

Praca habilitacyjna

Stanisław Kucharski

IDENTYFIKACJA WŁASNOŚCI I EWOLUCJA  
STANU TECHNOLOGICZNEJ WARSTWY  
WIERZCHNIEJ ELEMENTÓW  
OBCIĄŻONYCH MONOTONICZNIE  
I CYKLICZNIE

4/2002

4/02



WARSZAWA 2002

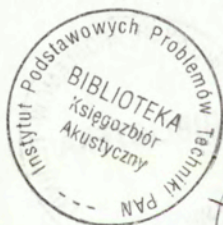
<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 5 lipca 2002 r.

recenzent - Prof. dr hab. inż. Jan Kaczmarek



57257



~~01158~~

**Praca habilitacyjna**

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 14,50 Ark. druk. 18,25  
Oddano do drukarni w listopadzie 2002 r.

---

**ATOS** - Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

## **IDENTYFIKACJA WŁASNOŚCI I EWOLUCJA STANU TECHNOLOGICZNEJ WARSTWY WIERZCHNIEJ ELEMENTÓW OBCIĄŻONYCH MONOTONICZNIE I CYKLICZNIE**

### **Streszczenie**

Pierwszą część pracy poświęcono modelowaniu procesu zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią. Rozwiązanie tego problemu składa się z dwóch etapów: obliczania pól naprężeń i odkształceń w elemencie z warstwą oraz wyznaczania lokalnych stanów uszkodzeń i krzywych zmęczeniowych odpowiadających stanom naprężenia w różnych strefach warstwy rdzenia.

Dla wyznaczenia pola naprężeń zaproponowano model elementu z warstwą. W modelu uwzględniono fakt, że w elemencie z warstwą gradient własności materiałowych, oraz duże wartości naprężeń własnych występują w obszarze położonym blisko powierzchni. Obszar warstwy wierzchniej podzielono na szereg cienkich jednorodnych błon, w których występuje płaski stan naprężenia, oraz mogą występować naprężenia początkowe. Na połączeniu warstwa-rdzeń spełnione są warunki równowagi, oraz warunki zgodności przemieszczeń i odkształceń. Model materiału przyjęto jako sprężysto-plastyczny z uwzględnieniem plastycznego płynięcia, wzmocnienia kinematycznego i izotropowego.

Opracowano dwie wersje modelu elementu z warstwą. Pierwsza z nich oparta na rozwiązaniu analitycznym to model sprężysto-plastycznego skręcania elementu walcowego z warstwą, w której uwzględniono początkowy stan naprężeń własnych.

Druga bardziej ogólna wersja modelu oparta jest o metodę elementów skończonych (MES). Opracowany został program MES, w którym zaimplementowano wspomniany wyżej model materiału oraz elementy membranowe umożliwiające modelowanie stref warstwy wierzchniej. Opracowane modele elementów z warstwą zastosowano w przykładach obliczeniowych. Dla weryfikacji modelu wyznaczono ewolucje stanu naprężeń własnych w procesie obciążeń cyklicznych w elemencie walcowym z warstwą kulowaną. Otrzymane wyniki porównano z wynikami badań doświadczalnych dostępnych w literaturze. Uzyskano ilościową zgodność wyników obliczeń i badań doświadczalnych.

Korzystając z opracowanych programów wykonano symulację komputerową obciążeń cyklicznych elementu z karbem i z warstwą wierzchnią. Zbadano wpływ parametrów warstwy takich jak wzmocnienie kinematyczne, wzmocnienie izotropowe, granica plastyczności, naprężenia własne początkowe na ewolucję naprężeń, ustalone pętle histerezy i na naprężenia resztkowe w warstwie wierzchniej w dnie karbu. Wyznaczono również lokalne trajektorie naprężeń głównych, oraz trajektorie środka powierzchni płynięcia materiału. Porównano asymetrię cyklicznego obciążenia zewnętrznego próbki z karbem i asymetrię lokalnych naprężeń w dnie karbu.

W drugim etapie modelowania korzystając z pól naprężeń i odkształceń wyznacza się lokalne krzywe zmęczeniowe odpowiadające stanowi naprężeń w różnych punktach elementu korzystając z koncepcji wytrzymałości lokalnej i wybranego kryterium zmęczeniowego. Umożliwia to ocenę stanu lokalnych uszkodzeń wywołanych obciążeniem cyklicznym elementu. Najbardziej niekorzystne z punktu widzenia trwałości fragmenty otrzymanych krzywych zmęczeniowych tworzą krzywą zmęczeniową całego elementu.

Taki sposób postępowania zastosowano do wyznaczenia drogą symulacji numerycznej krzywej zmęczeniowej próbki z karbem ( $K_f=3$ ) i utwardzoną warstwą wierzchnią. Wykorzystano energetyczne kryterium zmęczeniowe. Przeprowadzono również analizę zmian gęstości energii sprężystej i dyssypowanej w dnie karbu w warstwie i w rdzeniu w funkcji amplitudy naprężeń nominalnych. Przy takim podejściu suma gęstości tych energii stanowi miarę uszkodzeń zmęczeniowych. Otrzymano krzywe zmęczeniowe jakościowo zgodne z wynikami doświadczalnymi znanymi z literatury.

Dla próbek jednorodnych z karbem  $K_f=2.14$  ze stali 18G2A wyznaczono doświadczalnie krzywą zmęczeniową. Korzystając z tych badań, oraz z obliczeń lokalnego stanu naprężenia w dnie karbu wykonano kalibrację kryterium zmęczeniowego bazującego na zmianie energii na płaszczyźnie krytycznej dla stali 18G2A. Korzystając z wykalibrowanego kryterium i eksperymentów numerycznych pokazano zmiany krzywej zmęczeniowej

elementu jednorodnego z karbem spowodowane wprowadzeniem asymetrii cyklu, oraz naprężeń początkowych w strefie przypowierzchniowej odpowiadającej warstwie wierzchniej. Badania te miały na celu pokazanie jak zmiana jednego parametru warstwy (naprężeń własnych), lub zmiana asymetrii cyklu wpływa na wytrzymałość zmęczeniową elementu z karbem.

Doświadczalną krzywą zmęczeniową wyznaczono również dla próbek ze stali 18G2A z karbem i z warstwą kulowaną. Korzystając z eksperymentów numerycznych i wykalibrowanego kryterium zmęczeniowego znaleziono parametry (wzmocnienie materiału, naprężenia własne) warstwy kulowanej ukonstruowanej na badanych próbkach z karbem. Korzystając z tych parametrów i opracowanego modelu wyznaczono teoretycznie krzywą zmęczeniową dla badanych wcześniej doświadczalnie próbek z warstwą. Uzyskano dobrą ilościową zgodność krzywych doświadczalnej i teoretycznej.

Część II rozprawy poświęcona jest identyfikacji własności warstw wierzchnich. Zaproponowano kilka metod wykorzystania parametrów mierzonych w teście wciskania kuli do identyfikacji własności plastycznych materiału. Test wciskania polega na ciągłym pomiarze zagłębienia wgłębnika w funkcji siły obciążającej. Proponowane metody identyfikacji opierają się na ścisłym rozwiązaniu (rozwiązanie samopodobne Hill, Storakers 1989) problemu wciskania kuli w materiał sztywno-plastyczny, którego prawo konstytutywne wyraża się wzorem Ramberga-Osgooda  $\sigma = k\varepsilon_p^m$ . W rozwiązaniu tym podano ścisłą zależność między krzywą rozciągania  $\sigma-\varepsilon_p$  i krzywą penetracji siła-zagłębienie plastyczne  $P-h_p/D$  ( $D$  – średnica kuli). W materiałach sprężysto-plastycznych, z którymi mamy do czynienia w praktyce, bezpośredni pomiar zależności  $P-h_p/D$  nie jest możliwy. W pracy zaproponowano podejście polegające na znalezieniu pewnej fikcyjnej konfiguracji materiału sprężysto-plastycznego, w której nie występują odkształcenia sprężyste i która dla ustalonego poziomu obciążenia wciskanej kuli jest możliwie bliska konfiguracji materiału sztywno-plastycznego o tych samych parametrach  $k$  i  $m$ . W przypadku metod opisanych w rozdziałach 2.1, 2.2 (część II), dla wyznaczenia krzywej  $P-h_p/D$  korzysta się z pomiaru trzech parametrów: maksymalnego zagłębienia, maksymalnej siły i sprężystego cofnięcia kuli. W metodach opisanych w rozdz. 2.3–2.6 punkty poszukiwanej krzywej  $P-h_p/D$  wyznacza się poprzez operacje wykonane na krzywych penetracji obciążenie - częściowe odciążenie - ponowne obciążenie uzyskanych z eksperymentu.

W II części podjęto także próbę identyfikacji własności materiału, którego prawo konstytutywne wyraża się równaniem zależnym od trzech

parametrów  $\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon_p^m$  (równanie Ludwika). Dla takiego materiału znaleziono przybliżoną zależność między krzywą  $P-h_p/D$  i stałymi  $k, \sigma_0, m$ .

Podano przykłady zastosowania opracowanych metod do identyfikacji własności materiałów jednorodnych. Przykłady te stanowiły jednocześnie weryfikację metod.

Dokonano identyfikacji parametrów  $k$  i  $m$  warstw nagniatanych, oraz stopowanych laserowo. W przypadku identyfikacji warstw założono, że maksymalne zagłębienie kuli nie przekracza  $1/12$  grubości warstwy, zatem wpływ podłoża na mierzone krzywe penetracji może być pominięty.

W części II pracy przedstawiono również metodę wyznaczania zredukowanego modułu Younga ( $E^* = E/(1-\nu^2)$ ), w której wykorzystuje się pochodne początków krzywych odciążenia kuli odpowiadających różnym wartościom zwrotu siły.

## SPIS TREŚCI

WPROWADZENIE.....	11
<b>Część I</b>	
<b>BADANIA EWOLUCJI STANU I TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ ELEMENTÓW Z WARSTWĄ WIERZCHNIĄ OBCIĄŻONYCH MONOTONICZNIE I CYKLICZNIE</b>	
1. Wstęp.....	21
2. Przegląd literatury.....	22
2.1 Badania wpływu warstwy wierzchniej na trwałość elementów konstrukcyjnych.....	22
2.1.1. Wnioski.....	35
2.2 Wybrane hipotezy zmęczeniowe przydatne do wyznaczenia trwałości elementu z warstwą wierzchnią.....	37
3. Symulacyjne badania ewolucji naprężeń w elemencie z warstwą wierzchnią poddanym obciążeniom cyklicznym.....	46
3.1. Model sprężysto-plastycznego, cyklicznego skręcania elementu walcowego z warstwą wierzchnią.....	46
3.1.1 Geometryczny model elementu z warstwą wierzchnią.....	46
3.1.2 Fizyczny model materiału.....	48
3.1.3. Równania opisujące skręcanie walca z warstwą wierzchnią.....	52
3.2 Ogólny model obliczeniowy elementu z warstwą.....	59
3.2.1 Model geometryczny.....	59
3.2.2 Model materiału.....	61
3.2.3 Uproszczony algorytm wyznaczania ewolucji naprężeń w procesie obciążeń cyklicznych.....	63
4. Ewolucja naprężeń i ocena procesu zmęczenia w próbce walcowej kulowanej poddanej obciążeniom cyklicznym.....	64
4.1 Symulacyjne badania relaksacji naprężeń własnych w próbce walcowej z warstwą kulowaną poddanej cyklicznemu ścisnaniu-rozciąganiu – porównanie z wynikami badań doświadczalnych.....	64
4.1.1 Ocena stanu początkowego.....	65
4.1.2 Oszacowanie charakterystyki cyklicznej materiału rdzenia (stal 42CrMo4).....	67
4.1.3 Oszacowanie własności cyklicznych warstwy kulowanej.....	71
4.1.4 Wyniki obliczeń.....	75
4.2 Jakościowa ocena trwałości zmęczeniowej badanych próbek – porównanie z wynikami badań doświadczalnych.....	78
4.3 Wnioski.....	80
5. Symulacyjne badania trwałości zmęczeniowej elementu z karbem i z warstwą wierzchnią.....	83

5.1 Model MES osiowo-symetrycznego elementu z karbem i z warstwą wierzchnią.....	83
5.1.1 Przegląd metod przewidywania trwałości próbek z warstwą wierzchnią i z karbem.....	83
5.1.2 Proponowany model .....	89
5.2 Ewolucja stanów własnych, stan początkowy a stan ustalony w cyklicznie obciążonym elemencie z warstwą i z karbem konstrukcyjnym.....	92
5.2.1 Wnioski.....	107
5.3 Wpływ stanów początkowych i asymetrii cyklu na zmęczenie elementu z karbem -wykorzystanie kryterium zmęczeniowego z płaszczyzną krytyczną.....	108
5.3.1 Kalibracja kryterium zmęczeniowego dla wybranego materiału (stal 18G2A).....	108
5.3.2 Wpływ stanów początkowych na trwałość zmęczeniową elementu z warstwą wierzchnią.....	110
5.3.3 Wpływ asymetrii cyklu na trwałość zmęczeniową elementu z karbem i warstwą wierzchnią.....	113
5.4 Wykorzystanie kryterium energetycznego do wyznaczenia krzywych zmęczeń elementu z karbem i warstwą wierzchnią.....	116
6. Weryfikacja doświadczalna symulacyjnego wyznaczania krzywej zmęczeniowej elementu z karbem i warstwą wierzchnią.....	125
6.1. Wnioski.....	131
Bibliografia do części I.....	133

## CZĘŚĆ II

### IDENTYFIKACJA WŁASNOŚCI WARSTWY WIERZCHNIEJ METODĄ WCISKANIA WGŁĘBNIKA KULISTEGO

1. Przegląd literatury.....	140
1.1 Analiza numeryczna prób twardości oraz korelacja prób twardości i sprężysto-plastycznych stałych materiałowych.....	140
1.2. Rozwiązanie samopodobne problemu zagłębienia kuli w ośrodek nieliniowo-sprężysty i sztywno .....	157
1.3. Metody identyfikacji bazujące na wzorach otrzymanych z rozwiązania samopodobnego .....	166
1.4. Wnioski.....	182
2. Proponowane metody identyfikacji własności materiałów jednorodnych.....	186



2.1. Maksymalna siła, maksymalne zagłębienie i sprężyste cofnięcie kuli jako parametry służące do identyfikacji materiału.....	186
2.1.1. Weryfikacja metody.....	190
2.1.1.1. Model procesu zagłębienia kulki w badanym materiale.....	191
2.1.1.2. Wyniki obliczeń.....	195
2.1.2. Wnioski.....	196
2.2. Maksymalna siła, maksymalne zagłębienie i zagłębienie resztkowe jako parametry służące do identyfikacji.....	198
2.2.1. Podstawy teoretyczne metody.....	198
2.2.2. Weryfikacja metody.....	210
2.2.3. Wrażliwość metody na błędy pomiarowe.....	215
2.2.4. Weryfikacja eksperymentalna.....	217
2.2.4. Wnioski.....	221
Załącznik Z1.....	222
2.3. Identyfikacja własności materiału na podstawie pomiaru krzywej siła-zagłębienie przy obciążeniu-odciążeniu.....	225
2.3.1. Opis metody identyfikacji.....	225
2.3.2. Weryfikacja.....	232
2.3.3. Wnioski.....	239
2.4. Identyfikacja cienkich warstw.....	241
2.4.1. Identyfikacja warstw laserowych.....	241
2.4.2. Identyfikacja warstw nagniatanych.....	245
2.5. Wyznaczanie parametrów $k$ i $m$ przy pomocy odejmowania pochodnej krzywych obciążenia i odciążenia.....	247
2.5.1. Opis metody.....	247
2.5.2. Praktyczne wyznaczanie pochodnych krzywej obciążenia i krzywej odciążenia.....	248
2.5.3. Weryfikacja i porównanie proponowanych metod.....	252
2.5.3.1. Identyfikacja parametrów $k$ i $m$ na podstawie krzywej siła-zagłębienie wyznaczonej dla małych obciążeń ( $0 < a/D < 0.09$ ).....	252
2.5.3.2. Identyfikacja parametrów $k$ i $m$ na podstawie krzywej siła-zagłębienie wyznaczonej w pełnym zakresie obciążeń ( $0 < a/D < 0.2$ ).....	257
2.5.4. Wpływ początkowej granicy plastyczności na dokładność identyfikacji.....	258
2.5.5. Wpływ modułu Younga na identyfikowane parametry plastyczne.....	260
2.5.6. Identyfikacja modułu Younga.....	264
2.6. Identyfikacja parametrów plastycznych materiałów spełniających prawo $\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon_p^m$ .....	266

WNIOSKI KOŃCOWE .....	282
Bibliografia do części II .....	285
Summary .....	289

## 1. Wprowadzenie

W każdym procesie wytwarzania części maszyn mamy do czynienia z tworzeniem warstwy wierzchniej. Powstanie warstwy wierzchniej może być efektem ubocznym procesu produkcyjnego na przykład szlifowania lub toczenia, gdy głównym celem obróbki jest uzyskanie założonych wymiarów elementu. Najczęściej jednak warstwa powstaje w wyniku specjalnie zaprojektowanych, złożonych procesów technologicznych. Do takich procesów należą na przykład kulowanie, nagniatanie, utwardzanie laserowe poprzez stopowanie, hartowanie, azotowanie, nawęglanie. Wszystkie wymienione obróbki zmieniają parametry mechaniczne warstwy, a niektóre z nich modyfikują również jej skład chemiczny.

Własności warstwy wierzchniej elementów konstrukcyjnych mają duży wpływ na zachowanie się tych elementów w procesie eksploatacji. Celem konstytuowania warstwy wierzchniej elementów jest poprawa ich własności tribologicznych, odporności na zużycie, zmęczeniowe działanie obciążeń eksploatacyjnych, korozję. Badania warstwy wierzchniej mogą być prowadzone z różnych punktów widzenia, obejmują one cały szereg dziedzin badawczych. Warstwa wierzchnia może być analizowana ze względu na skład chemiczny, strukturę geometryczną powierzchni, strukturę mikromechaniczną, oraz ze względu na własności makromechaniczne. Możliwość wydłużenia czasu eksploatacji elementów konstrukcyjnych poprzez modyfikację warstwy wierzchniej sprawiła, że w ostatnich latach nastąpił gwałtowny rozwój różnych technologii kształtowania warstwy wierzchniej. Jednocześnie pojawia się wiele prac poświęconych badaniom wpływu warstwy wierzchniej na trwałość zmęczeniową elementów.

### **Celem rozprawy habilitacyjnej jest**

- opracowanie modeli symulujących ewolucję stanu naprężeń i rozwój uszkodzeń warstwy wywołanych deformacją cykliczną (zmęczenie wieloosiowe) z uwzględnieniem gradientu własności materiałowych i koncentracji naprężeń w sąsiedztwie i w obszarze warstwy oraz określenie zasad optymalnego doboru parametrów warstwy
- opracowanie metod identyfikacji umożliwiających wyznaczenie stałych materiałowych warstwy występujących w zaproponowanych modelach

Omówione w przeglądzie literatury liczne prace poświęcone badaniom wpływu warstwy na zmęczenie elementów są znacznie bardziej zaawansowane pod względem doświadczalnym niż teoretycznym. Brak jest ogólnych modeli, które wyjaśniałyby teoretycznie wpływ warstwy na zmęczenie elementów. W obliczeniach trwałości wpływ warstwy uwzględniany jest przy pomocy bardzo uproszczonych wzorów poprzez wprowadzanie różnych współczynników.

Sformułowane wyżej cele pracy wynikają więc z potrzeby uzupełnienia szeroko zakrojonych badań doświadczalnych opisanych w literaturze o część teoretyczną. Polega ona na opracowaniu modeli zmęczenia, które korzystając z metod mechaniki wyjaśniałyby korzystny wpływ warstwy na trwałość zmęczeniową i umożliwiały przewidywanie trwałości elementów z warstwą obciążonych cyklicznie. Dla uwzględnienia warstwy w zaawansowanych inżynierskich obliczeniach wytrzymałościowych konieczna jest znajomość charakteryzujących ją stałych materiałowych. Stałe te nie mogą być wyznaczone w prostych testach wytrzymałościowych, aby je wyznaczyć potrzebne są specjalne metody ich identyfikacji. Metody takie, oparte na teście wciskania wgłębnika, są szeroko opisane w literaturze, ale w zastosowaniu do identyfikacji materiałów jednorodnych. Identyfikacji warstw poświęcono bardzo niewiele prac, a proponowane w nich metody nie są wystarczająco uniwersalne. Są one ograniczone do identyfikacji materiałów opisywanych prostymi modelami konstytutywnymi, ale nawet w przypadku takich materiałów nie otrzymuje się dokładnych wyników ze względu na inne założenia upraszczające przyjęte przez autorów metod.

Stąd praca została podzielona na dwie części, w których analizowano dwa współzależne problemy:

I) badanie wpływu warstwy na trwałość elementów konstrukcyjnych,

II) identyfikacja własności warstwy przy pomocy testu wciskania wgłębnika.

Obydwie te dziedziny badań nawzajem się uzupełniają, gdyż w pierwszej korzysta się z wyników drugiej. Przedstawiona rozprawa zawiera szereg elementów oryginalnych, które wynikają z rozwiązania sformułowanych wyżej problemów. Elementami oryginalnymi są:

- modele (jeden bazujący na MES, drugi na rozwiązaniu analitycznym) ewolucji lokalnych stanów naprężenia i odkształcenia elementu z warstwą wywołanych złożonym obciążeniem cyklicznym oraz model rozwoju uszkodzeń zmęczeniowych w takim elemencie
- analiza wpływu parametrów warstwy (granica plastyczności, naprężenia własne, wzmocnienie plastyczne) na ewolucję i ustalone stany naprężeń w procesie obciążeń cyklicznych
- metody identyfikacji parametrów wzmocnienia plastycznego warstwy oraz metoda identyfikacji modułu sprężystości, w których wykorzystano test wciskania wgłębnika kulistego
- opracowanie stanowiska pomiarowego do wyznaczania krzywej siła-zagłębienie wgłębnika kulistego wykorzystywanej w proponowanych metodach identyfikacji

Przedstawione w części I pracy badania rozpoczęto od opracowania modelu procesu zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią. Rozważania na temat trwałości zmęczeniowej ograniczono do elementów, w których nie występują obciążenia kontaktowe. W analizie teoretycznej procesu zmęczenia wykorzystano koncepcję wytrzymałości lokalnej. Analiza ta składa się z następujących etapów:

- 1) wyznaczenie wieloosiowego stanu naprężenia w rdzeniu i warstwie wierzchniej przy obciążeniach cyklicznych z uwzględnieniem odkształceń sprężysto-plastycznych
- 2) wykorzystanie kryterium zmęczeniowego do wyznaczania niszczącej liczby cykli w miejscach najbardziej narażonych na zniszczenie, znalezienie najłagodszego punktu, od którego rozpoczyna się zniszczenie elementu.

Takie podejście do modelowania procesu zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią jest oryginalnym podejściem autora.

Dla wyznaczania pola naprężeń (etap 1) zaproponowano model elementu z warstwą wierzchnią. W modelu uwzględniono fakt, że element taki jest szczególnym przypadkiem elementu niejednorodnego, w którym gradient własności materiałowych, oraz duże wartości naprężeń własnych występują w strefie położonej blisko powierzchni. W modelu wyróżniono dwa obszary rdzeń i warstwę wierzchnią podzieloną na jednorodne strefy, które różnią się między sobą własnościami materiałowymi. Przyjęto, że każda strefa warstwy jest cienką błoną, w której występuje płaski stan naprężenia, natomiast w rdzeniu dopuszczalny jest pełny trójosiowy stan naprężenia. Liczba stref zależy od gradientu własności materiałowych w obszarze warstwy. Na połączeniu między warstwą i rdzeniem, oraz między poszczególnymi strefami warstwy spełnione są warunki równowagi i warunki zgodności odkształceń i przemieszczeń.

Przedstawiono dwa modele elementu z warstwą: model, w którym wykorzystano rozwiązania analityczne (skręcanie elementu walcowego z warstwą przy uwzględnieniu stanów własnych, rozdz.3), oraz model bardziej ogólny bazujący na metodzie elementów skończonych.

Model materiału przyjęto jako sprężysto-plastyczny z uwzględnieniem plastycznego płynięcia, wzmocnienia kinematycznego i izotropowego. Model ten umożliwia opis pętli histerezy przy minimalnej liczbie parametrów materiałowych, które należy zidentyfikować.

Dokonano weryfikacji opracowanego modelu elementu z warstwą. Został on wykorzystany do wyznaczenia ewolucji naprężeń w rdzeniu i w warstwie kulowanej elementu walcowego poddanego cyklicznemu ścisnaniu i

rozciąganiu. Uzyskano ilościową zgodność wyników obliczeń z wynikami badań eksperymentalnych dostępnych w literaturze.

Wpływ warstwy wierzchniej na trwałość zmęczeniową jest szczególnie korzystny w przypadku elementów z karbami, stąd w pierwszej części pracy dużo uwagi poświęcono analizie zmęczenia takich elementów. W tym celu opracowano program metody elementów skończonych, w którym zaimplementowano wspomniany wcześniej model materiału, elementy membranowe umożliwiające modelowanie cienkiej warstwy, a także umożliwiono uwzględnianie naprężeń własnych.

Przeprowadzono symulację komputerową obciążeń cyklicznych elementu z karbem ( $K_t=2.14$ ) i warstwą wierzchnią. Zbadano wpływ parametrów warstwy takich jak: wzmocnienie kinematyczne, wzmocnienie izotropowe, granica plastyczności, naprężenia własne początkowe na ewolucję naprężeń, ustalone pętle histerezy i na naprężenia resztkowe w warstwie wierzchniej w dnie karbu. Przedstawiono również lokalne trajektorie naprężeń głównych, oraz trajektorie środka powierzchni płynięcia materiału. Porównano asymetrię obciążenia zewnętrznego (nominalnego) próbki z karbem i asymetrię lokalnych naprężeń w dnie karbu.

W ramach realizacji II-go etapu (znajdowanie najsłabszego punktu obciążanego elementu) omówiono kryteria zmęczeniowe przydatne do analizy trwałości elementów z warstwą wierzchnią i podano przykłady zastosowania niektórych z nich.

Dla próbki z ostrym karbem ( $K_t=3$ ) i utwardzoną warstwą wierzchnią wyznaczono numerycznie lokalne pętle histerezy, a następnie korzystając z kryterium energetycznego lokalne krzywe zmęczeniowe dla punktów położonych w dnie karbu w obszarze warstwy wierzchniej i bezpośrednio pod warstwą. Wyznaczono krzywą Woehlera dla całej próbki poprzez złożenie najbardziej niekorzystnych odcinków krzywych Woehlera wyznaczonych w różnych punktach próbki w warstwie i w rdzeniu. Przeprowadzono analizę zmian energii sprężystej i dyssypowanej w dnie karbu w warstwie i w rdzeniu w funkcji amplitudy naprężeń nominalnych. Otrzymano wyniki jakościowo zgodne z obserwacjami doświadczalnymi znanymi z literatury dla próbek z warstwą wierzchnią i karbem.

Wyznaczono doświadczalnie krzywą zmęczeniową dla próbek jednorodnych z karbem ( $K_t=2.14$ ) ze stali 18G2A. Korzystając z tych badań, oraz z obliczeń lokalnego stanu naprężenia w dnie karbu wykonano dla tej stali kalibrację kryterium zmęczeniowego bazującego na zmianie energii odkształcenia na płaszczyźnie krytycznej. Umożliwiło to wykorzystanie eksperymentu numerycznego do przewidywania trwałości zmęczeniowej elementów wykonanych z tej stali w złożonych stanach naprężenia. Następnie

korzystając z wykalibrowanego kryterium i z eksperymentów numerycznych pokazano zmiany krzywej zmęczenia elementu jednorodnego z karbem ze stali 18G2A spowodowane wprowadzeniem asymetrii cyklu, oraz naprężeń początkowych w strefie przypowierzchniowej (odpowiadającej warstwie wierzchniej). Badania te miały na celu pokazanie jak zmiana jednego tylko parametru warstwy (naprężeń własnych) lub zmiana asymetrii cyklu wpływa na wytrzymałość zmęczeniową elementu z karbem.

Wyznaczono doświadczalnie krzywą zmęczeniową próbek z karbem ze stali 18G2A z warstwą kulowaną. Przy pomocy wielu eksperymentów numerycznych znaleziono parametry (wzmocnienie materiału, naprężenia własne) warstwy kulowanej ukonstruowanej na badanych próbkach z karbem. Następnie korzystając z opracowanego modelu elementu z warstwą wyznaczono pętle histerezy w dniu karbu i krzywą zmęczeniową próbki z warstwą. Otrzymano dobrą ilościową zgodność (błąd 3-5%) krzywych zmęczeniowych otrzymanych teoretycznie i doświadczalnie.

Ogólnie w pierwszej części pracy pokazano, że bazując na prostych modelach konstytutywnych i kryteriach zmęczeniowych można z wystarczającą dla celów technologicznych dokładnością ocenić wpływ warstwy na trwałość zmęczeniową elementów w złożonym stanie naprężenia i przewidywać relaksację naprężeń własnych w warstwie w procesie obciążeń cyklicznych i eksploatacyjnych.

Jednak zastosowanie nawet prostych modeli związane jest z trudnościami polegającymi na tym, że parametry występujące w tych modelach zwykle nie są znane dla materiału znajdującego się w obszarze warstwy wierzchniej. Parametry tradycyjnie określone dla warstwy takie jak mikrotwardość, chropowatość, grubość nie wystarczają dla zbudowania efektywnych modeli procesu zmęczenia. W obliczeniach wytrzymałościowych korzysta się z modułu Younga, granicy plastyczności, granicy wytrzymałości, wzmocnienia plastycznego. Opracowanie metod identyfikacji tych parametrów jest przedmiotem drugiej części pracy, przy czym problem potraktowano bardziej ogólnie stawiając sobie za główny cel wyznaczenie krzywej rozciągania materiału warstwy w układzie  $\sigma$ - $\epsilon_p$ . Problem identyfikacji parametrów warstwy jest stosunkowo słabo opisany w literaturze, gdyż jak dotąd prostszy problem identyfikacji własności materiałów jednorodnych metodą wciskania wglębniaka nie jest w ogólnym przypadku ostatecznie rozwiązany.

W drugiej części pracy zaproponowano kilka metod wykorzystania parametrów mierzonych w teście wciskania kuli do identyfikacji własności plastycznych materiału. Zostały one umieszczone chronologicznie, według kolejności powstawania i odzwierciedlają kolejne, coraz bardziej udoskonalone próby uzyskania optymalnego rozwiązania problemu. W literaturze opisanych

jest szereg metod identyfikacji, które odwołują się do próby twardości. Większość klasycznych prób twardości polega na wciśnięciu wgłębnika w próbkę z określoną siłą i pomiarze średnicy trwałego odcisku po usunięciu obciążenia. Odpowiada to rejestracji jednego (końcowego) stanu z całego procesu obciążenia i odciążenia wgłębnika. Otrzymuje się dwie wielkości maksymalną siłę i pole odcisku.

W metodach identyfikacji przedstawionych w II części pracy zaproponowano inne podejście. Zrezygnowano z pomiaru średnicy trwałego odcisku, natomiast wykorzystano test wciskania (ang. indentation test) polegający na ciągłym pomiarze zagłębienia wgłębnika w funkcji siły obciążającej. Pomiar relacji siła-zagłębienie umożliwia uzyskanie lepszej dokładności identyfikacji niż pomiar relacji siła-średnica odcisku, co wykazano w rozdziale 2.2.3. W metodach opisanych w rozdz. 2.3-2.6 do identyfikacji wykorzystano całą krzywą siła-zagłębienie w procesie obciążenia-odciążenia wgłębnika. Przy takim podejściu uzyskuje się znacznie więcej informacji o materiale niż na podstawie tylko jednego (końcowego) punktu krzywej siła-zagłębienie.

Do schematyzacji krzywych rozciągania materiałów sprężysto-plastycznych stosuje się różne modele. Jednym z prostszych jest model Ramberga-Osgooda:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{1/m}, \quad (i)$$

gdzie zależność między naprężeniem a plastyczną częścią odkształcenia wyraża się równaniem

$$\sigma = k\varepsilon_p^m. \quad (ii)$$

Dla przedstawienia zależności  $\sigma$ - $\varepsilon_p$  korzysta się również z równań bardziej złożonych, na przykład równania Ludwika

$$\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon_p^m, \quad (iii)$$

które dla odkształceń sprężysto-plastycznych zapisuje się jako:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{k}\right)^{1/m}, \quad \sigma > \sigma_0. \quad (iiii)$$

Proponowane w niniejszej pracy metody identyfikacji opierają się na ścisłym rozwiązaniu problemu wciskania kuli w materiał sztywno-plastyczny, którego prawo konstytutywne można wyrazić wzorem (ii). Rozwiązanie takie, nazywane rozwiązaniem samopodobnym zostało przedstawione w pracy Storakersa i Hilla (1989); z tego rozwiązania mamy jednoznaczność zależności między krzywą rozciągania  $\sigma$ - $\varepsilon_p$  i krzywą penetracji siła-zagłębienie plastyczne,  $P$ - $h_p/D$  ( $D$  – średnica kuli). Mając krzywą  $P$ - $h_p/D$  i korzystając wprost z wzorów podanych w tym rozwiązaniu można zidentyfikować stałe  $k$  i



$m$  materiału sztywno-plastycznego spełniającego równanie (ii). Jednakże większość materiałów ma własności sprężysto-plastyczne. W materiale sprężysto-plastycznym pole odkształceń plastycznych jest „nałożone” na pole odkształceń sprężystych więc spełnione jest równanie (i) lub (iii). Nie jest zatem możliwy bezpośredni pomiar krzywej penetracji siła-zagłębienie plastyczne ( $P-h_p/D$ ) występującej w rozwiązaniu samopodobnym.

Zatem, jeśli korzystamy z rozwiązania samopodobnego, to rozwiązanie problemu identyfikacji sprowadza się do rozwiązanie problemu wyznaczenia dla danego materiału sprężysto-plastycznego krzywej siła-zagłębienie plastyczne ( $P-h_p/D$ ) odpowiadającej krzywej siła-zagłębienie całkowite ( $P-h_r/D$ ) zmierzonej w eksperymencie (próbie wciskania kuli).

Dla rozwiązania tego problemu autor zaproponował podejście polegające na znalezieniu pewnej fikcyjnej konfiguracji materiału sprężysto-plastycznego (i), w której nie występują odkształcenia sprężyste i która dla ustalonego poziomu obciążenia kuli jest możliwie bliska konfiguracji materiału sztywno-plastycznego (ii) o tych samych parametrach  $k$  i  $m$ . Metody rozwiązania tego problemu, oraz bezpośrednie odwołanie się do ścisłych zależności rozwiązania samopodobnego dla identyfikacji materiału są oryginalnym osiągnięciem autora.

Według powyższego schematu postępowano przy opracowaniu przedstawionych w II części pracy metod identyfikacji. W przypadku metod opisanych w rozdziałach 2.1, 2.2 korzysta się z pomiaru trzech parametrów: maksymalnego zagłębienia, maksymalnej siły i sprężystego cofnięcia kuli dla różnych wartości maksymalnej siły. Stąd wyznacza się punkty krzywej  $P-h_p/D$ . W metodach opisanych w punktach 2.3 – 2.6 punkty poszukiwanej krzywej  $P-h_p/D$  wyznacza się poprzez operacje wykonane na krzywych obciążenie-częściowe odciążenie i ponowne obciążenie kuli. Dla wszystkich zaproponowanych metod podano przykłady ich zastosowania, które jednocześnie stanowiły weryfikację tych metod. Weryfikację przeprowadzano według następującego schematu:

- wykonanie symulacji numerycznej testu wciskania kuli w materiał sprężysto-plastyczny o ustalonej krzywej rozciągania, wyznaczenie krzywej penetracji  $P-h_p$  lub jej pochodnej, lub punktów odpowiadających maksymalnemu obciążeniu i zgłębieniu trwałemu
- wykorzystanie znalezionych punktów do identyfikacji krzywej rozciągania  $\sigma-\varepsilon_p$ .
- porównanie zidentyfikowanej krzywej  $\sigma-\varepsilon_p$  z krzywą rozciągania, dla której wykonano symulacje testu wciskania.

Do weryfikacji wykorzystano również eksperymenty fizyczne, w których krzywe rozciągania różnych materiałów zidentyfikowane z testu wciskania

przy pomocy proponowanych metod porównano z krzywymi otrzymanymi w próbie rozciągania na maszynie wytrzymałościowej. Testy wciskania wykonano na stanowisku badawczym zaprojektowanym i zbudowanym przez autora w ramach projektu badawczego KBN. Budowa stanowiska została przedstawiona w rozdziale 2.2.4.

Dla materiałów, których krzywe rozciągania spełniają równanie Ramberga-Osgooda (*i*) otrzymano dość dobre wyniki identyfikacji. Można zatem uznać, że zastosowane podejście do problemu identyfikacji jest właściwe, oraz że wspomniany problem wyznaczenia krzywej siła-zagłębienie plastyczne dla materiału sprężysto-plastycznego został rozwiązany z dobrą dokładnością.

W pracy została również podjęta próba identyfikacji własności materiału spełniającego prawo (*iiii*) (trójparametrowy opis krzywej rozciągania). Autorowi nie jest znana ogólna metoda identyfikacji materiałów opisanych tym prawem. Do identyfikacji takich materiałów stosowane są z konieczności metody, w których korzysta się z rozwiązania samopodobnego, odnoszącego się do równania (*ii*). Stosowanie tych metod może dawać dobre wyniki w szczególnych przypadkach, gdy dana krzywa rozciągania może być aproksymowana z podobną dokładnością zarówno równaniem (*ii*) jak i (*iii*). Przykłady identyfikacji takich materiałów również zostały podane w pracy.

W ogólnym przypadku dla identyfikacji materiału (*iiii*) należy dodatkowo rozwiązać problem znalezienia zależności między krzywą siła-zagłębienie plastyczne  $P-h_p$  i krzywą rozciągania  $\sigma - \varepsilon_p$  w postaci (*iii*). Ścisła zależność między tymi krzywymi, to znaczy taka jak w przypadku rozwiązania samopodobnego dla materiału spełniającego zależność (*ii*), nie jest znana. W pracy, w rozdz. 2.6 przedstawiono przybliżone rozwiązanie tego problemu, to znaczy podano przybliżoną zależność krzywej penetracji  $P(h_p)$  od parametrów  $k, m, \sigma_0$  materiału sztywno-plastycznego spełniającego prawo (*iii*). Znalezienie tej zależności jest oryginalnym osiągnięciem autora. Korzystając z tego rozwiązania dokonano identyfikacji kilku materiałów spełniających prawo (*iiii*). Ta część pracy wymaga jednak dalszego udoskonalenia.

Jeśli idzie o dokładność identyfikacji, to dla materiałów spełniających prawo Ramberga-Osgooda (*ii*) najlepsze wyniki można uzyskać stosując metody odejmowania pochodnych krzywych obciążenia i odciążenia, rozdz. 2.5, 2.6 (cz. II). Wynika to z faktu, że w kolejnych krokach identyfikacji jest mniej założeń upraszczających niż w przypadku pozostałych metod. Korzystanie z tej metody wymaga jednak dostępu do programów matematycznych umożliwiających dopasowanie funkcji analitycznych do punktów pomiarowych.

W przypadku materiałów spełniających prawo (*iii*) najlepsze wyniki można uzyskać stosując metodę opisaną w rozdz. 2.6. Niekiedy dobrą

dokładność można uzyskać stosując metody opisane w rozdz. 2.1 – 2.3, ale może to być wynikiem nakładania się błędów spowodowanych przyjętymi tam założeniami upraszczającymi.

Pomimo, że proponowane metody mają służyć wyznaczaniu parametrów warstwy znaczną część pracy poświęcono identyfikacji materiałów jednorodnych. Wynika to z faktu, że tylko dla takich materiałów znane są krzywe  $\sigma$ - $\varepsilon_p$  z testu rozciągania, zatem możliwa jest weryfikacja i doskonalenie proponowanych metod. Jako przykład zastosowania metod w rozdz. 2.4 dokonano także identyfikacji warstw nagniatanych i warstw stopowanych laserowo.

W pracy podano również metodę identyfikacji modułu Younga, w której wykorzystuje się pochodne początków krzywych odciążenia kuli odpowiadających różnym wartościom zwrotu siły obciążającej. Metoda ta jest oryginalnym osiągnięciem autora.

