

## Sur la nucléation des fissures en fatigue polycyclique sous chargement multiaxial

Y. V. PAPADOPOULOS et K. DANG VAN (PALAISEAU)

DANS CET article nous proposons un modèle d'endommagement adapté à l'étude du phénomène de la nucléation des fissures de fatigue dans les métaux. Le modèle est fondé sur le passage à l'échelle microscopique (échelle du grain). Le dommage est défini comme la microdéformation plastique cumulée des grains plastifiés. Cette conception du dommage nous permet d'établir la courbe de Wöhler à la nucléation généralisée c.à.d valable pour tout chargement cyclique proportionnel multiaxial. Le problème du cumul du dommage est également étudié.

W niniejszej pracy zaproponowano model uszkodzenia zastosowany do badania zjawiska nukleacji szczelin zmęczeniowych w metalach. Model ten jest zbudowany na podstawie przejścia do skali mikroskopowej (skali ziaren). Uszkodzenie jest zdefiniowane jako łączna plastyczna mikrodeformacja uplastycznionych ziaren. Ta koncepcja uszkodzenia pozwala na ustalenie krzywej Wöhlera dla uogólnionej nukleacji, tzn. słusznej dla wszystkich proporcjonalnych wieloosiowych obciążeń cyklicznych. Zbadane jest również zagadnienie kumulacji uszkodzenia.

В настоящей работе предложена модель повреждения, примененная для исследования явления нуклеации усталостных трещин в металлах. Эта модель построена, опираясь на переход к микроскопическому масштабу (масштаб зерен). Повреждение определяется как полная микродеформация пластических зерен. Эта концепция повреждения позволяет установить кривую Велера для обобщенной нуклеации, т. э. справедливой для всех пропорциональных многоосевых циклических нагружений. Исследована тоже проблема кумуляции повреждения.

### 1. Introduction

L'INITIATION des fissures de fatigue sur des structures est un sujet qui attire depuis longtemps les chercheurs. Les progrès réalisés concernent surtout l'aspect expérimental. Ainsi, de nombreux résultats ont été accumulés sur différents types de matériau, aussi bien dans le domaine de l'endurance que dans celui de la fatigue oligocyclique; des observations au microscope permettent de mieux décrire les mécanismes qui se produisent (formation de bandes de glissement persistantes, configuration d'équilibre de cellules de dislocations dans les grains, etc...). Par contre, au niveau des interprétations mécaniques, les progrès sont moins sensibles et l'ingénieur a toujours du mal à dimensionner par le calcul, une structure soumise à la fatigue, à cause des formulations imprécises des critères existants. Le trajet de chargement est traditionnellement ramené à une amplitude et à une valeur moyenne. Notons que ce type de démarche, qui est préconisé dans la plupart des modèles, même les plus récents, remonte en fait au début des études sur la fatigue. Une autre tendance, plus récente, consiste à essayer d'appliquer les acquis de la mécanique linéaire de la rupture. On néglige alors complètement l'amorçage en considérant qu'il s'agit uniquement d'un problème de propagation. Cette démarche est justifiée dans le cas où la structure comporte

des défauts de taille notable par rapport à la dimension des grains du métal. Elle n'est pas valable dans le cas des fissures courtes car les facteurs d'intensité de contrainte évalués dans les grains monocristallins n'ont alors pas grand sens mécanique: un chargement lointain de traction n'engendrera pas que du mode I pur. De plus, ces théories seraient difficilement applicables en dehors du cas de la traction répétée.

Au début des années 70, une autre forme d'approche, entièrement différente, a été proposée, basée sur le passage du macroscopique au microscopique [1]. Les idées de base sont les suivantes: la fatigue étant un phénomène microscopique qui se produit dans les grains, il est judicieux d'utiliser les paramètres locaux dans l'état apparemment stabilisé, pour formuler le critère de fatigue. Par ailleurs, la procédure d'évaluation des contraintes microscopiques qui est proposée permet de décrire, de façon précise, le trajet de charge à chaque instant  $t$  du cycle. Dans le cas de la limite d'endurance, cette approche a déjà permis d'obtenir des résultats intéressants pour un certain nombre de structures subissant des chargements multiaxiaux [2]; en particulier, le critère de fatigue proposé [1] a permis de prévoir les sollicitations critiques et la localisation des points où s'amorcent les fissures [3]. Dans le présent travail, on se propose d'étendre cette démarche au cas de la fatigue à durée de vie limitée à grand nombre de cycles — fatigue polycyclique. Contrairement au cas de l'endurance illimitée, il est ici nécessaire de tenir compte de l'endommagement que l'on reliera au trajet de déformation plastique microscopique.

Dans le domaine de la fatigue polycyclique, les déformations plastiques macroscopiques sont négligeables; les contraintes locales  $\sigma$  dans les grains s'écrivent en fonction des contraintes macroscopiques  $\Sigma$ :

$$(1.1) \quad \sigma = B: \Sigma + \rho$$

où  $B$  est le tenseur de localisation de MANDEL [4] et  $\rho$  le tenseur des contraintes résiduelles microscopiques.

Si on fait les hypothèses suivantes:

La déformation macroscopique  $E$ , supposée purement élastique, est égale à la déformation microscopique  $\epsilon$ , somme d'une partie élastique  $\epsilon^e$  et d'une partie plastique  $\epsilon^p$ .

Le grain et le polycristal (matrice) ont les mêmes propriétés élastiques supposées isotropes.

Alors il est facile de montrer que:

$$(1.2) \quad B = I$$

où  $I$  est le tenseur identité, et que:

$$(1.3) \quad \rho = -2\mu\epsilon^p$$

si bien que (1.1) devient:

$$(1.4) \quad \sigma = \Sigma - 2\mu\epsilon^p.$$

Comme  $\text{tr}\epsilon^p = 0$ , nous déduisons que:

$$(1.5) \quad s = S - 2\mu\epsilon^p$$

et que:

$$(1.6) \quad p = \frac{1}{3} \text{tr} \sigma = \mathcal{P} = \frac{1}{3} \text{tr} \Sigma$$

où  $s$  et  $S$  sont les parties déviatoriques des tenseurs des contraintes microscopiques et macroscopiques, et  $p$  est la pression hydrostatique microscopique, directement égale à la pression macroscopique  $\mathcal{P}$ .

