la plasticité coulombienne*, Actes du Symposium franco-polonais, Cracovie: Problèmes non linéaires de Mécanique, Même éditeur, p. 25-58, 1977.
3. Y. BIOLLAY et J. KRAVTCHENKO, *Etude analytique d'un modèle des marées littorales à l'aide des multiplicités bicaractéristiques*, Annales Hydrographiques, Publications du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, Paris, 6 parties. I. Vol. 11, fasc. 758, p. 1-12, 1983; II. Vol. 12, fasc. 759, p. 5-14, 1984; III. vol. 13, fasc. 760, p. 7-26, 1985 IV. Vol. 14, fasc. 761, p. 5-32, 1987; V. Vol. 15, fasc. 762, sous presse; VI. Vol. 16, fasc. 763, paraîtra en 1988.
4. M. JANET, *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris 1929. [1. cf. p. 10, la méthode utilisée pour réduire aux systèmes de premier ordre un système quelconque. On trouvera, p. 9, l'exposé du procédé de Drach pour réduire un système quelconque à une équation aux dérivées partielles du second ordre].
5. CH. RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris 1910 [1. On trouvera en [4] un résumé accessible des résultats exposés dans cet ouvrage].
6. E. GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris, J. Herman, 1922, [2. Les trois derniers chapitres sont consacrés à l'exposé des travaux d'E. Cartan].

INSTITUT DE MECANIQUE DE GRENOBLE  
SAINT-MARTIN D'HERES, FRANCE.

Received April 5, 1988.