Metody przedstawione w II części rozprawy są podsumowaniem i rozwinięciem prac dotyczących identyfikacji, opublikowanych przez autora w czterech czasopismach o zasięgu międzynarodowym, [42-45].

Korzystając z zaproponowanych w pracy metod możemy uzyskać zestaw podstawowych parametrów materiałowych umożliwiający uwzględnienie warstwy w obliczeniach wytrzymałościowych całego elementu. Rozwiązanie problemu identyfikacji własności warstwy jest bardzo ważne. W połączeniu z wynikami pierwszej części pracy umożliwiłoby ono precyzyjne uwzględnienie warstwy w obliczeniach wytrzymałościowych różnych elementów konstrukcyjnych, a co za tym idzie świadome i efektywne kształtowanie warstwy przez konstruktorów i technologów.

# **CZĘŚĆ I**

## **BADANIA EWOLUCJI STANU I TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ ELEMENTÓW Z TECHNOLOGICZNĄ WARSTWĄ WIERZCHNIĄ OBCIĄŻONYCH MONOTONICZNIE I CYKLICZNIE**

## 1. Wstęp

### Warstwa wierzchnia a trwałość elementów

Bardzo ważną dziedziną wiedzy związaną z bezpieczeństwem eksploatacji maszyn, w której uwzględnienie wpływu warstwy wierzchniej jest bardzo istotne jest zagadnienie zmęczenia elementów konstrukcyjnych. Ze względu na to, że zniszczenie rozpoczyna się zwykle od powierzchni materiału warstwa wierzchnia ma duży wpływ na wytrzymałość elementów konstrukcyjnych. Potwierdzają to liczne badania doświadczalne; zwłaszcza w zakresie obciążeń cyklicznych i wytrzymałości zmęczeniowej. Często celem konstituowania warstw wierzchnich na elementach maszyn jest poprawa ich wytrzymałości, szczególnie dotyczy to wytrzymałości zmęczeniowej. Istnieje szereg prac na temat badań doświadczalnych elementów z warstwą wierzchnią poddanych obciążeniom cyklicznym. Ukształtowanie warstwy wierzchniej o optymalnych własnościach stało się poważnym zadaniem dla technologów. Decydujące znaczenie mają parametry mechaniczne warstwy takie jak moduł Younga, granica plastyczności, moduł wzmocnienia, naprężenia własne.

Prowadzone są zaawansowane badania doświadczalne, które określają wpływ danej warstwy na wytrzymałość makroskopową całego elementu. W badaniach tych mierzone są m. in. naprężenia własne (zwykle metodą rentgenowską) grubość warstwy, jej mikrotwardość, porównywane są krzywe zmęczeniowe próbek z warstwą wierzchnią i bez warstwy oraz przedstawiana jest relaksacja wprowadzonych przez obróbkę technologiczną naprężeń resztkowych w trakcie obciążeń cyklicznych. W badaniach nie odwoływano się do obliczeń zmęczeniowych uwzględniających analizę stanu naprężeń i hipotezy wytrzymałościowe, ich celem był optymalny dobór parametrów technologicznych dla ukonstituowania warstwy wierzchniej najkorzystniejszej dla konkretnego elementu konstrukcyjnego. Pomijano związek między parametrami technologicznymi kształtowania warstwy i wspomnianymi wyżej własnościami mechanicznymi. Optymalny dobór warstwy sprowadzał się do doboru parametrów obróbki technologicznej.

Zaobserwowany doświadczalnie korzystny wpływ technologicznej warstwy wierzchniej na wytrzymałość zmęczeniową elementów nie jest wystarczająco wyjaśniony teoretycznie. Brak jest ogólnych metod obliczeniowych, które uzależniałyby bezpośrednio trwałość zmęczeniową elementów konstrukcyjnych od wartości wymienionych tu parametrów warstwy wierzchniej. Nieliczne próby analizy numerycznej stanu naprężenia w elementach z warstwą ograniczone były do bardzo uproszczonych modeli,

w których na przykład uwzględniano naprężenia własne, ale pomijano zmianę innych parametrów wynikającą z obróbki powierzchniowej.

Wpływ warstw na poprawę trwałości zmęczeniowych tłumaczy się ogólnie tym, że wprowadzane są w warstwie ściskające naprężenia własne, które przeciwdziałają propagacji szczelin, oraz że podwyższona jest jej granica plastyczności, co opóźnia pojawienie się odkształceń plastycznych. Rozważany jest także wpływ zmiany chropowatości. Jednakże wpływ każdego z tych czynników uwzględniany jest w sposób bardzo uproszczony we wzorach na wytrzymałość zmęczeniową.

Niniejsza praca stanowi próbę kompleksowego podejścia do tego problemu, które wyjaśniałoby procesy zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią poprzez analizę lokalnego stanu naprężenia w warstwie i w rdzeniu w zakresie sprężysto-plastycznym, oraz wykorzystanie znanych kryteriów zmęczeniowych dla stanu wieloosiowego. Umożliwi to ilościową ocenę wpływu warstwy wierzchniej o zadanych parametrach na trwałość zmęczeniową oraz ocenę wpływu poszczególnych parametrów warstwy na tę trwałość.

## **2. Przegląd literatury**

### **2.1 Badania wpływu warstwy wierzchniej na trwałość elementów konstrukcyjnych**

Najszerzej opisane w literaturze, najlepiej zbadane obróbki powierzchniowe, których celem jest poprawa trwałości zmęczeniowej elementów to kulowanie, azotowanie, obróbka laserowa oraz technologie nakładania warstw PVD i CVD.

#### Warstwy kulowane.

Szeroko stosowaną obróbką powierzchniową jest kulowanie. Badaniom różnych aspektów tej obróbki poświęcono już szereg konferencji. Prace poświęcone warstwie wierzchniej ukonstytuowanej poprzez kulowanie można podzielić na trzy grupy:

- badanie wpływu warstwy kulowanej na trwałość zmęczeniową elementów konstrukcyjnych
- wyjaśnienie korzystnego wpływu warstwy na bazie mikromechaniki pęknięć; badanie inicjacji i rozwoju szczelin zmęczeniowych pierwszego i drugiego rodzaju w warstwie wierzchniej i w strefie przypowierzchniowej elementów obciążonych cyklicznie.

- modelowanie procesu konstytuowania warstwy, to znaczy modelowanie zmian makromechanicznych zachodzących w materiale pod wpływem procesu kulowania.

W pracach należących do pierwszej grupy wyznaczane są doświadczalnie pętle histerezy, krzywe zmęczeniowe, mikrotwardość i naprężenia własne próbek gładkich i z karbem poddanych kulowaniu. Można tu wymienić prace [1,2,3,4].

W [1] porównano wpływ dwóch warstw wierzchnich warstwy kulowanej i warstwy powstającej przez laserowe utwardzanie detonacyjne na wytrzymałość zmęczeniową stopu aluminium. Dla obydwu warstw podano profile początkowych naprężeń własnych. W przypadku obróbki laserowej powstają naprężenia ściskające o wartości ok. 200-300 MPa przy powierzchni próbki, które stopniowo zmniejszają się przy zwiększeniu odległości od powierzchni. Na głębokości 0.6 mm ich wartość wynosi 50 MPa. Obróbka poprzez kulowanie powoduje większe naprężenia ściskające tj. 300 MPa bezpośrednio pod powierzchnią próbki tj. poniżej głębokości 0.2 mm, które jednak zanikają szybciej ze wzrostem odległości od powierzchni próbki niż naprężenia generowane obróbką laserową. Badania przeprowadzono na próbkach w kształcie beleczek o przekroju prostokątnym z karbem ( $K_f=1.68$ ). Próbkę poddano trójpunktowemu cyklicznemu zginaniu. Stwierdzono, że w przypadku próbek kulowanych, dla małych amplitud obciążenia, zniszczenie inicjowane jest pod warstwą, w rdzeniu na głębokości ok. 0.35-0.4 mm od powierzchni. Dla większych amplitud zniszczenie rozpoczyna się od powierzchni próbki. Podano krzywe zmęczeniowe dla próbek poddanych tym obróbkom i porównano z odpowiednią krzywą dla próbki nieobrobionej. Stwierdzono, że stosując utwardzanie laserowe uzyskuje się lepszy efekt niż w przypadku kulowania i dotyczy to całego zakresu cykli obciążeń.

Zagadnienie relaksacji naprężeń początkowych, które jest ściśle związane z wytrzymałością zmęczeniową było rozważane w wielu pracach dotyczących zmęczenia elementów z warstwą kulowaną. W pracy [3] przedstawiono badanie próbek ze stali 45 w postaci beleczek o zmiennej grubości obciążonych cyklicznie momentem zginającym. Porównano krzywe zmęczeniowe próbek jednorodnych i próbek kulowanych dla czterech różnych wartości parametrów kulowania. Dla tych rodzajów obróbki podano też profile naprężeń początkowych oraz naprężeń resztkowych po wykonaniu  $10^5$  cykli z amplitudą naprężeń równą 0.01, 0.1 i 0.8 wytrzymałości zmęczeniowej.

Obszerną analizę relaksacji naprężeń własnych oraz krzywych zmęczeniowych opartą na badaniach doświadczalnych można znaleźć w pracach [2,4]. Badano tam próbki walcowe ze stali 42CrMO4, jednorodne i z

warstwą kulowaną. Próbki poddano cyklicznemu ściskaniu-rozciąganiu. Przedstawiono wykresy ewolucji naprężeń własnych w zależności od liczby cykli dla różnych amplitud wymuszających. Porównano również krzywe zmęczeniowe próbek jednorodnych i kulowanych.

Z prac należących do drugiej grupy można wymienić [5,6,7,8,9]. W [5] opisano wpływ zmiany stanu warstwy kulowanej na proces zmęczenia. Badania przeprowadzono na próbkach stalowych o przekroju prostokątnym poddanych czystemu zginaniu. Stwierdzono, że kulowanie opóźnia inicjację i skraca czas propagacji szczelin. Dzięki temu następuje zwiększenie trwałości zmęczeniowej szczególnie w przypadku obciążeń wysokocyklicznych. Odporność na pękanie takiej warstwy wynika z działania trzech czynników: naprężeń własnych (ściskających), zwiększonej twardości oraz zmiany budowy krystalicznej warstwy w stosunku do rdzenia. Naprężenia własne relaksują pod wpływem ściskających obciążeń cyklicznych, natomiast mogą rosnąć jeżeli obciążenia cykliczne są rozciągające. Stan naprężeń w warstwie wierzchniej obciążonego elementu konstrukcyjnego nie może być obliczany jako zwykła superpozycja naprężeń początkowych (własnych) i naprężeń od obciążenia. Należy uwzględnić wzmocnienie materiału i relaksację naprężeń w trakcie obciążenia oraz zmiany mikrostruktury warstwy.

Podano wykresy prędkości propagacji szczelin zmęczeniowych w funkcji ich długości dla próbek kulowanych jednorodnych. Wpływ kulowania jest widoczny przede wszystkim w strefie krótkich szczelin. Zmniejszenie prędkości propagacji szczelin w tych próbkach spowodowane jest działaniem naprężeń własnych i wzmocnieniem materiału, który stawia większy opór powiększeniu szczeliny niż w przypadku próbki jednorodnej. Kulowanie znacznie zwiększa stosunek czasu inicjacji szczelin do czasu propagacji szczelin.

Wpływ naprężeń własnych na zmiany mikromechaniczne w warstwie nie jest oceniany jednoznacznie. W pracach [6,7,8] stwierdzono, że naprężenia własne w warstwie mają niewielki wpływ na rozwój pęknięć zmęczeniowych we wstępnej fazie ich powstawania. Poprawa własności zmęczeniowych próbek kulowanych przypisywana jest zmianie sieci krystalicznej oraz zmianie kierunku dyslokacji w warstwie. Kierunek ten nie pokrywa się z kierunkiem dyslokacji wywołanych późniejszym obciążeniem eksploatacyjnym. Zmiana sieci krystalicznej w strefie przypowierzchniowej powoduje mniejsze uplastycznienie materiału przy obciążeniach cyklicznych, co utrudnia powstawanie mikropeknięć. W następstwie kulowania zmniejsza się wielkość ziaren, a zatem na zadanej głębokości zwiększa się liczba mikrostrukturalnych barier hamujących rozwój szczelin.



Praca [9] poświęcona jest wyjaśnieniu zjawiska poprawy odporności na pękanie stopu niklu po obróbce kulowaniem. W pracy przeprowadzono analizę inicjacji i propagacji pęknięć zmęczeniowych pierwszego i drugiego rodzaju. Badania przeprowadzono na próbkach o przekroju prostokątnym, na których ukonstytuowano trzy typy warstw odpowiadające trzem poziomom intensywności kulowania. Dla każdej warstwy podano profile twardości według Vickersa. Próbki z tak ukształtowaną warstwą oraz próbki jednorodnie poddano czteropunktowemu cyklicznemu zginaniu. Proces obciążenia był systematycznie przerywany w celu rejestracji pasm poślizgu i pęknięć zmęczeniowych.

W przypadku próbek jednorodnych inicjacja pęknięć następuje wzdłuż pasm poślizgu. Rozwój pęknięć jest przyspieszany w obszarze ziaren i hamowany na granicy ziaren, zatem prędkość rozwoju szczelin zmienia się w sposób skokowy.

W próbkach kulowanych inicjacja szczelin w mniejszym stopniu zależy od formowania się pasm poślizgu. Poza tym kulowanie powoduje redukcję liczby pasm poślizgu. W konsekwencji inicjacja szczelin następuje na granicy i w środku ziaren. Generalnie większą trwałość zmęczeniową wykazują próbki kulowane. Stadium inicjacji szczelin dla próbek kulowanych z niską i średnią intensywnością stanowi większą część całkowitej trwałości próbki niż w przypadku próbek jednorodnych. Próbki kulowane z najmniejszą intensywnością wykazują podobny wzrost odporności na pękanie we wszystkich fazach zmęczenia, natomiast próbki kulowane ze średnią intensywnością wykazują wzrost trwałości głównie dzięki wydłużeniu fazy inicjacji pęknięć.

W pracy wykazano, że kulowanie może być zastosowane do poprawy własności zmęczeniowych elementów, których powierzchnia wykazuje już mikropęknięcia zmęczeniowe. W tym celu próbki, które już były obciążane cyklicznie poddano powtórnemu kulowaniu, a następnie obciążeniu cyklicznemu. Zauważono, że w trakcie ponownego obciążenia nastąpiło znaczne spowolnienie prędkości wzrostu istniejących już rys, a w konsekwencji wzrost trwałości zmęczeniowej. Dla uzyskania najlepszego efektu, ponowne kulowanie powinno być stosowane we wczesnej fazie zmęczenia, kiedy występują jedynie krótkie mikropęknięcia. Powtórne kulowanie nie daje wzrostu trwałości jeśli na kulowanej powierzchni występują już szczeliny dłuższe niż 1mm.

Jako przykład prac dotyczących obróbki kulowaniem, należących do trzeciej z wymienionych grup można podać [10,11]. W pracy [10] zaproponowano model, który umożliwiał wyznaczenie naprężeń własnych i

odkształceń plastycznych w warstwie kulowanej. W modelu korzysta się za następujących danych wejściowych: geometria obrabianego elementu, model konstytutywny materiału, warunki kontaktu kul i obrabianej powierzchni oraz parametry procesu kulowania (intensywność, kąt uderzenia etc.). Poprawność modelu została zweryfikowana poprzez porównanie wartości naprężeń własnych otrzymanych drogą symulacji przy wykorzystaniu modelu oraz zmierzonych metodą rentgenowską. Korzystając z modelu przeprowadzono symulacje mające na celu zbadanie wpływu kąta uderzenia kul i współczynnika tarcia na rozkład wartości generowanych naprężeń własnych.

W pracy [11] przedstawiony został gotowy program do symulacji efektów procesu kulowania. Danymi do programu są: geometria kulowego elementu jego własności sprężysto-plastyczne oraz parametry procesu takie jak: rodzaj i rozmiar kul i intensywność Almena. W rezultacie otrzymuje się wykres generowanych naprężeń własnych. W omawianej pracy podkreślono, że ważnym i trudnym do rozwiązania zagadnieniem jest dobór grubości warstwy i parametrów procesu kulowania dla konkretnego elementu konstrukcyjnego.

### Warstwy laserowe

Wśród technik, które poprawiają własności zmęczeniowe elementów coraz ważniejsze miejsce zajmuje technika laserowa. Rozwój techniki laserowej w ostatnich latach sprawił, że coraz więcej prac poświęca się wykorzystaniu lasera do poprawy własności powierzchni. Obróbka laserowa wprowadza zmiany strukturalne takie jak zmniejszenie wielkości ziaren modyfikacja wtrąceń modyfikację naprężeń własnych. Mało jest prac poświęconych badaniom wpływu jej obróbki na wytrzymałość zmęczeniową. Obróbce tej poddawane są najczęściej stale ferrytowe, które mogą być utwardzone przez zmiany fazowe (bez przetapiania powierzchni). Taka obróbka wprowadza duże naprężenia ściskające własne na głębokości kilkuset mikrometrów, które przeciwdziałają powstawaniu szczelin zmęczeniowych. Szczególnie poprawa własności zmęczeniowych ma miejsce w przypadku próbek z karbem.

Pracę [12] poświęcono poprawie własności zmęczeniowych stali austenitycznej przy pomocy laserowej obróbki powierzchniowej. Zaletą te stali jest odporność na korozję, zaś wadą stosunkowo mała wytrzymałość, której nie można poprawić poprzez tradycyjne hartowanie. Stąd, w omawianej pracy podjęto problem poprawy wytrzymałości tej stali.

Zaobserwowano, że po przetopieniu laserowym powierzchni powstają duże rozciągające naprężenia własne, które są niekorzystne dla trwałości

zmęczeniowej. Stąd konieczne jest dodatkowo zwrócenie uwagi na inne efekty, które mają wpływ na procesy zmęczeniowe to jest

-rodzaj mikrostruktury tzn. wielkość, forma i orientacja ziaren, skład i dystrybucja wtrąceń, gęstość i rozkład dyslokacji

-sposób przygotowania powierzchni, który być tak dobrany, aby zmniejszyć chropowatość oraz liczbę mikropełnięć.

Parametry obróbki laserowej i przygotowanie powierzchni powinny być takie, aby spowodować korzystne zmiany mikrostrukturalne stanowiące przeciwwagę dla niekorzystnych naprężeń własnych. Poprzez odpowiednią obróbkę można uzyskać zamknięcie się szczelin i zmniejszenie wielkości ziaren, co powoduje opóźnienie powstawania pęknięć zmęczeniowych. Są również badania, które wskazują, że w wyniku przetopienia powierzchni przynajmniej lokalnie mogą powstawać korzystne naprężenia ściskające.

W ramach przygotowania powierzchni próbki były szlifowane, a następnie wygrzewane w atmosferze argonu w celu wyeliminowania naprężeń własnych. Zastosowano dwa rodzaje obróbki laserowej. Obróbkę wiązką ciągłą, w wyniku której powstaje warstwa o grubości 200  $\mu\text{m}$  oraz obróbką wiązką pulsującą - wtedy grubość warstwy wynosi 100  $\mu\text{m}$ . W obydwu przypadkach następują podobne zmiany mikrostruktury. Zwiększenie mikrotwardości następuje na większej grubości niż grubość przetopienia. Chropowatość warstwy po obróbce,  $R_a$  wynosi 30  $\mu\text{m}$ . Metodą rentgenowską zmierzono naprężenia własne (rozciągające), ich wartość wynosi około 50 MPa.

W teście monotonicznego rozciągania próbki po obróbce wykazują zwiększoną o 50% granicę plastyczności, natomiast granica wytrzymałości pozostaje niezmienną. Następuje zmniejszenie ciągliwości próbek, odkształcenie plastyczne odpowiadające maksymalnym naprężeniom zmniejsza się o ok. 25%.

Badania zmęczeniowe przeprowadzone w teście ściskania rozciągania przyjmując  $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0,01$ . Podano krzywe Woehlera dla próbek

jednorodnych i próbek poddanych obróbce. Obróbka laserowa zwiększa wartość wytrzymałości zmęczeniowej o ok. 12 - 20 %. Najlepsze wyniki otrzymuje się po obróbce wiązką pulsującą. Wzrost wytrzymałości zmęczeniowej, zależy również od wstępnego przygotowania powierzchni, które ma na celu zwiększenie jej absorpcyjności i homogenizację jej własności. Deformacja plastyczna wynikająca z naprężeń wywołanych temperaturą powoduje wzrost mikrotwardości rdzenia próbek. Zauważono również, że w próbkach poddanych obróbce, a następnie testom

zmęczeniowym następuje równoległe przesunięcie wykresów mikrotwardości w kierunku większych jej wartości. Oznacza to, że sam proces zmęczenia materiału powoduje wzrost mikrotwardości, wynikający we wzroście gęstości dyslokacji. Podczas prób zmęczeniowych zaobserwowano redukcję ciągliwości próbek poddanych obróbce, co jest zgodne ze wspomnianym wcześniej wzrostem mikrotwardości.

Poprawa własności zmęczeniowych próbek poddanych obróbce laserowej następuje pomimo wzrostu chropowatości. Poprawa ta jest trudna do wytłumaczenia na bazie analizy naprężeń residualnych i chropowatości próbek. Zmiany tych parametrów wskazywałyby raczej na pogorszenie własności zmęczeniowych. Parametrem, który stanowi przeciwagę tych niekorzystnych efektów jest zmiana morfologii ziaren. Zatem obróbka laserowa powierzchni może być stosowana nawet do materiałów, które nie mogą być utwardzane poprzez transformację fazową.

Zagadnieniu poprawy wytrzymałości zmęczeniowej elementów wskutek hartowania laserowego poświęcono pracę [13]. W pracy tej badano wytrzymałość zmęczeniową próbek w postaci beleczek z karbem poddanych trójpunktowemu zginaniu. Przyjęto współczynnik obciążenia  $R = \sigma_{min} / \sigma_{max} = 0.1$ . Geometrię karbu dobrano w ten sposób by koncentracja naprężeń w próbkach była taka sama jak koncentracja naprężeń w kołach zębatych. Umożliwiło to oszacowanie wpływu obróbki laserowej na wytrzymałość kół zębatych. Jako materiał do próbek użyto dwóch gatunków stali konstrukcyjnych. Obróbkę przeprowadzono przy użyciu ciągłej wiązki laserowej. Zastosowano różne parametry odpuszczania próbek. Otrzymano warstwę, która charakteryzowała się większą mikrotwardością niż rdzeń. Omówiono ogólnie zmiany mikrostruktury warstwy. Podano wytrzymałość zmęczeniową odpowiadającą liczbie cykli  $N = 10^7$  dla różnych parametrów hartowania laserowego. We wszystkich przypadkach zaobserwowano zwiększenie trwałości zmęczeniowej o około 30%. Stwierdzono, że inicjacja zniszczenia następuje w warstwie przejściowej, pod powierzchnią. Dokładna lokalizacja punktu, od którego rozpoczyna się zniszczenie zależy od naprężeń własnych, a więc od przebiegu całego procesu technologicznego (hartowanie, odpuszczanie). Stwierdzono, że po procesie obróbki laserowej otrzymuje się podobny wzrost wytrzymałości zmęczeniowej jak w wyniku procesu nawęglania.

Praca [14] również była poświęcona badaniu wpływu warstwy hartowanej laserowo na własności zmęczeniowe elementów wykonanych ze stali niskostopowych. Badania prowadzono na próbkach okrągłych poddanych cyklicznemu ścisłaniu-rozciąganiu, przyjmując  $R=0.1$ . Warstwę

konstruowano z uwzględnieniem dwóch rodzajów pokryć absorpcyjnych. Celem badań było sprawdzenie możliwości konstruowania warstwy utwardzanej laserowo na próbkach o zmiennym przekroju poprzecznym oraz porównanie własności takiej warstwy z własnościami warstw otrzymanych w wyniku tradycyjnych obróbek tj. kulowania, hartowania indukcyjnego i azotonawęglania. Podano grubości warstw oraz ich profile twardości. Największą mikrotwardość wykazują warstwy hartowane indukcyjnie i hartowane laserowo. Dla próbek poddanych wszystkim wymienionym obróbkom technologicznym podano granicę plastyczności, granicę wytrzymałości oraz maksymalne wydłużenie otrzymane w teście jednoosiowego rozciągania. Największą wartość granicy plastyczności i wytrzymałości uzyskuje się po hartowaniu indukcyjnym oraz po hartowaniu laserowym. Próbki hartowane laserowo wykazują najmniejszą ciągliwość. Przedstawiono również profile naprężeń własnych. W warstwie hartowanej laserowo przy użyciu grafitowego pokrycia absorpcyjnego występują na powierzchni rozciągające naprężenia własne. W pozostałych przypadkach w warstwie występują naprężenia ściskające, a największą wartość bezwzględną osiągają w przypadku warstwy kulowanej.

Porównano również krzywe zmęczeniowe próbek z warstwą ukształtowaną wymienionymi metodami. Największy procentowo wzrost wytrzymałości zmęczeniowej występuje w przypadku hartowania indukcyjnego (o około 90%), w dalszej kolejności jest nawęglanie i kulowanie - odpowiednio 30% i 50%. Obróbka laserowa w zależności od rodzaju pokrycia absorpcyjnego poprawia o 40% (pokrycie związkami fosforu) lub pogarsza (pokrycie grafitowe) wytrzymałość zmęczeniową. Omówiono mikrostrukturę badanych warstw.

Badaniom wpływu laserowego utwardzania detonacyjnego na wytrzymałość zmęczeniową stopu aluminium poświęcona jest praca [1], którą omówiono w poprzednim podrozdziale.

### Warstwy azotowane

Obróbką, która poprawia własności zmęczeniowe elementów jest azotowanie. Można tu wyróżnić azotowanie dyfuzyjne, plazmowe oraz implantację jonową.

W pracy [15] przeprowadzono badania zużycia i wytrzymałości zmęczeniowej próbki z bainitycznej stali niskowęglowej z warstwą powstałą w wyniku azotowania plazmowego. Jako test zmęczeniowy przyjęto zginanie obrotowe. Przedstawiono krzywe zużycia oraz krzywe zmęczeniowe uzyskane

dla różnych parametrów technologicznych (temperatura, czas azotowania). Wyniki te porównano z krzywymi otrzymanymi dla próbek nieobrobionych. Obserwując krzywe zmęczeniowe można stwierdzić, że azotowanie plazmowe powoduje wzrost wytrzymałości zmęczeniowej w całym badanym zakresie liczby cykli. Zwiększenie czasu lub temperatury azotowania powoduje wzrost wytrzymałości zmęczeniowej. Stwierdzono, że grubość warstwy ma niewielki wpływ na wytrzymałość zmęczeniową, gdyż pęknięcia są inicjowane pod warstwą na styku warstwa rdzeń. Procentowy wzrost wytrzymałości jest największy przy obciążeniach wysokocyklicznych.

Obszerne badania wpływu warstwy azotowanej plazmowo na trwałość zmęczeniową podano w pracy [16]. Badania przeprowadzono na próbkach okrągłych gładkich oraz z karbem obrączkowym wykonanych ze stali niskostopowej. Wszystkie próbki były hartowane, odpuszczane, a następnie część z nich była azotowana. Wyniki testów próbek nie poddanych azotowaniu służyły do porównania z wynikami dla próbek azotowanych. Dla obydwu rodzajów próbek azotowanych podano profile twardości. Profile naprężeń własnych przedstawiono tylko dla gładkich próbek azotowanych. Są to naprężenia ściskające o maksymalnej wartości bezwzględnej 600MPa, występującej na głębokości 15-20  $\mu\text{m}$  pod powierzchnią. Modyfikacja naprężeń własnych wprowadzona przez azotowanie sięga na głębokość około 600 $\mu\text{m}$ , natomiast zmiana mikrotwardości - na głębokość około 400 $\mu\text{m}$ . Test zmęczeniowy polegał na zginaniu obrotowym ( $R=-1$ ). Stwierdzono, że azotowanie plazmowe poprawia wytrzymałość zmęczeniową próbek gładkich 53%, natomiast próbek z karbem o 115% w porównaniu do wytrzymałości próbek hartowanych i odpuszczanych. Porównano również krzywe zmęczeniowe obydwu rodzajów próbek. W przypadku próbek gładkich azotowanie powoduje wzrost wartości amplitudy niszczącej, która zmienia się od 35% dla  $10^3$  liczby cykli, 65% dla  $10^5$  liczby cykli, do 53% dla  $10^7$  liczby cykli. W przypadku azotowanych próbek z karbem wzrost wytrzymałości zaczyna się powyżej  $4 \times 10^4$  liczby cykli, a powyżej  $3 \times 10^5$  liczby cykli uzyskuje już maksymalną wartość 115%. Analizując wpływ karbu na zmęczenie możemy powiedzieć, że dla próbek hartowanych jest on pomijalny przy małej liczbie cykli, natomiast przy dużej liczbie cykli powoduje spadek wytrzymałości zmęczeniowej o 38%. W przypadku próbek azotowanych efekt karbu jest odwrotny to znaczy jest on stosunkowo duży dla obciążeń niskocyklicznych, 33% i spada do 12% dla obciążeń wysokocyklicznych. W próbkach gładkich początkowe pęknięcia zmęczeniowe zaczynają się pod powierzchnią, natomiast w próbkach z karbem - od powierzchni. Omówiono mechanizm powstawania szczelin zmęczeniowych. Przedstawiono

wyjaśnienie efektu poprawy wytrzymałości zmęczeniowej po azotowaniu korzystając z uproszczonego modelu próbki z warstwą. W modelu tym założono jednoosiowy stan naprężeń oraz przyjęto, że naprężenia w przekroju próbki są prostą sumą zmierzonych naprężeń własnych i naprężeń od obciążenia. Relaksacja naprężeń własnych w trakcie obciążeń cyklicznych nie została uwzględniona. Założono, że zniszczenie elementu rozpoczyna się w tym punkcie przekroju, w którym obliczona wartość naprężenia przekracza pewną wartość graniczną. Tą wartością jest naprężenie niszczące w próbce bez warstwy. Ten uproszczony model umożliwił częściowe wyjaśnienie zaobserwowanych doświadczalnie zmian położenia punktów inicjacji pęknięć zmęczeniowych próbek z warstwą w zależności od amplitudy obciążenia.

Badaniom wpływu procesu azotowania na wytrzymałość zmęczeniową poświęcono pracę [17]. Badania wykonano na próbkach okrągłych, gładkich o średnicy 8 mm ze stali 42CrMo4, na których ukonstytuowano warstwę wierzchnią przy pomocy azotowania. Zbadano wpływ czasu trwania obróbki na wytrzymałość próbek. Podano początkowe fragmenty krzywych rozciągania (w zakresie  $0.0 \leq \epsilon \leq 0.008$ ) próbek azotowanych w czasie 10, 30 i 70 godz. Stwierdzono, że średni moduł Younga kompozytu warstwa-rdzeń wzrasta wraz ze wzrostem czasu obróbki. Dla wszystkich przyjętych czasów trwania procesu występuje wzrost granicy plastyczności. Wzrost ten jest największy przy obróbce trwającej 30 godzin. Zaproponowano uproszczony model próbki z warstwą, w którym warstwę i rdzeń potraktowano jako połączenie dwóch równoległych sprężyn. W modelu zaniedbano wzajemne oddziaływanie warstwy i rdzenia. Korzystając z modelu wyznaczono moduł Younga warstwy, przyjmując, że znany jest moduł rdzenia. Największy moduł Younga równy 380 MPa osiąga warstwa po 70 godzinnym azotowaniu. Grubość warstwy szacowaną na 0.3 mm wyznaczono na podstawie profili mikrotwardości, którą określono w funkcji odległości od powierzchni. Naprężenia własne wyznaczono korzystając z metody rentgenowskiej, wartość składowej w kierunku osiowym wynosi -320 MPa w kierunku obwodowym -150 MPa.

Podano krzywe zmęczeniowe w układzie amplituda odkształceń - niszcząca liczba cykli dla próbek jednorodnych oraz próbek z warstwą. Korzystny wpływ warstw azotowanych w czasie 30 i 70 godzin zaznacza się w zakresie dużej liczby cykli  $10^4 - 10^7$ , dla mniejszej liczby cykli (większej amplitudy odkształceń) wpływ warstwy jest niekorzystny tzn. następuje przyspieszone pękanie próbek azotowanych. W przypadku próbek azotowanych w czasie 10 godzin następuje obniżenie wytrzymałości zmęczeniowej w całym badanym zakresie liczby cykli.

Wyznaczono również krzywe szkieletowe w układzie amplituda naprężeń-amplituda odkształceń dla próbek azotowanych w czasie 10 godzin i 30 godzin.

W przypadku dużej amplitudy odkształceń pęknięcia zmęczeniowe rozpoczynają się od warstwy wierzchniej, natomiast w przypadku małych amplitud odkształcenia - od rdzenia próbek, w punktach położonych w bezpośrednim sąsiedztwie warstwy. Kierunek pęknięć wskazuje na wieloosiowy stan naprężenia w warstwie wierzchniej.

Bardzo złożonym problemem jest również sam proces kształtowania warstwy azotowanej. W tej dziedzinie obok prowadzonych na szeroką skalę badań doświadczalnych powstają również prace poświęcone modelowaniu procesów zachodzących podczas obróbki powierzchniowej. Modelowanie procesu azotowania plazmowego przedstawiono na konferencji [18]. Opisano trzy fazy formowania naprężeń własnych w procesie azotowania. W pierwszej fazie następuje wzrost naprężeń ściskających na powierzchni i pod powierzchnią materiału. W drugiej fazie następuje relaksacja naprężeń na powierzchni i maksimum naprężeń przesuwa się nieco pod powierzchnię. W trzeciej fazie następuje dalszy spadek naprężeń ściskających na powierzchni tak, że przy dłuższym czasie azotowania, na większej głębokości mogą pojawić się naprężenia rozciągające. Do opisu drugiej fazy procesu (relaksacja) zaproponowano dwa modele. W jednym wykorzystuje się zjawisko generowania odkształceń plastycznych w wyniku procesu pełzania wywołanego zmianami temperatury [19]. Drugi model [20] [21] bazuje na zjawisku rekrytalizacji. Zauważono, że w wyniku azotowania następuje odwęglanie powierzchni [20].

### Warstwy PVD i CVD

Ostatnio nastąpił również gwałtowny rozwój technologii pokryw PVD i CVD.

W pracy [21] porównano wpływ różnych obróbek powierzchniowych na wytrzymałość zmęczeniową elementów. Badano próbki ze stali A515 o przekroju prostokątnym, z karbem półkolistym, poddane zginaniu. Próbki obciążano cyklicznie do momentu inicjacji zniszczenia. Badane próbki poddano trzem różnym rodzajom obróbki powierzchniowej: polerowaniu, kulowaniu i nałożeniu powłoki technologią PVD. Dla wszystkich rodzajów obróbki powierzchniowej zbadano parametry mające wpływ na wytrzymałość zmęczeniową tzn. chropowatość, naprężenia własne, mikrotwardość. Stwierdzono, że w przypadku obróbki kulowaniem wzrost twardości obejmuje



większą grubość (licząc od powierzchni) niż w przypadku powłoki PVD. Kulowanie wprowadza również zmiany naprężeń własnych na większej grubości niż technologia PVD. Próbkę polerowaną uznano za jednorodną, a ich własności zmęczeniowe były punktem odniesienia do badania wpływu różnych warstw na wytrzymałość zmęczeniową. Dla próbek jednorodnych wyznaczono krzywe zmęczeniowe dwoma sposobami - doświadczalnie, oraz teoretycznie przy pomocy wzorów Morrowa [22], oraz Glinki i Neubera [23,24]. Krzywe teoretyczne i doświadczalne pokrywają się dla współczynnika obciążenia  $R = 0$ .

Ze względu na brak metod teoretycznych do wyznaczania krzywych zmęczeniowych elementów z warstwą, dla takich elementów krzywe zmęczeniowe wyznaczono jedynie doświadczalnie. Stwierdzono, że obydwie technologie (PVD i kulowanie) poprawiają trwałość zmęczeniową. Krzywe zmęczeniowe próbek poddanych obróbce leżą powyżej krzywych dla próbek jednorodnych w całym rozpatrywanym zakresie liczby cykli. Dla liczby cykli równej  $2 \times 10^6$  następuje wzrost niszczącej amplitudy naprężeń o ok. 25%. Korzystny wpływ kulowania wynika z naprężeń własnych i umocnienia materiału wprowadzonych przez tę obróbkę. Zmiany wprowadzone procesem PVD obejmują mniejszą grubość materiału niż w przypadku procesu kulowania, jednak dają podobny wzrost wytrzymałości zmęczeniowej. Efekt ten tłumaczy się różnicą chropowatości, która jest znacznie większa w przypadku próbek kulowanych i ma bardzo niekorzystny wpływ na wytrzymałość zmęczeniową. W strefie chropowatości doliny oddzielające poszczególne mikronierówności stanowią minikarby, od których rozpoczyna się pęknięcie materiału. Stwierdzono, że w przypadku próbek kulowanych zniszczenie zaczyna się od powierzchni, to znaczy od warstwy, natomiast w przypadku powłoki PVD zniszczenie rozpoczyna się na granicy warstwy i podłoża.

Badaniom wpływu pokryć technologią CVD na wytrzymałość zmęczeniową próbek poświęcono prace [25,26,27]. Wpływ tej warstwy zależy od sposobu obciążenia próbek i rodzaju stali, z której zostały one wykonane. W przypadku próbek ze stali węglowych warstwy CVD powodują podwyższenie wytrzymałości zmęczeniowej. Natomiast w przypadku stali konstrukcyjnych (stopowych) walcowanych na zimno i walcowanych na gorąco stwierdzono spadek wytrzymałości zmęczeniowej w próbkach z powłoką CVD.

Wpływ powłok osadzonych technologią PVD na trwałość zmęczeniową elementów również nie jest jednoznaczny [28,29]. Dla próby zmęczeniowej polegającej na zginaniu obrotowym ( $R=-1$ ) zaobserwowano wzrost trwałości

zmęczeniowej dla obciążeń niskocyklicznych. Jednak dla  $R = 0$  wzrost trwałości zmęczeniowej następuje jedynie w zakresie niskich amplitud naprężenia, co odpowiada obciążeniom wysokocyklicznym. W pracy [30] zmianę trwałości zmęczeniowej przebadano w funkcji takich parametrów warstwy jak mikrotwardość i rozkład naprężeń własnych. Stwierdzono, że naprężenia residualne w strefie warstwy wierzchniej i bezpośrednio pod warstwą oraz przyczepność warstwy do podłoża mają wpływ na trwałość zmęczeniową.

Pracę [31] poświęcono badaniu wpływu warstwy PVD na wytrzymałość zmęczeniową. Jako test zmęczeniowy wybrano trójpunktowe zginanie beleczek o przekroju prostokątnym ze stali 42CrMo4. Porównano krzywe zmęczeniowe próbek z czterema różnymi rodzajami warstw otrzymanymi technologią PVD (dla czterech różnych parametrów tworzenia pokryć) i próbek jednorodnych. Stwierdzono, że w zakresie obciążeń niskocyklicznych próbki z warstwą wykazywały mniejszą trwałość niż próbki jednorodne, niezależnie od zastosowanych parametrów warstwy. Tłumaczono to faktem, że dla dużych amplitud obciążenia warstwa ze względu na swoją kruchość nie przenosi tak dużych odkształceń jak podłoże i pęka. Powoduje to wcześniejszą niż w materiale jednorodnym inicjację szczeliny w rdzeniu, a w konsekwencji wcześniejsze zniszczenie całej próbki. W miarę przechodzenia w zakresy obciążeń wysokocyklicznych próbki z warstwą charakteryzuje większa trwałość zmęczeniowa. Ponadto pojawia się wówczas pewne zróżnicowanie korzystnego wpływu warstwy w zależności od parametrów jej konstituowania. Efekty te zostały potwierdzone również przy testach zginania obrotowego, [29].

W omawianej pracy, [31], próbowano znaleźć relację między mikrotwardością oraz naprężeniami własnymi warstwy, a trwałością zmęczeniową. Stwierdzono, że nałożenie warstw technologią PVD powoduje wzrost mikrotwardości podłoża. Stwierdzono, że pęknięcia zmęczeniowe rozpoczynają się na granicy warstwy i podłoża, a zatem naprężenia własne w warstwie nie mają istotnego wpływu na procesy zmęczeniowe. Naprężenia własne w podłożu były podobne dla wszystkich czterech rodzajów pokryć. Stąd wnioskowano, że były one konsekwencją procesu polerowania, który miał miejsce przed rozpoczęciem nakładania pokryć. Omówiono rozwój mikropęknięć w elemencie z warstwą. Zbyt krucha powłoka powoduje powstanie mikropęknięć w podłożu, a więc jest przyczyną obniżenia trwałości zmęczeniowej podłoża. W odniesieniu do badanych warstw nie stwierdzono wyraźnej zależności między naprężeniami własnymi, mikrotwardością warstwy i trwałością zmęczeniową.