S'agissant de la fatigue polycyclique, la période entre la mise en charge et la rupture de l'éprouvette peut être décomposée en trois phases successives. Dans une première phase, bien que la déformation plastique macroscopique soit négligeable, quelques grains du métal se plastifient parce qu'ils sont défavorablement orientés par rapport au chargement. Cette phase s'achève avec la rupture de ces cristaux et nous admettrons que cette rupture est due à la microdéformation plastique cumulée  $\mathcal{E}^p$ :

$$(1.7) \quad \mathcal{E}^p = \int \sqrt{\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p} dt.$$

Comme la rupture du grain correspond à l'apparition d'une microfissure, cette première phase sera appelée *phase de nucléation*. La deuxième phase est la *phase de formation* d'une fissure dominante par coalescence des microfissures apparues à la fin de la phase précédente. La troisième et dernière phase est la *phase de propagation* qui conduit finalement à la rupture de l'éprouvette.

Les modèles classiques d'endommagement [5] et de propagation [6] conviennent bien pour l'étude des deux dernières phases (formation et propagation d'une fissure). En revanche, le but du présent travail est l'étude de la phase de nucléation (courbe de Wöhler, cumul du dommage) pour des chargements multiaxiaux.

## 2. Variable d'endommagement

Durant la phase de nucléation, la continuité de la matière n'est nulle part interrompue dans l'éprouvette essayée. Il n'est alors pas possible de relier l'endommagement à la croissance de fissures ou de défauts puisque le matériau est sain. Dans le cadre de notre approche, la détérioration du métal durant la phase de nucléation, sera mesurée par la microdéformation plastique cumulée dans les grains qui subissent des glissements plastiques. La loi d'évolution de la variable d'endommagement sera alors donnée par:

$$(2.1) \quad \dot{D} = \dot{\mathcal{E}}^p = \sqrt{\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p}.$$

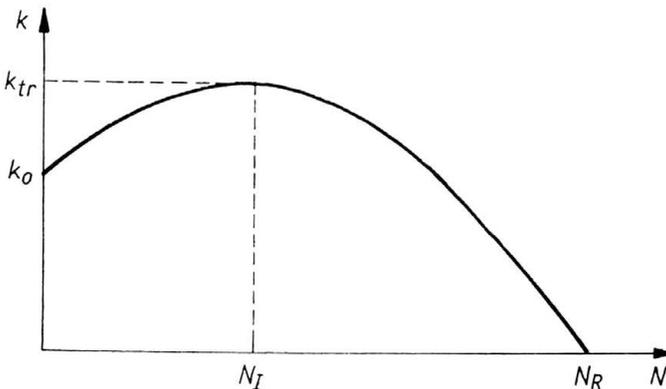


FIG. 1. Evolution de la limite d'élasticité du grain en fonction du nombre de cycles.

Afin d'évaluer, à partir de la définition précédente (équ. (2.1), le dommage provoqué par un trajet de chargement, outre les relations de passage macroscopique-microscopique (équ. (1.4), il est également nécessaire de connaître la loi de comportement élastoplastique du grain. On supposera, pour simplifier, que cette loi comporte seulement une phase de durcissement et une phase d'adoucissement. Un tel comportement peut être décrit, dans le cas d'un chargement cyclique, par la courbe qui donne l'évolution de la limite d'élasticité du cristal  $k$ , en fonction du nombre de cycles  $N$  (Fig. 1).

La transition entre les deux phases s'effectue pour une valeur précise  $k_{tr}$  de la limite d'élasticité du cristal (Fig. 1). Nous notons par  $N_I$  et  $N_{II}$  les nombres de cycles correspondant respectivement aux phases de durcissement et d'adoucissement. La rupture du grain est achevée lorsque l'adoucissement est complet. Si  $N_R$  est le nombre de cycles à la rupture du grain (soit encore, par définition, le nombre de cycles à la nucléation d'une fissure), alors nous avons:

$$(2.2) \quad \text{rupture du grain} \Leftrightarrow k(N_R) = 0.$$

Il est connu que la loi de Schmid, qui fait intervenir la cission réduite, exprime bien la condition de plasticité du monocristal. Néanmoins, pour pouvoir élaborer un modèle adapté au calcul des structures, nous faisons l'hypothèse que le grain obéit au critère de plasticité de von Mises avec écrouissage isotrope et cinématique:

$$(2.3) \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{a}) : (\mathbf{s} - \mathbf{a}) - k^2.$$

En charge plastique ( $f = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0$ ), la vitesse de la déformation plastique suit la règle de normalité:

$$(2.4) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda (\mathbf{s} - \mathbf{a})$$

l'écrouissage cinématique du cristal est donné par:

$$(2.5) \quad \mathbf{a} = c \boldsymbol{\epsilon}^p \Rightarrow \dot{\mathbf{a}} = c \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \quad c > 0.$$

La loi d'écrouissage isotrope dépend de la phase de comportement considérée. Durant le durcissement, la limite d'élasticité du cristal croît linéairement selon la loi,

$$(2.6) \quad \dot{k} = g \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}, \quad g > 0$$

alors que durant la phase d'adoucissement, elle décroît selon une loi similaire:

$$(2.7) \quad \dot{k} = -h \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}, \quad -h < 0.$$

En charge plastique, la condition  $\dot{f} = 0$  nous permet de calculer  $\lambda$ . En phase de durcissement, nous avons,

$$(2.8) \quad \lambda = \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{a}) : \dot{\mathbf{s}}}{2(c + \sqrt{2g})k^2}$$

alors que dans la phase d'adoucissement il vient:

$$(2.9) \quad \lambda = \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{a}) : \dot{\mathbf{s}}}{2(c - \sqrt{2h})k^2}.$$

Par dérivation des relations de passage (1.5), nous obtenons:

$$(2.10) \quad \dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{S}} - 2\mu\dot{\epsilon}^p.$$