Badaniom zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią przy obciążeniach kontaktowych poświęcono pracę [32]. W pracy tej badano wpływ cykli naprężeń kontaktowych na odrywanie się warstwy PCVD od podłoża. Warstwę badano na specjalnym stanowisku, składającym się z dwóch walców stykających się powierzchnią boczną. Obydwa walce mogły się obracać w ten sposób, że jeden napędzał drugi. Na powierzchni bocznej jednego walca ukonstruowana była warstwa wierzchnia a drugi stanowił przeciwpróbkę obciążającą. Określono krzywe zmęczeniowe, które wyrażały zależność liczby cyklu powodującej łuszczenie się warstwy od obciążenia normalnego. Przedstawiono uproszczony model kontaktu bazujący na rozwiązaniu Hertza.

Stwierdzono, że pęknięcia zmęczeniowe zaczynają się na połączeniu warstwy i rdzenia. Trwałość zmęczeniowa tego połączenia zależy od własności plastycznych warstwy i rdzenia. Łuszczenie się warstwy spowodowane jest występowaniem naprężeń stycznych w obszarze kontaktu. Na podstawie amplitudy naprężeń stycznych obliczonej w stanie sprężystym, ale z uwzględnieniem różnic stałych materiałowych warstwy i rdzenia, określono trwałość połączenia warstwa-rdzeń. Zbadano wpływ współczynnika tarcia na amplitudę naprężeń stycznych i na maksymalne naprężenia styczne.

Obszerną dziedziną wiedzy związaną z warstwą wierzchnią jest zagadnienie pomiarów i modelowania naprężeń własnych. Naprężenia te generowane są bowiem najczęściej w strefie przypowierzchniowej. Zagadnieniu temu poświęcane są cykliczne konferencje na przykład [33].

### **2.1.1 Wnioski**

Problem poprawy własności zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych poprzez obróbkę powierzchniową jest intensywnie badany eksperymentalnie, wykazano korzystny wpływ warstwy. Prace teoretyczne są nieliczne i ograniczone do uproszczonych modeli. Do określenia własności zmęczeniowych próbek z warstwą wierzchnią stosowane są trzy grupy modeli. W pierwszej grupie podstawowym parametrem jest rozkład wytrzymałości zmęczeniowej w przekroju próbki. Rozkład ten jest wyznaczony na podstawie naprężeń własnych i mikrotwardości. Porównując ten rozkład z rozkładem naprężeń od obciążenia zewnętrznego wyznacza się miejsca inicjacji pęknięć zmęczeniowych. Takie podejście stosuje się w przypadku, gdy występują duże gradienty naprężeń wynikające z geometrii elementów [16,34,35,36,37]. W drugiej grupie modeli, element z warstwą wierzchnią traktuje się jako kompozyt złożony z dwóch materiałów - kruchej i wytrzymałej warstwy, oraz

rdzenia o mniejszej wytrzymałości, ale większej ciągliwości. Wyznacza się krzywe ewolucji naprężeń i odkształceń w warstwie i w rdzeniu dla określenia wytrzymałości zmęczeniowej. Takie podejście zastosowano np. w pracy Baumel Seeger [38], gdzie element z warstwą jest modelowany przy pomocy współosiowych walca i cylindra o różnych naprężeniach własnych i różnych krzywych rozciągania. Stosując to podejście w pracy [39] zamodelowano relaksację naprężeń własnych próbki azotowanej przy obciążeniu rozciągającym. W trzeciej grupie modeli stosuje się mikromechanikę pękania do przewidzenia propagacji szczelin zmęczeniowych i zniszczenia elementu.

Wymienione tu prace świadczą o tym, że problem wpływu warstwy wierzchniej na wytrzymałość zmęczeniową elementów jest bardzo ważny, jednak dotychczasowe badania w większości ograniczone są do badań doświadczalnych lub bardzo uproszczonych rozwiązań teoretycznych. Gruntowna analiza teoretyczna procesu zmęczenia elementu z warstwą umożliwiłaby ocenę wpływu poszczególnych parametrów mechanicznych warstwy na wytrzymałość zmęczeniową. Analiza taka powinna bazować na koncepcji wytrzymałości lokalnej i składać się z następujących etapów:

- wyznaczanie stanu naprężenia przy obciążeniach cyklicznych,
- wykorzystanie kryterium zmęczeniowego dla wyznaczenia niszczącej liczby cykli w różnych punktach elementu i wyznaczenie punktu inicjacji zniszczenia.

Wymieniony tu pierwszy etap, czyli wyznaczenie stanu naprężeń jest zagadnieniem złożonym, zwłaszcza w stanie wieloosiowym i wymaga znajomości wielu parametrów materiałowych. Trudna jest również weryfikacja tego etapu. Jedną z metod weryfikacji może być porównanie naprężeń resztkowych wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie dla różnej liczby cykli.

Niniejsza praca stanowi próbę kompleksowego podejścia do tego problemu, które wyjaśniałoby procesy zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią poprzez analizę stanu naprężenia w warstwie i w rdzeniu, a następnie wykorzystanie znanych kryteriów zmęczeniowych. Umożliwi to ilościową ocenę wpływu warstwy wierzchniej o zadanych parametrach na trwałość zmęczeniową oraz ocenę wpływu poszczególnych parametrów warstwy na tę trwałość.

Największy wpływ warstwy wierzchniej obserwuje się w przypadku elementów z karbem konstrukcyjnym, dlatego przedstawiony model zostanie zastosowany do wyznaczenia krzywej zmęczeniowej elementu z karbem i warstwą wierzchnią.

## 2.2 Wybrane hipotezy zmęczeniowe przydatne do wyznaczania trwałości elementu z warstwą wierzchnią

W próbce z warstwą wierzchnią gładkiej lub z karbem konstrukcyjnym mamy w ogólnym przypadku do czynienia z wieloosiowym stanem naprężenia. Stan ten powinien być uwzględniony przy ocenie trwałości zmęczeniowej takiej próbki poprzez zastosowanie wieloosiowego kryterium zmęczeniowego. Sformułowanie kryterium zmęczeniowego w wieloosiowym stanie naprężenia było przedmiotem wielu prac. Opracowane kryteria zmęczeniowe uzależniały niszczącą liczbę cykli  $N_f$  od stanu naprężenia [40,41], lub odkształcenia [42,43] w elemencie. Ogólnie kryteria zmęczeniowe dla wieloosiowego stanu naprężenia możemy podzielić na dwie grupy. W jednej trwałość zmęczeniowa uzależniona jest od energii odkształcenia na cyklu obciążeń. W drugiej grupie kryteriów przyjmuje się, że zniszczenie materiału następuje na pewnej płaszczyźnie zwanej płaszczyzną krytyczną i jest ono uzależnione od stanu naprężenia, odkształcenia lub energii związanych z tą płaszczyzną.

Ostatnio wiele uwagi poświęcono kryteriom energetycznym, w którym niszczącą liczbę cykli,  $N_f$ , uzależnia się od energii odkształcenia na cyklu. Kryterium to zostało zaproponowane m.in. w [44, 45], a następnie rozwinięte w 1988r w [46-48]. Można je stosować zarówno w przypadku obciążeń niskocyklicznych jak i wysokocyklicznych. Jako parametr zniszczenia przyjmuje się wartość gęstości całkowitej energii odkształcenia na cyklu  $\Delta W^t$  tj. sumę gęstości energii sprężystej  $\Delta W^e$  i dyssypowanej  $\Delta W^p$ , zgodnie z wzorem:

$$\Delta W^t = \Delta W^e + \Delta W^p \quad (2.2.1)$$

Gęstości energii sprężystej  $\Delta W^e$  i dyssypowanej  $\Delta W^p$  wyrażają się wzorami:

$$\Delta W^e = \int_{H(\sigma_i^{min})\sigma_i^{min}}^{H(\sigma_i^{max})\sigma_i^{max}} \sigma_i d\varepsilon_i \quad (i=1,2,3), \quad (2.2.2)$$

gdzie  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  główne wartości tensora naprężenia i odkształcenia, H() -funkcja Heavisida,

$$\Delta W^p = \int_{cycle} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p, \quad (2.2.3)$$

gdzie  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^p$  -odpowiednio składowe tensora naprężeń i odkształceń plastycznych.

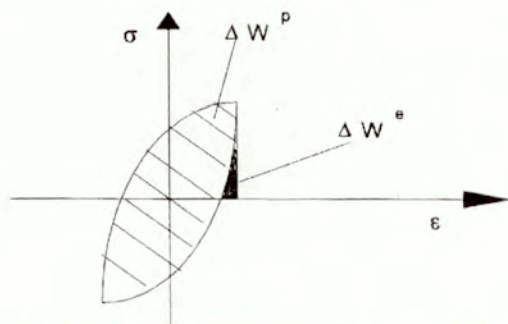
Część sprężysta energii odkształcenia  $\Delta W^e$  jest odpowiedzialna za zmęczenie wysokocykliczne natomiast  $\Delta W^p$  - za niskocykliczne. Zgodnie z [46], we wzorze (2.2.2) bierzemy pod uwagę jedynie pracę dodatnich składowych tensora naprężenia. Dla przypadku jednoosiowego ściskania-rozciągania energia  $\Delta W^e$  i  $\Delta W^p$  jest przedstawiona na rys.2.1.

Podczas cyklicznego ściskania-rozciągania próbki z karbem w dnie karbu powstają naprężenia resztkowe  $\sigma_i^o$ , zarówno w próbce jednorodnej jak i niejednorodnej. Ponadto, lokalnie w dnie karbu cykl naprężeń nie jest symetryczny, nawet wtedy gdy zewnętrzna siła wymuszająca na końcach próbki zmienia się w sposób symetryczny tzn. w zakresie  $\pm P$ . Mamy więc do czynienia z istnieniem naprężeń średnich, których wartość zależy od naprężeń resztkowych. Naprężenia całkowite  $\sigma_{ij}^t$  można przedstawić jako sumę naprężeń własnych (resztkowych)  $\sigma_{ij}^o$  i naprężeń od obciążenia  $\sigma_{ij}^l$ :

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^o + \sigma_{ij}^l, \quad (2.2.4)$$

lub w postaci składowych głównych

$$\sigma_i^t = \sigma_i^o + \sigma_i^l. \quad (2.2.4a)$$



Rys.2.1. Energia odkształcenia sprężysta  $\Delta W^e$  i plastyczna  $\Delta W^p$  w jednoosiowym stanie naprężenia

Aby wyznaczyć gęstość całkowitej energii odkształcenia  $\Delta W^t$ , do wzorów (2.2.2), (2.2.3) podstawiamy wartości naprężeń całkowitych  $\sigma_{ij}^t$ , zatem naprężenia resztkowe mają wpływ na wartość tej energii.

Obliczenie gęstości energii dyssypacji  $\Delta W^p$  w przypadku wieloosiowego stanu naprężenia sprowadza się do wyznaczenia pola pętli histerezy całkowitych, efektywnych naprężeń  $\bar{\sigma}^t$  przedstawionych w funkcji

efektywnych odkształceń plastycznych. Naprężenia własne są więc uwzględnione przy obliczaniu  $\Delta W^p$ .

W celu obliczenia gęstości sprężystej energii odkształcenia  $\Delta W^e$  korzystamy z innej postaci wzoru (2.2.2), zgodnie z [48], tzn.

$$\Delta W^e = \Delta W_d^e + \Delta W_h^e, \quad (2.2.5)$$

gdzie  $\Delta W_d^e$ ,  $\Delta W_h^e$  odpowiednio część dewiatorowa i kulista gęstości energii sprężystej, które po uwzględnieniu granic całkowania z wzoru (2.2.2) wyrażają się następująco:

$$\Delta W^e = \frac{1-2\nu}{6E} [(I_1^{max})^2 - (I_1^{min})^2] - \frac{1+\nu}{2E} [J_2^{max} - J_2^{min}], \quad (2.2.6)$$

gdzie:

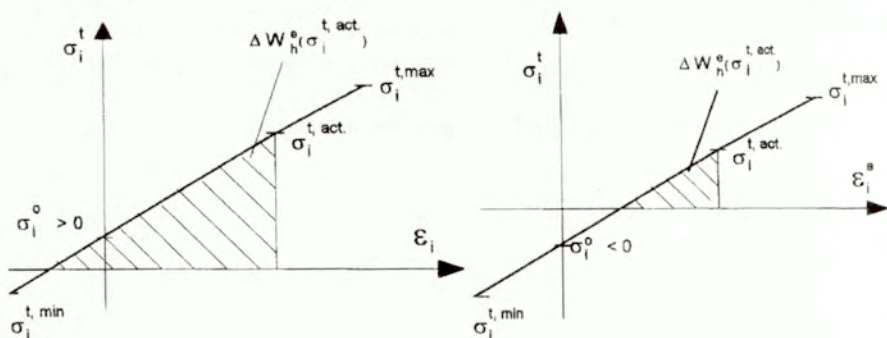
$$I_1^{max} = \sigma_1^{max} H(\sigma_1^{max}) + \sigma_2^{max} H(\sigma_2^{max}) + \sigma_3^{max} H(\sigma_3^{max}) \quad (2.2.7)$$

$$3J_2^{max} = [\sigma_1^{max} H(\sigma_1^{max})]^2 + [\sigma_2^{max} H(\sigma_2^{max})]^2 + [\sigma_3^{max} H(\sigma_3^{max})]^2 + \\ - \sigma_1^{max} \sigma_2^{max} H(\sigma_1^{max}) H(\sigma_2^{max}) - \sigma_2^{max} \sigma_3^{max} H(\sigma_2^{max}) H(\sigma_3^{max}) + \\ - \sigma_3^{max} \sigma_1^{max} H(\sigma_3^{max}) H(\sigma_1^{max}) \quad (2.2.8)$$

$\sigma_1^{min}, \sigma_1^{max}, \sigma_2^{min}, \sigma_2^{max}, \sigma_3^{min}, \sigma_3^{max}$ , - minimalne i maksymalne wartości naprężeń głównych na cyklu obciążeń przy ustabilizowanej pętli histerezy, a wyrażenia na  $I_1^{min}$  oraz  $J_2^{min}$  są analogiczne jak  $I_1^{max}$ ,  $J_2^{max}$ .

Wprowadzając we wzorach (2.2.6) minimalne i maksymalne wartości naprężeń głównych uwzględniamy pośrednio wpływ wartości średniej każdej głównej składowej tensora naprężenia na energię sprężystą. Należy tu zaznaczyć, że powyższy sposób uwzględniania naprężeń średnich cyklu jest sposobem przybliżonym. Zagadnienie uwzględniania wpływu naprężeń średnich cyklu na zmęczenie materiału w jedno- i wieloosiowym stanie naprężenia nie zostało definitywnie rozwiązane i jest przedmiotem najnowszych prac w tej dziedzinie [47,49,50,51].

Przyjęty sposób obliczania gęstości energii sprężystej odkształcenia pokazano schematycznie na rys.2.2. Na rysunku tym przedstawiono zależność  $\sigma_i^f - \varepsilon_i^e$  - dla cyklu obciążenia, w którym składowa główna  $\sigma_i^f$  zmienia się od  $\sigma_i^{f,min.}$  do  $\sigma_i^{f,max.}$ . Zaznaczono również odpowiadającą tej składowej części energii sprężystej (jako pole pod wykresem) obliczoną dla pewnego punktu pętli histerezy, dla którego aktualna wartość tej składowej wynosi  $\sigma_i^{f,act.}$ .



Rys.2.2. Część energii sprężystej  $\Delta W_h^e$  odpowiadająca składowej  $\sigma_i$  dla różnych wartości naprężenia resztkowego  $\sigma_i^o$ ;  $\sigma_i^{t, \min}$ ,  $\sigma_i^{t, \max}$  - odpowiednio minimalne i maksymalne wartości składowych

Na rys. 2.2 przedstawiono przypadki, w których minimalna wartość składowej  $\sigma_i^t$  na cyklu tj.  $\sigma_i^{t, \min}$  jest mniejsza od zera, natomiast wartość średnia (resztkowa) tej składowej jest większa lub mniejsza od zera.

Według opisanego wyżej algorytmu wyznaczana jest gęstość całkowitej energii odkształcenia na cyklu  $\Delta W^t$ . Obliczona wartość wykorzystana jest następnie w kryterium zmęczeniuowym zaproponowanym w [46,48], które ma następującą postać:

$$\Delta W_{max}^t = kN_f^\alpha + C \quad (2.2.9)$$

We wzorze (2.2.9)  $\alpha, C$  są stałymi materiałowymi, natomiast  $k$  wyraża się wzorem

$$k = a\rho + b, \quad (2.2.10)$$

gdzie

$$\rho = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2}, \quad (2.2.11)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - główne wartości tensora odkształcenia;  $a, b$  - stałe materiałowe.

Do naszych obliczeń (rozdz. 5.4, element z korbem) wartości tych stałych przyjęto według [46] jak dla stali A-516 Gr 70, tzn.  $a=-142, b=187, C=0.1$ , co po podstawieniu do (2.2.9) daje zależność:

$$\Delta W^t = (-142\rho + 187)N_f^{-0.54} + 0.1 \quad (2.2.12)$$



Do oceny trwałości zmęczeniowej elementów w wieloosiowym stanie naprężenia przy proporcjonalnej ścieżce obciążenia stosuje się również kryteria zmęczeniowe, w których korzysta się z pojęcia płaszczyzny krytycznej. W tego typu kryteriach zakłada się, że zniszczenie rozpoczyna się w wyniku układu naprężeń działającego na pewnej płaszczyźnie zwanej płaszczyzną krytyczną, na której zostanie zakumulowana największa ilość uszkodzeń. Jako miarę tych zakumulowanych uszkodzeń przyjmuje się odpowiednio zdefiniowany parametr uszkodzeń. Szereg prac poświęcono takiemu określeniu parametru uszkodzeń, które byłoby zgodne z podejściem opartym na płaszczyźnie krytycznej, tzn. parametr uszkodzeń powinien być tak zdefiniowany, aby przyjmował maksymalną wartość na tej płaszczyźnie.

Omówienie tego typu kryteriów zmęczeniowych przedstawiono między innymi w pracy C.C.Chu [52]. W pracy tej pokazano, że w przypadku obciążeń proporcjonalnych można znaleźć zamknięte rozwiązania umożliwiające określenie płaszczyzny krytycznej (podanie jej kątów nachylenia) względem przyjętego układu współrzędnych, dla różnych definicji parametru uszkodzeń proponowanych w literaturze.

W pracy przedstawiono najpierw wzory umożliwiające transformację składowych naprężenia i odkształcenia z układu  $X, Y, Z$  do układu  $X', Y', Z'$  obróconego o kąt  $\theta$  względem osi  $Z$  a następnie o kąt  $\phi$  względem nowej osi  $X'$  powstałej po uprzednim obrocie o kąt  $\theta$ . Następnie dla kilku typów parametrów uszkodzeń zdefiniowanych przez innych autorów przedstawiono wyrażenia na kąty  $\theta_c$  i  $\phi_c$  określające położenie płaszczyzny, na której te parametry przyjmują maksymalne wartości. W tym celu korzystając z wyprowadzonych wcześniej wzorów transformacyjnych parametry uszkodzeń przedstawiono jako funkcje kątów  $\theta$  i  $\phi$ ,  $P = P(\theta, \phi)$ . Wartości kątów  $\theta_c$  i  $\phi_c$  poszukiwano korzystając z warunków:

$$\left. \frac{\partial P(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi_c} = \left. \frac{\partial P(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right|_{\theta_c} = 0 \quad (2.2.13)$$

Badano również znak drugiej pochodnej parametru  $P$ , aby sprawdzić czy dla wartości  $\phi_c, \theta_c$  obliczonych z powyższego warunku parametr  $P$  osiąga maksimum czy minimum. Rozważania ograniczono do proporcjonalnych ścieżek obciążenia, dla których zależność między składowymi naprężeniami wyraża się wzorami

$$\sigma_{xy} = \eta \sigma_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \zeta \sigma_{xx}, \quad (2.2.14)$$

gdzie  $\eta, \zeta$  są stałymi.

Podano wzory na  $\phi_c$  i  $\theta_c$  dla szeregu parametrów uszkodzeń zdefiniowanych wcześniej przez innych autorów.

Dla parametru uszkodzeń zdefiniowanego jako amplituda odkształceń normalnych  $P(\theta, \phi) = \varepsilon_{na}(\theta, \phi)$  mamy

$$\phi_c = 90^0, \quad \theta_c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \xi + 90, \quad (2.2.15)$$

gdzie:  $\xi = \frac{2\eta}{1-\zeta}$

Analogiczne wyrażenia na kąty  $\phi_c$  i  $\theta_c$  otrzymamy, jeśli parametrem uszkodzeń jest amplituda naprężeń normalnych.

Parametr uszkodzeń zaproponowany przez Smitha-Warsona-Toppera [53],  $P_{SWT}$  zdefiniowany jako

$$P_{SWT}(\theta, \phi) = (\sigma_n)_{max}(\theta, \phi) \varepsilon_{na}(\theta, \phi) \quad (2.2.16)$$

osiąga maksymalną wartość na płaszczyźnie, na której  $\sigma_n$  osiąga maksymalną wartość, gdyż zarówno  $\sigma_n$  jak i  $\varepsilon_n$  osiągają swoje maksima na tej samej płaszczyźnie. Dla tego parametru płaszczyzna krytyczna określona jest więc przez kąty wyznaczone dla wymienionych wcześniej parametrów uszkodzeń ( $\varepsilon_{na}$  lub  $\sigma_{na}$ ).

Przyjmując jako parametr uszkodzeń amplitudę odkształcenia postaciowego  $\gamma_a$

$$\gamma_a(\theta, \phi) = \sqrt{(\varepsilon_{x'z'})_a^2 + (\varepsilon_{y'z'})_a^2} \quad (2.2.17)$$

otrzymujemy dwie serie kątów  $\phi_c$ ,  $\theta_c$ , które wyrażają się wzorami

$$\phi_c = 90^0, \quad \theta_c = -\frac{1}{2} \cot^{-1} \xi + 90, \quad (2.2.18)$$

oraz 
$$\phi_c = 45^0, \quad \theta_c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \xi + 90. \quad (2.2.19)$$

Płaszczyzna krytyczna jest określona przez tę serię kątów, dla której parametr  $\gamma_a$  będzie większy przy danym układzie wartości  $\eta$  i  $\zeta$  (przy danej ścieżce obciążenia). Podobnie wyznaczana jest płaszczyzna krytyczna jeśli parametrem uszkodzeń jest amplituda naprężeń stycznych.

W przypadku parametru uszkodzeń zaproponowanego przez Browna i Millera [54],  $P_{bm}$ , zdefiniowanego jako

$$P_{bm}(\theta, \phi) = \gamma_a(\theta, \phi) + K_{bm} \varepsilon_{na}(\theta, \phi), \quad (2.2.20)$$

gdzie  $K_{bm}$  - stała materiałowa. Kąty określające płaszczyznę krytyczną wyrażają się wzorami

$$\phi_c = 90^0 \quad \theta_c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{K_{bm} \xi - 1}{\xi + K_{bm}} + 90, \quad (2.2.21)$$

lub

$$\phi_c' = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{K_{bm}} \right] + 90, \quad \theta_c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \xi + 90. \quad (2.2.22)$$

Parametr uszkodzeń zaproponowany przez Findleya ma postać

$$P_f(\theta, \phi) = \gamma_a(\theta, \phi) \left( 1 + \frac{K_f \sigma_{na}(\theta, \phi)}{\sigma_o} \right), \quad (2.2.23)$$

gdzie:  $K_f, \sigma_o$  - stałe materiałowe,

$\sigma_{na}$  - amplituda naprężeń normalnych.

Dla tego parametru po wykonaniu procedury poszukiwania otrzymuje się dwie płaszczyzny krytyczne

$$\phi_c = 90^0 \quad \theta_c = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_o}{K_f \sigma_{da}} + \beta - \sqrt{\left( \frac{\sigma_o}{K_f \sigma_{da}} + \beta \right)^2 + 8} \right) \right], \quad (2.2.24)$$

gdzie:

$$\theta_c' = \theta_c - \frac{1}{2} \tan^{-1} \xi, \quad (2.2.25)$$

$$\beta = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \quad \sigma_{da} = \frac{1}{2} (1 - \zeta) (\sigma_{xx})_a, \quad (2.2.26)$$

oraz

$$\phi_c = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2\sigma_o}{K_f \sigma_{da} B_{max}} - \sqrt{\left[ 1 + \frac{2\sigma_o}{K_f \sigma_{da} B_{max}} \right]^2 + 8} \right) \right], \quad (2.2.27)$$

$$\theta_c = \frac{1}{2} \tan^{-1} \xi + 90, \quad (2.2.28)$$

gdzie:

$$B(\theta) = \beta - \cos 2\theta - \xi \sin 2\theta. \quad (2.2.29)$$

Warto zauważyć, że w przypadku tego kryterium położenie płaszczyzny krytycznej zależy również od amplitudy obciążenia.

Parametr Smitha, Watsona i Toppera podany jest również w wersji dwuosiowej [55]:

$$P_{\text{cswt}}(\theta, \phi) = (\sigma_n)_{\text{max}} - \varepsilon_{na} + 2\tau_{\text{max}}\gamma_a. \quad (2.2.30)$$

Dla tej wersji parametru płaszczyzna krytyczna opisana jest kątami

$$\phi_c = 90^\circ, \quad \theta_c = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ -\frac{\beta + \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right] + \frac{1}{2} (\tan)^{-1} \xi, \quad (2.31)$$

gdzie:  $\alpha$  jest funkcją amplitudy odkształcenia i parametru  $\xi$ .

Do obliczeń zmęczenia z wykorzystaniem parametru uszkodzeń konieczna jest znajomość krzywej  $P-N$  dla danego materiału. Krzywa ta jest konstruowana na podstawie podanych wyżej wzorów oraz tradycyjnych krzywych zmęczenia  $\Delta\sigma-N$ ,  $\Delta\varepsilon-N$  (krzywe Morrowa i Mansona-Coffina). Obszerny przegląd kryteriów bazujących na energii odkształcenia, oraz wykorzystujących pojęcie parametru uszkodzeń na płaszczyźnie krytycznej można znaleźć w [56].

Kryterium zmęczeniowe, w którym parametr uszkodzeń ma stosunkowo prostą postać zostało zaproponowane przez Glinkę [57]. W kryterium tym również zakłada się, że zniszczenie następuje jeśli parametr uszkodzeń zdefiniowany na pewnej płaszczyźnie krytycznej osiągnie określoną wartość. Parametr ten przedstawia się następującym wzorem:

$$W^* = \frac{\Delta\gamma_{2l}}{2} \frac{\Delta\sigma_{2l}}{2} \left[ \frac{1}{1 - \sigma_{2l}^{\text{max}} / \tau_{f'}} + \frac{1}{1 - \sigma_{22}^{\text{max}} / \sigma_{f'}} \right], \quad (2.2.32)$$

gdzie:

$\Delta\gamma_{2l}$  - zakres odkształceń ścinających

$\Delta\sigma_{2l}$  - zakres naprężeń stycznych (ścinających)

$\sigma_{22}^{\text{max}}$  - maksymalne wartości naprężeń normalnych na cyklu na płaszczyźnie krytycznej

$\sigma_{2l}^{\text{max}}$  - maksymalna wartość naprężeń ścinających na cyklu na płaszczyźnie krytycznej

$\sigma_{f'}$ ,  $\tau_{f'}$  - stałe materiałowe.

Parametr ten ma prostą interpretację fizyczną: iloraz przed nawiasem kwadratowym oznacza energię całkowitą (sprężystą i plastyczną) odkształcenia ścinającego. Wyrazy w nawiasie kwadratowym uwzględniają wpływ naprężeń maksymalnych (asymetria cyklu). Zgodnie z tym kryterium głównymi parametrami, które decydują o zniszczeniu są naprężenia i odkształcenia styczne na płaszczyźnie krytycznej. Natomiast naprężenia normalne na tej płaszczyźnie przyspieszają inicjację i wzrost szczelin. Efekty te zostały potwierdzone przez badania doświadczalne. Badania symulacyjne dla różnych układów naprężeń wskazują, że maksimum parametru uszkodzeń  $W^*$  występuje na płaszczyźnie największego ścinania i ta płaszczyzna jest dla tego kryterium zwykle płaszczyzną krytyczną. W przedstawionym kryterium uwzględniony jest nie tylko fakt istnienia pewnej płaszczyzny krytycznej, ale zależy ono również od ścieżki obciążenia oraz naprężeń i odkształceń. Ponadto uwzględniony jest wpływ naprężenia średniego na zmęczenie. Do analizy trwałości zmęczeniowej próbek z warstwą przedstawionej w dalszej części pracy wybrano dwa kryteria – kryterium energetyczne (2.2.9) i kryterium, w którym korzysta się z płaszczyzny krytycznej (2.2.32).

### 3. Symulacyjne badania ewolucji naprężeń w elemencie z warstwą wierzchnią poddanym obciążeniom cyklicznym.

#### 3.1. Model sprężysto-plastycznego, cyklicznego skręcania elementu walcowego z warstwą wierzchnią

W tym rozdziale przedstawimy model elementu z warstwą wierzchnią poddanego skręcaniu. Opisany zostanie geometryczny model elementu, fizyczny opis materiału oraz równania opisujące proces skręcania elementu z warstwą wierzchnią. Sformułujemy układ równań, w których niewiadomymi są przyrosty składowych naprężeń, a prawą stronę stanowi przyrost kąta skręcenia. Układ ten został wykorzystany w programie komputerowym, który umożliwi symulację procesu monotonicznego i cyklicznego skręcania elementu walcowego z warstwą wierzchnią. W wyniku otrzymujemy rozkład i ewolucję naprężeń w stanie ustalonym i rozkład naprężeń resztkowych po odciążeniu [72,74]. Następnym etapem będzie wprowadzenie wieloosiowych kryteriów zmęczenia dla oceny trwałości zmęczeniowej. Program ten wykorzystano również do weryfikacji opracowanego programu MES, omówionego w następnym rozdziale. Weryfikacja polegała na porównaniu ewolucji naprężeń otrzymanych przy pomocy obydwu programów w cyklicznie skręcanym walcu z warstwą wierzchnią.

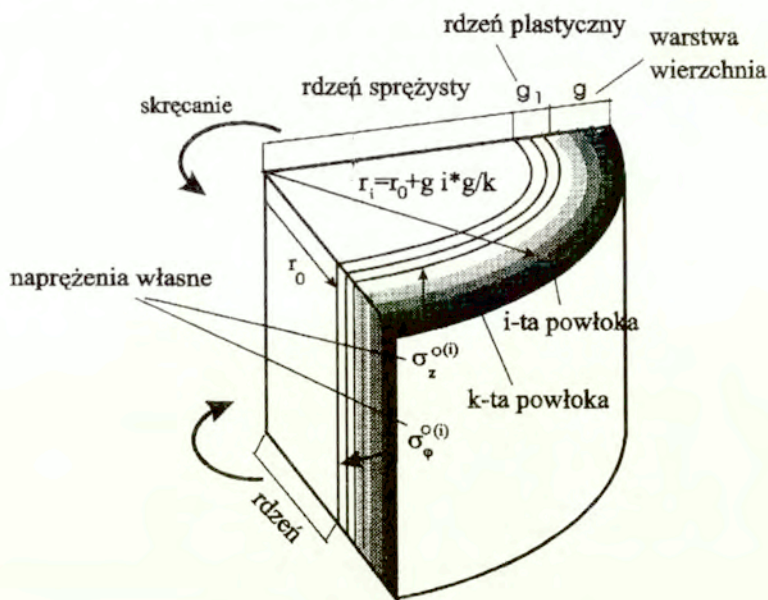
##### 3.1.1 Geometryczny model elementu z warstwą wierzchnią

Prawidłowy opis elementu z warstwą wierzchnią, a w szczególności samej niejednorodnej warstwy, powinien uwzględniać możliwości zmian poszczególnych parametrów materiałowych warstwy w funkcji odległości od powierzchni. Te wymagania spełnia model polegający na dyskretyzacji przebiegu zmian własności materiałowych. Element walcowy z warstwą wierzchnią modelowany jest za pomocą jednorodnego walca i pewnej liczby cienkościennych, współosiowych rurek. Takie rozwiązanie dla procesu rozciągania zostało dokładnie opisane w pracy [58]. Specyfika skręcania (uplastycznianie coraz głębszych fragmentów walca w miarę zwiększania kąta skręcenia) wymaga jednak modyfikacji geometrycznego modelu elementu.

Rozpatrzmy jednorodny rdzeń otoczony  $n$  cienkościennymi powłokami tworzącymi warstwę wierzchnią, z których każda może mieć inne stałe materiałowe i naprężenia własne. Zakładamy jednak, że są one stałe na przekroju danej powłoki. Liczbę powłok dopasowujemy w zależności od gradientu zmian własności tak, aby dyskretyzacja możliwie dobrze przybliżała te zmiany. Jednorodny rdzeń podzielony jest na część sprężystą (nazywaną *rdzeniem sprężystym*) oraz część rdzenia, która może zostać uplastyczniona

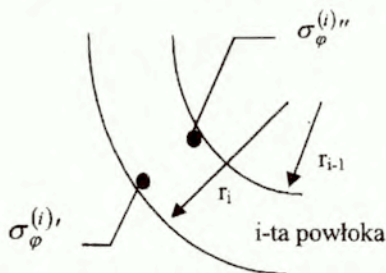
(nazywany *rdzeniem plastycznym*). Jest to związane ze specyficznym charakterem obciążenia momentem skręcającym, powodującym stopniowe uplastycznienie części walca od największego promienia w kierunku środka. Rdzeń plastyczny dzielimy na  $k_1$  cienkościennych rurek, których własności materiałowe pozostaną niezmiennie, ale które będą umożliwiały takie właśnie stopniowe uplastycznienie rdzenia. Samą warstwę dzielimy na kolejne  $k_2$  powłok, z których każda ma grubość ( $g$ ), a promień wewnętrznego cylindra stanowiącego rdzeń walca wynosi  $R$  (rys. 3.1). Walec wraz z powłokami poddany jest skręcaniu z wymuszeniem kinematycznym sterowanym stałym kątem skręcenia. Zadaniem naszym jest zbudowanie modelu z warstwą wierzchnią, który umożliwi symulację numeryczną procesu skręcania. W wyniku symulacji chcemy otrzymać stan naprężeń w warstwie i rdzeniu po obciążeniu i odciążeniu.

Wielkości dotyczące rdzenia oznaczane są indeksem ( $o$ ), a powłok indeksami ( $i$ ). W powłokach - jako rurach cienkościennych - zakładamy płaski stan naprężenia ( $\sigma_z^{(i)}, \sigma_\varphi^{(i)}$ ). W rdzeniu panuje jednorodny stan naprężeń normalnych  $\sigma_z^{(o)}$  oraz  $\sigma_\varphi^{(o)} = \sigma_r^{(o)}$  natomiast naprężenie styczne  $\tau$  zależy od  $r$ . Równość naprężeń obwodowych i promieniowych  $\sigma_\varphi^{(o)} = \sigma_r^{(o)}$  wynika z równań równowagi pręta osiowo-symetrycznego.



### Rys. 3.1 Model walca z warstwą wierzchnią

W powłokach przyjmujemy, że składowe  $\tau^{(i)}, \sigma_z^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, k$ ) są stałe na grubości powłoki, a ponieważ w danej warstwie przyrosty niektórych składowych naprężeń nie są stałe na jej grubości, wprowadzamy dodatkowe indeksowanie przez '(prim) oraz "(bis) danej wielkości odpowiednio na zewnętrznej (prim) i wewnętrznej (bis) stronie warstwy (rys. 3.2). Tak więc  $\sigma_r^{(i)}$  oraz  $\sigma_\varphi^{(i)}$  zmieniają się na grubości odpowiednio od  $\sigma_r^{(i)'}$  (lub  $\sigma_\varphi^{(i)'}$ ) na zewnętrznej granicy do  $\sigma_r^{(i)''}$  (lub  $\sigma_\varphi^{(i)''}$ ) na wewnętrznej granicy powłoki.



Rys.3.2 Miejsce obliczania naprężeń obwodowych w poszczególnych powłokach

### 3.1.2 Fizyczny model materiału

Materiał badanego walca traktujemy jako materiał sprężysto–plastyczny ze wzmocnieniem mieszanym. Zależność odkształceń sprężystych od naprężeń opisywana jest przez prawo Hooke'a. Warunek plastyczności Hubera z uwzględnieniem wzmocnienia mieszanego ma postać

$$F^{(i)}(\sigma_r^{(i)}, \sigma_\varphi^{(i)}, \sigma_z^{(i)}, \tau^{(i)}, \alpha_r^{(i)}, \alpha_\varphi^{(i)}, \alpha_z^{(i)}, \alpha_{z\varphi}^{(i)}, \lambda_i) = \frac{1}{\sigma_0^{(i)}} \left\{ \left[ (\sigma_r^{(i)} - \alpha_r^{(i)}) - (\sigma_\varphi^{(i)} - \alpha_\varphi^{(i)}) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ (\sigma_r^{(i)} - \alpha_r^{(i)}) - (\sigma_z^{(i)} - \alpha_z^{(i)}) \right]^2 + \left[ (\sigma_\varphi^{(i)} - \alpha_\varphi^{(i)}) - (\sigma_z^{(i)} - \alpha_z^{(i)}) \right]^2 + 6(\tau^{(i)} - \alpha_{z\varphi}^{(i)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} = 0 \quad (3.1.1)$$

gdzie  $\lambda_i > 0$  jest parametrem opisującym prędkości wzmocnienia izotropowego w poszczególnych powłokach. Tensor przesunięcia  $\alpha_j(\lambda)$  gdzie  $j=r, \varphi, z$  wprowadza się, aby opisać sztywny ruch powierzchni plastycznego płynięcia czyli wzmocnienie kinematyczne. Promień powierzchni płynięcia



opisany jest przez funkcję  $\sigma_0^{(i)}(\lambda)$ . Początkowe wartości promieni  $\sigma_0^{(i)} = \sigma_0^{(i)}(0)$  są równe granicom plastyczności podawanym w tabelach danych materiałowych. Pochodne  $\sigma_0^{(i)}(\lambda)$  względem  $\lambda_i$  oznaczone przez  $\sigma_0^{\prime(i)}$  określają wartości współczynników wzmocnienia izotropowego:

$$\dot{\sigma}_0^{(i)} = \sqrt{2} \cdot \sigma_0^{\prime(i)} \dot{\lambda}_i.$$

Aby otrzymać zależności opisujące wzmocnienie kinematyczne korzystamy z prawa Zieglera [59]

$$\dot{\alpha}_i^{(i)} = c^{(i)}(\lambda) \cdot (\sigma_i^{(i)} - \alpha_i^{(i)}) \dot{\lambda}_i, \quad (3.1.2)$$

gdzie  $i = \phi, z$ ,  $\sigma_0^{\prime(i)} = \frac{d\sigma_0^{(i)}}{d\lambda_i}$ ,

a wielkości  $c^{(i)}(\lambda_i)$  są pewnymi funkcjami parametrów  $\lambda_i$ .

Ostatnim prawem uzupełniającym podstawy opisu płynięcia plastycznego materiału jest stowarzyszone prawo płynięcia:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r^{(i)p} &= \dot{\lambda}_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \sigma_r^{(i)}}, & \dot{\varepsilon}_\phi^{(i)p} &= \dot{\lambda}_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \sigma_\phi^{(i)}}, \\ \dot{\varepsilon}_z^{(i)p} &= \dot{\lambda}_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \sigma_z^{(i)}}, & \dot{\varepsilon}_{z\phi}^{(i)p} &= \dot{\lambda}_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \sigma_{z\phi}^{(i)}} = \dot{\lambda}_i \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \tau^{(i)}} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Wyrażenia opisujące prędkości odkształceń plastycznych dla kolejnych powłok otrzymujemy korzystając z warunków plastyczności (3.1.1) oraz stowarzyszonego z nim prawa plastycznego płynięcia (3.1.3). Wyrażenia te będą potrzebne przy określaniu części plastycznej składowych obwodowych i osiowych odkształceń.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r^{(i)p} &= \dot{\lambda}_i \frac{2(\sigma_r^{(i)} - \alpha_r^{(i)}) - (\sigma_\phi^{(i)} - \alpha_\phi^{(i)}) - (\sigma_z^{(i)} - \alpha_z^{(i)})}{\sigma_0^{(i)} \sqrt{2}} \\ \dot{\varepsilon}_\phi^{(i)p} &= \dot{\lambda}_i \frac{2(\sigma_\phi^{(i)} - \alpha_\phi^{(i)}) - (\sigma_r^{(i)} - \alpha_r^{(i)}) - (\sigma_z^{(i)} - \alpha_z^{(i)})}{\sigma_0^{(i)} \sqrt{2}} \\ \dot{\varepsilon}_z^{(i)p} &= \dot{\lambda}_i \frac{2(\sigma_z^{(i)} - \alpha_z^{(i)}) - (\sigma_\phi^{(i)} - \alpha_\phi^{(i)}) - (\sigma_r^{(i)} - \alpha_r^{(i)})}{\sigma_0^{(i)} \sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\dot{\varepsilon}_{z\varphi}^{(i)p} = \dot{\lambda}_i \frac{3(\tau^{(i)} - \alpha_{z\varphi})}{\sigma_o^{(i)} \sqrt{2}}$$

Aby wyznaczyć nieznanne parametry  $\dot{\lambda}_i$  korzystamy z równań zgodności teorii plastyczności. Ze względu na ich ogólny charakter wprowadzimy chwilowo zapis dwuindeksowy:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} - \dot{\sigma}_o = 0, \quad \text{dla } i,j = 1,2,3, \quad (3.1.5)$$

gdzie:

$\sigma_{11} = \sigma_r$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_\varphi$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_z$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{z\varphi}$ ,  $\alpha_{11} = \alpha_r$ ,  $\alpha_{22} = \alpha_\varphi$ ,  $\alpha_{33} = \alpha_z$ ,  $\alpha_{13} = \alpha_{z\varphi}$ , a pozostałe składowe są równe zero. We wzorze powyższym i następnych obowiązuje konwencja sumacyjna.

Korzystając z zależności

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{i z prawa Zieglera}$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = c(\lambda)(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})\dot{\lambda} \quad (3.1.6)$$

otrzymujemy następującą postać równania (3.1.5)

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \left[ c(\lambda) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) + \sigma'_o \right] \dot{\lambda} = 0. \quad (3.1.7)$$

Ponadto, wykorzystując twierdzenie Eulera o pochodnej funkcji jednorodnej, otrzymujemy

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \sigma_o \quad (3.1.8)$$

i wówczas wyrażenie (3.1.7) można napisać w postaci

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - [c(\lambda)\sigma_o + \sigma'_o] \dot{\lambda} = 0, \quad \text{skąd} \quad (3.1.9)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{c(\lambda)\sigma_o + \sigma'_o}. \quad (3.1.10)$$

Jednocześnie, pomijając podział na wzmocnienie izotropowe i kinematyczne, i traktując je łącznie, możemy napisać ogólnie:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0 \quad \text{dla } ij = 1, 2, 3, \quad (3.1.11)$$

gdzie  $H$  jest modułem stycznym wyznaczonym z doświadczenia zawierającym zarówno część kinematyczną jak i izotropową i opisany jest wzorem

$$H^{(i)} = \left[ c^{(i)}(\lambda) \sigma_o^{(i)} + \sigma_o'^{(i)} \right] \lambda_i. \quad (3.1.12)$$

Uwzględniając uproszczony zapis, w którym

$$\sigma_j = \sigma_j - \alpha_j, \quad j = r, \varphi, z, \quad \tau = \tau - \alpha_{z\varphi}, \quad (3.1.13)$$

oraz pomijając wskaźniki  $(i)$  określające numer powłoki możemy napisać:

$$\dot{\lambda} = \frac{(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_z) \dot{\sigma}_r + (2\bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z) \dot{\sigma}_\varphi + (2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_r) \dot{\sigma}_z + 6\bar{\tau} \dot{\tau}}{2H \cdot \sigma_o^2} \quad (3.1.14)$$

Oznaczmy współczynniki przy składowych prędkości naprężeń następująco:

$$\begin{aligned} A &= 2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_z, \\ B &= 2\bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z, \\ C &= 2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi, \\ D &= 6\bar{\tau} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$\text{wówczas} \quad \dot{\lambda} = \frac{A\dot{\sigma}_r + B\dot{\sigma}_\varphi + C\dot{\sigma}_z + D\dot{\tau}_{z\varphi}}{2H\sigma_o}. \quad (3.1.16)$$

$$\text{Następnie oznaczając} \quad K = \frac{1}{2H\sigma_o^2} \quad (3.1.17)$$

wzory (3.1.4) można przedstawić w formie

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r^p &= AK(A\dot{\sigma}_r + B\dot{\sigma}_\varphi + C\dot{\sigma}_z + D\dot{\tau}), \\ \dot{\epsilon}_\varphi^p &= BK(A\dot{\sigma}_r + B\dot{\sigma}_\varphi + C\dot{\sigma}_z + D\dot{\tau}), \\ \dot{\epsilon}_z^p &= CK(A\dot{\sigma}_r + B\dot{\sigma}_\varphi + C\dot{\sigma}_z + D\dot{\tau}), \\ \dot{\epsilon}_{z\varphi}^p &= DK(A\dot{\sigma}_r + B\dot{\sigma}_\varphi + C\dot{\sigma}_z + D\dot{\tau}). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Widać, że jeżeli  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ,  $C \neq 0$ , (a to zachodzi m.in. dla niezerowych naprężeń własnych), to wszystkie składowe przyrostów odkształceń plastycznych są różne od 0 nawet przy wyłącznym obciążaniu skręcaniem.

W dalszych rozważaniach wielkości  $A, B, C$  itd. występujące w konkretnych równaniach mają indeksy  $(i)$  (ew.  $(i), (i)''$ ) w zależności od tego, której warstwy dotyczą. Napisane niżej poszczególne serie układu równań wynikają z porównania przyrostów składowych naprężeń lub odkształceń na granicy warstw. Wielkości z indeksem  $(0)$  dotyczą sprężystego rdzenia. Indeks  $(p)$  oznacza część plastyczną, a indeks  $(e)$  część sprężystą odkształcenia.

W dalszym ciągu dokonamy uproszczenia pomijając składowe  $\sigma_r^{(i)}$  w prawie płynięcia. W równaniach równowagi składowe te będą eliminowane. Uproszczenie to wynika z założenia o cienkościemności rurek tworzących poszczególne powłoki.

### 3.1.3. Równania opisujące skręcanie walca z warstwą wierzchnią

Bazując na opisanym wyżej modelu geometrycznym walca z warstwą wierzchnią, oraz fizycznym modelu materiału formułujemy układ równań pozwalający na wyznaczenie przyrostów naprężeń w czasie i po procesie skręcania.

#### Równość odkształceń $\varepsilon_z$ w powłokach i rdzeniu

Przyjęto stałą wartość składowej odkształcenia  $\varepsilon_z^{(i)}$  w całym przekroju walca. Oznacza to zachowanie płaskości przekrojów podczas skręcania. Jednocześnie rozkładamy przyrosty odkształceń całkowitych na część sprężystą i plastyczną:

$$\dot{\varepsilon}_z^{(o)} = \dot{\varepsilon}_z^{(i)} = \dot{\varepsilon}_z^{(i)e} + \dot{\varepsilon}_z^{(i)p}. \quad (3.1.19)$$

W równaniach tych wyrażamy przyrosty odkształceń przez przyrosty naprężeń korzystając z równań (3.1.18) i prawa Hook'a. Do równań wstawiono średnie wartości przyrostów tych składowych naprężeń, które zmieniają się na grubości warstwy ( $\sigma_\varphi$ ). Stałe  $A^{(i)}, B^{(i)}, C^{(i)}$  obliczone na podstawie średnich wartości naprężeń  $\sigma_\varphi$  oznacza się jako  $\bar{A}^{(i)}, \bar{B}^{(i)}, \bar{C}^{(i)}$ .

$$\frac{1}{E^{(0)}} \left( \dot{\sigma}_z^{(0)} - \nu^{(0)} (2\dot{\sigma}_\varphi^{(0)}) \right) - \frac{1}{E^{(i)}} \left( \dot{\sigma}_z^{(i)} - \nu^{(i)} \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_\varphi^{(i)t} + \dot{\sigma}_\varphi^{(i)n}) \right) + \bar{C}^{(i)} K^{(i)} \left( \frac{\bar{B}^{(i)} (\dot{\sigma}_\varphi^{(i)t} + \dot{\sigma}_\varphi^{(i)n})}{2} + \bar{C}^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)} \dot{\tau}^{(i)} \right) = 0 \quad (3.1.20)$$

dla  $i = 1, \dots, k$ . Otrzymujemy  $k$  równań. Po przekształceniu otrzymujemy następujące współczynniki przy niewiadomych przyrostach naprężeń:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^{(0)}} \dot{\sigma}_z^{(0)} - \frac{2\nu^{(0)}}{E^{(0)}} \dot{\sigma}_\varphi^{(0)} + \dot{\sigma}_\varphi^{(i)} \left( \frac{\nu^{(i)}}{2E^{(i)}} - \frac{1}{2} K^{(i)} \bar{B}^{(i)} \bar{C}^{(i)} \right) + \\ & + \dot{\sigma}_\varphi^{(i)''} \left( \frac{\nu^{(i)}}{2E^{(i)}} - \frac{1}{2} K^{(i)} \bar{B}^{(i)} \bar{C}^{(i)} \right) - \dot{\sigma}_z^{(i)} \left( \frac{1}{E^{(i)}} + \frac{1}{2} K^{(i)} \bar{C}^{(i)} \bar{C}^{(i)} \right) \quad (3.1.21) \\ & - \dot{\tau}^{(i)} K^{(i)} \bar{C}^{(i)} D^{(i)} = 0 \end{aligned}$$

### Równania opisujące skręcanie

Naprężenia skręcające wymuszone są przez sztywny obrót przekroju poprzecznego walca o zadany kąt  $\dot{\Theta}$  ( $\Theta$  kąt obrotu na jednostkę długości elementu). Zakładamy tu, że promień pozostaje prosty w trakcie skręcania. Stąd  $\dot{\gamma}_{z\theta}$  dla warstwy  $i$  jest równe  $\dot{\Theta} \bar{r}_i$ , gdzie  $\bar{r}_i$  - promień środka  $i$ -tej warstwy.

$$\dot{\Theta} \bar{r}_i = \dot{\gamma}_{z\varphi}^{(i)p} + \frac{\dot{\tau}^{(i)}}{G^{(i)}} \quad (3.1.22)$$

Równania te po wykorzystaniu wzorów (3.1.18) oraz prawa Hook'a można zapisać następująco:

$$D^{(i)} K^{(i)} \left( \bar{B}^{(i)} \frac{\dot{\sigma}_\varphi^{(i)'} + \dot{\sigma}_\varphi^{(i)''}}{2} + \bar{C}^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)} \dot{\tau}^{(i)} \right) + \frac{\dot{\tau}^{(i)}}{G^{(i)}} = \dot{\Theta} \bar{r}_i \quad (3.1.23)$$

Po przekształceniu otrzymujemy następujące współczynniki przy niewiadomych naprężeniach:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} K^{(i)} \bar{B}^{(i)} D^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i)'} + \frac{1}{2} K^{(i)} \bar{B}^{(i)} D^{(i)} \dot{\sigma}_\varphi^{(i)''} + \\ & + K^{(i)} \bar{C}^{(i)} D^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + \dot{\tau}^{(i)} \left( K^{(i)} D^{(i)} D^{(i)} + \frac{1}{G^{(i)}} \right) = \dot{\Theta} \bar{r}_i \quad (3.1.24) \end{aligned}$$

Otrzymujemy kolejne  $k$  równań.

W sprężystym rdzeniu mamy jednorodny stan naprężeń normalnych, natomiast naprężenie styczne  $\tau$  pochodzące od skręcania, zmienia się w zależności od promienia  $r$ :

$$\tau^{(o)}(r) = G \cdot \Theta \cdot r \quad (3.1.25)$$

W rdzeniu sprężystym przyrost składowej naprężenia  $\tau$  nie jest sprzężony z przyrostami innych składowych, zatem powyższe równanie może być

rozwiązane niezależnie i nie będzie uwzględniane w formułowanym układzie równań.

### Równowaga sił błonowych

Korzystamy z równania równowagi sił błonowych w powłokach

$$\dot{\sigma}_r^{(i)''} r_{i-1} - \dot{\sigma}_r^{(i+1)''} r_i = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_\varphi^{(i)'} + \dot{\sigma}_\varphi^{(i)''}) \Delta r_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.1.26_1)$$

gdzie  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ , indeks  $(i)$  opisuje powłokę wewnętrzną, przylegającą do sprężystego rdzenia, a  $(k)$  - powłokę zewnętrzną, przylegającą do powierzchni, oraz z faktu, że w sprężystym rdzeniu zachodzi równość naprężeń obwodowych i promieniowych  $\sigma_r^{(0)} = \sigma_\varphi^{(0)}$ , ciśnienie zewnętrzne  $\sigma_r^{(k)'} = 0$ , a także równość  $\sigma_r^{(1)''} \cdot r_0 = \sigma_r^{(0)} \cdot r_0$ .

Dla powłoki  $(1)$  mamy

$$\dot{\sigma}_\varphi^{(0)'} \cdot r_0 - \dot{\sigma}_r^{(2)''} \cdot r_1 = \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_\varphi^{(1)'} + \dot{\sigma}_\varphi^{(1)''}) \Delta r_1. \quad (3.1.26_3)$$

Sumując równania równowagi sił błonowych otrzymujemy jedno równanie, w którym znajdują się tylko składowe  $\sigma_\varphi^{(i)}$ :

$$\dot{\sigma}_\varphi^{(0)'} r_0 - \sum_{i=1}^k \Delta r_i \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_\varphi^{(i)'} + \dot{\sigma}_\varphi^{(i)''}) = 0 \quad (3.1.27)$$

### Równość odkształceń $\varepsilon_\varphi^{(i)}$ na granicach warstw.

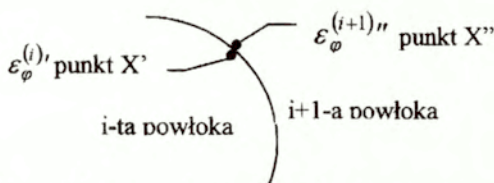
Na granicy warstw musi zachodzić zgodność składowej  $\varepsilon_\varphi$  tensora odkształceń (przyjmujemy, że  $\varepsilon_\varphi$  nie jest stałe na grubości warstwy):

$$\varepsilon_\varphi^{(1)''} = \varepsilon_\varphi^{(0)'}, \quad \varepsilon_\varphi^{(i+1)''} = \varepsilon_\varphi^{(i)'}, \quad (3.1.28)$$

Korzystając z prawa płynięcia i prawa Hook'a,  $\varepsilon_\varphi^{(i+1)'}$  można wyrazić jako funkcję przyrostów naprężeń w punkcie  $X''$  (na wewnętrznej granicy warstwy  $i+1$ ), a  $\varepsilon_\varphi^{(i)'}$  jako funkcję przyrostów naprężeń w punkcie  $X'$  (na zewnętrznej granicy warstwy  $i$ , rys.3.3).

Ponieważ składowe  $\dot{\sigma}_\varphi$ , nie są stałe na grubości warstwy przy porównaniu odkształceń na granicy warstw do wzorów na przyrosty odkształceń wstawiamy wartości przyrostów składowych naprężeń obwodowych odpowiednio na wewnętrznych i zewnętrznych granicach warstw

(w punkcie  $X''$  i  $X'$ ), tzn.  $\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)''}$  oraz  $\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'}$ . Podobnie, w punktach  $X''$  i  $X'$ , współczynniki  $A, B, C, \dots$  z równań (3.1.15) będą obliczane dla naprężeń  $\sigma_{\varphi}^{(i)''}$  oraz  $\sigma_{\varphi}^{(i)'}$  i oznaczane jako  $A^{(i)'}, A^{(i)''}, B^{(i)'}, B^{(i)''}$  itd.



Rys. 3.3 Równość przyrostów odkształceń na granicach warstw

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^{(i)}} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} \right) + B^{(i)'} K^{(i)} \left( B^{(i)'} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} + C^{(i)'} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)} \dot{\tau}^{(i)} \right) + \\ & - \frac{1}{E^{(i+1)}} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i+1)''} - \nu^{(i+1)} \dot{\sigma}_z^{(i+1)} \right) + \quad \text{dla } i = 1, \dots, k-1 \\ & - B^{(i+1)''} K^{(i+1)} \left( B^{(i+1)''} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i+1)''} + C^{(i+1)''} \dot{\sigma}_z^{(i+1)} + D^{(i+1)} \dot{\tau}^{(i+1)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^{(1)}} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(1)''} - \nu^{(1)} \dot{\sigma}_z^{(1)} \right) + B^{(1)''} K^{(1)} \left( B^{(1)''} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(1)''} + C^{(1)''} \dot{\sigma}_z^{(1)} + D^{(1)} \dot{\tau}^{(1)} \right) + \\ & - \frac{1}{E^{(0)}} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)} - \nu^{(0)} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)} + \dot{\sigma}_z^{(0)} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Po przekształceniu otrzymujemy następujące współczynniki przy niewiadomych naprężeniach:

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} \left( \frac{1}{E^{(i)}} + K^{(i)} B^{(i)'} B^{(i)'} \right) + \dot{\sigma}_z^{(i)} \left( -\frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} K^{(i)} B^{(i)'} C^{(i)''} \right) + \\ & + \dot{\tau}^{(i)} K^{(i)} B^{(i)'} D^{(i)} + \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i+1)''} \left( -\frac{1}{E^{(i+1)}} - K^{(i+1)} B^{(i+1)''} B^{(i+1)''} \right) + \\ & + \dot{\sigma}_z^{(i+1)} \left( \frac{\nu^{(i+1)}}{E^{(i+1)}} - K^{(i+1)} B^{(i+1)''} C^{(i+1)''} \right) + \quad \text{dla } i = 1, \dots, k-1 \\ & + \dot{\tau}^{(i)} K^{(i)} B^{(i)'} D^{(i)} - \dot{\tau}^{(i+1)} K^{(i+1)} B^{(i+1)''} D^{(i+1)} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.31_1)$$

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_{\varphi}^{(1)''} \left( \frac{1}{E^{(1)}} + K^{(1)} B^{(1)''} B^{(1)''} \right) + \dot{\sigma}_z^{(1)} \left( K^{(1)} B^{(1)''} C^{(1)''} - \frac{v^{(1)}}{E^{(1)}} \right) + \\ & + \dot{\tau}^{(1)} \left( K^{(1)} B^{(1)''} D^{(1)} \right) + \dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)} \left( \frac{v^{(0)}}{E^{(0)}} - \frac{1}{E^{(0)}} \right) + \dot{\sigma}_z^{(0)} \frac{v^{(0)}}{E^{(0)}} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.31_2)$$

Otrzymujemy  $k$  równań.

### Równowaga sił osiowych

Całkowita siła wynikająca z naprężeń  $\sigma_z$  w rdzeniu i powłokach jest równa zero.

$$\sum_{i=1}^k F_i \dot{\sigma}_z^{(i)} + F_0 \dot{\sigma}_z^{(0)} = 0, \quad (3.1.32)$$

gdzie  $F_i, F_0$  – pola powierzchni warstw  $i = 1, \dots, k$  oraz rdzenia.

Otrzymujemy jedno równanie.

### Zależności geometryczne między składowymi odkształceń

Ostatnie  $k$  równań możemy otrzymać korzystając z zależności geometrycznych wynikających aproksymacji pola przemieszczeń w warstwie funkcją kwadratową. Otrzymane zależności między składowymi odkształceń mają postać

$$\frac{\varepsilon_r^{(i)''} - \varepsilon_{\varphi}^{(i)''}}{r_{i-1}} = \frac{\varepsilon_{\varphi}^{(i)'} - \varepsilon_{\varphi}^{(i)''}}{\Delta r_i}, \quad (3.1.33)$$

gdzie  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ .

Wzór ten można napisać w postaci

$$\varepsilon_r^{(i)''} + \varepsilon_{\varphi}^{(i)''} \left( -1 + \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} \right) - \varepsilon_{\varphi}^{(i)'} \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} = 0 \quad (3.1.34)$$

(nie obowiązuje konwencja sumacyjna),

a następnie wyrazić przyrosty odkształceń przez przyrosty naprężeń (uwzględniając wzory (3.1.18) oraz prawo Hook'a, a pomijając składowe  $\sigma_r^{(i)}$ ):



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E^{(i)}} \left( -\nu^{(i)} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)n} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} \right) + K^{(i)} A^{(i)n} \left( B^{(i)n} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)n} + C^{(i)n} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)} \dot{\tau}^{(i)} \right) + \\
& - \left( \frac{1}{E^{(i)}} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)'} \right) + K^{(i)} B^{(i)'} \left( B^{(i)'} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} + C^{(i)'} \dot{\sigma}_z^{(i)'} + D^{(i)'} \dot{\tau}^{(i)'} \right) \right) \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} + \\
& + \left( \frac{1}{E^{(i)}} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)n} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)n} \right) + K^{(i)} B^{(i)n} \left( B^{(i)n} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)n} + C^{(i)n} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)} \dot{\tau}^{(i)} \right) \right) \cdot \\
& \left( -1 + \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} \right) = 0 \tag{3.1.35_1}
\end{aligned}$$

Po przekształceniach otrzymamy następujące współczynniki przy niewiadomych przyrostach naprężeń:

$$\begin{aligned}
& \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} \left( -\frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} \left( \frac{1}{E^{(i)}} + K^{(i)} B^{(i)'} B^{(i)'} \right) \right) + \\
& \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} \left( -\frac{\nu^{(i)}}{E^{(i)}} + K^{(i)} A^{(i)n} B^{(i)n} + \left( \frac{1}{E^{(i)}} + K^{(i)} B^{(i)n} B^{(i)n} \right) \cdot \left( -1 + \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} \right) \right) + \\
& + \dot{\sigma}_z^{(i)} \cdot K^{(i)} \left( A^{(i)n} C^{(i)n} - B^{(i)n} C^{(i)n} + \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} \left( B^{(i)n} C^{(i)n} - B^{(i)'} C^{(i)'} \right) \right) + \\
& + \dot{\tau}^{(i)} K^{(i)} D^{(i)} \left( A^{(i)n} - B^{(i)n} + \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} \left( B^{(i)n} - B^{(i)'} \right) \right) = 0 \tag{3.1.35_2}
\end{aligned}$$

Otrzymany układ równań można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{E^{(0)}} \left( \dot{\sigma}_z^{(0)} - \nu^{(0)} \left( 2 \dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)} \right) \right) - \frac{1}{E^{(i)}} \left( \dot{\sigma}_z^{(i)} - \nu^{(i)} \frac{1}{2} \left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)n} + \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} \right) \right) + \\
& - \bar{C}^{(i)} K^{(i)} \left( \bar{B}^{(i)} \frac{\left( \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} + \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)n} \right)}{2} + \bar{C}^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)} \dot{\tau}^{(i)} \right) = 0 \quad \text{dla } i=1, \dots, k \tag{3.1.36_1}
\end{aligned}$$

$$D^{(i)} K^{(i)} \left( \bar{B}^{(i)} \frac{\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} + \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)n}}{2} + \bar{C}^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)} \dot{\tau}^{(i)} \right) + \frac{\dot{\tau}^{(i)}}{G^{(i)}} = \dot{\Theta} \bar{r}_i \quad \text{dla } i=1, \dots, k \tag{3.1.36_2}$$

$$\dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)} r_0 - \sum_{i=1}^k \Delta r_i \frac{1}{2} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} + \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)''}) = 0 \quad (3.1.36_3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^{(i)}} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)}) + B^{(i)'} K^{(i)} (B^{(i)'} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} + C^{(i)'} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)'} \dot{\tau}^{(i)}) + \\ & - \frac{1}{E^{(i+1)}} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i+1)''} - \nu^{(i+1)} \dot{\sigma}_z^{(i+1)}) + \\ & - B^{(i+1)''} K^{(i+1)'} (B^{(i+1)''} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i+1)'} + C^{(i+1)''} \dot{\sigma}_z^{(i+1)} + D^{(i+1)'} \dot{\tau}^{(i+1)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.36_4)$$

dla  $i=1, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^{(1)}} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(1)''} - \nu^{(1)} \dot{\sigma}_z^{(1)}) + B^{(1)''} K^{(1)} (B^{(1)''} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(1)''} + C^{(1)''} \dot{\sigma}_z^{(1)} + D^{(1)'} \dot{\tau}^{(1)}) + \\ & - \frac{1}{E^{(0)}} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)} - \nu^{(0)} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)} + \dot{\sigma}_z^{(0)})) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.36_5)$$

$$\sum_{i=1}^k F_i \dot{\sigma}_z^{(i)} + F_0 \dot{\sigma}_z^{(0)} = 0 \quad (3.1.36_6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E^{(i)}} (-\nu^{(i)} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)''} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)}) + K^{(i)} A^{(i)''} (B^{(i)''} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)''} + C^{(i)''} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)'} \dot{\tau}^{(i)}) + \\ & - \left( \frac{1}{E^{(i)}} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)}) + K^{(i)} B^{(i)'} (B^{(i)'} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'} + C^{(i)'} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)'} \dot{\tau}^{(i)}) \right) \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} + \\ & + \left( \frac{1}{E^{(i)}} (\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)''} - \nu^{(i)} \dot{\sigma}_z^{(i)}) + K^{(i)} B^{(i)''} (B^{(i)''} \dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)''} + C^{(i)''} \dot{\sigma}_z^{(i)} + D^{(i)'} \dot{\tau}^{(i)}) \right) \cdot \\ & \left( -1 + \frac{r_{i-1}}{\Delta r_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad \text{dla } i = 1, \dots, k$$

(3.1.36\_7)

W powyższym układzie po lewej stronie mamy  $4k+2$  niewiadomych przyrostów składowych naprężeń,  $\dot{\tau}^{(i)}$ ,  $\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)'}$ ,  $\dot{\sigma}_{\varphi}^{(i)''}$ ,  $\dot{\sigma}_z^{(i)}$ ,  $\dot{\sigma}_{\varphi}^{(0)}$ ,  $\dot{\sigma}_z^{(0)}$ ,  $\dot{\tau}^{(0)}$  ( $r$ ) dla  $i=1, \dots, k$  i  $4k+2$  równań. Można zatem rozwiązać ten układ równań otrzymując wartości przyrostów naprężeń związanych z zadany przyrostem jednostkowego kąta skręcenia  $\dot{\Theta}$ .

## 3.2 Ogólny model obliczeniowy elementu z warstwą wierzchnią .

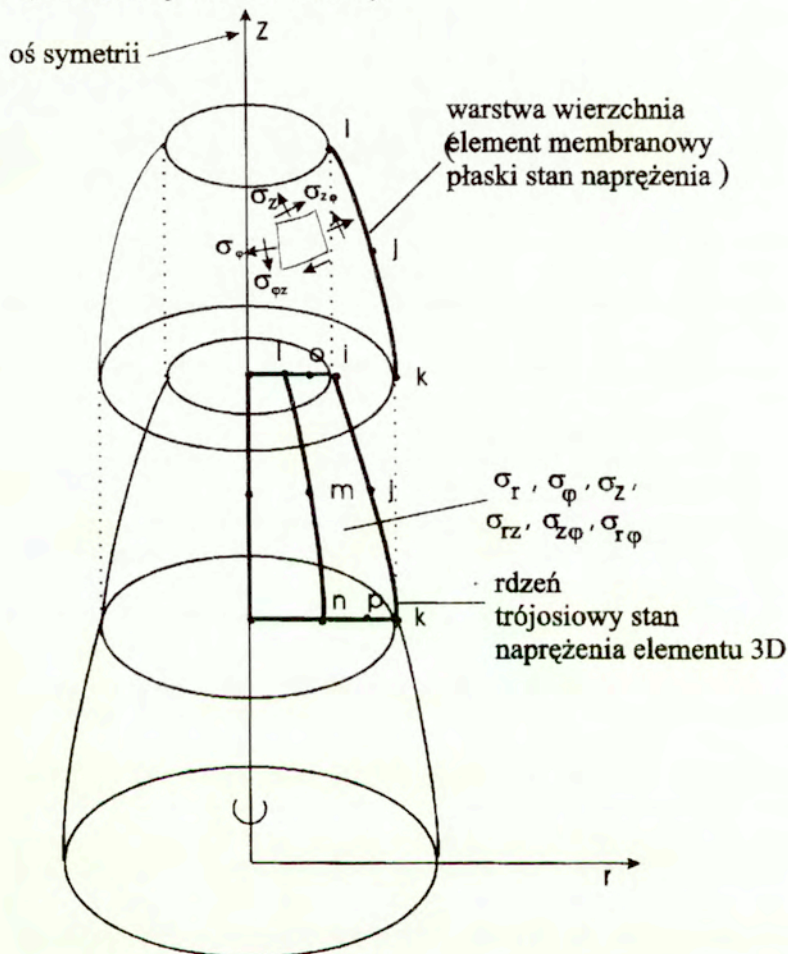
### 3.2.1 Model geometryczny

Przyjęto, że element z warstwą wierzchnią to kompozyt składający się z dwóch materiałów – materiału rdzenia, oraz materiału warstwy, który znajduje się w obszarze blisko powierzchni elementu. Materiał w warstwie wierzchniej najczęściej również nie jest materiałem jednorodnym. Badania doświadczalne własności warstwy jak na przykład najczęściej stosowane wyznaczanie profili mikrotwardości wskazują, że własności warstw powstających w wyniku większości obróbek technologicznych zmieniają się w funkcji odległości od powierzchni. Do obliczania stanu naprężenia w niejednorodnych elementach konstrukcyjnych stosuje się najczęściej metodę elementów skończonych (MES). Jednak w przypadku kompozytu warstwa-rdzeń stosowanie MES, zwłaszcza przy obliczaniu dużych elementów konstrukcyjnych może być kłopotliwe. Ze względu na zmianę własności materiałowych w stosunkowo małej objętości w obszarze warstwy wierzchniej siatka podziału na elementy skończone musi być bardzo zagęszczona. Prowadzi to do dużej liczby równań w globalnym układzie MES, co wydłużałoby czas rozwiązania zadania, zwłaszcza w przypadku sprężysto-plastycznych, cyklicznych odkształceń. Problem ten może być częściowo złagodzony poprzez zastosowanie specjalnych elementów przejściowych o różnej liczbie węzłów na różnych bokach. Rozwiązanie takie zostało zaproponowane przez autora w pracy [60]. Możliwe jest wtedy bardziej efektywne zagęszczanie siatki podziału niż w przypadku „klasycznych” elementów skończonych występujących w komercyjnych programach MES.

W przypadku, gdy analizowane elementy konstrukcyjne z warstwą wierzchnią nie podlegają obciążeniom kontaktowym (lub strefa kontaktu nie jest przedmiotem analiz), tak jak na przykład elementy gładkie lub z karbem konstrukcyjnym poddane ścisaniu lub skręcaniu, to problem modelowania warstwy może być uproszczony. Możemy tu wykorzystać fakt, że jeden wymiar warstwy jest znacznie mniejszy od pozostałych, oraz że składowe naprężenia w warstwie prostopadłe do powierzchni są małe w porównaniu z pozostałymi (uwzględnia się tylko naprężenia błonowe). Przyjmujemy również, że stan odkształcenia w warstwie jest jednakowy na całej jej grubości. Stąd w sposób naturalny modelem warstwy może być powłoka w bezmomentowym stanie naprężenia. Takie modelowanie warstwy przy pomocy MES zostało zaproponowane przez autora w pracy [61], ponadto przedstawiono je również w pracy [58], gdzie korzysta się z rozwiązania analitycznego. Elementy powłokowe, które stosujemy do modelowania

warstwy są jednorodne, stąd dla prawidłowego zamodelowania gradientu własności materiałowych w warstwie konieczne jest połączenie kilku elementów o różnych właściwościach. Suma grubości tych elementów musi być równa całkowitej grubości warstwy wierzchniej.

Opisany tu sposób modelowania elementu z warstwą wierzchnią został przedstawiony na rys.3.2.1 dla przypadku osiowej symetrii i jednopowłokowego modelu warstwy.



Rys.3.2.1. Model elementu z warstwą

### 3.2.2. Model materiału

Przyjęto, że zarówno w warstwie jak i w rdzeniu występuje sprężysto-plastyczny model materiału ze wzmocnieniem mieszanym kinematyczno-izotropowym (podobnie jak w rozdz. 3.1). Warunek plastyczności przyjęto w postaci Hubera-Misesa

$$f(\sigma - \alpha) - Y(\overline{\varepsilon}_p) = 0, \quad 3.2.1$$

gdzie

$Y(\overline{\varepsilon}_p)$  - promień powierzchni płynięcia,

$\overline{\varepsilon}_p$  - całkowita długość trajektorii w przestrzeni odkształceń plastycznych (efektywne odkształcenie plastyczne), liczona od zera do wartości odpowiadającej zerwaniu próbki.

Dalej korzystamy z prawa plastycznego płynięcia

$$d\overline{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma - \alpha)}{\partial \sigma} \quad 3.2.2$$

Środek powierzchni płynięcia leży na końcu wektora  $\alpha(\overline{\varepsilon}_p)$ , którego ewolucją steruje prawo Zieglera

$$d\alpha = d\mu(\sigma - \alpha). \quad 3.2.3$$

Uwzględniono wzmocnienie kinematyczne (moduł  $H^\alpha = H^\alpha(\overline{\varepsilon}_p)$ ), oraz izotropowe (moduł  $H^I = H^I(\overline{\varepsilon}_p)$ ):

$$d|\alpha| = H^\alpha d\overline{\varepsilon}_p, \quad 3.2.4$$

$$dY(\overline{\varepsilon}_p) = H^I d\overline{\varepsilon}_p, \quad 3.2.5$$

identyfikowane z próby jednoosiowego rozciągania

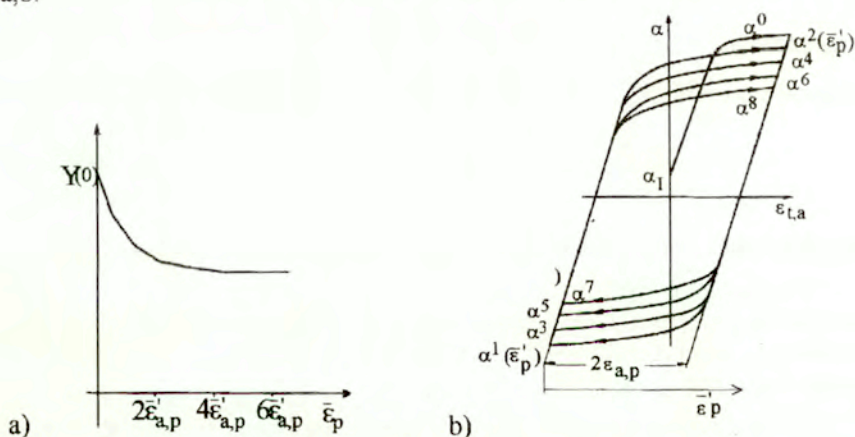
Wyznaczenie stanu naprężeń w elemencie z warstwą sprowadza się do rozwiązania problemu brzegowego, w którym spełnione powinny być warunki równowagi, warunki ciągłości naprężeń i odkształceń oraz podane wyżej związki konstytutywne.

W ogólnym przypadku, dla obliczenia stanu naprężeń potrzebne są następujące wielkości charakteryzujące rdzeń i warstwę wierzchnią:

1. - moduł Younga oraz monotoniczna krzywa rozciągania  $\sigma(\varepsilon_p)$
2. - krzywa wzmocnienia izotropowego  $Y(\overline{\varepsilon}_p)$

3. - krzywa wzmocnienia kinematycznego  $\alpha^0(\bar{\varepsilon}_p)$ , dla obciążenia monotonicznego
4. - cykliczne krzywe wzmocnienia kinematycznego, podane w postaci kolejnych gałęzi (ściskanie-rozciąganie)  $\alpha^i(\bar{\varepsilon}_p')$  pętli histerezy parametru  $\alpha$ , gdzie  $\bar{\varepsilon}_p'$ -długość trajektorii w przestrzeni odkształceń plastycznych liczona od początku każdego półcyklu. Przy obciążeniu monotonicznym (pierwszy półcykl)  $\bar{\varepsilon}_p' = \varepsilon_p$ .
5. - naprężenie początkowe  $\sigma_0$
6. - początkowe położenie środka powierzchni płynięcia (początkowy backstress)  $\alpha_0$

Opracowany program stwarza możliwość dokładnej analizy procesu obciążeń cyklicznych, z uwzględnieniem wszystkich wyżej wymienionych danych. W danych do programu, przy kolejnych cyklach obciążeń są uwzględnione rzeczywiste zmiany krzywych wzmocnienia kinematycznego i izotropowego po każdym cyklu. Zmiany te odpowiadają rzeczywistej tj. zarejestrowanej na maszynie wytrzymałościowej charakterystyce cyklicznej materiału. Wykorzystywane dane charakteryzujące cykliczne zachowanie materiału przedstawiono w postaci schematycznych wykresów na rys. 3.2.1 a,b.



Rys. 3.2.1. Krzywe wzmocnienia

Na rys. 3.2.1a, przedstawiona jest przykładowa krzywa wzmocnienia izotropowego, a na rys. 3.2.1b, krzywe wzmocnienia kinematycznego w kolejnych cyklach. Ewolucja wzmocnienia izotropowego podawana jest w

postaci jednej krzywej dla całego procesu obciążenia jako funkcja całkowitej długości trajektorii  $\bar{\varepsilon}_p$  w przestrzeni odkształceń plastycznych. Krzywe wzmocnienia kinematycznego podawane są w postaci kolejnych gałęzi odpowiadających następującym po sobie półcyklom obciążeń. Każda gałąź podana jest w funkcji długości trajektorii w przestrzeni odkształceń plastycznych liczonej od początku każdego półcyklu, oznaczonej jako  $\varepsilon_p'$ , oraz w zależności od numeru półcyklu  $\alpha^1(\bar{\varepsilon}_p')$ ,  $\alpha^2(\bar{\varepsilon}_p')$ , ...,  $\alpha^i(\bar{\varepsilon}_p')$ , ( $i$  - numer półcyklu,  $i=1, 2, \dots, 2N$ ,  $N$ - numer cyklu).

W przypadku gdy w materiale występuje ustabilizowana pętla histerezy w  $K$ -tym cyklu obciążenia, dla  $i > 2K$  wszystkie gałęzie  $\alpha$  są takie same

$$\alpha^{K+1}(\bar{\varepsilon}_p') = \alpha^{K+2}(\bar{\varepsilon}_p') = \dots = \alpha^{K+n}(\bar{\varepsilon}_p').$$

W stanie ustalonym gałąź górna i dolna  $\alpha$  mają ten sam kształt i są jedynie względem siebie obrócone o  $180^\circ$ . Współrzędne opisujące wykresy z rys. 3.2.1a,b stanowią dane wejściowe do programu.

### 3.2.3 Uproszczony algorytm wyznaczania ewolucji naprężeń w procesie obciążeń cyklicznych.

W praktyce, w przypadku gdy mamy do czynienia z bardzo dużą liczbą cykli obciążeń, obliczenia uwzględniające cały okres przejściowy od pierwszego obciążenia, aż do osiągnięcia stanu ustalonego ( $N = K$ ) byłyby bardzo długie. Dla skrócenia obliczeń pomijamy ewolucję krzywych wzmocnienia kinematycznego między stanem początkowym a stanem ustalonym (może ona obejmować nawet kilka tys. cykli) i przyjmujemy, że pierwszy półcykl obciążenia dokonuje się według charakterystyki monotonicznej, a następne już według krzywych odpowiadających stanowi ustalonemu  $\alpha^{2K}(\bar{\varepsilon}_p')$ . Podobnie, dla przyspieszenia obliczeń modyfikuje się przebieg rzeczywistej krzywej wzmocnienia izotropowego. Na podstawie licznych symulacji numerycznych autor stwierdził, że gradient krzywej wzmocnienia izotropowego ma niewielki wpływ na obliczone wartości naprężeń w stanie ustalonym. Ważna jest natomiast jej wartość początkowa (początkowy promień powierzchni płynięcia) i końcowa (promień powierzchni płynięcia w cyklu ustalonym). Modyfikacja krzywej wzmocnienia izotropowego polega na tym, że zmieniany jest jej gradient tak, że stan ustalony osiągany jest przy mniejszym całkowitym odkształceniu plastycznym. W zależności od amplitudy, stabilizacja w procesie symulacji następuje zwykle już po kilku - kilkunastu cyklach, i odpowiada to stanowi ustalonemu występującemu po kilku tysiącach cykli w eksperymencie fizycznym.