En combinant les équations (2.4), (2.8), (2.9) et (2.10), nous calculons les vitesses de déformation plastique dans la phase de durcissement,

$$(2.11) \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{[(\mathbf{s}-\mathbf{a}) : \dot{\mathbf{S}}] (\mathbf{s}-\mathbf{a})}{2(c+2\mu + \sqrt{2g})k^2}$$

et dans celle d'adoucissement:

$$(2.12) \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{[(\mathbf{s}-\mathbf{a}) : \dot{\mathbf{S}}] (\mathbf{s}-\mathbf{a})}{2(c+2\mu - \sqrt{2h})k^2}.$$

Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude des chargements proportionnels. Dans ce cas, es tenseurs  $\dot{\mathbf{S}}$  et  $(\mathbf{s}-\mathbf{a})$  sont colinéaires [7], si bien qu'en charge plastique nous avons:

$$(2.13) \quad [(\mathbf{s}-\mathbf{a}) : \dot{\mathbf{S}}] (\mathbf{s}-\mathbf{a}) = [(\mathbf{s}-\mathbf{a}) : (\mathbf{s}-\mathbf{a})]\dot{\mathbf{S}} = 2k^2\dot{\mathbf{S}}.$$

En tenant compte de (2.13), les vitesses de déformation plastique s'écrivent,

$$(2.14) \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\mathbf{S}}}{(c+2\mu + \sqrt{2g})}$$

dans la phase de durcissement, et,

$$(2.15) \quad \dot{\epsilon}^p = \frac{\dot{\mathbf{S}}}{(c+2\mu - \sqrt{2h})}$$

dans la phase d'adoucissement. La vitesse  $\dot{\epsilon}^p$  est alors directement proportionnelle à la vitesse du déviateur macroscopique  $\dot{\mathbf{S}}$ . Il est donc possible, pour un chargement radial cyclique de période  $T$ , de calculer la microdéformation plastique cumulée à tout instant  $t = NT$ , dans la phase de durcissement ( $0 < NT \leq N_1 T$ )

$$(2.16) \quad \mathcal{E}^p = \frac{1}{(c+2\mu + \sqrt{2g})} \int_0^{NT} \sqrt{\dot{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}}} d\tau$$

et dans la phase d'adoucissement ( $N_1 T \leq NT < N_R T$ ):

$$(2.17) \quad \mathcal{E}^p = \frac{1}{(c+2\mu - \sqrt{2h})} \int_{N_1 T}^{NT} \sqrt{\dot{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}}} d\tau + \mathcal{E}^p(N_1)$$

Lors d'un chargement cyclique proportionnel le déviateur macroscopique  $\mathbf{S}$  varie entre deux états extrêmes notés  $\mathbf{S}_A$  et  $\mathbf{S}_B$ . Nous choisissons ces états de manière que

$$(2.18) \quad \|\mathbf{S}_A\| > \|\mathbf{S}_B\|$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la mesure euclidienne i.e.  $\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}$ . Le chargement cyclique est composé d'une première mise en charge de l'état  $\mathbf{0}$  à l'état  $\mathbf{S}_A$  et puis de cycles successifs entre  $\mathbf{S}_A$  et  $\mathbf{S}_B$ . On défini le tenseur variation des contraintes déviatoriques macroscopiques

$$(2.19) \quad \Delta\mathbf{S} = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_B$$

ainsi que le déviateur moyen

$$(2.20) \quad \mathbf{S}_M = \frac{1}{2} (\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B).$$

Le calcul de  $\mathcal{E}^p$  dans la phase de durcissement (équ. (2.16)) s'effectue de la façon suivante [7]. D'abord, on calcule la microdéformation plastique cumulée  $\delta\mathcal{E}_i^p$  durant un cycle  $i$  quelconque du chargement:

$$(2.21) \quad \delta\mathcal{E}_i^p = \int_{iT}^{(i+1)T} \sqrt{\dot{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}}} d\tau$$

puis la microdéformation plastique cumulée  $\delta\mathcal{E}_{i+1}^p$  correspondant au cycle  $(i+1)$ ; on montre que les termes  $\delta\mathcal{E}_i^p$  forment une série géométrique de raison  $\omega$ :

$$(2.22) \quad \delta\mathcal{E}_{i+1}^p = \omega \delta\mathcal{E}_i^p$$

où:

$$(2.23) \quad \omega = \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}g}{c+2\mu+\sqrt{2}g} \right)^2 < 1$$

si bien que la déformation plastique cumulée  $\mathcal{E}^p(N)$  et, par conséquent, le dommage (voir équ. 2.1), valent dans la phase de durcissement:

$$(2.24) \quad D(N) = \mathcal{E}^p(N) = \mathcal{E}_1^p + \delta\mathcal{E}_1^p \frac{1-\omega^N}{1-\omega}$$

où  $\mathcal{E}_1^p$  désigne la déformation plastique cumulée lors de la première mise en charge (trajet  $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{S}_A$ ),

$$(2.25) \quad \mathcal{E}_1^p = \frac{1}{c+2\mu+\sqrt{2}g} \left( \frac{\|\Delta\mathbf{S}\|}{2} + \|\mathbf{S}_M\| - \sqrt{2}k_0 \right)$$

et  $\delta\mathcal{E}_1^p$  son accroissement lors du premier cycle (trajet  $\mathbf{S}_A \rightarrow \mathbf{S}_B \rightarrow \mathbf{S}_A$ ):

$$(2.26) \quad \delta\mathcal{E}_1^p = \frac{2}{c+2\mu+\sqrt{2}g} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}g}{c+2\mu+\sqrt{2}g} \right) (\|\Delta\mathbf{S}\| - 2\sqrt{2}k_1),$$

$k_0$  est la limite d'élasticité initiale du cristal et  $k_1$  cette même limite à la fin de la première mise en charge ( $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{S}_A$ )

$$(2.27) \quad k_1 = k_0 + g\mathcal{E}_1^p = k_0 + \frac{g}{c+2\mu+\sqrt{2}g} \left( \frac{\|\Delta\mathbf{S}\|}{2} + \|\mathbf{S}_M\| - \sqrt{2}k_0 \right).$$

En général  $g \ll c+2\mu+\sqrt{2}g$  de manière que nous pouvons admettre:

$$(2.28) \quad k_1 \simeq k_0.$$

La microdéformation plastique cumulée  $\mathcal{E}^p(N)$  (i.e. le dommage  $D(N)$ ) dans la phase de durcissement est alors donné par (voir équ. (2.24), (2.25), (2.26) et (2.28):

$$(2.29) \quad D(N) = \mathcal{E}^p(N) = \frac{1}{g} \left( \frac{\|\Delta\mathbf{S}\|}{2\sqrt{2}} - k_0 \right) (1 - \omega^N).$$

L'intégration de la loi d'évolution de la limite d'élasticité du cristal (éq. (2.6), combinée avec l'équation (2.29) conduit au résultat :

$$(2.30) \quad k(N) = k_0 + g\mathcal{E}^P(N) = k_0 + \left( \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_0 \right) (1 - \omega^N).$$

La relation précédente montre, par ailleurs, qu'au moment de la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement (i.e. pour  $N = N_I \Rightarrow k(N_I) = k_{tr}$ ), la déformation plastique cumulée  $\mathcal{E}^P(N_I)$  vaut :

$$(2.31) \quad \mathcal{E}^P(N_I) = \frac{1}{g} (k_{tr} - k_0)$$

D'une façon similaire, nous montrons que  $\mathcal{E}^P(N)$  (i.e.  $D(N)$ ) est donné dans la phase d'adoucissement par la relation :

$$(2.32) \quad D(N) = \mathcal{E}^P(N) = \mathcal{E}^P(N_I) + \frac{1}{h} \left( \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{tr} \right) (1 - \eta^{(N-N_I)})$$

où le paramètre  $\eta$  est exprimé par :

$$(2.33) \quad \eta = \left( 1 + \frac{2\sqrt{2}h}{c + 2\mu - \sqrt{2}h} \right)^2 > 1.$$

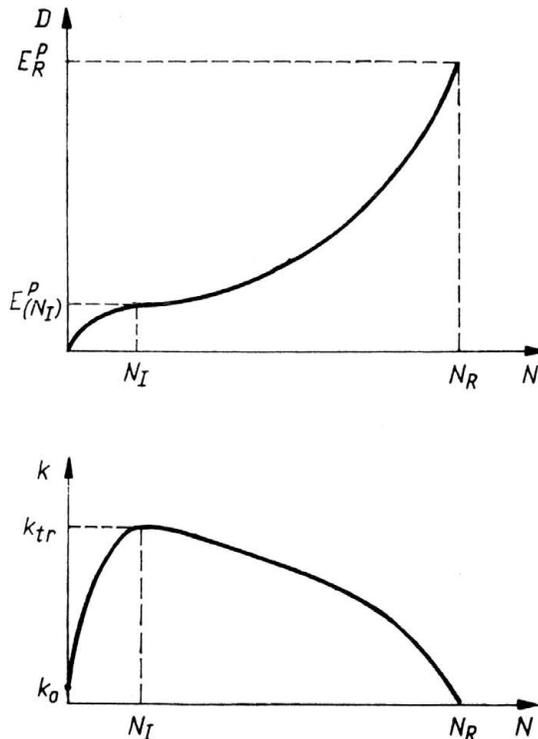


FIG. 2. Evolution du dommage et de la limite d'élasticité du cristal pour un chargement cyclique proportionnel.

La limite d'élasticité du cristal obtenue par intégration de la loi d'adoucissement (équ. 2.7) conduit à :

$$(2.34) \quad k(N) = k_{tr} - h[\mathcal{E}^p(N) - \mathcal{E}^p(N_I)]$$

soit encore en remplaçant  $\mathcal{E}^p(N)$  et  $\mathcal{E}^p(N_I)$  par (2.32) et (2.31)

$$(2.35) \quad k(N) = \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - \left( \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{tr} \right) \eta^{(N-N_I)}.$$

Les courbes d'évolution du dommage et de la limite d'élasticité du grain en fonction du nombre de cycles, lors d'un chargement proportionnel cyclique, sont tracées sur la Figure 2, pour des valeurs numériques typiques. Il est intéressant de noter que la courbe du dommage est concave durant la phase de durcissement puis convexe durant la phase d'adoucissement, alors que les définitions classiques de l'endommagement conduisent toutes à une courbe concave.

### 3. Courbe de Wöhler à la nucléation

Le nombre de cycles à la rupture du cristal  $N_R$  (i.e. à la nucléation d'une fissure de fatigue) est égal à la somme des nombres de cycles  $N_I$  et  $N_{II}$ . Par ailleurs, étant donné que la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement s'effectue pour la valeur  $k_{tr}$  de la limite d'élasticité du cristal, le nombre de cycles de la phase de durcissement peut être obtenu par l'équation :

$$(3.1) \quad N_I: \quad k(N_I) = k_0 + \left( \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_0 \right) (1 - \omega^{N_I}) = k_{tr}.$$

La solution de (3.1) nous offre  $N_I$  :

$$(3.2) \quad N_I = \frac{1}{\text{Ln } \omega} \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{tr}}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_0} \right)$$

avec  $\omega$  donné par (2.23).