Postępując w ten sposób, w obliczeniach modelowych obejmujących kilka lub kilkanaście cykli uzyskujemy wyniki, które z dobrą dokładnością odpowiadają stanowi ustalonemu, osiąganemu w eksperymencie fizycznym po bardzo dużej liczbie cykli.

Zatem jako charakterystykę cykliczną materiału, w którym przy obciążeniach cyklicznych występuje ustabilizowana pętla histerezy wystarczy podać krzywą wzmocnienia izotropowego, monotoniczną krzywą wzmocnienia kinematycznego i dwie gałęzie krzywej cyklicznej odpowiadającej zamkniętej pętli histerezy dla stanu ustalonego.

W przypadku, gdy materiał wykazuje cykliczne wzmocnienie lub osłabienie przez cały okres obciążania aż do zerwania próbki nie można podać ustalonej pętli histerezy, a jedynie pętle charakterystyczne dla pewnej zadanej liczby cykli. Zatem nie możemy modelować stanu ustalonego, a jedynie w stan występującym przy pewnej określonej, interesującej nas liczbie cykli. W tym celu możemy korzystać z opisanego wyżej algorytmu postępowania, przy czym zamiast charakterystyki materiału dla stanu ustalonego, podajemy charakterystykę dla tej interesującej nas liczby cykli.

#### **4. Ewolucja naprężeń i ocena procesu zmęczenia w próbce walcowej kulowanej poddanej obciążeniom cyklicznym.**

##### **4.1 Symulacyjne badania relaksacji naprężeń własnych w próbce walcowej z warstwą kulowaną poddanej cyklicznemu ściskaniu-rozciąganiu – porównanie z wynikami badań doświadczalnych.**

Ważnym etapem w procesie oceny trwałości zmęczeniowej elementów z warstwą wierzchnią jest wyznaczenie stanu naprężenia i odkształcenia w warstwie w procesie obciążeń cyklicznych. Poprawne określenie stanu naprężenia jest punktem wyjścia do zastosowania kryteriów zmęczeniowych i skorzystania z koncepcji wytrzymałości lokalnej. Niniejszy rozdział jest próbą uzyskania drogą symulacji numerycznej niektórych wyników otrzymanych doświadczalnie w pracy [4]. Praca ta była poświęcona badaniom zmęczeniowym próbek walcowych ze stali 42CrMo4 jednorodnych oraz z warstwą kulowaną. W szczególności wyznaczono ewolucję stanu naprężeń resztkowych w próbkach z warstwą w zależności od liczby cykli i amplitudy obciążeń, przy zadanym stanie wyjściowym otrzymanym z procesu kulowania. Naprężenia resztkowe w warstwie mierzono metodą rentgenowską.

Celem tej części pracy jest weryfikacja zaproponowanego rozwiązania problemu obciążeń cyklicznych elementów z warstwą wierzchnią. Praca [4] jest dogodna do wykorzystania w celu weryfikacji rozwiązań teoretycznych,



gdyż można w niej znaleźć stosunkowo dużo danych materiałowych dotyczących warstwy i rdzenia. Opracowane modele zostaną również wykorzystane do porównania pod względem jakościowym trwałości elementu jednorodnego i elementu z warstwą kulowaną. W tym celu zostanie wykorzystane kryterium zmęczeniowe z płaszczyzną krytyczną.

#### 4.1.1 Ocena stanu początkowego.

W pracy [4] nie występują explicite wszystkie dane materiałowe potrzebne w opracowanym tu modelu obliczeniowym. Część z nich trzeba wyznaczać pośrednio, na podstawie wykresów innych wielkości przedstawionych w [4], przy czym w pracy tej więcej danych znajdujemy dla rdzenia niż dla warstwy. Dla rdzenia i warstwy dość dobrze opisana jest charakterystyka monotoniczna; mamy następujące wielkości: naprężenia początkowe ( $\sigma_0$ ), krzywą monotonicznego rozciągania i ściskania  $\sigma(\varepsilon)$  oraz granicę plastyczności przy ściskaniu  $\sigma_e^-$  i rozciąganiu  $\sigma_e^+$ .

Analizując proces kulowania możemy przyjąć, że wywołane nim zmiany stanu warstwy wierzchniej są izotropowe dla kierunków prostopadłych do toru uderzających kulek. Potwierdzeniem tego faktu jest to, że wytworzone w wyniku kulowania ściskające naprężenia własne w kierunku obwodowym są w przybliżeniu równe naprężeniom w kierunku osiowym.

Założenie o izotropowości procesu kulowania jest pomocne dla określania początkowego backstressu dla rdzenia i warstwy na podstawie wyżej wymienionych danych.

Porównując krzywe rozciągania i ściskania podane w [4] widzimy, że materiał warstwy kulowanej przy zerowych naprężeniach własnych wykazuje granicę plastyczności  $\sigma_e^+ = 795 \text{ MPa}$  przy rozciąganiu i  $\sigma_e^- = -685 \text{ MPa}$  przy ściskaniu. Różnica tych granic plastyczności wskazuje na istnienie pewnej początkowej, niezerowej wartości parametru  $\alpha$ , odpowiadającej początkowemu przesunięciu środka powierzchni płynięcia w kierunku rozciągania, rys. 4.1.1.

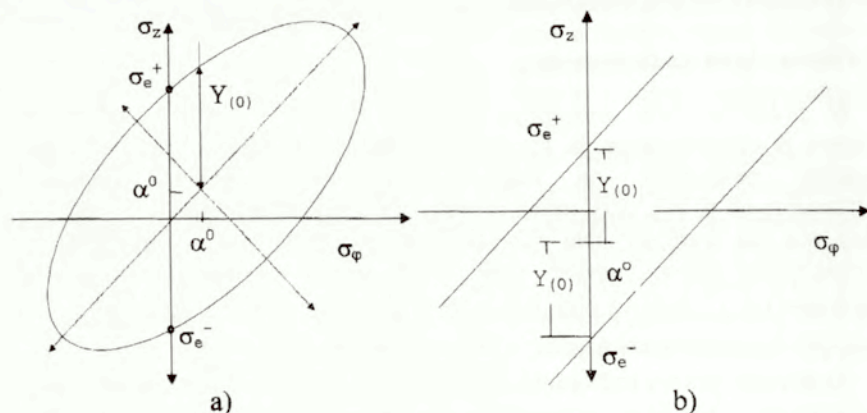
Ze względu na wspomniany wyżej izotropowy charakter procesu kulowania zakładamy, że istnieją dwie niezerowe składowe początkowe parametru  $\alpha$  tzn. osiowa  $\alpha_z^o$  i obwodowa  $\alpha_\phi^o$  i że są one równe sobie

$$\alpha_z^o = \alpha_\phi^o = \alpha^o.$$

Wartość  $\alpha^o$  jest odpowiedzialna za nierówne sobie granice plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu. Wartość  $\alpha^o$  możemy wyznaczyć korzystając z uogólnionego warunku plastyczności dla warstwy (w dwuosiowym stanie naprężenia):

$$(\sigma_z - \alpha_z)^2 - (\sigma_z - \alpha_z)(\sigma_\varphi - \alpha_\varphi) + (\sigma_\varphi - \alpha_\varphi)^2 = Y_{(0)}^2, \quad (4.1)$$

zapisanego przy ściskaniu i rozciąganiu, gdzie  $Y_{(0)}$  - początkowy promień powierzchni płynięcia.



Rys.4.1.1 Powierzchnia płynięcia: a) dla warstwy wierzchniej (płaski stan naprężenia) b) dla rdzenia (stan trójosiowy,  $\sigma_\varphi = \sigma_r$ )

W chwili uplastycznienia przy rozciąganiu

$$\sigma_z = \sigma_e^+, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \alpha_z = \alpha^0, \quad \alpha_\varphi = \alpha^0,$$

i warunek ten zapisze się jako:

$$(\sigma_e^+ - \alpha^0)^2 - (\sigma_e^+ - \alpha^0)(-\alpha^0) + (\alpha^0)^2 = Y_{(0)}^2 \quad (4.2)$$

i analogicznie dla ściskania

$$(\sigma_e^- - \alpha^0)^2 - (\sigma_e^- - \alpha^0)(-\alpha^0) + (\alpha^0)^2 = Y_{(0)}^2 \quad (4.3)$$

Przekształcając powyższe równania otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} (\sigma_e^+ - \alpha^0)(\sigma_e^+ - \alpha^0 + \alpha^0) &= (\sigma_e^- - \alpha^0)(\sigma_e^- - \alpha^0 + \alpha^0), \\ (\sigma_e^+ - \alpha^0)\sigma_e^+ &= (\sigma_e^- - \alpha^0)\sigma_e^-, \\ (\sigma_e^+)^2 - (\sigma_e^-)^2 &= \alpha^0(\sigma_e^+ - \sigma_e^-), \\ \alpha^0 &= \sigma_e^+ + \sigma_e^-. \end{aligned} \quad (4.4)$$

W naszym przypadku

$$\alpha_z^0 = \alpha_\varphi^0 = \alpha^0 = 795 - 685 = 110 \text{ MPa} \quad (4.5)$$

Podstawiając te wartości do warunku plastyczności otrzymujemy  $Y_{(0)} = 746.1 \text{ MPa}$ .

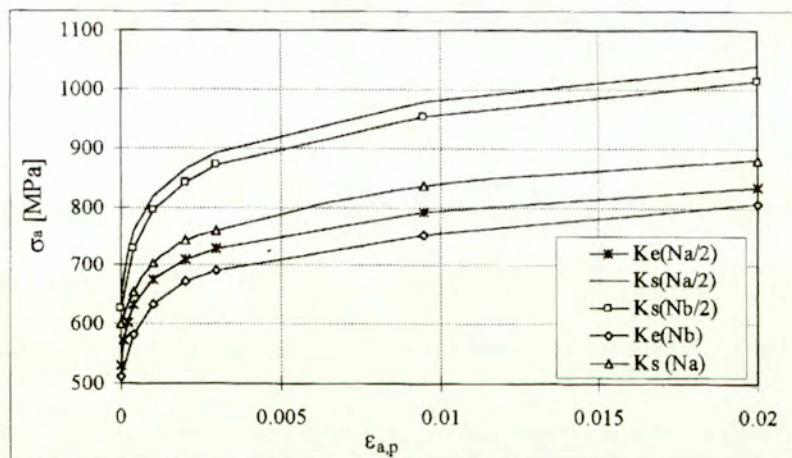
Natomiast w rdzeniu, gdzie  $\sigma_e^+ = 765 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_e^- = -805 \text{ MPa}$ , nie możemy zakładać stanu izotropowego, zatem przyjmujemy, że  $\alpha_\varphi^0 = 0$ ,  $\alpha_z = -20 \text{ MPa}$  i otrzymujemy  $Y_{(0)} = 785 \text{ MPa}$ . Początkowe położenie powierzchni płynięcia dla warstwy i rdzenia pokazano na rys. 4.1.1 a,b.

#### 4.1.2 Oszacowanie charakterystyki cyklicznej materiału rdzenia (stal 42CrMo4)

W odniesieniu do charakterystyki cyklicznej, dla materiału rdzenia (stal 42CrMo4) w [4] podane są jedynie krzywe szkieletowe, to jest cykliczne krzywe amplituda naprężeń ( $\sigma_a$ ) - amplituda odkształceń plastycznych ( $\varepsilon_{a,p}$ ) dla następujących przypadków:

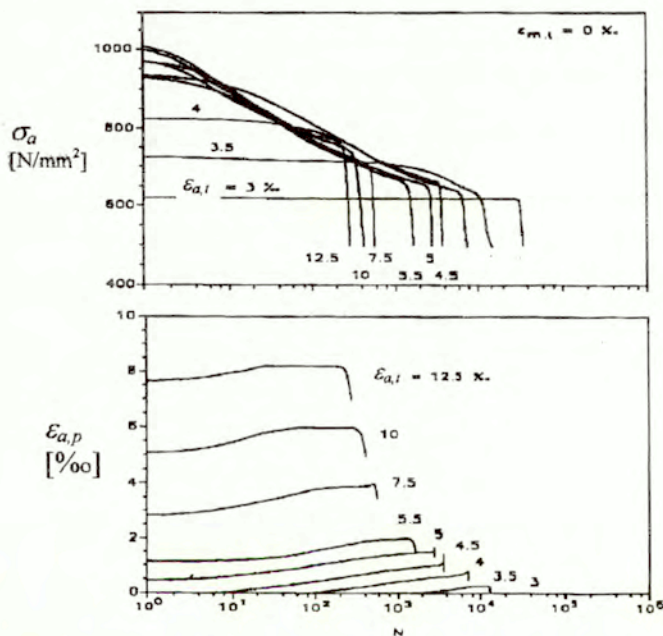
1. Wymuszenie obciążenia poprzez stałą amplitudę naprężeń. Krzywe szkieletowe otrzymane przy takim wymuszeniu będziemy dalej oznaczać jako  $K_\sigma(N)$ . Podano krzywą szkieletową dla  $N = N_A/2$  i  $N = N_A$  ( $N_A$  liczba cykli powodująca inicjację szczeliny) oraz  $N = N_B/2$  ( $N_B$  niszcząca liczba cykli), rys. 4.1.2.

2. Wymuszenie obciążenia poprzez stałą amplitudę odkształceń całkowitych ( $\varepsilon_{a,t}$ ). Krzywe szkieletowe otrzymane przy takim wymuszeniu będziemy dalej oznaczać jako  $K_\varepsilon(N)$ . Podano krzywą szkieletową dla  $N = N_A/2$ , rys. 4.1.2. (Na rysunkach  $K_\varepsilon$  ozn.  $K_\varepsilon$ , natomiast  $K_\sigma$  ozn.  $K_\sigma$ ).



Rys. 4.1.2 Krzywe szkieletowe dla stali 42CrMo4 podane w pracy [4]

Korzystając z tych krzywych szkieletowych możemy wyznaczyć krzywe wzmocnienia odpowiadające  $N=N_A/2$ ,  $N=N_A$ ,  $N=N_B/2$ , .... Dla właściwego modelowania elementu w fazie bliskiej zniszczenia materiału, przy liczbie cykli  $N \approx N_B$  konieczne jest określenie krzywych wzmocnienia dla  $N=N_B$ . Wyznaczymy je również korzystając z krzywej szkieletowej dla  $N=N_B$ . Nie są one podane w pracy [4], ale możemy ją odtworzyć z zadowalającą dokładnością na podstawie innych przedstawionych tam wykresów opisujących zmiany  $\sigma_a$  i  $\varepsilon_{a,p}$  w funkcji liczby cykli  $N$  przy różnych amplitudach wymuszających  $\varepsilon_{a,t}$ . Wykresy te przedstawiono na rys. 4.1.3. Krzywe szkieletowe dla  $N=N_B$  wyznaczono biorąc amplitudy naprężeń i amplitudy odkształceń w punktach leżących na początku pionowych odcinków wykresów z rys. 4.1.3.



Rys. 4.1.3 Amplitudy naprężenia i odkształcenia plastycznego jako funkcje liczby cykli dla różnych  $\varepsilon_{a,t}$  podane w pracy [4] dla stali 42CrMo4.

Krzywa szkieletowa  $K_\varepsilon$  dla  $N=N_B$  została dodatkowo naniesiona na rys. 4.1.2. Widzimy, że wszystkie krzywe szkieletowe mają podobny kształt, różnią się położeniem punktów początkowego i końcowego, oraz początkowym nachyleniem. Ich położenie obniża się w miarę wzrostu  $N$ . Korzystając z krzywych szkieletowych, oraz z prawa Masinga można wyznaczyć pętle

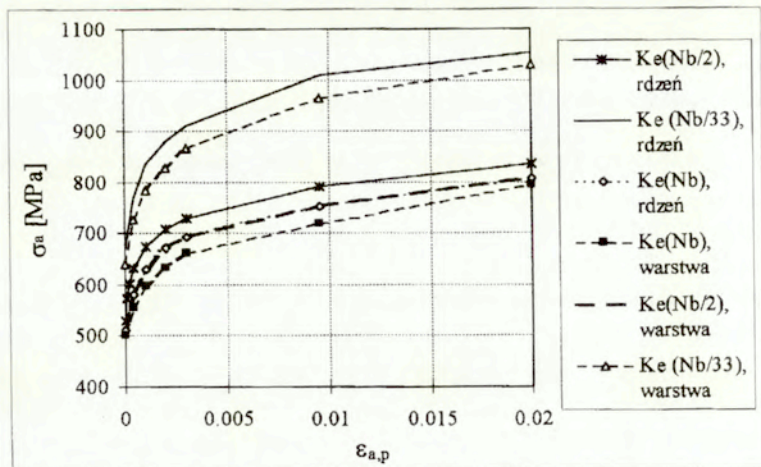
histerezy naprężeń, a następnie promienie powierzchni płynięcia i pętle histerezy środka powierzchni płynięcia  $\alpha(\varepsilon_p)$  dla wymienionych wyżej wartości  $N$  i sposobów obciążenia próbki. Zmiany krzywych szkieletowych w zależności od liczby cykli odzwierciedlają osłabienie cykliczne materiału. Krzywe  $K_{\sigma}(N_A/2)$  i  $K_{\sigma}(N_B/2)$ , rys.4.1.2, niewiele różnią się od siebie, co wynika z faktu, że liczba cykli odpowiadająca inicjacji szczeliny jest bliska liczbie cykli do zniszczenia próbki. Warto zauważyć, że krzywa szkieletowa  $K_{\sigma}(N_A)$  jest zbliżona do krzywej szkieletowej  $K_{\sigma}(N_A/2)$ . Wynika stąd, że przy wymuszeniu odkształceniowym materiał ulega szybciej osłabieniu niż przy wymuszeniu naprężeniowym. Można stąd również wyciągnąć wniosek, że krzywe szkieletowe  $K_{\sigma}(N_f)$  mogą zastępować krzywe  $K_{\varepsilon}(N)$  (tzn. mogą być wykorzystane do modelowania materiału przy wymuszeniu odkształceniowym), ale we wcześniejszej fazie zmęczenia niż na to wskazuje liczba cykli  $N_f$ , czyli dla  $N=N_f/2 \div N_f/40$ . W naszym rozwiązaniu przyjęto, że  $K_{\sigma}(N_A/2)$  zastępuje  $K_{\varepsilon}(N_B/33)$ .

Natomiast przebieg krzywej wzmocnienia izotropowego nie jest znany, znamy jedynie jej punkt początkowy tj. początkowy promień powierzchni płynięcia i punkt końcowy tj. promień powierzchni płynięcia dla cyklu  $N_B/33$ ,  $N_B/2$ ,  $N_B, \dots$ , wyznaczony z krzywej szkieletowej.

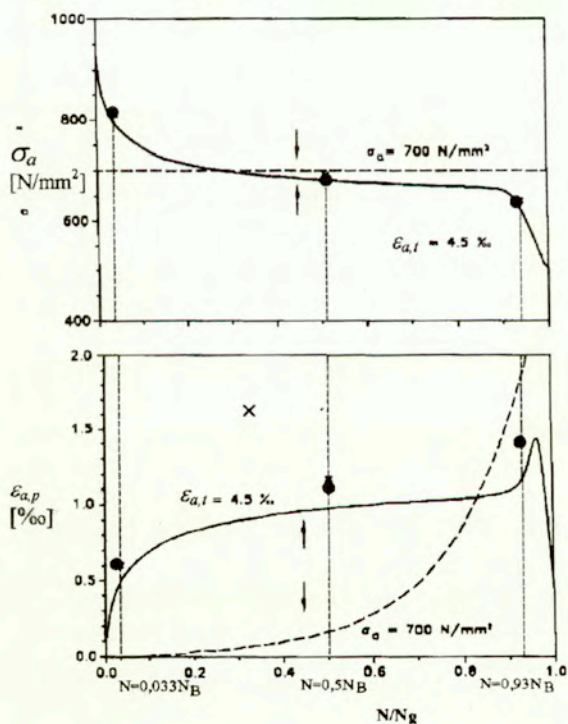
Na podstawie powyższego rozumowania oraz podanych wykresów wygenerowano charakterystykę cykliczną (krzywe szkieletowe przy wymuszeniu odkształceniowym) jednorodnego materiału rdzenia tj. stali 42 Cr Mo4 w następujących fazach obciążenia:

1. Obciążenie monotoniczne
  2. Obciążenie cykliczne dla cyklu  $N=N_B/33$ ,  $N=N_B/2$  i  $N=0.93N_B$
- Krzywe szkieletowe dla tych wartości  $N$  przedstawiono na rys. 4.1.4.

Istnieje możliwość częściowej weryfikacji poprawności tych danych. W pracy [4] podano otrzymane doświadczalnie wykresy amplitudy naprężeń ( $\sigma_a$ ) i amplitudy odkształceń plastycznych ( $\varepsilon_{a,p}$ ) w funkcji  $N/N_B$ , powstających przy obciążeniu cyklicznym próbki jednorodnej (stal 42 Cr Mo4) wymuszonym amplitudą odkształceń całkowitych  $\varepsilon_{a,t}=0.0045$ , rys. 4.1.5. Korzystając z tych wykresów, przy pomocy wielu obliczeń dokonano ostatecznego, dokładnego dopasowania krzywych szkieletowych (rys.4.1.4), odpowiednio modyfikując przypisaną każdej z nich liczbę cykli. Wykorzystując te krzywe szkieletowe, obliczono teoretycznie wartości  $\sigma_a$  i  $\varepsilon_{a,p}$  dla cyklu  $N=N_B/33$ ,  $N=N_B/2$  i  $N=0.93N_B$ , a wyniki naniesiono w postaci „•” na rys. 4.1.5. Wartości amplitud  $\sigma_a$  i  $\varepsilon_{a,p}$  obliczone i otrzymane doświadczalnie są bliskie sobie, co świadczy o poprawności danych wejściowych tj. opracowanej charakterystyki cyklicznej materiału jednorodnego.



Rys. 4.1.4 Krzywe szkieletowe podane explicite pracy [4] i wygenerowane przez autora na podstawie wykresów z rys. 4.1.3.

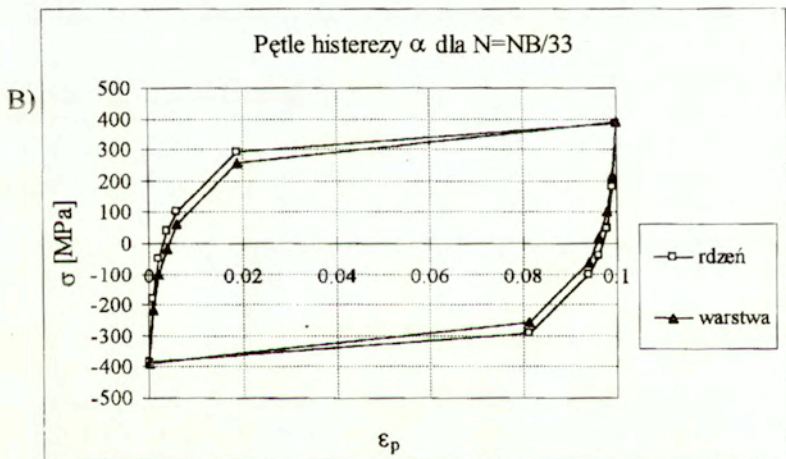
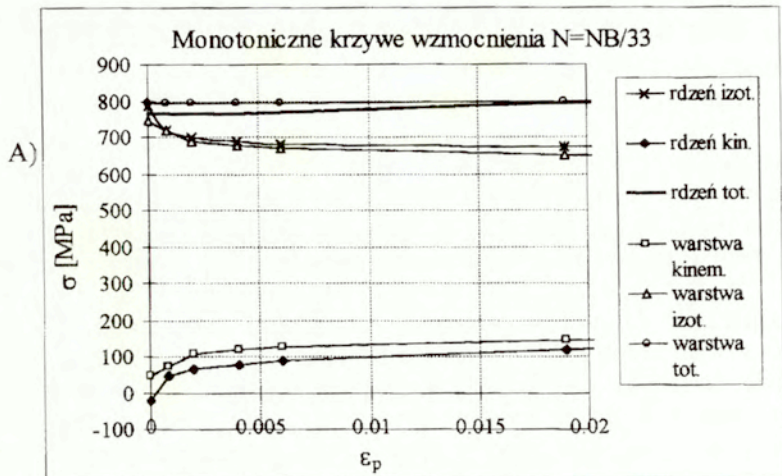


Rys. 4.1.5 Amplitudy naprężenia i odkształcenia w funkcji liczby cykli dla próbki jednorodnej (stal 42CrMo4) otrzymane eksperymentalnie w [4] (line ciągłe lub przerywane) i obliczone teoretycznie w niniejszej pracy (ozn. •).

### 4.1.3 Oszacowanie własności cyklicznych warstwy kulowanej

Warstwa wierzchnia próbek jest ukonstytuowana z tego samego materiału tzn. stali 42CrMo4, ale poddanej zabiegowi kulowania. Wpływ tego zabiegu na własności materiału warstwy przy obciążeniach monotonicznych został dokładnie opisany w [4]. Natomiast brak jest informacji na temat wpływu kulowania na własności cykliczne. Cykliczną charakterystykę warstwy określamy zatem korzystając z następującego rozumowania. Przyjmujemy, że materiał warstwy ma te same własności cykliczne co materiał rdzenia tzn. taka sama jest ewolucja pętli histerezy. Jednak w warstwie, ze względu na uprzednie kulowanie pewien określony poziom uszkodzeń i odpowiadająca mu pętla histerezy występują wcześniej, tzn. przy mniejszej liczbie cykli niż w rdzeniu. Wynika to z faktu, że kulowanie powoduje w warstwie cykliczne odkształcenie plastyczne (cykliczny zgniot) i pewne nagromadzenie uszkodzeń zanim rozpocznie się proces cyklicznego obciążania całej próbki. Proces zmęczenia w warstwie wierzchniej jest bardziej zaawansowany niż w rdzeniu i w warstwie wcześniej występują mikrouszkodzenia powodujące cykliczne osłabienie materiału. Zatem na danym etapie cyklicznego rozciągania (dla danej liczby cykli  $N$ ) całej próbki, w rdzeniu i w warstwie mamy różne fazy zmęczenia tego samego materiału. Krzywa szkieletowa warstwy musi więc przebiegać zawsze poniżej krzywej szkieletowej dla rdzenia. Wielkość różnicy pomiędzy tymi krzywymi zależy od efektywności procesu kulowania i dokładne określenie tej różnicy wymagałoby osobnych badań. Dla naszych potrzeb krzywą szkieletową dla warstwy dobrano metodą prób i błędów w ten sposób by uzyskać zgodność obliczonych wartości naprężeń resztkowych z wartościami otrzymanymi doświadczalnie dla wybranej wartości  $N$  ( $N=0.93N_B$ ) i dla wybranej amplitudy wymuszenia t.j.  $\varepsilon_{a,t}=0.0045$ . Następnie wyznaczono różnicę między krzywymi warstwy i rdzenia. Przyjęto dalej, że ta różnica jest stała dla wszystkich wartości  $N$ . Krzywe szkieletowe warstwy (pokazane również na rys. 4.1.4) dla pozostałych rozpatrywanych przez nas wartości  $N$  ( $N=N_B/33$ ,  $N=N_B/2$ ) wyznaczono odejmując tę różnicę od odpowiednich krzywych szkieletowych rdzenia.

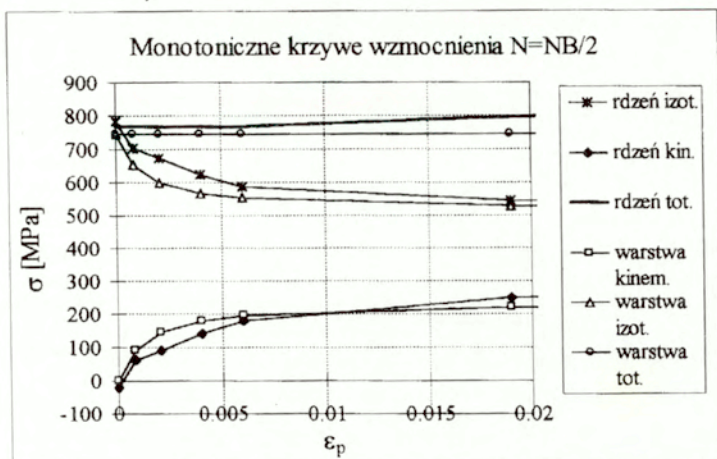
W ten sposób otrzymano zestawy danych dla kompozytu warstwa-rdzeń dla cyklu  $N=N_B/33$ ,  $N=N_B/2$  i  $N=0.93N_B$  przy wymuszeniu odkształceniowym. Wykresy parametrów wchodzących w skład powyższych zestawów danych tzn. krzywe wzmocnienia kinematycznego w fazie monotonicznej i cyklicznej oraz krzywe wzmocnienia izotropowego przedstawiono na rys. 4.1.6-4.1.8. Na rysunkach tych przyjęto następujące oznaczenia: „izot.” – dotyczy wzmocnienia izotropowego, „kin.” – dotyczy wzmocnienia kinematycznego, „tot.” – dotyczy wzmocnienia całkowitego.



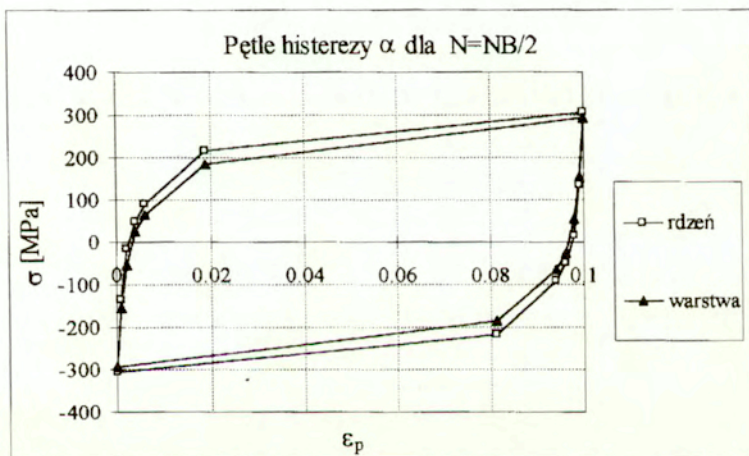
Rys. 4.1.6 Dane materiałowe rdzenia dla  $N=N_B/33$   
 A) monotoniczne krzywe wzmocnienia  
 B) pętle histerezy parametru  $\alpha$



A)



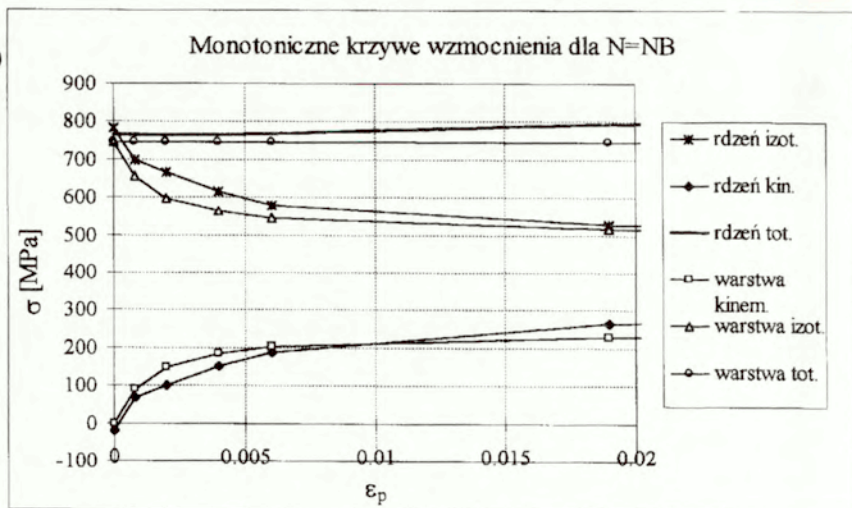
B)

Rys. 4.1.7 Dane materiałowe rdzenia dla  $N=N_B/2$ 

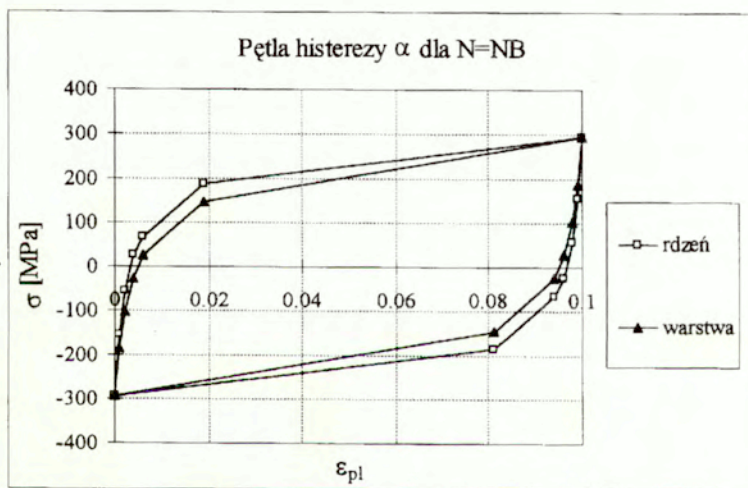
A) monotoniczne krzywe wzmocnienia

B) pętle histerezy parametru  $\alpha$

A)



B)

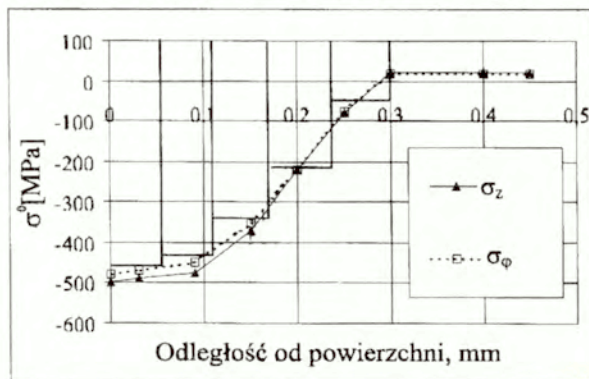
Rys. 4.1.8 Dane materiałowe rdzenia dla  $N=N_B$ 

A) monotoniczne krzywe wzmocnienia

B) pętle histerezy parametru  $\alpha$

#### 4.1.4 Wyniki obliczeń

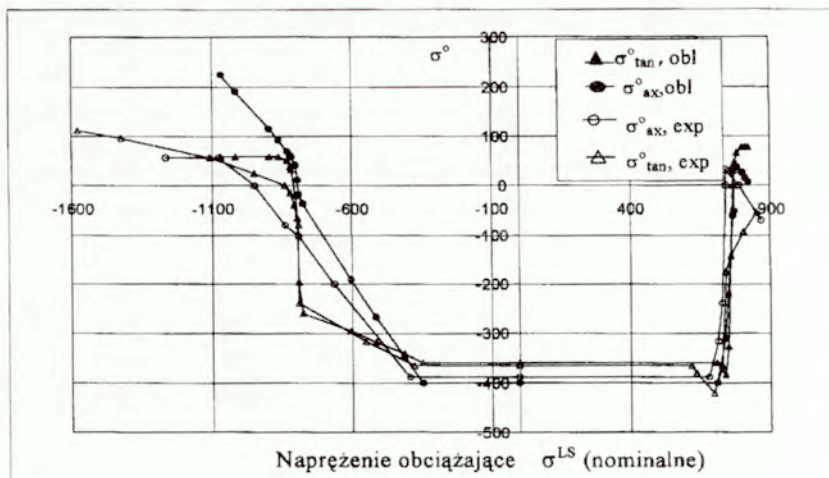
Przedmiotem badań są próbki ze stali 42CrMo4 z warstwą wierzchnią, która powstała na w wyniku procesu kulowania. Grubość warstwy według [4] wynosi 0.3 mm. Warstwa wierzchnia nie jest jednorodna. W warstwie kulowanej mamy naprężenia własne ściskające, których wykresy w funkcji odległości od powierzchni przedstawiono na rys. 4.1.9 (zgodnie z [4]).



Rys. 4.1.9. Naprężenia własne w warstwie kulowanej na początku procesu obciążenia.

Do obliczeń przyjęto zdyskretyzowany model próbki z warstwą, w którym obszar warstwy podzielono na 5 stref numerowanych 1-5 licząc od rdzenia. W każdej strefie przyjęto stałą warstwę naprężeń własnych, co zaznaczono również na rys. 4.1.9. Wielkość naprężeń własnych w rdzeniu jest obliczana z warunków równowagi i wynosi ok. 8MPa. Pozostałe własności w poszczególnych strefach warstwy przyjęto zgodnie z zaleceniami podawanymi w [4]. Założono, że opisane wyżej zmiany wywołane procesem kulowania (zmiany krzywych szkieletowych, krzywych monotonicznych ściskania i rozciągania oraz backstressu) występują jedynie w piątej najbardziej zewnętrznej strefie warstwy. W strefach 1-4 wielkości te są takie jak w rdzeniu, a strefy te różnią się od rdzenia jedynie wartościami naprężeń własnych (rys. 4.1.9).

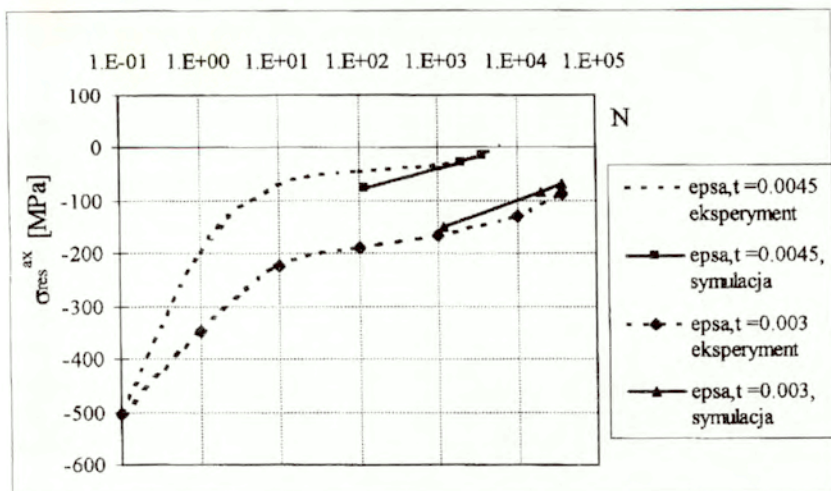
Wykonano symulację obciążeń monotonicznych i cyklicznych próbek z warstwą. Obliczenia dla obciążeń monotonicznych wykonano dla próbek o średnicy 5 mm na podstawie krzywych ściskania i rozciągania podanych w [4] dla poszczególnych stref warstwy wierzchniej.



Rys. 4.1.10. Naprężenia resztkowe w warstwie, w strefie 5 przy obciążeniu monotonicznym w funkcji naprężenia nominalnego otrzymane teoretycznie i doświadczalnie w pracy [4]

Na rys. 4.1.10 przedstawiono zmiany naprężeń resztkowych osiowych i obwodowych wywołane obciążeniem monotonicznym (pierwszy półcykl) uzyskane z obliczeń i badań doświadczalnych, których rezultaty podano w [4]. Wykonano również symulację obciążeń cyklicznych próbek o średnicy 5 mm i 7 mm, wykorzystując zestawy danych dla wyżej wymienionych wartości  $N$ .

Obliczenia cykliczne wykonywane są w ten sposób, że pierwszy półcykl rozciągający wyznaczany jest według krzywej  $\alpha$  odpowiadającej monotonicznemu rozciąganiu, natomiast następujący po nim półcykl ściskający i dalsze pełne cykle wykonywane są według krzywych cyklicznych  $\alpha$  wyznaczonych dla określonych wartości  $N$ , rys. 4.16-4.18. Zbadano wpływ różnych wariantów przebiegu krzywych wzmocnienia izotropowego na końcowy stan naprężenia. Stwierdzono, że wpływ krzywej wzmocnienia izotropowego, o ile opada ona monotonicznie zależy tylko od początkowej i końcowej rzędnej tej krzywej, natomiast nie zależy od wartości pośrednich. Dla obciążonych cyklicznie próbek o średnicy 5 mm na rys. 4.1.11 przedstawiono wykresy osiowych naprężeń resztkowych w funkcji liczby cykli wyznaczonych doświadczalnie dla różnych amplitud wymuszających  $\varepsilon_{a,i}=0.0045$ ,  $\varepsilon_{a,i}=0.003$ . Obok wykresów naniesiono punkty przedstawiające obliczone wartości tych naprężeń dla  $N = N/33$ ,  $N=N_B/2$  i  $N=0.93N_B$ .