Par hypothèse, la rupture du cristal correspond à son adoucissement complet, i.e. à l'annulation de sa limite d'élasticité. Le nombre de cycles  $N_{II}$  est donc le nombre de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité du cristal décroisse à partir de la valeur  $k_{tr}$  jusqu'à zéro :

$$(3.3) \quad N_{II} = N_R - N_{tr}: \quad k(N) = \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - \left( \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{tr} \right) \eta^{(N_R - N_I)} = 0.$$

Par la solution de l'équation précédente nous obtenons  $N_{II}$  :

$$(3.4) \quad N_{II} = \frac{1}{\text{Ln } \eta} \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right)$$

où  $\eta$  est donné par (2.33). A cause des ordres de grandeur relatifs des constantes  $g$ ,  $(c + 2\mu + \sqrt{2}g)$  et  $h$ ,  $(c + 2\mu - \sqrt{2}h)$  nous pouvons admettre que,

$$(3.5) \quad \text{Ln} \omega = 2 \text{Ln} \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}g}{c + 2\mu + \sqrt{2}g} \right) \simeq - \frac{4\sqrt{2}g}{c + 2\mu + \sqrt{2}g}$$

et que:

$$(3.6) \quad \text{Ln} \eta = 2 \text{Ln} \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}h}{c + 2\mu - \sqrt{2}h} \right) \simeq \frac{4\sqrt{2}h}{c + 2\mu - \sqrt{2}h}.$$

En tenant compte des simplifications précédentes et des équations (3.2) et (3.4), le nombre de cycles à la rupture du cristal  $N_R$  est égal à :

$$(3.7) \quad N_R = p \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right) - q \frac{1}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}}$$

avec:

$$(3.8) \quad p = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}} \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right), \quad q = \frac{c + 2\mu}{4\sqrt{2}g} k_0.$$

La courbe représentative de l'équation (3.7) dans le plan  $\left( N_R, \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} \right)$ , est la *courbe de Wöhler généralisée à la nucléation* pour un chargement cyclique proportionnel *multi-axial*. Cette courbe dépend de trois paramètres  $p$ ,  $q$  et  $k_{tr}$ .

Il est important de remarquer que, quand  $\|\Delta S\|/2\sqrt{2}$  tend vers la valeur  $k_{tr}$  le nombre de cycles à la nucléation  $N_R$  tend vers l'infini (voir équ. (3.7)). Le paramètre  $k_{tr}$  qui est la limite d'élasticité du cristal au moment de la transition entre les phases de durcissement et d'adoucissement, apparaît alors en même temps comme une *limite d'endurance généralisée*. L'étude complète du problème du critère de fatigue [7] a montré que  $k_{tr}$  peut être exprimé, pour un chargement cyclique proportionnel, par:

$$(3.9) \quad k_{tr} = \frac{-\alpha \mathcal{P}_m + \beta}{\alpha \mathcal{P}_a + \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}} \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}$$

où  $\mathcal{P}_m$  et  $\mathcal{P}_a$  sont la valeur moyenne et l'amplitude de la pression hydrostatique macroscopique. Le paramètre  $k_{tr}$  étant la limite d'endurance généralisée, le critère de fatigue s'écrit alors [7]:

$$(3.10) \quad \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} \leq k_{tr}.$$

En remplaçant  $k_{tr}$  dans (3.10) par l'expression (3.9), le critère proposée se met sous une forme plus commode:

$$(3.11) \quad \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} + \alpha(\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_m) \leq \beta$$

ce qui nous permet d'identifier les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . En effet, si nous notons  $t$  et  $f$  les limites d'endurance en torsion et traction-compression alternées, l'application de la relation (3.11) dans ces deux cas, conduit aux formules:

$$(3.12) \quad \alpha = \frac{t-f/\sqrt{3}}{f/\sqrt{3}}, \quad \beta = t.$$

Grâce aux relations (3.9) et (3.12), le paramètre  $k_{tr}$  est connu d'avance pour un chargement cyclique proportionnel donné. Les deux autres paramètres  $p$  et  $q$  peuvent être facilement identifiés en écrivant l'équation (3.7) définissant la courbe de Wöhler, sous la forme:

$$(3.13) \quad y = px - q$$

avec:

$$(3.14) \quad y = \frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} N_R, \quad x = \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right)^{\frac{\|\Delta S\|}{2\sqrt{2}}}.$$

Dans le plan  $(x, y)$ , cette courbe est alors une droite de pente  $p$  et d'ordonnée à l'origine  $-q$ . En reportant les résultats expérimentaux habituellement disponibles sous la forme de couples  $(N_R, \|\Delta S\|/2\sqrt{2})$  dans le plan  $(x, y)$ , nous déterminons facilement  $p$  et  $q$  par la méthode des moindres carrés.

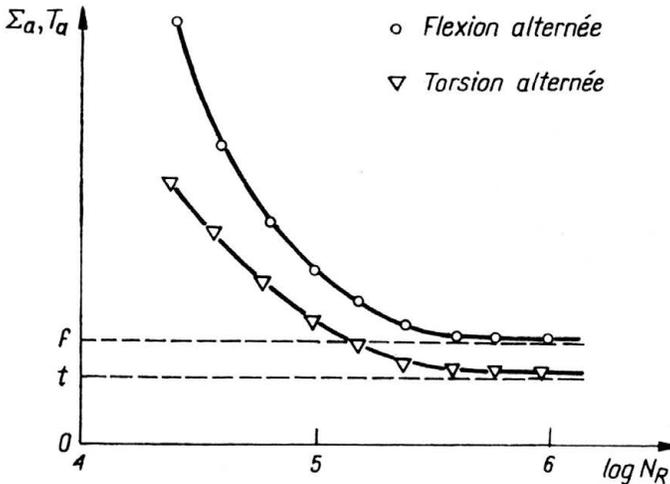


FIG. 3. Courbes de Wöhler à la nucléation.

Sur la Figure 3 nous avons tracé les courbes de Wöhler à la nucléation en traction-compression et torsion alternées obtenues en particulierisant l'équation générale (3.7) dans ces deux cas. Elles présentent bien la même allure que les courbes  $S-N$  expérimentales.

Il est intéressant de noter que, pour obtenir la courbe de Wöhler généralisée, il n'est pas nécessaire de connaître explicitement les quatre constantes  $g, h, c$  et  $k_0$  qui définissent le comportement élastoplastique du grain, mais seulement les deux combinaisons  $p$  et  $q$

exprimées par les équations (3.8). En revanche, dans le problème du cumul du dommage, les paramètres  $(c + 2\mu)/4\sqrt{2}g$ ,  $(c + 2\mu)/4\sqrt{2}h$  et  $k_0$  apparaîtront séparément. Nous aurons alors besoin d'un renseignement supplémentaire.