Rys. 4.1.11. Porównanie ewolucji naprężeń resztkowych w funkcji liczby cykli („ $\epsilon_{a,t}$ ” ozn. amplitudę odkształceń wymuszających)

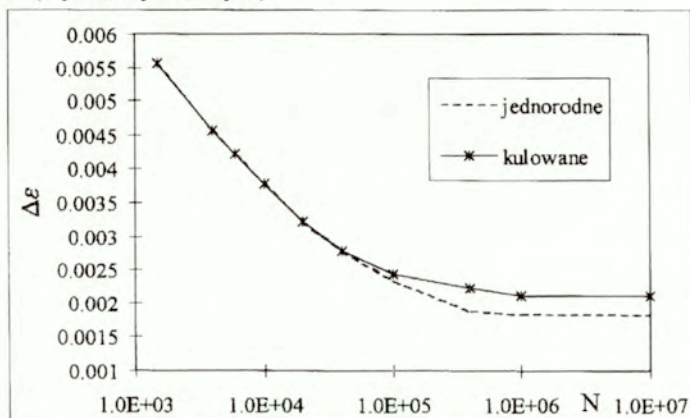
Porównanie wyników teoretycznych i doświadczalnych (stan naprężenia i odkształcenia) dla próbek o średnicy 5 mm dla amplitud wymuszających  $\epsilon_{a,t}=0.003$ ,  $\epsilon_{a,t}=0.0045$ , a także  $\epsilon_{a,t}=0.0055$  zamieszczono w tabeli I. Wszystkie wyniki doświadczalne odczytano z wykresów (analogicznych jak na rys. 4.1.3) z pracy [4].

Tabela I

Amplituda wymuszająca $\epsilon_{a,t}$	Liczba cykli N	naprężenia resztkowe [MPa]		amplituda odkształceń plastycznych $\epsilon_{a,p}$		amplituda naprężeń $\sigma_a$	
		exp.	teor.	exp.	teor.	exp.	teor.
0.0045	$N_b/33$	-50	-76	0.001	0.0007	740	790
	$N_b/2$	-25	-28	0.0018	0.00125	650	675
	$N_b$	-5	-13	0.002	0.0014	620	645
0.003	$N_b/33$	-160	-150	0.0002	0.0	610	622
	$N_b/2$	-95	-85	0.00011	0.00001	605	620
	$N_b$	-78	-70	0.0001	0.00001	600	619
0.0055	$N_b/33$		0	0.00185	0.00145	825	840
	$N_b/2$		22	0.00265	0.0021	690	700
	$N_b$		26	0.0028	0.00225	660	672

## 4.2. Jakościowa ocena trwałości zmęczeniowej próbek kulowanych – porównanie z wynikami badań doświadczalnych.

W pracy [4] obok relaksacji naprężeń wyznaczono również krzywe zmęczeniowe próbek jednorodnych, oraz próbek kulowanych. Krzywe te zostały przedstawione na rys. 4.2.1. Można zauważyć, że obróbka kulowaniem powoduje wzrost wytrzymałości zmęczeniowej w zakresie małych amplitud obciążenia (wysokocyklicznym).



Rys. 4.2.1 Krzywe zmęczeniowe dla próbek jednorodnych i z warstwą uzyskane doświadczalnie w [4]

W niniejszej pracy podjęto również próbę teoretycznej oceny trwałości zmęczeniowej próbek. Do tej oceny wykorzystano kryterium zmęczeniowe, przedstawione w pracy [57], omówione w rozdziale 2.2, w którym zniszczenie materiału zależy od stanu naprężenia i odkształcenia na płaszczyźnie krytycznej. Niszcząca liczba cykli  $N_f$  jest funkcją parametru uszkodzenia  $W^*$  ( $N_f = N_f(W^*)$ ) zdefiniowanego jako

$$W^* = \frac{\Delta\gamma_{21}}{2} \frac{\Delta\sigma_{21}}{2} \left[ \frac{1}{1 - \sigma_{21}^{max} / \tau'_f} + \frac{1}{1 - \sigma_{22}^{max} / \sigma'_f} \right] \quad (4.6)$$

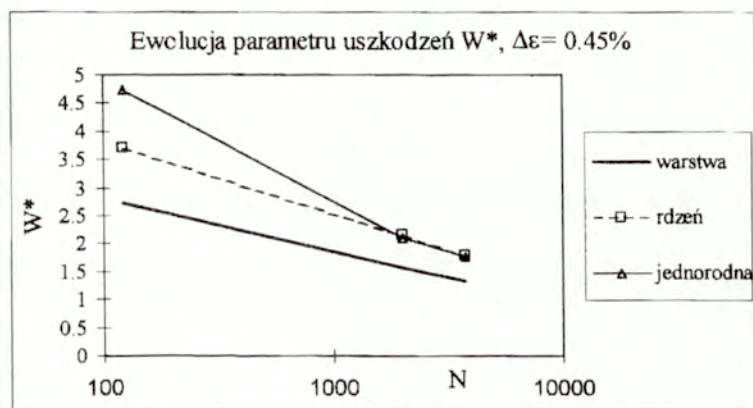
gdzie:

$\Delta\lambda_{21}/2$ ,  $\Delta\sigma_{21}/2$  - amplituda odkształceń i amplituda naprężeń stycznych na płaszczyźnie krytycznej

$\sigma_{21}^{max}$ ,  $\sigma_{22}^{max}$  - maksymalne wartości składowej stycznej i normalnej naprężenia na płaszczyźnie krytycznej

$\sigma_f, \tau_f$  - stałe materiałowe

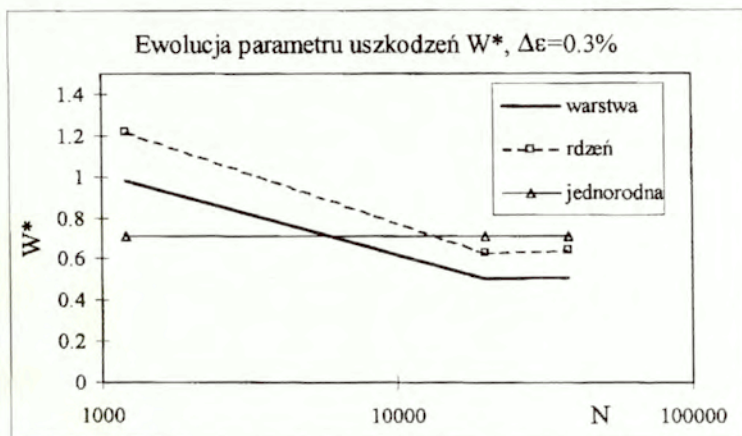
Ze względu na to, że stałe materiałowe występujące w równaniu (4.6), oraz funkcja  $N_f=N_f(W^*)$  nie zostały zidentyfikowane dla stali 42CrMO, nie jest możliwe dokładne teoretyczne określenie krzywej zmęczeniowej dla próbek wykonanych z tej stali. Jakościowego porównania trwałości próbek jednorodnych i kulowanych można jednak dokonać na podstawie ewolucji parametru uszkodzeń. Z badań doświadczalnych przeprowadzonych dla stali wiadomo, że w miarę wzrostu wartości parametru  $W^*$  maleje liczba cykli powodująca zniszczenie. Na rys. 4.2.2, 4.2.3 przedstawiono wykresy parametru uszkodzeń  $W^*$  obliczonego teoretycznie w rdzeniu i w warstwie w funkcji liczby cykli dla dwóch wartości amplitudy obciążenia  $\varepsilon_{a,t}=0.45\%$  i  $\varepsilon_{a,t}=0.3\%$ . Dla porównania przedstawiono również wykresy dla próbki jednorodnej. Stałe materiałowe przyjęto tak jak w pracy [57].



Rys. 4.2.2 Wykres parametru uszkodzeń dla amplitudy obciążenia  $\varepsilon_a=0.45\%$ .

Przedstawione wykresy są potwierdzeniem efektów zaobserwowanych doświadczalnie, rys. 4.2.1. Dla próbki z warstwą parametr uszkodzeń rdzenia jest zawsze większy od parametru uszkodzeń warstwy, co oznacza, że zniszczenie próbki rozpoczyna się od rdzenia. W przypadku większej amplitudy obciążenia  $\varepsilon_{a,t}=0.45\%$ , dla  $N$  odpowiadającego niszczącej liczbie cykli (ok. 1000 zgodnie z rys. 4.2.1) parametr uszkodzeń rdzenia próbki z warstwą jest równy parametrowi uszkodzeń próbki jednorodnej. Oznacza to, że dla amplitudy  $\varepsilon_{a,t}=0.45\%$  zniszczenie próbki jednorodnej i próbki kulowanej

następuje przy tej samej liczbie cykli. Efekt ten zaobserwowano również w badaniach doświadczalnych, rys. 4.2.1. W przypadku mniejszej amplitudy obciążeń,  $\varepsilon_{a,r}=0.3\%$ , dla liczby cykli odpowiadającej zniszczeniu próbki parametr uszkodzeń jest mniejszy w próbce kulowanej (zarówno w rdzeniu jak i w warstwie) niż w próbce jednorodnej. Oznacza to, że wcześniej następuje zniszczenie próbki jednorodnej. Ten efekt również stwierdzono w badaniach doświadczalnych, rys 4.2.1. Opisane efekty są więc jakościowo zgodne z doświadczeniem, dla uzyskania zgodności ilościowej należałoby porównać wartości parametrów  $W^*$  obliczone tu na podstawie wartości amplitudy obciążenia próbki z wartościami parametrów uszkodzeń wykalibrowanymi dla materiału warstwy i materiału rdzenia.



Rys. 4.2.3 Wykres parametru uszkodzeń dla amplitudy obciążenia  $\varepsilon_a=0.3\%$

### 4.3 Wnioski

Proponowana metoda umożliwi symulacyjne wyznaczenie ewolucji pola naprężeń i odkształceń w procesie obciążeń cyklicznych w dowolnym punkcie przekroju kompozytu warstwa-rdzeń. Danymi materiałowymi w tej symulacji są krzywe wzmocnienia: początkowa (monotoniczna) i końcowa, to jest, odpowiadająca tej zadanej liczbie cykli. Krzywe wzmocnienia dla materiału rdzenia określono korzystając z prawa Masinga i krzywych szkieletowych  $\sigma_a-\varepsilon_a$ , oraz monotonicznych krzywych ściskania i rozciągania, wyznaczonych doświadczalnie dla próbek jednorodnych. Ze względu na to, że do symulacji potrzebne są również dane materiałowe warstwy wierzchniej, zaproponowano



metodę ich wyznaczania przy wykorzystaniu danych dla materiału jednorodnego (rdzenia).

Zaproponowana metoda opiera się na założeniu, w przypadku materiału z osłabieniem, dla danej liczby cykli krzywa szkieletowa dla materiału po kulowaniu przebiega poniżej krzywej szkieletowej materiału nie poddanego obróbce, oraz że różnica między tymi krzywymi nie zależy od liczby cykli a jedynie od parametrów kulowania. Wartość tej różnicy dobrano w ten sposób, aby dla pewnej ustalonej liczby cykli uzyskać zgodność naprężeń resztkowych zmierzonych doświadczalnie, oraz obliczonych teoretycznie przy wykorzystaniu tego założenia. Mając tak określoną różnicę między krzywymi szkieletowymi warstwy i rdzenia wyznaczono krzywe szkieletowe warstwy dla trzech różnych wartości liczby cykli obciążeń tj.  $N = N_B / 33$ ,  $N = N_B / 2$  i  $N = 0.93N_B$ . Podobne rozumowanie w ocenie cyklicznej krzywej rozciągania dla warstwy kulowanej można znaleźć w pracy [62].

Otrzymane w ten sposób dane materiałowe wykorzystano do obliczenia naprężeń resztkowych w rozciągającym cyklicznie walcu z warstwą kulowaną. Otrzymane wartości naprężeń w warstwie wierzchniej porównano z wartościami zmierzonymi doświadczalnie metodą rentgenowską. Otrzymano dobrą zgodność wyników. Analizowane w niniejszej pracy naprężenia resztkowe odpowiadają jednemu punktowi na pętlach histerezy wyznaczanych dla warstwy. Pozwala to jednak wnioskować, że całe pętle histerezy naprężenia i odkształcenia zostały wyznaczone prawidłowo. Wyniki te potwierdzają prawidłowość przyjętego modelu elementu z warstwą wierzchnią, oraz sprężysto-plastycznego modelu materiału.

Zaproponowano również nowy sposób modelowania obciążeń cyklicznych. Poprzez obliczenie kilku przykładów wykazano, że do modelowania pola naprężeń kompozytu warstwa-rdzeń dla pewnej ustalonej dużej liczby cykli nie trzeba wyznaczać wszystkich stanów pośrednich. Wystarczy znać krzywe wzmocnienia odpowiadające stanowi początkowemu, oraz tej zadanej liczbie cykli. Dzięki takiemu podejściu można znacznie skrócić czas obliczeń szczególnie wtedy, gdy interesuje nas stan naprężeń po kilku tysiącach cykli. Sugestia, że wytrzymałość zmęczeniowa zależy jedynie od początkowego i końcowego stanu naprężeń natomiast nie zależy od prędkości relaksacji można znaleźć również w pracy [62].

Możliwość wyznaczania pętli histerezy naprężeń w dowolnej strefie warstwy wierzchniej i rdzenia jest bardzo przydatna przy obliczeniach trwałości zmęczeniowej. Korzystając z koncepcji naprężeń lokalnych i kryteriów zmęczeniowych można przewidywać niszczącą liczbę cykli dla różnych stref rozciąganego cyklicznie elementu z warstwą, a następnie określać punkty najbardziej narażone na zniszczenie. W pracy podjęto próbę

teoretycznego określenia niszczącej liczby cykli dla próbki jednorodnej i próbki kulowanej wykorzystując kryterium zmęczenia sformułowane w wieloosiowym stanie naprężenia, oparte na koncepcji płaszczyzny krytycznej. Uzyskano wyniki, które pod względem jakościowym są zgodne z wynikami badań doświadczalnych. Dla uzyskania zgodności ilościowej konieczne byłoby wykalibrowanie parametrów występujących w zastosowanym kryterium zmęczeniowym dla badanego materiału rdzenia i warstwy wierzchniej.

## 5. Symulacyjne badania trwałości zmęczeniowej elementów z karbem i warstwą wierzchnią.

### 5.1. Model MES osiowo-symetrycznego elementu z karbem i warstwą wierzchnią.

#### 5.1.1 Przegląd metod przewidywania trwałości zmęczeniowej próbek z warstwą i z karbem

W większości elementów maszyn występują karby konstrukcyjne. Elementy te zwykle poddawane są obciążeniom cyklicznym. Zagadnienie wytrzymałości zmęczeniowej elementów z karbem i z warstwą wierzchnią jest więc bardzo ważne w praktyce konstrukcyjnej. Problem jest trudny, gdyż już samo obliczenie wieloosiowego stanu naprężenia w dnie karbu przy obciążeniach cyklicznych wymaga zastosowania złożonych modeli plastycznych, które nie są dostępne w komercyjnych kodach MES.

Trwałości zmęczeniowej elementów z karbem poświęcono wiele prac. W odniesieniu do karbów jednorodnych można znaleźć szereg prac, w których proponowane są metody obliczania trwałości zmęczeniowej i ich weryfikacja poprzez badania doświadczalne. Metody te mają najczęściej charakter uproszczony (inżynierski), korzysta się w nich ze współczynnika zmęczeniowego dla karbu  $K_f$ , a stan naprężenia oblicza się korzystając ze współczynnika koncentracji naprężeń  $K_t$  zgodnie z metodą Neubera, Glinki [23],[24],[63]. Problemem jest właściwe wyznaczenie wartości  $K_f$ . Współczynnik  $K_f$  jest definiowany jako iloraz wytrzymałości zmęczeniowej próbki gładkiej i próbki z karbem przy tej samej liczbie cykli obciążenia. Najprostszą metodą określenia tego współczynnika są badania doświadczalne, jednak jest to metoda kosztowna. Powstało szereg prac, w których podana jest metoda obliczania tego współczynnika. Generalnie zależy on od własności materiału (także defektów materiałowych) geometrii i rozmiarów próbki, gradientu naprężeń i liczby cykli.

W pracy [64] przedstawiono trzy metody obliczania współczynnika  $K_f$ , w których wykorzystano trzy modele zniszczenia materiału

- model średnionaprężeniowy (AS)
- model bazujący na mechanice pękania (FM)
- model, w którym wykorzystuje się intensywność pola naprężeń (SFI)

W modelu AS zakłada się, że zniszczenie następuje jeśli naprężenie średnie na pewnym odcinku  $a$  od dna karbu jest równe wytrzymałości zmęczeniowej próbki gładkiej. Przedstawiono podane przez różnych autorów

wzory bazujące na tym modelu, z których można obliczyć  $K_f$ . Wartość  $K_f$  zależy od  $K_t$  (współczynnika koncentracji naprężeń w karbie), promienia karbu, gradientu naprężeń i parametru materiałowego.

Zgodnie z modelem bazującym na mechanice pękania, FM, zakłada się, że przyczyną zniszczenia próbki są niepropagujące się szczeliny, które inicjują się w dnie karbu. Dla próbek gładkich można podać pewną długość szczeliny  $l_0$

$$l_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{tho}}{\Delta S_e} \right)^2, \quad (5.1)$$

gdzie:  $K_{tho}$  progowa wartość współczynnika intensywności naprężeń dla szczelin długich. Dla danego współczynnika asymetrii cyklu  $R$  i zakresu obciążenia  $\Delta S_e$  odpowiadającego wytrzymałości zmęczeniowej próbki gładkiej wartość  $l_0$  jest stałą materiałową. Dla danego  $l_0$  oblicza się efektywny zakres współczynnika intensywności naprężeń w próbce gładkiej  $\Delta K_{eff,tho}$ . Obliczany jest również efektywny zakres współczynnika intensywności naprężeń dla karbu  $\Delta K_{eff,th}$ . Jest on obliczany przy założeniu, że długość niepropagującej się szczeliny w karbie osiąga wartość graniczną  $a_{th}$ , zależy on też od geometrii karbu. Przyjmuje się, że zniszczenie próbki z karbem następuje, jeśli obydwa zakresy są sobie równe:

$$\Delta K_{eff,th} = \Delta K_{eff,tho}. \quad (5.2)$$

Równanie to umożliwia wyznaczenie amplitudy obciążenia odpowiadającej zniszczeniu próbki z karbem.

W modelu SFI zakłada się, że zniszczenie następuje w wyniku akumulacji uszkodzeń w pewnej strefie uszkodzeń. Akumulacja tych uszkodzeń zależy nie tylko od lokalnego piku naprężeń w dnie karbu, ale również od intensywności pola naprężeń w strefie uszkodzeń. Intensywność pola naprężeń zdefiniowano jest jako

$$\sigma_{FI} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} f(\sigma_{ij}) \varphi(r) dr, \quad (5.3)$$

gdzie:  $\varphi(r)$  - funkcja wagowa,  $f(\sigma_{ij})$  - zastępcza funkcja naprężeń,  $\Omega$  - obszar pęknięć zmęczeniowych,  $V$  - objętość tego obszaru.

Intensywność pola naprężeń próbki gładkiej jest równa maksymalnej wartości naprężenia w tej próbce. Według modelu SFI zniszczenie próbki z karbem następuje, jeśli intensywność pola naprężeń dla próbki z karbem jest równa intensywności pola naprężeń próbki gładkiej. Intensywności te są funkcją

amplitudy obciążenia próbek. Stąd można obliczyć iloraz amplitudy obciążenia próbki gładkiej i próbki z karbem, który jest równy  $K_f$ .

Wartości współczynnika  $K_f$  wyznaczone tymi metodami porównano z wartościami otrzymanymi doświadczalnie. Okazało się, że najlepsze wyniki uzyskuje się stosując model SFI, błąd procentowy w wyznaczaniu  $K_f$  wynosi wówczas około 5% dla próbek w postaci tarczy z otworem i około 10% dla próbek w postaci tarczy z karami brzegowymi.

Przykładem teoretycznej metody wyznaczania współczynnika może być również praca [65]. Dla znalezienia funkcji

$$K_f = K_f(\text{materiał}, \varepsilon_p, K_t)$$

skorzystano z prawa Neubera i z zależności między energią odkształcenia i komplementarną energią odkształcenia, oraz z prawa Ramberga-Osgooda dla opisu zależności  $\Delta\sigma - \Delta\varepsilon$  przy obciążeniu cyklicznym. Otrzymane wyrażenie na  $K_f$  ma postać

$$K_f = \frac{K_t}{\sqrt{1 + \frac{1-n'}{1+n'} \frac{1}{1 + \Delta\varepsilon_e / \Delta\varepsilon_p}}}. \quad (5.4)$$

W tym wyrażeniu  $n'$  jest wykładnikiem w potęgowym prawie konstytutywnym,  $K_t$  - miarą geometrii karbu (współczynnik spiętrzenia naprężeń), a  $\Delta\varepsilon_e / \Delta\varepsilon_p$  - miarą stopnia deformacji plastycznej. Podano wykresy ilorazu  $K_f/K_t$  w funkcji  $\Delta\varepsilon_e / \Delta\varepsilon_p$  dla różnych materiałów (dla różnych  $n'$ ). Dla  $\Delta\varepsilon_e / \Delta\varepsilon_p = 1$  krzywa  $K_f/K_t$  ma punkt przegięcia, punkt ten jest punktem przejściowym pomiędzy nisko- i wysoko-cyklowym zmęczeniem. Istnienie tego punktu przegięcia oznacza, że dla nisko- i wysoko-cyklowego zmęczenia obowiązują różne prawa zmiany  $K_f$ .

Korzystając z prawa Mansona-Coffina przedstawiono  $\Delta\varepsilon_e / \Delta\varepsilon_p$  w funkcji parametrów krzywej zmęczeniowej  $\sigma'_f, \varepsilon'_f$  i niszczącej liczby cykli  $N_f$ .

Korzystając z tej zależności znaleziono wykresy  $K_f$  w funkcji  $N_f$ .

Wykonano badania doświadczalne, które potwierdziły prawidłowość otrzymanych teoretycznie wartości współczynnika  $K_f$ . Dla obciążeń wysokocyklicznych  $K_f$  jest w przybliżeniu stałe. W zakresie obciążeń niskocyklicznych wartości  $K_f/K_t$  gwałtownie rośnie wraz ze spadkiem  $N_f$ . Zmiana ta jest bardziej wyraźna dla materiałów o mniejszych  $n'$ . Wyprowadzone wzory odpowiadają materiałowi Masinga. Jeśli materiał nie

spełnia tego prawa trzeba skorzystać z innej propozycji opisu pętli histerezy Ellyin Gołoś, [46].

Uproszczone, inżynierskie metody obliczania wytrzymałości zmęczeniowej elementów z karbem jednorodnych i z warstwą obszernie omówiono w pracy [66].

Do oceny zmęczenia elementów z karbem korzysta się również z rozwiązań bardziej zaawansowanych, stosuje się wieloosiowe kryteria zmęczeniowe jednak stan naprężeń w karbie jest obliczany w sposób uproszczony [67]. Obszerny przegląd metod analizy zmęczeniowej elementów z karbem można znaleźć w [68]. Praca ta kończy się następującymi wnioskami, które wskazują kierunki badań tego zagadnienia:

- w wyniku obliczeń przy pomocy klasycznych, konwencjonalnych kryteriów zmęczeniowych, w których naprężenie (odkształcenie) zastępcze w stanie wieloosiowym porównuje się z naprężeniem (odkształceniem) niszczącym w próbie cyklicznego, jednoosiowego rozciągania, zaniżana jest trwałość zmęczeniowa zarówno elementów gładkich jak i z karbem.
- nowsze kryteria to znaczy energetyczne lub z płaszczyzną krytyczną nie mają tej wady. Muszą być jednak rozwijane tak, aby obejmowały przypadki zmiennych amplitud i modów obciążenia.
- powstało szereg metod do oceny stanu odkształcenia-naprężenia w karbie, które są danymi dla oceny zmęczenia przy pomocy wieloosiowych kryteriów zmęczeniowych, takie podejście daje dobre wyniki dla „łagodnych” karbów
- zmęczenie elementów z karbem w wieloosiowym stanie naprężenia nie może być oceniane jedynie na podstawie naprężeń na powierzchni karbu. Trzeba jednak uwzględnić rozkład naprężeń pod powierzchnią, w przekroju karbu.
- w obliczeniach zmęczeniowych należy uwzględniać warstwę wierzchnią.

Ze względu na to, że w analizie naprężeń stosuje się coraz bardziej zaawansowane modele konstytutywne, oraz że kryteria zmęczeniowe w stanie wieloosiowym są ciągle rozwijane, problem wytrzymałości zmęczeniowej elementu z karbem jest nadal problemem otwartym.

W praktyce problem zmęczenia elementów z karbem jest dodatkowo utrudniony przez fakt, że elementy konstrukcyjne maszyn poddawane są obróbce technologicznej, w wyniku której powstaje warstwa wierzchnia. Warstwa ta ma na celu poprawę własności użytkowych, między innymi wytrzymałości zmęczeniowej. Badaniom wpływu warstwy wierzchniej na trwałość zmęczeniową elementów z karbem poświęcono wiele prac doświadczalnych; niektóre z nich zostały omówione na początku rozprawy. Z prac tych można wyciągnąć ogólny wniosek, że dzięki wprowadzeniu warstwy

wierzchniej następuje poprawa trwałości zmęczeniowej, szczególnie w zakresie wysokocyklowym.

Próby uwzględnienia wpływu warstwy na trwałość zmęczeniową w obliczeniach konstrukcyjnych są już mniej liczne. Efekt warstwy jest uwzględniany zwykle w sposób bardzo uproszczony. Najprostsza metoda polega na wprowadzeniu dodatkowego współczynnika  $K_s$ , którego wartość zależy jedynie od rodzaju obróbki (nawęglanie, kulowanie) natomiast nie zależy od geometrii karbu, sposobu obciążenia itp. [66]. Metody bardziej zawansowane polegają na uwzględnieniu w modelu obliczeniowym wprowadzonej przez obróbkę technologiczną zmiany jednego tylko parametru to znaczy naprężeń własnych. Przykładem takiego podejścia może być praca [69]. W pracy tej rozważano wpływ naprężeń własnych w karbie na wytrzymałość zmęczeniową. Metoda obliczania tej wytrzymałości zaproponowana w [69] opiera się na analizie prędkości propagacji szczelin zmęczeniowych. Istotą metody jest wykorzystanie relacji między naprężeniami własnymi i zakresem współczynnika intensywności naprężeń w sąsiedztwie szczelin zmęczeniowych,  $\Delta K_{eff}$ . Badane próbki były szlifowane (w dnie karbu) następnie część z nich była kulowana, a część próbek kulowanych była przeciążona siłą rozciągającą. W wyniku tych obróbek generowane były różne wartości naprężeń własnych w dnie karbu. Przeciążenie próbki nagniatanej powoduje zmniejszenie naprężeń zarówno ściskających jak i rozciągających i przesunięcie całego wykresu naprężeń w kierunku powierzchni. Dla wszystkich rodzajów próbek wyznaczono doświadczalnie krzywe Woehlera. Okazało się, że najwyżej położona jest krzywa zmęczeniowa próbek kulowanych i przeciążonych. Najniżej – dla próbek poddanych szlifowaniu.

W zakresie dużych amplitud obciążenia przeciążanie powoduje jedynie niewielką poprawę trwałości próbek nagniatanych. Według autorów wynika to z faktu, że po przeciążeniu efekt wzmocnienia plastycznego jest mały w porównaniu z efektem naprężeń własnych. Zmierzone również naprężenia własne po wykonaniu  $5 \times 10^6$  cykli obciążenia. Zaobserwowano zmniejszenie naprężeń własnych o ok. 200 MPa w stosunku do stanu początkowego. Relaksacja zależy od stosunku granicy plastyczności do wypadkowej wartości naprężeń. Przedstawiono wykresy prędkości rozwoju szczelin w funkcji długości szczelin dla próbki szlifowanej oraz próbki nagniatanej. W próbkach szlifowanych następuje szybki wzrost krótkich szczelin i tempo wzrostu pozostaje w przybliżeniu stałe. W próbce nagniatanej prędkość rozwoju szczelin wzrasta dla szczelin krótszych niż 0,3 mm, pozostaje stała dla zakresu długości szczelin 0,3–1 mm i następnie gwałtownie rośnie, gdy długość

szczelin przekracza 1 mm. Spadek prędkości rozwoju szczelin w próbkach nagniatanych przypisywany jest działaniu ściskania naprężeń własnych. Stwierdzono, że miejsce inicjacji szczelin o długości 0,3–1 mm zależy od położenia maximum naprężeń własnych rozciągających.

W próbkach nagniatanych i przeciążonych następuje prędkość rozwoju pęknięć o długości 0,3–1 mm jest on przypisywany redukcji obszaru wpływu naprężeń własnych rozciągających spowodowanej przez przeciążenie.

Jeśli występuje niewiele niepropagujących się pęknięć przy obciążeniu odpowiadającym wytrzymałości zmęczeniowej i przy obecności naprężeń własnych, stosuje się kryterium Goodmana do wyznaczania wytrzymałości zmęczeniowej. Średnie naprężenie w tym kryterium zastępuje się ustabilizowaną wartością naprężeń własnych. W przypadku, gdy w elemencie występuje duża ilość niepropagujących się pęknięć możliwe jest wyznaczenie trwałości zmęczeniowej przy pomocy współczynnika intensywności naprężeń, ale tylko wtedy, gdy szczeliny rozwijają się od powierzchni.

Podano wzory, które przedstawiają zakres współczynnika intensywności naprężeń,  $\Delta K_{eff}$  jako funkcję obciążenia nominalnego, naprężeń residualnych i geometrii karbu. W ogólnym przypadku wytrzymałość zmęczeniowa przy obecności niepropagujących się szczelin może być obliczona przy założeniu, że maksymalna długość szczelin jest osiągnięta, jeśli minimalna wartość  $\Delta K_{eff}$  staje się równa pewnej wartości progowej  $\Delta K_{eff,th}$ . Wartość  $\Delta K_{eff,th}$  stanowi charakterystykę danego materiału.

Porównano wytrzymałość zmęczeniową przewidzianą w ten sposób i otrzymaną doświadczalnie. Wykorzystane w badaniach próbki mają ujemne naprężenia własne w dnie karbu i powstają w nich niepropagujące się szczeliny przy obciążeniu odpowiadającym wytrzymałości zmęczeniowej. Dla tych próbek otrzymano dobrą zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych.

Metodę teoretycznej oceny wytrzymałości zmęczeniowej próbek z karbem, w którym występują naprężenia własne przedstawiono w pracy [62]. Metoda polegała na wyznaczeniu wartości naprężenia w dnie karbu (wykorzystano metodę Neubergera), a następnie zastosowaniu kryterium Goodmana, w którym uzależnione są od siebie wytrzymałość zmęczeniowa przy obciążeniu symetrycznym i asymetrycznym próbek gładkich:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - m\sigma_m, \quad (5.5)$$

gdzie  $\sigma_m$  jest naprężeniem średnim, a  $m$  jest miarą wrażliwości materiału na naprężenia średnie.



Przyjęto, że wpływ naprężeń własnych polega na zmianie symetrii lokalnych naprężeń w dnie karbu przy obciążeniach cyklicznych.

Wykonano badania zmęczenia na próbkach z karbem i z dwoma rodzajami warstw kulowaną i nagniataną. Próbki były zginane trójpunktowo lub ściskane i rozciągane. Stwierdzono, że naprężenia własne szybko relaksują przy cyklicznym ściskaniu-rozciąganiu, natomiast przy cyklicznym zginaniu zostają niemal niezmienione. Przedstawiono profile naprężeń własnych zmierzone doświadczalnie przed i po obciążeniach cyklicznych.

Porównano, przewidywane i otrzymane doświadczalnie wartości wytrzymałości zmęczeniowej próbek. Wartości otrzymane teoretycznie były w przypadku próbek kulowanych i nagniatanych większe niż wyznaczone doświadczalnie, błąd względny wynosił 10-20%. Wskazano na pewne mankamenty proponowanego algorytmu. W omawianej stali w warstwie kulowanej, (kulowanie jest obciążeniem cyklicznym) granica plastyczności jest niższa niż pod warstwą, gdyż odpowiada materiałowi już obciążanemu cyklicznie. Efekt ten nie został uwzględniony w obliczeniach. Ponadto powinno się uwzględnić inną odporność zmęczeniową materiału warstwy.

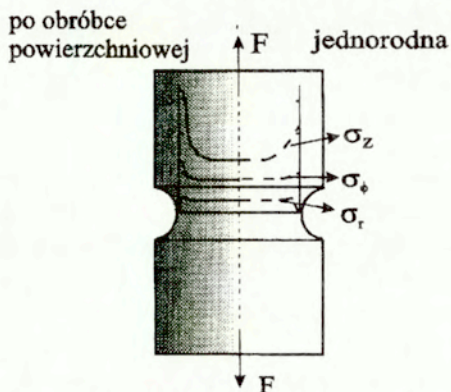
### 5.1.2. Proponowany model

W niniejszym rozdziale podjęto próbę teoretycznego określenia wytrzymałości zmęczeniowej elementów z warstwą wierzchnią. W tym celu wyznacza się najpierw stan naprężenia w warstwie i w rdzeniu, a następnie korzystając z wieloosiowych kryteriów zmęczeniowych ocenia się trwałość materiału w poszczególnych punktach przekroju próbki. Do obliczenia naprężeń stosujemy metodę elementów skończonych. Przykładem wykorzystania MES do obliczenia trwałości zmęczeniowej próbki z karbem i warstwą wierzchnią jest praca [70].

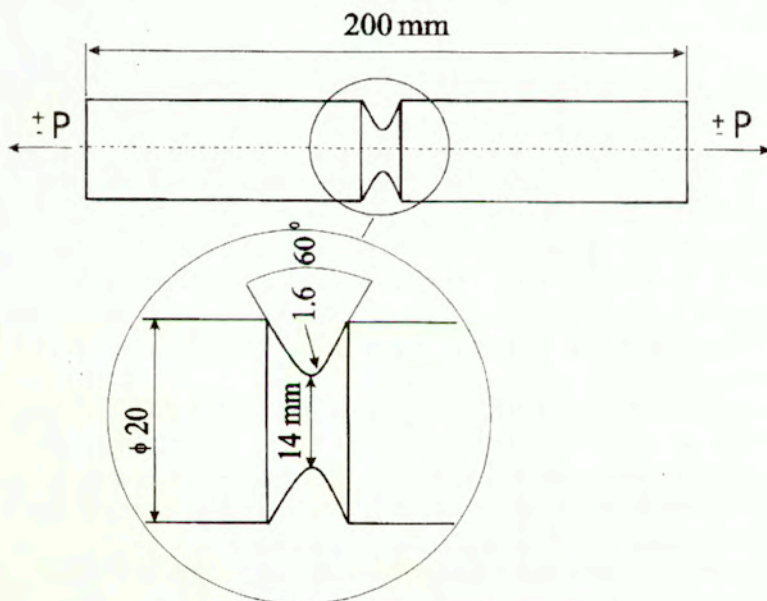
W obliczeniach korzystamy z modelu elementu z warstwą przedstawionego w poprzednich rozdziałach.

Stan naprężenia w przekroju poprzecznym osiowo-symetrycznej próbki z karbem przedstawia schematycznie rys.5.2. W przypadku próbki jednorodnej maksymalne wartości naprężeń występują w dnie karbu, przy czym jeśli w karbie występuje technologiczna warstwa wierzchnia, to koncentracja naprężeń w dnie karbu może być jeszcze większa, rys.5.2. W wyniku wykonanych analiz stanu naprężenia otrzymuje się pole naprężeń w całym przekroju próbki z karbem, jednak uwaga autora została skupiona na stanie naprężenia i odkształcenia w dnie karbu. Przedstawione niżej wykresy trajektorii naprężeń lub pętli histerezy dotyczą punktu położonego na

powierzchni lub w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni dna karbu. Są to miejsca krytyczne z punktu widzenia wytrzymałości zmęczeniowej materiału, gdyż tam zwykle występują wartości maksymalne interesujących nas składowych naprężeń i tam następuje inicjacja zniszczenia [63-66].



Rys. 5.2. Rozkład naprężeń w próbce z karbem jednorodnym i z warstwą.



Rys.5.3. Geometria badanej próbki z karbem

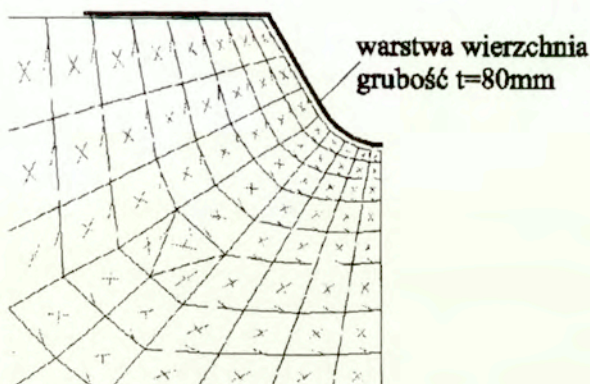
Rozpatrywane są dwa rodzaje karbu obrączkowego o różnych współczynnikach koncentracji naprężeń na elementach osiowo symetrycznych. Pierwszy z tych elementów przedstawiony jest na rys. 5.3. Współczynnik działania karbu dla tej próbki wynosi  $K_t = 2.14$ .

Siatkę podziału na elementy próbki z karbem z rys. 5.3 przedstawiono na rys. 5.4. Ze względu na symetrię przedstawiono ją dla 1/4 próbki.



Rys. 5.4 Siatka podziału na elementy.

Na rys. 5.5 przedstawiono fragment siatki w okolicach dna karbu oraz przekrój przez elementy membranowe, które służą do modelowania warstwy wierzchniej. Przyjęto, że warstwa wierzchnia jest jednorodna, a jej grubość wynosi  $80 \mu\text{m}$ .



Rys. 5.5. Model warstwy i rdzenia w dnie karbu.

## 5.2. Ewolucja stanów własnych - stan początkowy a stan ustalony w cyklicznie obciążanym elemencie z karbem i warstwą wierzchnią.

Do analizy problemu wytrzymałości zmęczeniowej elementów z karbem i warstwą wierzchnią konieczne jest wyznaczenie stanu naprężenia w warstwie i w rdzeniu w dniu karbu, gdyż właśnie od tego miejsca rozpoczyna się najczęściej zniszczenie elementu. Mając właściwie określony stan naprężenia, dla określenia trwałości danego elementu można stosować różne kryteria zmęczeniowe, w których zmęczenie materiału uzależnia się od maksymalnych naprężeń stycznych lub normalnych, lub od energii dyssypowanej na cyklu. Stan naprężeń w dniu karbu jest zwykle sumą naprężeń od obciążenia i naprężeń własnych, gdyż w elementach z karbem, w przypadku niewielkiego nawet uplastycznienia w dniu karbu, stan własny jest generowany przez sam proces obciążenia nawet wtedy, gdy materiał jest jednorodny. W elementach z warstwą początkowe naprężenia własne generowane są już w procesie technologicznym, jednak podlegają modyfikacji w trakcie obciążeń cyklicznych. Ewolucja naprężeń własnych powinna więc być uwzględniana w obliczeniach wytrzymałościowych.

W niniejszym rozdziale zostanie omówiony problem ewolucji naprężeń własnych, oraz naprężeń całkowitych w dniu karbu próbki przedstawionej na rys. 5.3, modelowanej według rys 5.4, 5.5. Przedstawione tu obliczenia mają na celu jakościową ocenę wpływu parametrów warstwy na ewolucję naprężeń w procesie obciążenia cyklicznego, dlatego przyjęto możliwie najprostszy model warstwy. Nie uwzględniono gradientu własności warstwy, przyjęto, że warstwa jest jednorodną cienką powłoką. Pod pojęciem parametrów (własności) warstwy rozumiemy tu krzywe wzmocnienia plastycznego warstwy, grubość warstwy, początkowy stan naprężenia. Obserwacja lokalnych pętli histerezy i trajektorii naprężeń w dniu karbu dla różnych parametrów warstwy umożliwi wykorzystanie znanych kryteriów zmęczeniowych do oszacowania wpływu tych parametrów na trwałość danego elementu. Dzięki temu możliwa jest również ocena wpływu stanów początkowych na trwałość elementu.