**4. Cumul du dommage**

Dans le présent travail nous nous limiterons à l'étude du cumul du dommage dans le cas d'une suite de deux chargements similaires. Nous appelons similaires deux chargements proportionnels cycliques s'ils possèdent la même limite d'endurance généralisée  $k_{tr}$  [7]. L'équation (3.9) montre que la condition de similarité ainsi définie correspond aux relations:

$$(4.1) \quad \mathcal{P}_m^{(1)} = \mathcal{P}_m^{(2)}, \quad \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{\mathcal{P}_a^{(1)}} = \frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{\mathcal{P}_a^{(2)}}.$$

Pour de chargements uniaxiaux de même nature, le système d'équations (4.1) indique que leurs états moyens sont identiques mais que leurs amplitudes différentes (Fig. 4).

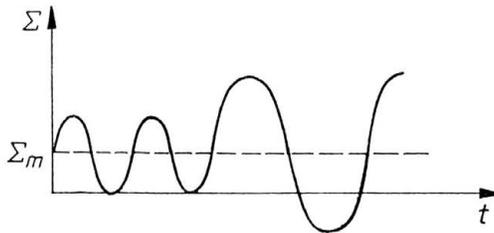


FIG. 4. Suite de deux chargements uniaxiaux de même nature similaires.

Nous allons tout d'abord examiner le cas d'une suite de deux chargements similaires le premier étant plus faible que le second au sens où  $\|\Delta S\|^{(1)} < \|\Delta S\|^{(2)}$ . Nous supposons que les deux chargements violent le critère de fatigue du matériau,

$$(4.2) \quad \frac{\|\Delta S\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} > k_{tr}, \quad i = 1, 2$$

où  $k_{tr}$ , la limite d'endurance généralisée commune aux deux chargements peut être calculée par l'équ. (3.9). La condition (4.2) implique qu'il y aura bien nucléation d'une fissure de fatigue après un nombre fini  $N_R$  de cycles.

Si le premier chargement (faible) est appliqué durant  $N_1$  cycles, nous désignerons par  $N_2$  le nombre de cycles que doit durer le second chargement (fort) pour qu'il y ait nucléation d'une fissure (i.e. rupture du cristal). Le problème du cumul du dommage consiste alors à déterminer le nombre de cycles  $N_2$ . Pour cela il faut calculer la limite d'élasticité du cristal  $k(N_1)$  à la fin du premier chargement. L'expression de  $k(N_1)$  est différente suivant qu'au moment où débute le second chargement, le cristal est encore en phase de durcissement ou déjà en phase d'adoucissement. Pour le savoir,  $N_1$  doit être comparé au nombre de cycles  $N_1^{(1)}$  que dure la phase de durcissement du cristal soumis au premier chargement seul. Tenant compte des simplifications (3.5) et (3.6)  $N_1^{(1)}$  s'écrit:

$$(4.3) \quad N_1^{(1)} = \left( \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}g} + \frac{1}{4} \right) \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_0}{\frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right).$$

Si  $N_1 < N_1^{(1)}$  alors  $k(N_1)$  est égal à (voir équ. (2.30):

$$(4.4) \quad k(N_1) = \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left( \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_0 \right) \omega^{N_1}.$$

A la fin du premier chargement le cristal est donc encore en phase de durcissement si bien que, durant le second chargement, le durcissement du cristal se poursuit tout d'abord pendant  $N_2'$  cycles. Nous notons par  $N_2'$  le nombre de cycles nécessaires pour que, sous le second chargement, la limite d'élasticité du cristal croisse de  $k(N_1)$  à  $k_{tr}$ .  $N_2'$  est alors donné par une expression analogue à (4.3). En remplaçant  $k_0$  par  $k(N_1)$  et  $\|\Delta S\|^{(1)}$  par  $\|\Delta S\|^{(2)}$  nous obtenons  $N_2'$ :

$$(4.5) \quad N_2' = \left( \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}g} + \frac{1}{4} \right) \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right).$$

Lorsque la limite d'élasticité du cristal atteint la valeur  $k_{tr}$ , la phase d'adoucissement commence et ils s'écoulent encore  $N_2''$  cycles avant que ne se produise la rupture du cristal.  $N_2''$  est donc égal, au nombre de cycles  $N_1^{(2)}$  que dure la phase d'adoucissement sous le second chargement seul (voir équ. 3.4):

$$(4.6) \quad N_2'' = N_1^{(2)} = \left( \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}h} - \frac{1}{4} \right) \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right).$$

Finalement dans le cas où  $N_1 < N_1^{(1)}$  nous obtenons  $N_2$  comme la somme de  $N_2'$  (équ. (4.5) et  $N_2''$  (équ. (4.6)).

Nous allons maintenant considérer le cas où  $N_1$  est supérieur à  $N_1^{(1)}$ . Durant les  $(N_1 - N_1^{(1)})$  derniers cycles du premier chargement, le cristal est en phase d'adoucissement et sa limite d'élasticité décroît jusqu'à la valeur  $k(N_1)$  donnée par (voir équ. (2.35))

$$(4.7) \quad k(N_1) = \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - \left( \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr} \right) \eta^{(N_1 - N_1^{(1)})}$$

où  $N_1^{(1)}$  et  $\eta$  sont donnés par (4.3) et (2.33). Lorsque commence le second chargement le cristal continue en phase d'adoucissement, jusqu'à sa rupture. Sous le second chargement, le nombre  $N_2$  de cycles nécessaires pour que la limite d'élasticité du cristal décroisse de  $k(N_1)$  à zéro est donné par une expression analogue à celle de  $N_1^{(2)}$ . En remplaçant  $k_{tr}$  par  $k(N_1)$  dans (4.6) nous obtenons  $N_2$ :

$$(4.8) \quad N_2 = \left( \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}h} - \frac{1}{4} \right) \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k(N_1)} \right).$$