Przy założonym tu jednopowłokowym modelu warstwy (przyjmujemy, że warstwa jest jednorodna) do przeprowadzenia symulacji potrzebne są parametry dwóch materiałów: materiału rdzenia i materiału warstwy. W przypadku próbki jednorodnej w warstwie i w rdzeniu mamy jednakowe materiały. Analizowano materiały, dla których po pewnej liczbie cykli charakteryzujących się cyklicznym wzmocnieniem lub osłabieniem występuje ustalona pętla histerezy. Podstawowym badanym materiałem jest stal 18G2A,

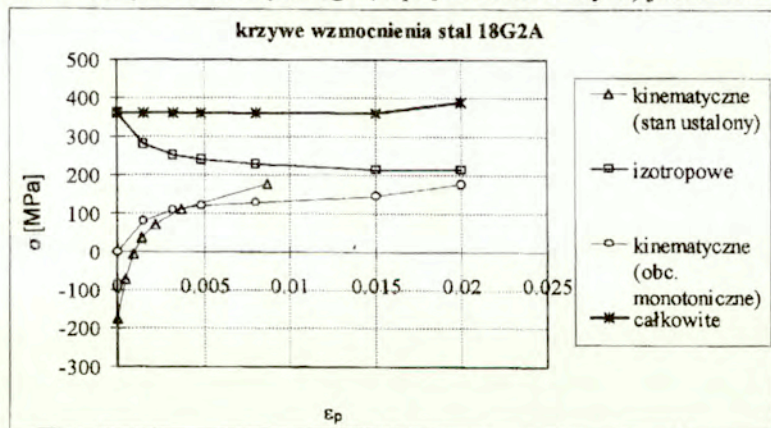
która wykazuje cykliczne osłabienie. Krzywe wzmocnienia dla tej stali przedstawiono na rys.5.6, zostały one zaczerpnięte z pracy [71].

Do symulacji komputerowej przyjmowano różne warianty parametrów warstwy:

- przyjmowano, że w warstwie istnieje pewien stan własny, natomiast pozostałe parametry są takie jak w rdzeniu (stal 18G2A).
- przyjmowano, że w warstwie występuje pewien hipotetyczny materiał, którego parametry generowano na bazie parametrów (krzywych wzmocnienia) dla stali 18G2A, oraz pewien stan własny

Część parametrów wzmocnienia tego nowego materiału pozostawiano jak dla stali 18G2A, a część modyfikowano tak, aby uzyskać różne warianty wzmocnienia kinematycznego i izotropowego. Dobór parametrów w tym tworzonym materiale był jednak zawsze taki, by uzyskać ustabilizowaną pętlę histerezy, to znaczy aby możliwa była analiza stanów ustalonych. Parametry materiałowe zmieniano jedynie w warstwie wierzchniej, natomiast rdzeń próbek miał we wszystkich omawianych przypadkach takie parametry jak stal 18G2A. W ten sposób badano wpływ parametrów wzmocnienia warstwy na ewolucję jej stanów własnych.

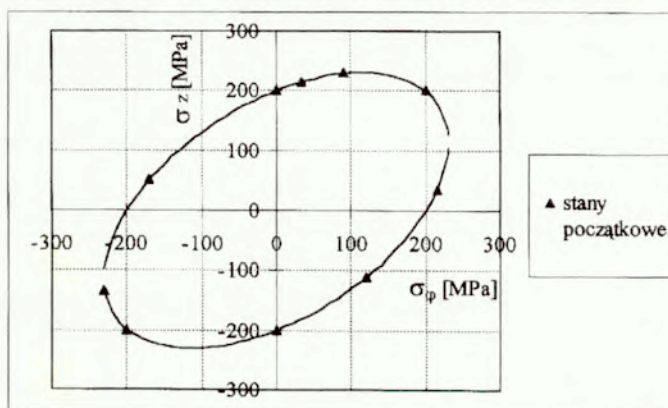
Należy zaznaczyć, że stan naprężeń przedstawiany na wykresach w tym rozdziale jest stanem lokalnym w dnie karbu i może się zmieniać, pomimo, że amplituda obciążenia zewnętrznego (naprężeń nominalnych) jest stała.



Rys. 5.6. Krzywe wzmocnienia dla stali 18G2A

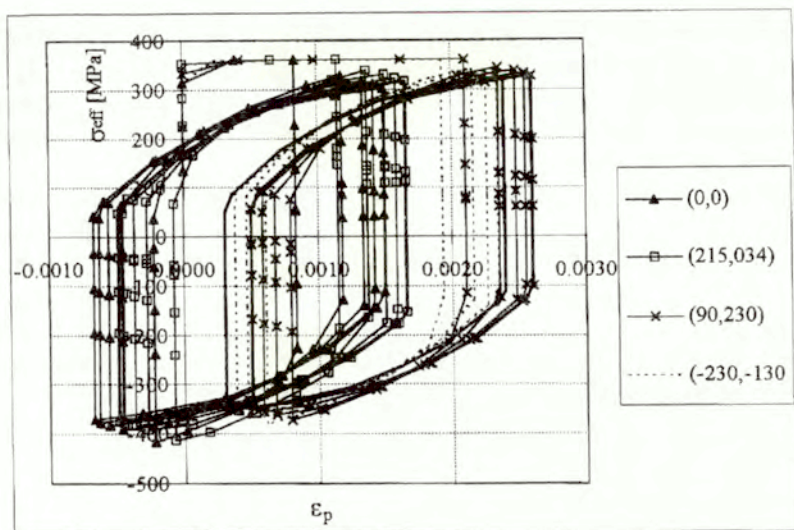
## Badanie ewolucji różnych stanów początkowych

Ewolucja naprężeń własnych była badana w warstwie wierzchniej w dnie karbu, rys. 5.3. Początkowo założono, że warstwa różni się od rdzenia jedynie stanem własnym, oraz przyjęto amplitudę obciążenia  $\sigma_\alpha = \pm 115$  MPa, ( $\sigma_\alpha$  oznacza średnie naprężenie na końcach próbki). W trakcie badań symulacyjnych amplituda, oraz parametry warstwy były zmieniane dla pokazania różnych ciekawych efektów. Dla przyjętych wartości amplitudy obciążenia amplituda efektywnego odkształcenia plastycznego w dnie karbu mieści się w zakresie 0.001-0.004 co odpowiada obciążeniom niskocyklicznym. Rozpatrywane początkowe stany naprężeń przedstawiono na płaszczyźnie naprężeń głównych na rys.5.7. Wykonano obliczenia dla takich stanów początkowych, które leżały na jednej elipsie o promieniu 200 MPa, zatem odpowiadały one tej samej wartości naprężenia zredukowanego.



Rys.5.7. Stany początkowe odpowiadające tej samej wartości naprężeń zredukowanych.

(składowe  $\sigma_\varphi$  i  $\sigma_z$  są jednocześnie naprężeniami głównymi,  $\sigma_\varphi$  jest odkładane na osi poziomej). Stan początkowy oznaczamy dwiema liczbami w nawiasie, pierwsza z nich przedstawia wartość składowej naprężenia  $\sigma_\varphi$ , druga  $\sigma_z$ , np. (-170,50) oznacza  $\sigma_\varphi = -170$  MPa,  $\sigma_z = 50$  MPa.



Rys. 5.8. Pętle histerezy dla różnych stanów początkowych

Dla wszystkich układów naprężeń początkowych uzyskano w dniu karbu jednakowe co do pola pętli histerezy naprężeń zredukowanych. Na rys. 5.8 przedstawiono dla kilku stanów początkowych z rys. 5.7 ewolucje pętli histerezy (w funkcji zredukowanego odkształcenia plastycznego) od początku obciążenia aż do uzyskania cyklu ustalonego, co w tym przypadku następuje po czterech-sześciu cyklach. Ostatnia pętla każdego wykresu jest już pętlą ustaloną, pętli ustalone są zaznaczone na rys 5.8 pogrubioną linią.

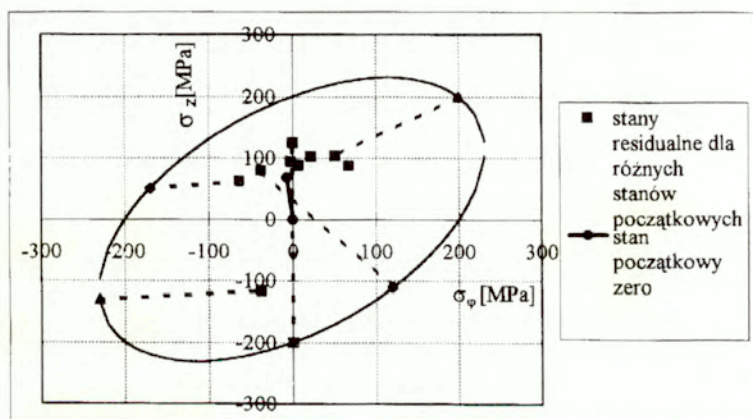
Pętli odpowiadające różnym stanom początkowym są nieco przesunięte względem siebie wzdłuż osi odkształceń plastycznych,  $\epsilon_p$ . Amplituda odkształceń jest w przybliżeniu zawsze jednakowa, natomiast różnym stanom własnym odpowiadają różne wartości odkształceń średnich i maksymalnych. Amplituda naprężeń w pętlach jest również jednakowa dla wszystkich analizowanych stanów początkowych, a pętli różnią się od siebie wartością średniego naprężenia. Dla różnych stanów własnych różnice naprężeń średnich są niewielkie, natomiast różnice średnich odkształceń są stosunkowo duże.

Naprężenia reszkowe (po odciążeniu) dla różnych stanów własnych (rys. 5.7) przedstawiono na płaszczyźnie naprężeń głównych na rys. 5.9.

Pomimo, że stany początkowe leżą na jednej wspólnej elipsie Misesa (200 MPa), to stany końcowe naprężenia nie leżą już na wspólnej elipsie, lecz

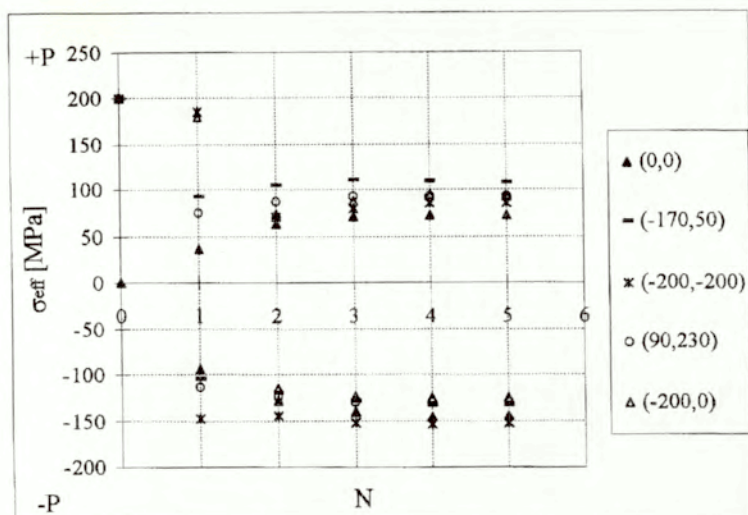
są rozrzucone w dość szerokim pasie 70 - 100 MPa. W przeciwieństwie do tego, co można zaobserwować w przypadku cyklicznego skręcania [72], dla ściskania-rozciągania korelacja (położenie na wspólnej elipsie) naprężeń początkowych nie pociąga za sobą korelacji odpowiadających im naprężeń resztkowych w stanie ustalonym.

Relaksację naprężeń początkowych można również przedstawić w układzie, w którym na osi poziomej jest liczba cykli  $N$ , a na osi pionowej w jej części dodatniej są wartości zredukowanych naprężeń resztkowych po półcyklach dodatnich,  $+P$ , a w części ujemnej - po półcyklach ujemnych,  $-P$ . W takim układzie przedstawiono na rys. 5.10 ewolucję naprężeń resztkowych dla kilku stanów początkowych wybranych z rys. 5.7, oraz dodatkowo dla zerowego stanu początkowego.



Rys.5.9. Początkowe i resztkowe stany naprężenia



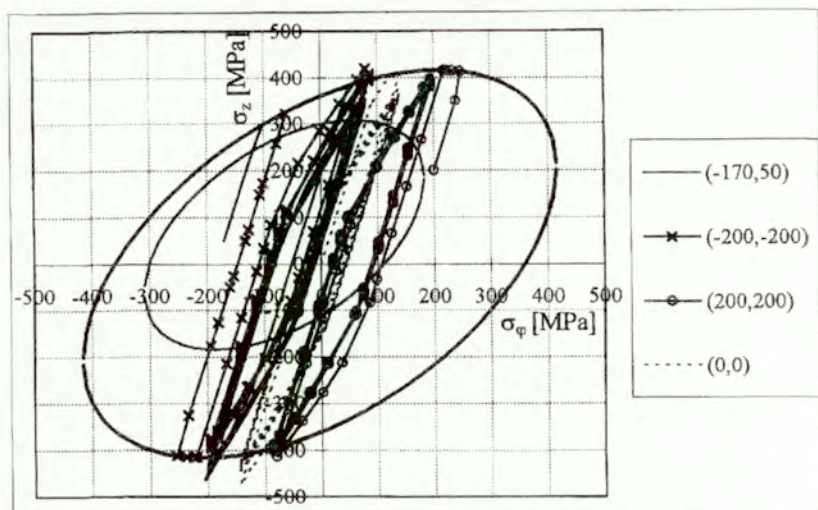


Rys. 5.10. Relaksacja naprężeń początkowych dla stali 18G2A.

Widzimy, że naprężenia resztkowe w dniu karbu są generowane przez sam proces obciążenia. Nawet w przypadku zerowych naprężeń początkowych resztkowe naprężenia zredukowane w dniu karbu osiągają wartość 70MPa po półcyklu zakończonym na  $+P$  oraz wartość 150 MPa po półcyklu zakończonym na  $-P$ . Dla analizowanej amplitudy obciążenia (115 MPa), naprężenia resztkowe w dniu karbu w niewielkim stopniu zależą od stanu początkowego.

Ciekawa jest również zależność trajektorii naprężeń w przestrzeni naprężeń głównych od stanu początkowego. W zależności od wartości naprężeń początkowych trajektoria ustalona zajmuje znacznie różniące się od siebie położenia wzdłuż osi  $\sigma_\varphi$ , natomiast nieznacznie przesuwa się wzdłuż osi  $\sigma_z$ , rys. 5.11. Na rys. 5.11 zaznaczono również powierzchnie plastyczności Misesa w stanie początkowym i w stanie ustalonym po odciążeniu, promienie tych powierzchni są zgodne z prawem ewolucji przedstawionym na rys. 5.6.

Zatem w wyniku dość znacznych zmian stanu początkowego następuje znaczna zmiana naprężenia średniego  $\sigma_\varphi$ , natomiast średnie naprężenie  $\sigma_z$  pozostaje praktycznie niezmienione.

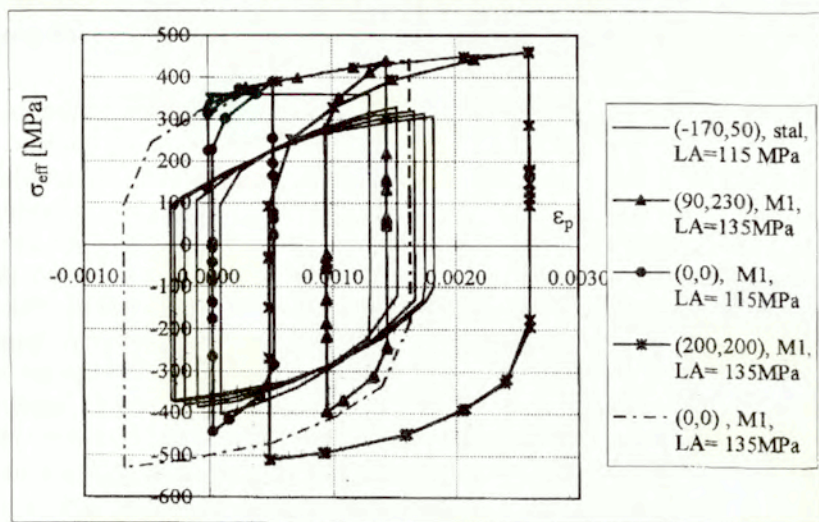


Rys.5.11. Trajektorie naprężeń na płaszczyźnie głównej dla różnych stanów początkowych.

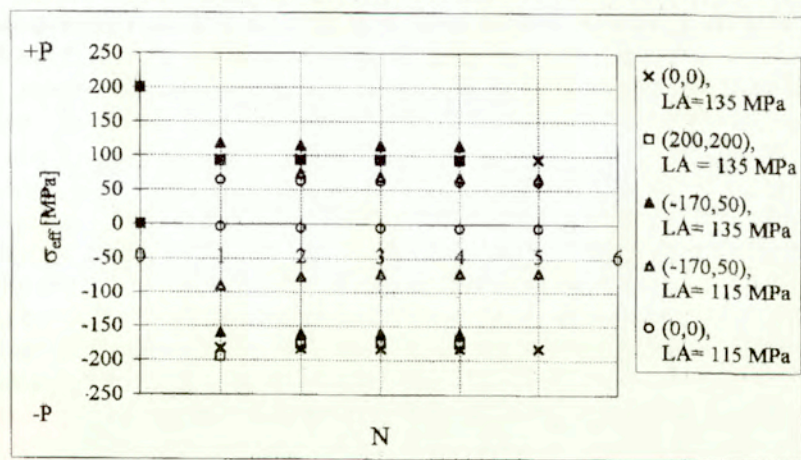
#### Badanie wpływu wzmocnienia izotropowego

Zbadano również wpływ wzmocnienia izotropowego w warstwie wierzchniej na relaksację naprężeń początkowych. Wykonano symulacyjne obciążenie próbek z karbem, przy czym w warstwie wierzchniej przyjęto materiał (nazywany jest dalej M1) o takich samych parametrach jak stal 18G2A (rys.5.6) z tą różnicą, że krzywa wzmocnienia izotropowego jest równoległa do osi odkształceń i przebiega na poziomie 360 MPa. Oznacza to, że powierzchnia płynięcia nie zmienia swego promienia w trakcie obciążenia cyklicznego. W takim przypadku stan ustalony w warstwie występuje praktycznie już w drugim cyklu obciążenia. Całkowite wzmocnienie (kinematyczne plus izotropowe) w tym materiale jest większe niż w przypadku próbki ze stali 18G2A. Dla próbek z warstwą z materiału M1 dokonano symulacji obciążeń cyklicznych przyjmując kilka różnych stanów początkowych z rys. 5.7 i dwie różne wartości amplitudy obciążenia, oznaczone na rysunkach jako „LA”. Jedna wartość równa 115 MPa jest taka sama jak w przypadku próbki ze stali 18G2A. Jednak w dnie karbu powstają wówczas mniejsze odkształcenia plastyczne, gdyż materiał M1 jest sztywniejszy niż stal 18G2A. Dla porównania z tą stalą wykonano również obliczenia dla większej amplitudy obciążenia to jest 135 MPa. Dla tej amplitudy otrzymuje się podobne jak w stali odkształcenie plastyczne w dnie

karbu, któremu towarzyszy znacznie większa amplituda naprężenia. Pętle histerezy otrzymane dla tych amplitud przedstawiono na rys. 5.12.



Rys. 5.12 Pętle histerezy dla różnych amplitud dla stali i materiału M1



Rys. 5.13. Relaksacja naprężeń własnych w materiale M1

Relaksację naprężeń własnych w próbce z materiału M1 dla amplitudy obciążenia 115 MPa i 135 MPa i różnych stanów początkowych przedstawiono na rys. 5.13.

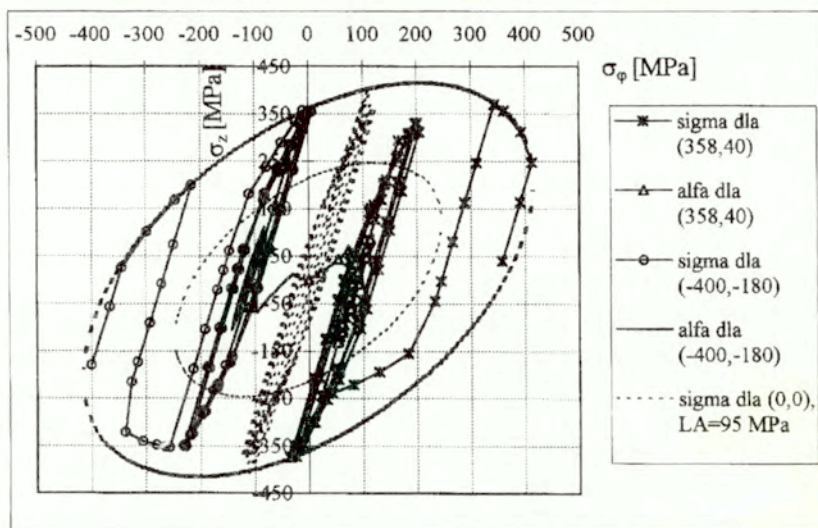
Widzimy, że podobnie jak w przypadku stali 18G2A, w materiale M1 przy większej amplitudzie obciążenia naprężenia resztkowe w stanie ustalonym w niewielkim stopniu zależą od stanu początkowego. Natomiast przy mniejszej amplitudzie obciążenia widać różnicę naprężeń resztkowych odpowiadających stanom początkowym (0,0) i (-170,50).

Interesująca jest również wzajemna zależność trajektorii naprężeń w warstwie i trajektorii powierzchni płynięcia. Zagadnienie to przebadano na przykładzie próbki ze stali 18G2A (jednakowe parametry materiałowe warstwy i rdzenia). W obliczonych przykładach stosowano amplitudę obciążenia 95.5MPa (naprężenie nominalne), co odpowiada sile 30 kN na końcach próbki. Jest to amplituda mniejsza niż ta, którą stosowano przy uzyskaniu wyników przedstawionych na rys.5.8 – 5.11 (115 MPa). Dla tej mniejszej amplitudy lepiej można porównać wpływ różnych stanów początkowych na ewolucję naprężeń, gdyż naprężenia generowane przez sam proces obciążenia są mniejsze i stan resztkowy w większym stopniu zależy od stanu początkowego. Rozpatrzono trzy stany początkowe: (-400,-180), (358,40), (300,158), które leżą na przesuniętej elipsie Misesa. Oznacza to, że dla tych trzech stanów początek uplastycznienia w warstwie następuje przy tym samym obciążeniu zewnętrznym, zatem jednakowa jest początkowa sprężysta część trajektorii naprężeń.

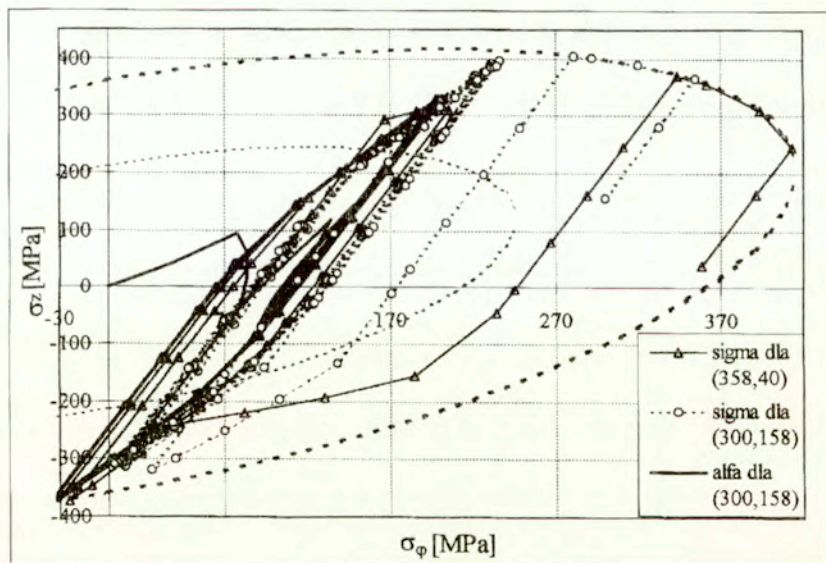
Na rys. 5.14 przedstawiono trajektorie naprężeń oraz trajektorię parametru  $\alpha$  (położenie środka powierzchni płynięcia) dla stanów (-400,-180), (358,40) i (0,0), oraz początkową i końcową powierzchnię plastyczności Misesa, przy czym powierzchnia końcowa jest przesunięta do początku układu współrzędnych. Trajektorja  $\alpha$  startuje zawsze od początku układu osi głównych. Widzimy, że od początku procesu obciążenia, w kolejnych cyklach punkt przedstawiający stan naprężeń i środek powierzchni płynięcia startując z różnych miejsc zbliżają się do siebie. W stanie ustalonym trajektorja naprężeń i trajektorja powierzchni płynięcia ustawiają się w ten sposób, że mają wspólny środek. Powierzchnia płynięcia przesuwa się w ten sposób, aby sprężysta część trajektorii naprężenia pokrywała się z największą średnicą elipsy, mającą ponadto ten sam kierunek co trajektorja. Dla przedstawionych tu bardzo odległych od siebie stanów początkowych otrzymuje się w stanie ustalonym stosunkowo niewielkie różnice w położeniu trajektorii względem osi  $\sigma_z$ , natomiast znaczne różnice w położeniu względem osi  $\sigma_\phi$ .

Na rys. 5.15 przedstawiono trajektorie naprężeń dla dwóch stanów początkowych (358,40), (300,158) położonych stosunkowo blisko siebie, oraz trajektorię parametru  $\alpha$  dla stanu (300,158).

Końcowa, ustalona trajektoria parametru  $\alpha$  przy starciu z punktu (358,40) leży bliżej początku układu (punktu startu trajektorii  $\alpha$ ) niż w



Rys. 5.14. Trajektorie naprężeń i parametru  $\alpha$  dla stali 18G2A

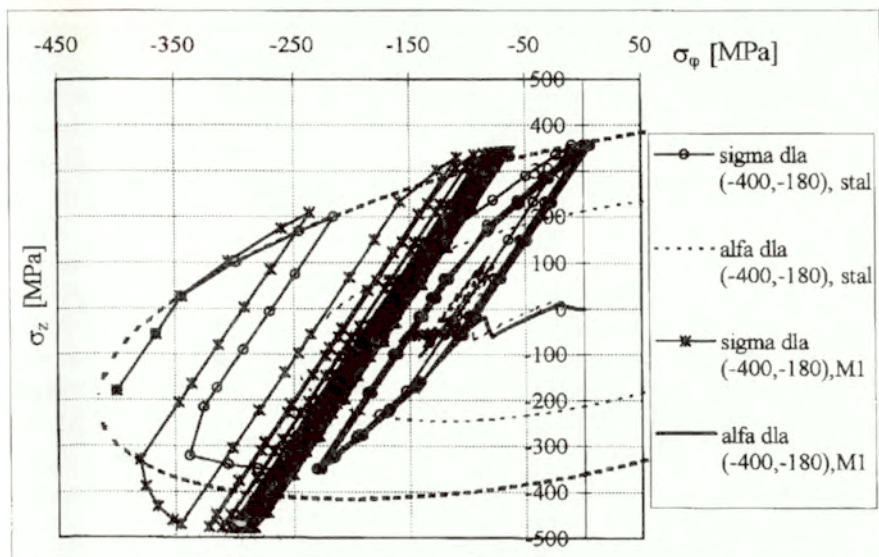


Rys. 5.15. Trajektorie naprężeń i parametru  $\alpha$  dla stali 18G2A

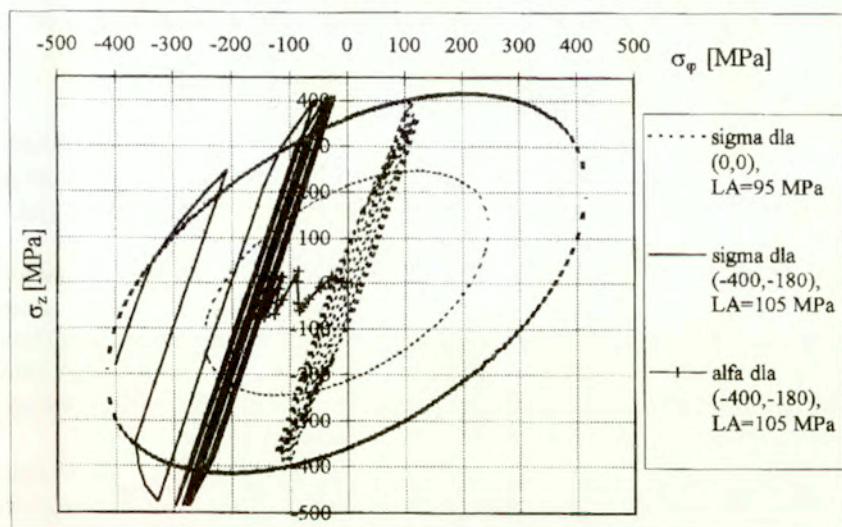
przypadku startu naprężeń z punktu (300,158) pomimo, że punkt startu naprężeń (358,40) leży dalej od początku układu niż punkt (300,158). Zatem ewolucja trajektorii zależy nie tylko od położenia punktu startu względem początku układu, ale również względem powierzchni płynięcia. Istotny jest tu punkt pierwszego przecięcia trajektorii naprężeń z powierzchnią płynięcia. Warto również zauważyć, że pomimo blisko położonych punktów startu trajektorii na rys. 5.15, zajmują one w stanie ustalonym znacznie różniące się położenia względem osi  $\sigma_z$ . Różnica (ok.100MPa) jest większa niż w przypadku trajektorii startujących z bardzo odległych punktów, rys.5.14. Trudno jest zatem przewidzieć położenie ustalonej trajektorii i w zasadzie w każdym przypadku należy wykonać odpowiednie obliczenia.

Dla wyjaśnienia wpływu wzmocnienia izotropowego na przebieg trajektorii naprężeń wykonano również symulacje cyklicznego obciążania próbki z karbem wykonanej z materiału M1 (brak wzmocnienia izotropowego). Przyjęto amplitudę obciążenia 95.5 MPa tak jak w przykładach przedstawionych na rys.5.14, 5.15. Otrzymałą trajektorię naprężenia przedstawiono na rys. 5.16. Z rys. 5.16 wynika, że w przypadku braku wzmocnienia izotropowego ustalona trajektoria naprężeń jest położona dalej od początku układu niż w przypadku stali 18G2A (symulacja dla materiału M1 nie została doprowadzona do stanu ustalonego, ze względu na długotrwałość obliczeń, ale na podstawie wykonanych wykresów na rys. 5.16 łatwo jest przewidzieć położenie trajektorii ustalonej). Ze względu na większe wzmocnienie całkowite tego materiału uplastycznienie w każdym cyklu jest bardzo małe, a co za tym idzie małe są również zmiany parametru  $\alpha$  i końcowa trajektoria jest bliska trajektorii sprężystej. Na rys. 5.16 można również zaobserwować, że niezależnie od wzmocnienia izotropowego powierzchnia płynięcia przesuwają się w ten sposób, aby w stanie ustalonym sprężysta część trajektorii naprężenia pokrywała się z największą średnicą elipsy mającą ten sam kierunek co trajektoria. Trajektoria naprężeń i powierzchnia płynięcia dążą do takiego położenia, w którym jest najmniejsze odkształcenie plastyczne na cyklu ustalonym. Zauważmy również, że trajektoria ustalona dla materiału M1 leży całkowicie po stronie ujemnej osi  $\sigma_\varphi$  co oznacza, że maksymalna i minimalna wartość składowej  $\sigma_\varphi$  na cyklu są mniejsze od 0.

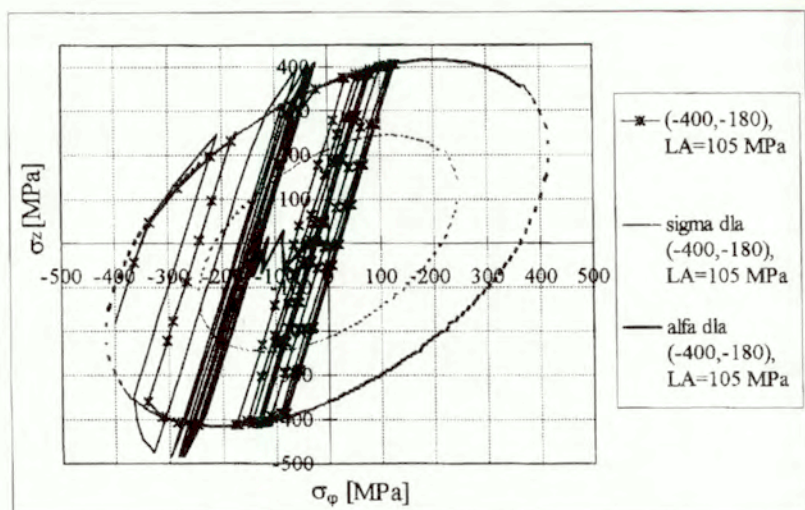
Dla próbki z materiału M1 można uzyskać stan ustalony przy stosunkowo niewielkiej liczbie cykli, jeśli powiększymy amplitudę obciążenia do ok. 105 MPa. Trajektorie naprężeń i parametru  $\alpha$  dla takiej amplitudy przedstawiono na rys. 5.17. Zauważmy, że przy amplitudzie 105 MPa w stanie ustalonym maksymalne i minimalne wartości  $\sigma_\varphi$  są ujemne.



Rys. 5.16. Trajektorie naprężeń i parametru  $\alpha$  dla materiału M1 i stali 18G2A przy tym samym stanie początkowym (-400,-180).



Rys. 5.17. Trajektorie dla próbki z materiału M1 obciążanej z amplitudą 105 MPa (dla stanu początkowego (0,0) amplituda 95.5 MPa)



Rys. 5.18. Porównanie trajektorii dla próbek z materiału idealnie plastycznego, (M2) i materiału ze wzmocnieniem kinematycznym (M1).

### Badanie wpływu wzmocnienia kinematycznego.

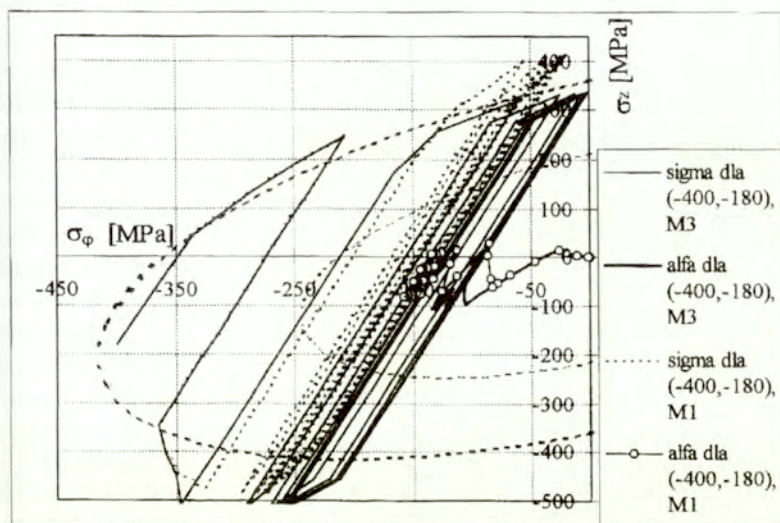
Na rys. 5.18 przedstawiono porównanie trajektorii naprężeń w warstwie dla próbki z materiału M1 (zerowe wzmocnienie izotropowe), oraz z materiału oznaczonego M2, w którym zarówno wzmocnienie izotropowe jak i kinematyczne jest równe zero (idealna plastyczność).

W przypadku materiału idealnie plastycznego ustalona trajektoria naprężeń zajmuje takie położenie, że jej środkiem jest środek układu współrzędnych (w przestrzeni naprężeń głównych), części sprężyste trajektorii są położone symetrycznie po obydwu stronach środka. Trajektoria dąży zatem do takiego położenia końcowego, by przy nieruchomej powierzchni płynięcia uzyskać możliwie małe odkształcenie plastyczne na cyklu ustalonym.

Interesujące jest również porównanie trajektorii naprężeń i parametru  $\alpha$  dla dwóch materiałów: M1, (brak wzmocnienia izotropowego, wzmocnienie kinematyczne jak w stali 18G2A, rys.5.6) oraz materiału, w którym występuje stałe wzmocnienie kinematyczne i brak wzmocnienia izotropowego, oznaczonym M3. W materiale M3 przyjęto, że krzywa wzmocnienia



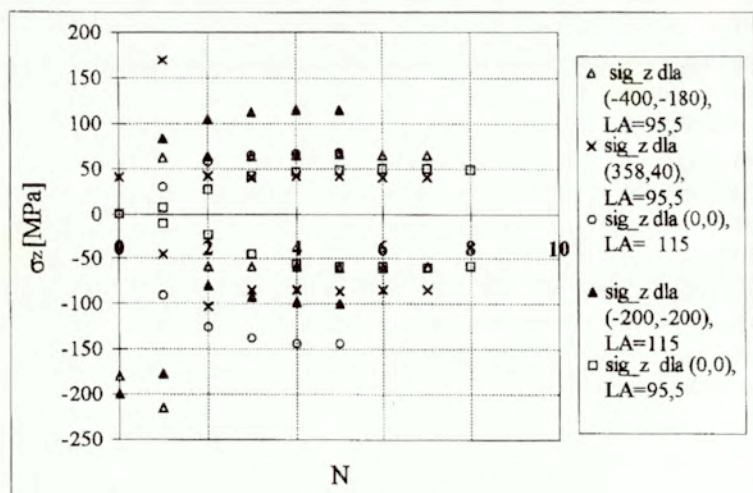
kinematycznego ma stałe nachylenie (zarówno w fazie monotonicznej jak i cyklicznej) i jest ono równe nachyleniu pierwszego odcinka monotonicznej krzywej wzmocnienia kinematycznego z rys. 5.6. Wyniki symulacji dla tych materiałów przedstawiono na rys. 5.19. Rysunek 5.19 ilustruje wpływ wzmocnienia kinematycznego w warstwie na ewolucję trajektorii. Widzimy, że początek trajektorii parametru  $\alpha$  jest identyczny dla obydwu materiałów, gdyż jednakowe są początkowe przebiegi krzywych wzmocnienia kinematycznego. Różnica zaczyna się w drugim półcyklu, w którym materiał o stałym wzmocnieniu kinematycznym (M3) podlega większej deformacji plastycznej. Wynika to z faktu, że całkowite wzmocnienie dla tego materiału jest mniejsze niż dla materiału M1. Końcowa trajektoria dla warstwy z materiału M3 znajduje się bliżej początku układu. Jednocześnie, ze względu na mniejsze całkowite wzmocnienie materiału M3 w fazie cyklicznej amplituda naprężenia  $\sigma_z$  w tym materiale jest mniejsza niż w materiale M1 pomimo takiej samej amplitudy obciążenia zewnętrznego.



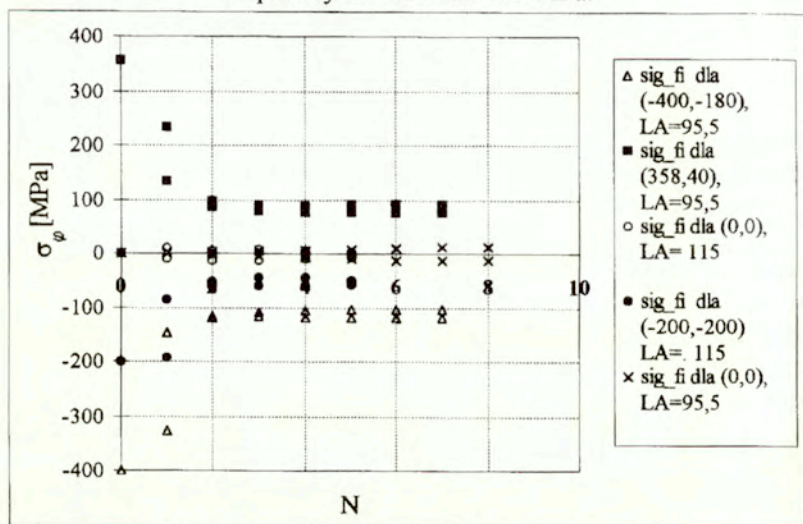
Rys.5.19. Porównanie trajektorii dla próbek z materiałów z zerowym wzmocnieniem izotropowym i różnymi krzywymi wzmocnienia kinematycznego

Dla zrozumienia ewolucji stanu naprężenia w warstwie istotne jest pokazanie ewolucji obydwu składowych naprężeń resztkowych w funkcji

liczby cykli. Ewolucję składowej  $\sigma_z$  dla różnych stanów początkowych przedstawiono na rys. 5.20, a składowej  $\sigma_\varphi$  na rys.5.21.