A titre d'illustration nous allons traiter un exemple numérique. Les constantes du matériau sont arbitrairement choisies de la manière suivante :

$$\alpha = 0.25, \quad \beta = 150 \text{ MPa}, \quad \mu = 70000 \text{ MPa}, \quad k_0 = 5 \text{ MPa},$$

$$c = 0, \quad g = 150 \text{ MPa}, \quad h = 30 \text{ MPa}.$$

La suite de chargements considérée est composée de deux torsions alternées d'amplitudes respectives  $T_a^{(1)} = 160 \text{ MPa}$  et  $T_a^{(2)} = 200 \text{ MPa}$ . Dans ce cas nous avons :

$$(4.9) \quad \frac{\|\Delta S\|^{(i)}}{2\sqrt{2}} = T_a^{(i)}, \quad \mathcal{P}_a^{(i)} = \mathcal{P}_m^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Par (3.9) et à l'aide de l'équ. (4.9) nous calculons  $k_{tr}$  :

$$(4.10) \quad k_{tr} = \frac{-\alpha O + \beta}{\alpha O + T_a^{(i)}} T_a^{(i)} = \beta.$$

Dans la suite pour  $N_1$  donné en appliquant les formules (4.5), (4.6) ou (4.8) nous obtenons  $N_2$  suivant le cas ( $N_1 \leq N_1^{(1)}$  ou  $N_1 > N_1^{(1)}$ ).

Les résultats relatifs au cumul du dommage à deux niveaux de charge sont habituellement représentés dans un *diagramme de fractions de vie*. Si, lors d'un essai, le nombre de cycles  $N_R$  à la rupture se compose de  $N_1$  cycles du premier chargement et  $N_2$  cycles du second chargement, l'essai est représenté dans ce diagramme par un point d'abscisse  $N_1/N_R^{(1)}$  et d'ordonnée  $N_2/N_R^{(2)}$ ,  $N_R^{(1)}$  (resp.  $N_R^{(2)}$ ) étant le nombre de cycles à la rupture sous l'action

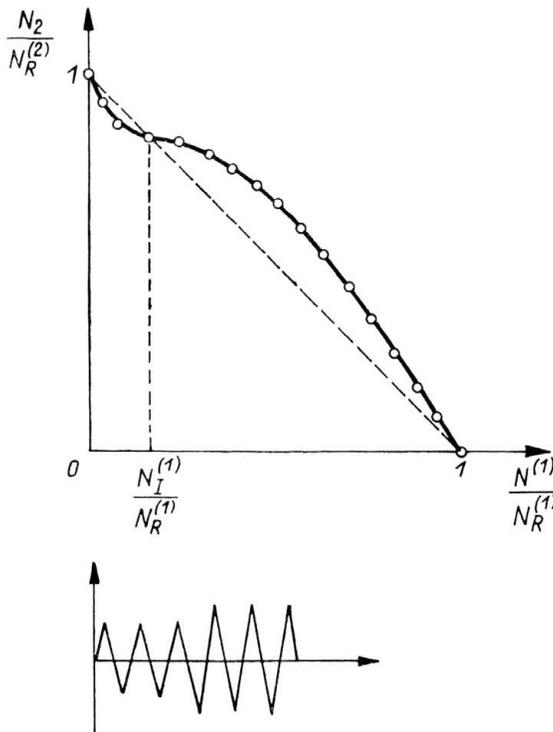


Fig. 5. Diagramme des fractions de vie pour une suite de deux torsions alternées (chargement faible d'abord).

du premier (resp. second) chargement seul. Lorsque le nombre de cycles d'application du premier chargement  $N_1$  varie continûment de  $O$  à  $N_R^{(1)}$ ,  $N_2$  varie continûment de  $N_R^{(2)}$  à  $O$ . Dans le diagramme de fractions de vie, nous obtenons alors une courbe d'extrémités les points  $(O, 1)$  et  $(1, O)$ . Lorsque le cumul du dommage suit une règle linéaire (règle de Miner par exemple), cette courbe est une droite (segment  $[(O, 1), (1, O)]$  sur la Figure 5). Si ce n'est pas le cas, la courbe de fractions de vie peut s'écarter considérablement de la droite du cumul linéaire. C'est ce que nous observons sur la Figure 5 où est représentée la courbe de fractions de vie pour l'exemple numérique choisi.

Il est intéressant de remarquer que cette courbe possède un point d'inflexion sur la droite du cumul linéaire. Après ce point, c'est-à-dire pour  $N_1 > N_I^{(1)}$ , la courbe de fractions de vie est au dessus de la droite du cumul linéaire. Ceci signifie que la succession des deux chargements a un effet bénéfique sur la durée de vie, i.e.

$$\frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(2)}} > 1$$

si le premier chargement (faible) est appliqué durant plus de  $N_1$  cycles, c'est-à-dire suffisamment longtemps pour que le cristal entre en phase d'adoucissement. Cette propriété est bien confirmée par la plupart des résultats expérimentaux [5].

L'étude du cas où le chargement fort précède le chargement faible peut être menée de manière analogue. La Figure 6 représente le diagramme des fractions de vie pour l'exemple numérique déjà cité précédemment où maintenant l'ordre d'application des deux charge-

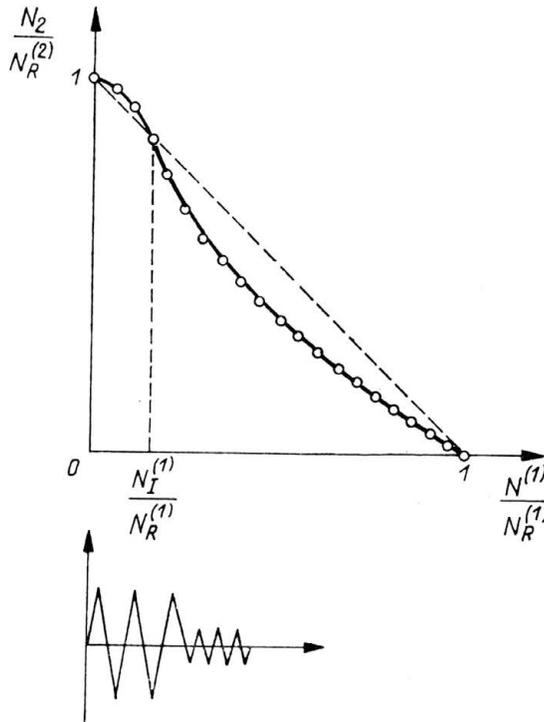


FIG. 6. Diagramme des fractions de vie pour une suite de deux torsions alternées (torsion forte d'abord).

ments est inversé. La courbe de fractions de vie possède toujours un point d'inflexion sur la droite du cumul linéaire. Après ce point la courbe est au-dessous de la droite du cumul linéaire. L'influence d'une suite de deux chargements similaires (fort-faible) sur la durée de vie est alors exactement l'inverse de celle qui avait été trouvée dans le cas précédent; elle est en général préjudiciable i.e.

$$\frac{N_1}{N_R^{(1)}} + \frac{N_2}{N_R^{(1)}} < 1.$$

Néanmoins si le premier chargement est appliqué pour peu de cycles de manière qu'après les  $N_1$  cycles le cristal est encore en phase de durcissement l'influence de la suite (chargement fort-chargement faible) est bénéfique.

Pour résoudre le problème du cumul du dommage, la connaissance de deux paramètres,

$$p = \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}} \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{h} \right), \quad q = \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}} k_0$$

qui définissent la courbe de Wöhler généralisée (voir équ. (3.7)), ne suffit pas puisque les quantités  $(c+2\mu)/4\sqrt{2}g$ ,  $(c+2\mu)/4\sqrt{2}h$ , et  $k_0$  interviennent séparément dans les équations (4.5), (4.6) et (4.8). L'identification de l'une de ces trois constantes est alors nécessaire. Ceci est possible à l'aide d'un essai de cumul tel que l'amplitude du premier chargement est exactement égale à la limite d'endurance correspondante (i.e.  $\|\Delta S\|^{(1)}/2\sqrt{2} = k_{tr}$ ) alors que l'amplitude du second  $\|\Delta S\|^{(2)}/2\sqrt{2}$  est supérieur à  $\|\Delta S\|^{(1)}/2\sqrt{2}$  et a fortiori à  $k_{tr}$ . En supposant que  $N_1$ , le nombre de cycles d'application du premier chargement est très grand, étant donné que  $\omega < 1$ , nous avons (voir équ. 2.30):

$$(4.11) \quad N_1 \rightarrow +\infty, \quad k(N_1) \simeq \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} = k_{tr}.$$

Pour calculer le nombre de cycles  $N_2$  il faut calculer  $N_2'$  et  $N_2''$  par (4.5) et (4.6). Mais comme,

$$k(N_1) \simeq \frac{\|\Delta S\|^{(1)}}{2\sqrt{2}} = k_{tr},$$

$N_2'$  est égal à zéro.  $N_2''$  est alors directement égal à  $N_2$ :

$$(4.12) \quad N_2'' = N_2 = \left( \frac{c+2\mu}{4\sqrt{2}h} - \frac{1}{4} \right) \text{Ln} \left( \frac{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\|\Delta S\|^{(2)}}{2\sqrt{2}} - k_{tr}} \right).$$

En mesurant le nombre  $N_2$  de cycles écoulés sous le second chargement avant la nucléation d'une fissure, il est possible d'identifier le coefficient  $(c+2\mu)/4\sqrt{2}h$  qui est la seule inconnue de l'équation (4.12).

Finalement pour identifier les trois coefficients  $(c+2\mu)/4\sqrt{2}g$ ,  $(c+2\mu)/4\sqrt{2}h$ , et  $k_0$  il suffit de connaître une seule courbe S-N expérimentale et d'effectuer un essai particulier de cumul de dommage.

## 5. Conclusion

Un modèle d'endommagement adapté à l'étude du phénomène de la nucléation des fissures de fatigue a été présenté. Le modèle est fondé sur le passage macroscopique-microscopique et le dommage est défini comme la microdéformation plastique cumulée.

Cette conception du dommage nous a permis d'établir la courbe de Wöhler à la nucléation généralisée, c.à.d. valable pour un chargement cyclique proportionnel multiaxial. L'étude du problème du cumul du dommage a montré que le modèle proposé reproduisait qualitativement bien les résultats expérimentaux.

Dans le présent article le cas d'un métal dont les cristaux constitutifs possèdent un comportement élastoplastique composé de deux phases seulement (durcissement-adoucissement) a été envisagé. D'autres types de comportement ont déjà été étudiés [7] avec des résultats encourageants. Il faut aussi mentionner que le modèle proposé convient à l'étude du cumul du dommage pour des chargements similaires ou non-similaires (torsion suivie d'une flexion p.ex. [7]). Finalement notons que la validité du modèle peut être étendue dans le cas des chargements non-proportionnels au prix d'une intégration numérique de la loi d'évolution de la variable d'endommagement.

## Bibliographie

1. K. DANG VAN, *Sur la résistance à la fatigue des métaux*, Sciences et Techniques de l'Armement, 47, Mémorial de l'Artillerie française, 3ème fascicule, 1973.
2. K. DANG VAN, I. V. PAPADOPOULOS, *Multiaxial fatigue failure criterion: a new approach*, Proc. Third International Conference on Fatigue and Fatigue Thresholds, R. O. Ritchie and E. A. Starke Jnr. eds., Charlottesville 1987.
3. K. DANG VAN et al., *Critère d'amorçage en fatigue à grand nombre de cycles sous sollicitations multiaxiales*, Conf. Int. Journées de Printemps, Société Française de Metallurgie, Paris 1984.
4. J. MANDEL, *Plasticité classique et viscoplasticité*, Courses and Lectures of CISM, 97, Springer-Verlag 1971.
5. J. LEMAITRE, J. L. CHABOCHE, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris 1985.
6. M. KLESNIL, P. LUKAS, *Fatigue of metallic materials*, Elsevier Scientific Company, 1980.
7. I. V. PAPADOPOULOS, *Fatigue polycyclique des métaux: une nouvelle approche*, Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris 1987.

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES  
ECOLE POLYTECHNIQUE, PALAISEAU, FRANCE.

Received April 5, 1988.