Rys. 5.20. Relaksacja składowej  $\sigma_z$  dla różnych stanów początkowych i amplitudy 95 MPa lub 115 MPa.



Rys. 5.21. Relaksacja składowej  $\sigma_\varphi$  dla różnych stanów początkowych i amplitudy 95 MPa lub 115 MPa.

Na rys. 5.20, 5.21 każdej liczbie  $N$  odpowiadają dwie wartości naprężeń resztkowych w warstwie wierzchniej - jedna w dodatnim półcyklu  $N$ -tego cyklu, druga w ujemnym półcyklu  $N$ -tego cyklu. Naprężenia resztkowe  $\sigma_z$  w stanie ustalonym w większym stopniu zależą od stanu początkowego niż naprężenia maksymalne i minimalne na cyklu, jak wynika na przykład z rys. 5.11, 5.14 - 5.17. Można stąd wyciągnąć wniosek, że maksymalne naprężenia w warstwie w stanie ustalonym nie są prostą sumą naprężeń resztkowych i naprężeń od obciążenia, ale ich wartość wynika również z oddziaływania podłoża (rdzenia). (Przypomnijmy, że wszelkie zmiany materiałowe dotyczą tu materiału warstwy, natomiast w rdzeniu materiał jest zawsze taki jak dla stali 18G2A.)

### 5.2.1 Wnioski

Problem ewolucji naprężeń własnych w cyklicznie obciążonym elemencie z karbem jest bardzo złożony. W takim elemencie, w przypadku niewielkiego nawet przekroczenia granicy plastyczności w dnie karbu stany własne naprężenia generowane są nawet przy zerowym stanie początkowym, przez sam fakt obciążenia cyklicznego. Te generowane naprężenia są tym większe im większa jest amplituda wymuszająca, czyli im większe jest uplastycznienie dna karbu. Jednocześnie, w przypadku różnych od zera naprężeń początkowych w miarę zwiększania amplitudy obciążenia, następuje intensywniejsza relaksacja tych naprężeń. Stan początkowy ulega pewnej modyfikacji, powstaje stan ustalony, który ze zwiększaniem amplitudy obciążenia staje się podobny do stanu ustalonego generowanego przez sam proces obciążenia, przy zerowych naprężeniach początkowych. Dla pewnej, dostatecznie dużej amplitudy obciążenia nie ma znaczenia czy stan początkowy jest zerowy, czy różny od zera, ustalony stan końcowy jest zawsze taki sam. Stanowi to pośrednie potwierdzenie faktu obserwowanego w doświadczeniach, że przy dużych amplitudach obciążenia (zmęczenie niskocykliczne) stan warstwy wierzchniej ma niewielki wpływ na trwałość elementu. Należy zwrócić uwagę, że w przypadku obciążeń cyklicznych naprężenia resztkowe pozostające po zakończeniu obciążenia półcyklem dodatnim różnią się od naprężeń po półcyklu ujemnym. Zatem naprężenia resztkowe w stanie ustalonym charakteryzowane są przez dwa punkty w przestrzeni naprężeń: jeden punkt reprezentuje wartości powstające po półcyklu dodatnim ( $+P$ ) a drugi - po półcyklu ujemnym ( $-P$ ).

### 5.3. Wpływ stanów początkowych i asymetrii cyklu na zmęczenie elementu z karbem - wykorzystanie kryterium zmęczeniowego z płaszczyzną krytyczną

#### 5.3.1. Kalibracja kryterium dla stali 18G2A

Do symulacji zmęczenia skorzystamy z kryterium z płaszczyzną krytyczną opisanego w rozdziale 3, (Glinka, Plumtree [57])

$$W^* = \frac{\Delta\gamma_{21}}{2} \frac{\Delta\sigma_{21}}{2} \left[ \frac{1}{1 - \sigma_{21}^{max} / \tau_{f'}} + \frac{1}{1 - \sigma_{22}^{max} / \sigma_{f'}} \right] \quad (5.7)$$

Aby korzystać z tego kryterium konieczne jest wyznaczenie zależności parametru uszkodzeń od liczby cykli, czyli krzywej  $W^* - N$ , dla konkretnego materiału, w naszym przypadku jest to stal 18G2A. Krzywą  $W^* - N$  wyznaczono korzystając z zależności  $\Delta\varepsilon - N$  oraz  $\Delta\sigma - \Delta\varepsilon$ , które dla stali 18G2A poddanej jednoosiowemu rozciąganiu podane są w literaturze.

W pracy [73] można znaleźć dla stali 18G2A parametry krzywej zmęczeniowej dla jednoosiowego rozciągania (Morrowa i Mansona-Coffina):

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_{f'}}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_{f'} (2N_f)^c, \quad (5.8)$$

$$\sigma_{f'} = 1081; \quad \varepsilon_{f'} = 0.18; \quad c = -0.6, \quad b = -0.120,$$

oraz parametry cyklicznej krzywej opisanej równaniem Ramberga-Osgooda

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n'} \quad K' = 1412, \quad n' = 0.21 \quad (5.9)$$

Kalibracja kryterium (5.7) składa się z następujących etapów:

- wyznaczenie na podstawie wzorów (5.8) i (5.9) zakresów składowej normalnej odkształcenia i naprężenia  $\Delta\varepsilon_{22}(N)$ ,  $\Delta\sigma_{22}(N)$  dla danego  $N$ , (indeksy  $\bullet_{22}$  oznaczają składowe w kierunku jednoosiowego rozciągania)
- obliczenie  $\Delta\sigma_{12} = \Delta\sigma_{22} / 2$
- obliczenie części sprężystej i plastycznej zakresu odkształcenia

$$\Delta\varepsilon_{22}^p = \Delta\varepsilon_{22} - \frac{\Delta\sigma_{22}}{E} \quad \Delta\varepsilon_{22}^e = \frac{\Delta\sigma_{22}}{E}$$

- obliczenie efektywnego współczynnika Poissona

$$v^{eff} = \frac{v^e \Delta \varepsilon_{22}^e + \Delta \varepsilon_{22}^P}{\Delta \varepsilon_{22}}$$

- dla stali 18G2A przyjęto  $v^e = 0.3$ ,  $v^P = 0.5$
- obliczenie pozostałych składowych odkształcenia

$$\Delta \varepsilon_{33} = \Delta \varepsilon_{11} = -v^{eff} \Delta \varepsilon_{22}$$

- obliczenie zakresu odkształcenia i naprężenia ścinającego (pamiętając, że kierunek rozciągania  $\bullet_{.22}$  jest kierunkiem głównym)

$$\Delta \gamma_{12} = 2\Delta \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} = \Delta \varepsilon_{22}(1 + v^{eff}) / 2$$

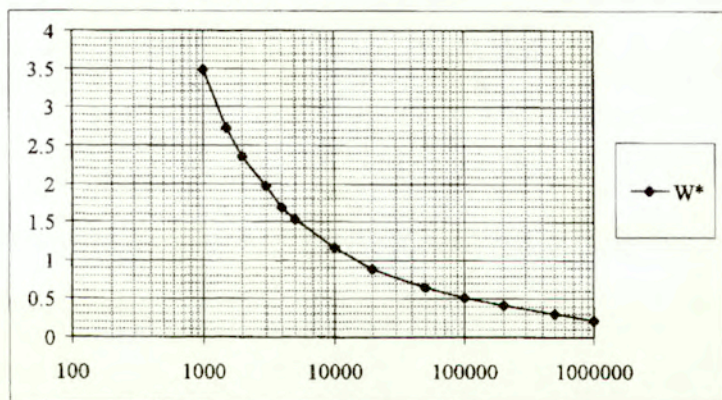
- obliczenie maksymalnych wartości naprężenia ścinającego i normalnego

$$\sigma_{22}^{max} = \Delta \sigma_{22} / 2$$

$$\sigma_{21}^{max} = \Delta \sigma_{21} / 2 = \Delta \sigma_{22} / 4$$

- obliczenie wartości parametru uszkodzeń  $W^*$  dla danej liczby cykli  $N$  zgodnie z wzorem (5.7).

Wyznaczoną przy pomocy opisanego wyżej algorytmu krzywą  $W^*(N)$  dla stali 18G2A przedstawiono na rys. 5.22.



Rys. 5.22 Parametr uszkodzeń dla stali 18G2A

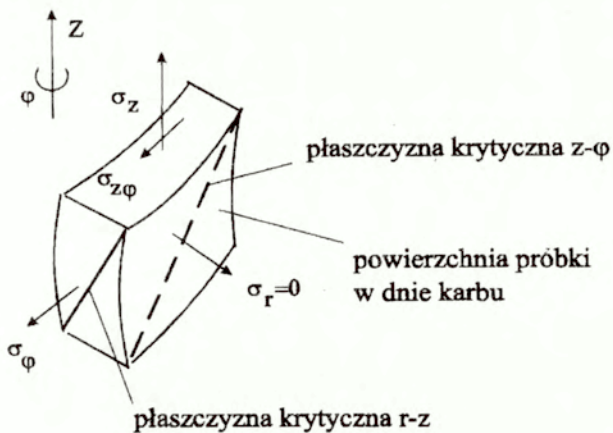
### 5.3.2. Wpływ stanów początkowych na trwałość zmęczeniową elementu z warstwą wierzchnią

Korzystając z wykalibrowanego w poprzednim rozdziale kryterium zmęczeniowego wyznaczono krzywe zmęczeniowe dla próbki z karbem i warstwą wierzchnią przedstawionej na rys. 5.3. Dla porównania wyznaczono również krzywą zmęczeniową dla próbki jednorodnej. W obliczeniach przyjęto, że zniszczenie rozpoczyna się od dna karbu i wyznaczone krzywe zmęczeniowe odpowiadają wyężeniu materiału w dnie karbu. Jak wynika z przeprowadzonych w punkcie 5.2 analiz stanu naprężenia, w dnie karbu są dwie niezerowe składowe tensora naprężenia  $\sigma_\varphi$  i  $\sigma_z$ , natomiast składowa  $\sigma_r=0$ . Są to jednocześnie składowe główne. W zależności od układu wartości  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\varphi$  płaszczyzna krytyczna w dnie karbu może pokrywać się z płaszczyzną  $r$ - $z$ , na której maksymalne naprężenie ścinające jest równe  $\left| \frac{\sigma_z - \sigma_r}{2} \right| = \left| \frac{\sigma_z}{2} \right|$ , lub z płaszczyzną  $\varphi$ - $z$ , na której maksymalne naprężenie ścinające jest równe  $\frac{\sigma_z - \sigma_\varphi}{2}$ , rys. 5.23.

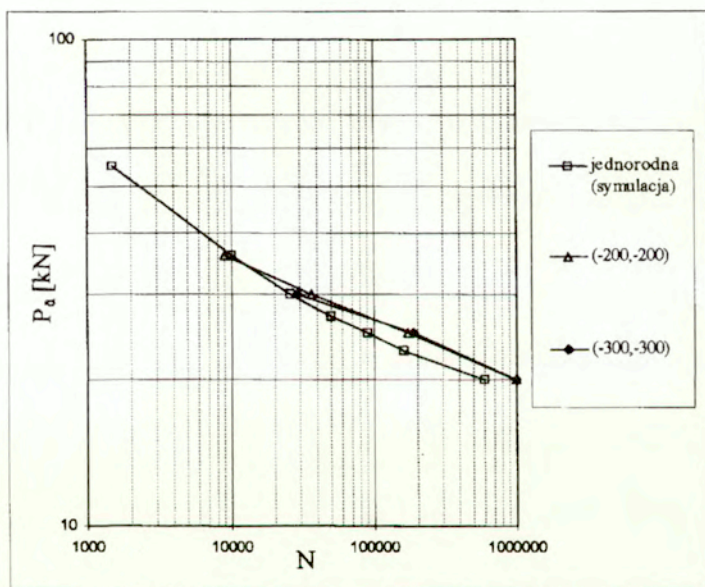
Dla danej ścieżki obciążenia płaszczyzną krytyczną jest ta, dla której wartość parametru uszkodzeń  $W^*( )$  jest większa. W przypadku próbki jednorodnej bez naprężeń własnych w warstwie powierzchniowej  $\sigma_r=0$  natomiast  $\sigma_\varphi > 0$  o ile  $\sigma_z > 0$ , rys. 5.11. Zatem największa wartość naprężeń stycznych w takiej próbce występuje na płaszczyźnie  $r$ - $z$  i jednocześnie na tej płaszczyźnie parametr uszkodzeń przyjmuje największą wartość.

W przypadku, gdy w warstwie są jakieś niezerowe naprężenia własne i ich układ jest taki, że  $\sigma_\varphi^{max} < 0$  oraz  $\sigma_z^{max} > 0$ , wtedy maksymalne naprężenie styczne występuje w płaszczyźnie  $z$ - $\varphi$ . W takich przypadkach należy zawsze sprawdzić wartość parametru uszkodzeń w dwóch płaszczyznach  $z$ - $\varphi$  i  $r$ - $z$  a następnie przyjąć wartość większą. Stosując ten sposób postępowania wyznaczono krzywe zmęczeniowe dla trzech przypadków: próbki z karbem jednorodnej, oraz z warstwą wierzchnią, w której występowały dwa początkowe stany naprężeń  $(-200,-200)$  i  $(-300,-300)$ . Krzywe te zostały przedstawione na rys. 5.24.

Część danych wykorzystanych do wyznaczenia krzywych z rys. 5.24. przedstawiono w tab. 5.1. Okazuje się, że na przykład w przypadkach 3, 4, 6 maksymalna wartość parametru uszkodzeń jest w płaszczyźnie  $r$ - $z$  pomimo, że maksymalne naprężenia ścinające występują w płaszczyźnie  $z$ - $\varphi$ .



Rys. 5.23 Możliwe płaszczyzny krytyczne w dnie karbu.



Rys. 5.24 Krzywe zmęczeniowe dla różnych stanów początkowych (siła  $P=100\text{kN}$  odpowiada naprężeniu 314.16 MPa na końcach próbki)

Tabela 5.1

Lp	Amplituda stan początkowy	Obciążenie +P			Obciążenie -P			Obciążenie +P			Obciążenie -P		
		$\sigma_z$	$\sigma_p$	$\sigma_z$	$\sigma_\phi$	$\sigma_{zp}$	$\sigma_{tz}$	$\gamma_{zp}$	$\gamma_{tz}$	$\sigma_{zp}$	$\sigma_{tz}$	$\gamma_{zp}$	$\gamma_{tz}$
1	(-200,-200) 95,5 MPa	302	33	-394	-198	151		0,0016		197	0,00148		
2	(-200,-200) 79,8 MPa	235	-5,8	-392	-193	121				100	0,00084		0,00103
3	(-200,-200) 63,66 MPa	139	-97	-413	-244	118		0,00064		84,5	0,000642		0,00058
4	(-300,-300) 79,8 MPa	226	-27,2	-395	-214	126		0,00081		91	0,00083		0,001007
5	(-300,-300)	301	16,8	-404	-222					202			0,00149
6	(-300,-300) 63,66 MPa	143	-120	-408	-266	132		0,00063		71	0,000647		0,00058



Porównując wykresy na rys. 5.24 można zauważyć, że ściskające naprężenia własne w warstwie powodują niewielką poprawę wytrzymałości zmęczeniowej próbek dla amplitud obciążenia mniejszych niż 95,5 MPa ( $P_a=30KN$ ). Poprawa trwałości jest tym większa im mniejsza jest amplituda obciążenia. Wynik ten jest jakościowo zgodny z badaniami doświadczalnymi, w których wpływ warstwy można zaobserwować w zakresie wysokocyklicznym. Trzeba pamiętać, że w rzeczywistych warstwach, na przykład kulowanych modyfikowane są nie tylko naprężenia własne, ale również krzywe wzmocnienia plastycznego. Ponadto rzeczywista warstwa charakteryzuje się inną odpornością na uszkodzenia niż rdzeń, stąd dla warstwy należałoby przyjąć inny wykres parametru uszkodzeń. W przeprowadzonych tu badaniach symulacyjnych warstwa wierzchnia ma te same parametry materiałowe co rdzeń, a różni się od rdzenia jedynie wartością naprężeń własnych. Widzimy, że w przypadku takich warstw wzrost (co do wartości bezwzględnej) naprężeń ściskających powyżej pewnego poziomu nie powoduje już wzrostu trwałości zmęczeniowej, nawet w zakresie wysokocyklicznym. Dla analizowanej próbki poziom ten to ok. -200 MPa.

### 5.3.3. Wpływ asymetrii cyklu na trwałość zmęczeniową elementu z karbem.

Z asymetrią cyklu obciążenia jednorodnych elementów gładkich mamy do czynienia wtedy, gdy współczynnik  $R = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \neq -1$ . W przypadku elementu z karbem należy rozróżnić asymetrię obciążenia wymuszającego (na końcach próbki) oraz asymetrię lokalnych naprężeń w dnie karbu. Na podstawie przebiegu wykresów na rys. 5.8, 5.11 możemy stwierdzić, że nawet gdy siły wymuszające są symetryczne  $\pm P$  naprężenia w dnie karbu w stanie ustalonym nie wykazują symetrii. Naprężenia zredukowane (rys. 5.8) są równe ok. 320 MPa dla siły  $+P$  oraz około 380 MPa dla siły  $-P$ , natomiast poszczególne składowe przyjmują wartości  $\sigma_x=380$  MPa dla siły  $+P$  i  $\sigma_x=-410$  MPa dla siły  $-P$ , a składowa  $\sigma_\varphi$  zmienia się w sposób symetryczny na cyklu i jest równa  $\pm 140$  MPa dla sił  $\pm P$ .

Asymetria naprężeń lokalnych w dnie karbu może wynikać zarówno z asymetrii obciążenia wymuszającego jak i z istnienia naprężeń początkowych. Wpływ naprężeń własnych na lokalną asymetrię cyklu w dnie karbu możemy określić na podstawie wykresów przedstawionych w rozdziale 5.2. Zapisane tam uwagi odnoszące się do ewolucji naprężeń resztkowych mogą być również zastosowane do problemu lokalnej asymetrii cyklu naprężeń.

W przypadku asymetrii zewnętrznego obciążenia wymuszającego mamy do czynienia z podobnymi efektami jak w przypadku niezerowych stanów początkowych. Pomimo braku symetrii sił obciążających, w wyniku relaksacji naprężeń w dnie karbu lokalny stan naprężenia może pozostać taki jak przy wymuszeniu symetrycznym.

Dla pokazania wpływu asymetrii cyklu wykonano obliczenia dla, kilku amplitud siły (naprężenia wymuszającego) i współczynnika asymetrii

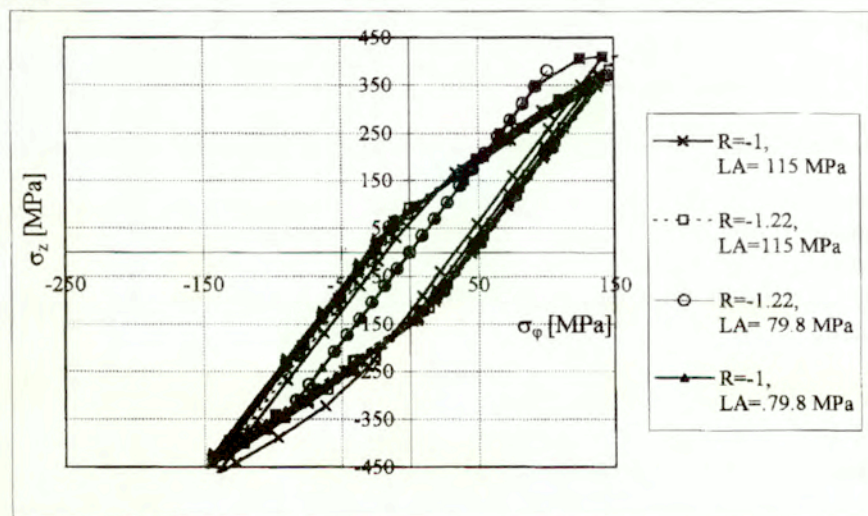
$$R_{obc} = \frac{\sigma_{obc}^{max}}{\sigma_{obc}^{min}} = -1,222. \text{ Do dalszych rozważań wprowadzamy pojęcia}$$

lokalnego współczynnika asymetrii w dnie karbu

$$R_{loc} = \frac{\sigma_{loc}^{max}}{\sigma_{loc}^{min}},$$

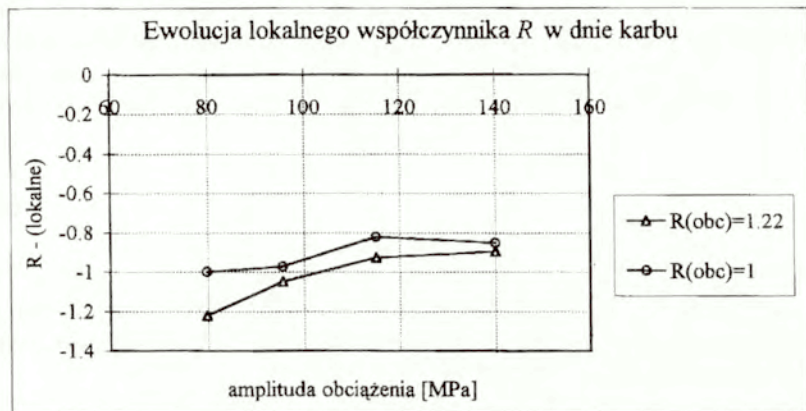
gdzie:  $\sigma_{loc}^{max}$ ,  $\sigma_{loc}^{min}$  maksymalna i minimalna wartość wybranej składowej naprężenia w dnie karbu.

Na rys 5.25 przedstawiono trajektorie naprężeń w warstwie wierzchniej w dnie karbu dla podanych wyżej wartości  $R_{obc}$  i amplitud 79.8 MPa oraz 115 MPa.



Rys. 5.25 Trajektorie naprężeń w dnie karbu dla cykli symetrycznych i niesymetrycznych.

Na rysunku 5.26 przedstawiono zależność  $R_{loc}$  od amplitudy obciążenia dla dwóch wartości parametru  $R_{obc}$ :  $R_{obc}=1.22$  i  $R_{obc}=1$ .



Rys. 5.26 Zależność asymetrii naprężeń lokalnych od asymetrii wymuszenia.

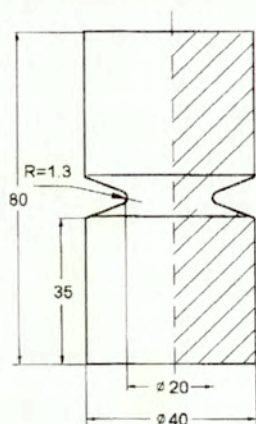
Pierwszy punkt obydwu wykresów (amplituda 80 MPa) odpowiada całkowicie sprężystemu zachowaniu się próbki. W stanie sprężystym  $R_{loc}=R_{obc}$ . W miarę wzrostu amplitudy wartości  $R_{loc}$  i  $R_{obc}$  zaczynają się zmieniać. Dla amplitudy przekraczającej 105 MPa wartości obydwu współczynników przekracza -1 co oznacza, że w dnie karbu  $|\sigma_{max}| < |\sigma_{min}|$ , podczas gdy naprężenia wymuszające spełniają nierówność  $|\sigma_{max}| > |\sigma_{min}|$ . Dla obydwu przyjętych wartości  $R_{obc}$  (stałych w całym procesie obciążenia), w miarę wzrostu amplitudy obciążenia wartości  $R_{loc}$  zbliżają się do wspólnej wartości wynoszącej ok. -0.87.

Korzystając z przedstawionej tu krótkiej analizy stanu naprężenia przy obciążeniach asymetrycznych oraz z przyjętego kryterium zmęczeniowego można wyciągnąć wnioski dotyczące wpływu asymetrii cyklu na trwałość zmęczeniową. Podobnie jak w przypadku analizy wpływu naprężeń własnych możemy stwierdzić, że jeśli amplituda wymuszająca jest wystarczająco duża, to niewielka asymetria obciążenia zewnętrznego ( $R_{obc} \cong 1.2$ ) praktycznie nie wpływa na symetrię lub brak symetrii składowych naprężenia w warstwie wierzchniej w dnie karbu. Krzywe zmęczeniowe elementów obciążonych asymetrycznie, przy niewielkich wartościach  $R_{obc}$  różnią się zasadniczo od krzywych zmęczeniowych próbek obciążonych symetrycznie jedynie w przypadku małych amplitud odpowiadających wyłącznie sprężystemu odkształceniom w całym przekroju próbki.

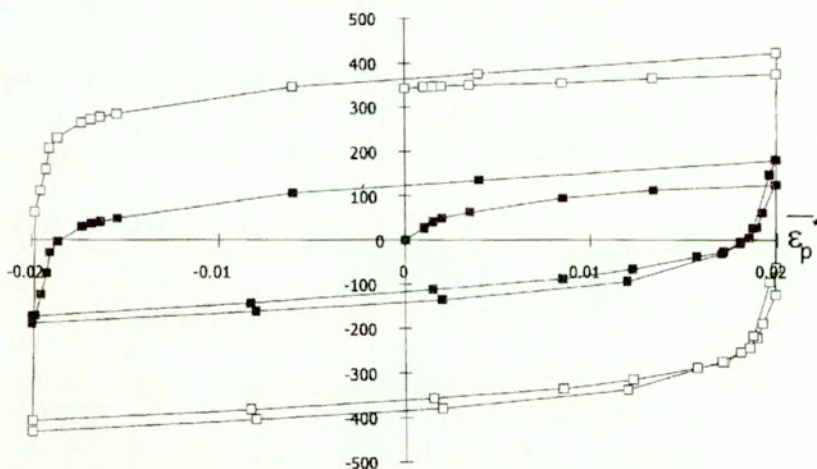
## 5.4 Wykorzystanie kryterium energetycznego do wyznaczania krzywych zmęzeniowych elementu z karbem i warstwą wierzchnią.

Opisane w rozdz. 2.2 kryterium energetyczne [46-49] zastosowano do określenia trwałości zmęzeniowej próbki osiowo-symetrycznej z utwardzoną warstwą wierzchnią i z karbem obrączkowym przedstawionej na

rys.5.27. Współczynnik koncentracji naprężeń w karbie  $K_t = 3.0$  jest większy niż dla próbki analizowanej w poprzednim rozdziale. Przyjęto, że własności plastyczne próbki opisane są krzywymi wzmocnienia przedstawionymi na rys.5.28 i odpowiadają one w przybliżeniu krzywom wzmocnienia dla stali 45.

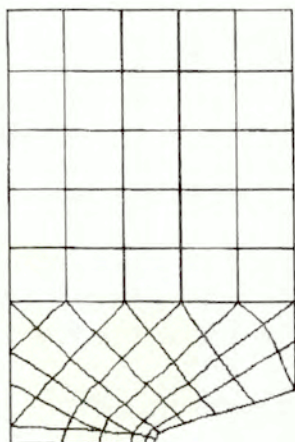


Rys.5.27. Badana próbka z karbem obrączkowym



Rys. 5.28. Cykliczne krzywe wzmocnienia:  $\square$  -całkowitego;  
 $\blacksquare$  -kinematycznego

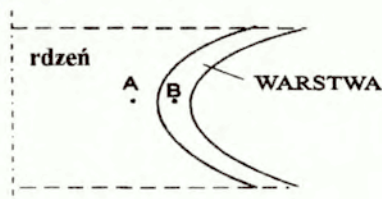
Siatkę podziału na elementy skończone przedstawiono na rys. 5.29. Warstwa wierzchnia modelowana jest jako jednorodna cienka błona o grubości 200  $\mu\text{m}$ . Przyjęto, że w warstwie wierzchniej granica plastyczności wynosi 800 MPa, a krzywe wzmocnienia warstwy mają podobny przebieg jak na rys.5.28, z tą różnicą, że krzywa wzmocnienia izotropowego jest przesunięta do góry o około 440 MPa. W tym modelu przyjęto, że w warstwie występują naprężenia własne ściskające  $\sigma_2 = \sigma_\varphi = -200\text{MPa}$ . Parametry takie odpowiadają w przybliżeniu warstwie nawęglanej na stali. Obciążenie próbki to cykliczne ściskanie-rozciąganie.



Rys. 5.29. Siatka podziału na elementy.

W wyniku obliczeń otrzymujemy pętle histerezy wszystkich składowych tensora naprężenia w dowolnym punkcie próbki. Jednakże z punktu widzenia energetycznych kryteriów zmęczenia najbardziej reprezentatywne jest przedstawienie wyników obliczeń w postaci pętli histerezy naprężeń zredukowanych [MPa], przy czym na osi odciętych mamy odkształcenia zredukowane (pierwiastek z drugiego niezmiennika dewiatora). Umożliwia to bezpośrednie porównanie wieloosiowego stanu naprężenia, z jakim mamy do czynienia w karbie ze stanem jednoosiowym, który występuje w próbach rozciągania służących do określenia charakterystyki materiału. W próbkach z karbem, przy ustalonej amplitudzie obciążeń zewnętrznych w każdym punkcie przekroju karbu występuje inna pętla histerezy. Do porównań wybrano dwa punkty charakterystyczne dla próbek z warstwą wierzchnią i z karbem. Punkty

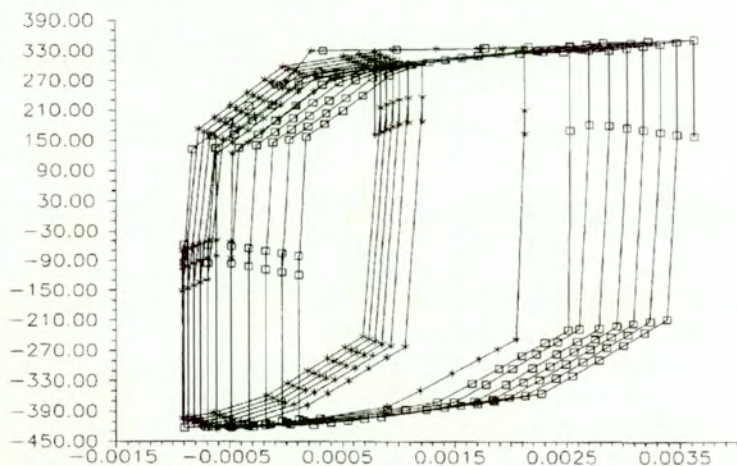
te przedstawiono na rys. 5.30; punkt *B* znajduje się w dnie karbu, w obszarze warstwy, natomiast punkt *A* w rdzeniu w dnie karbu bezpośrednio pod warstwą.



Rys. 5.30. Punkty w dnie karbu, w których wyznaczane są pętle histerezy naprężeń

W celu łatwiejszej oceny wpływu technologicznej warstwy wierzchniej na kolejnych rysunkach przedstawimy pętle histerezy dla próbki z warstwą i próbki jednorodnej poddanej temu samemu obciążeniu cyklicznemu.

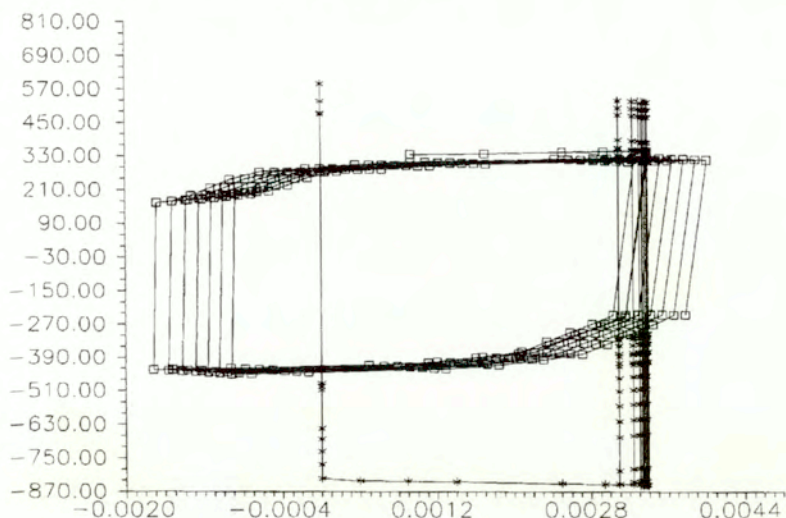
Porównując pętle histerezy w rdzeniu pod powierzchnią (w punkcie *A*), rys.5.31, możemy zauważyć, że charakteryzują je w przybliżeniu takie same graniczne wartości naprężeń, zarówno w przypadku próbki z warstwą jak i jednorodnej. Pole pętli histerezy jest jednak mniejsze w próbkach z warstwą wierzchnią niż w próbkach jednorodnych.



Rys. 5.31 Pętle histerezy w punkcie *A* dla próbki z karbem ostrym.

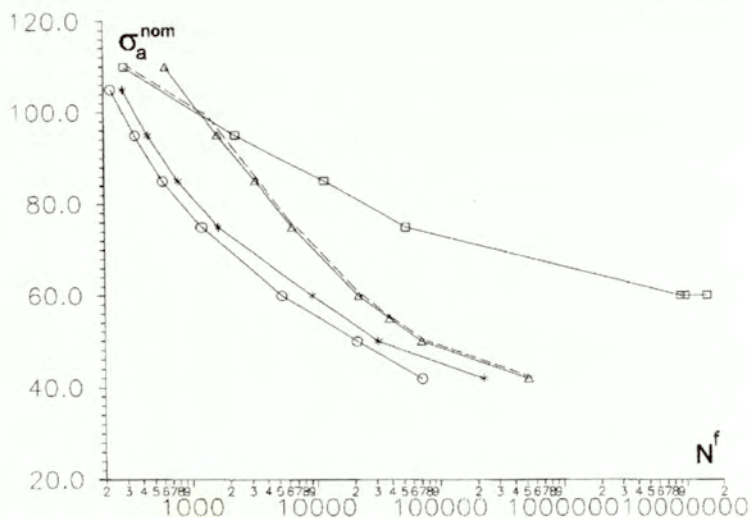
\* - próbka z warstwą; □ - próbka jednorodna

W utwardzonej warstwie (punkt *B*) pętla histerezy jest zdegenerowana; przekroczenie granicy plastyczności ma miejsce tylko przy ściskaniu, co wynika to z istnienia naprężeń własnych. Pole pętli histerezy jest zerowe. Natomiast w próbkach jednorodnych mamy na powierzchni w punkcie *B* niezerowe pole pętli histerezy (rys. 5.32).



Rys. 5.32. Pętle histerezy w punkcie *B* dla próbki z karbem ostrym  
 \* - próbka z warstwą; □ - próbka jednorodna

Korzystając z obliczonej ewolucji naprężeń w punktach *A* i *B* oraz z kryterium energetycznego opisanego w rozdz. 2.2 (wzory 2.2.9 – 2.2.12) wyznaczono lokalne krzywe Woehlera dla próbki z warstwą i próbki jednorodnej. Wpływ warstwy wierzchniej na trwałość zmęczeniową można rozważyć porównując te krzywe (rys.5.33).



Rys. 5.33. Krzywe Woehlera:  $\Delta$  -próbka z warstwą 0.2 mm w punkcie  $A$ ;  $\square$ -próbka z warstwą 0.2 mm w punkcie  $B$ ;  $*$  -próbka jednorodna w punkcie  $A$ ;  $O$  -próbka jednorodna w punkcie  $B$ ;  $\sigma_a^{nom}$  - amplituda naprężeń nominalnych,  $N_f$ - liczba cykli do zniszczenia

Krzywą Woehlera dla całej próbki (traktowanej jako jeden element konstrukcyjny) tworzy się łącząc najbardziej niekorzystne odcinki krzywych Woehlera wyznaczone dla poszczególnych punktów tej próbki (w tym przypadku dla  $A$  i  $B$ ). Na rys.5.33 w odniesieniu do próbki z warstwą zaznaczono ją linią przerywaną.

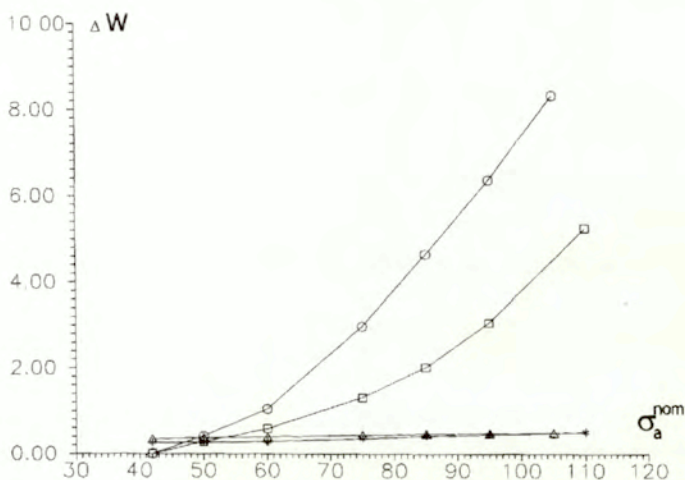
Zajmiemy się najpierw próbką jednorodną. Dla tej próbki krzywa Woehlera wyznaczona w punkcie  $B$  leży w całości poniżej krzywej wyznaczonej dla punktu  $A$  (rys.5.33), zatem punktem krytycznym, od którego rozpocznie się zniszczenie jest punkt  $B$  tzn. powierzchnia dna karbu. Dla próbki jednorodnej wynik ten jest jakościowo łatwy do przewidzenia, zgodny z intuicyjnym przewidywaniem i obserwacjami doświadczalnymi.

W przypadku próbki z warstwą krzywa Woehlera w punkcie  $A$  (pod warstwą) układa się w zasadzie podobnie jak dla próbki jednorodnej, jednakże jest przesunięta w kierunku większych amplitud (rys.5.33) tak, że znajduje się nad krzywymi wyznaczonymi dla punktów  $A$  i  $B$  próbki jednorodnej. W punkcie  $A$  próbki z warstwą mamy więc wyraźne zwiększenie trwałości zmęczeniowej dla wszystkich amplitud. Krzywa wyznaczona dla punktu  $B$ ,



czyli dla warstwy, jest również przesunięta w kierunku większych amplitud, a ponadto zmienione jest jej nachylenie tak, że przecina krzywą odnoszącą się do punktu *A* (rys.5.33) w zakresie dużych amplitud. Zatem dla próbki z warstwą, przy małej amplitudzie obciążenia punktem inicjacji pęknięcia jest punkt *A*, czyli rdzeń, zaś dla bardzo dużych amplitud punktem krytycznym jest punkt *B*, tzn. warstwa wierzchnia.

Dla dobrego zrozumienia powyższych wyników korzystne jest przedstawienie ich w innej formie, tzn. przedstawienie energii odkształcenia na cyklu, będącej miarą zmęczenia jako funkcji amplitudy naprężeń nominalnych. Na rys. 5.34 przedstawiono energię sprężystą i dyssypowaną w punkcie *A* próbki jednorodnej i próbki z warstwą w zależności od amplitudy naprężeń nominalnych.



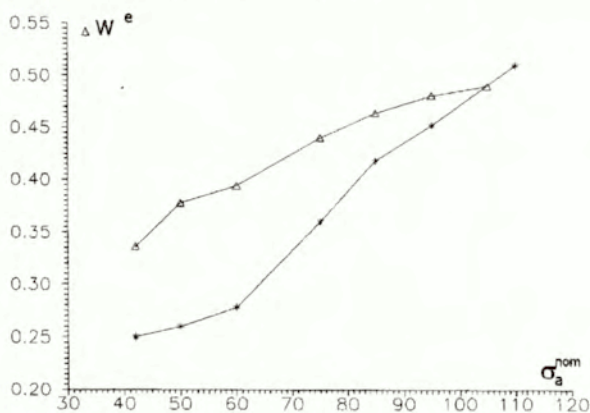
Rys. 5.34. Energia odkształcenia na cyklu w punkcie *A* w funkcji amplitudy naprężeń: O- energia plastyczna, próbka jednorodna; □- energia plastyczna, próbka z warstwą

$\Delta$ - energia sprężysta, próbka jednorodna; \*- energia sprężysta, próbka z warstwą

Na podstawie analizy rys. 5.34 można wyciągnąć wnioski dotyczące zmęczenia niskocyklicznego, za które głównie odpowiada energia plastyczna dyssypowana na cyklu. Widzimy, że dla obydwu próbek, dla małych amplitud wartości energii sprężystej i plastycznej są porównywalne. Dla dużych amplitud (obciążenia niskocykliczne) w miarę wzrostu amplitudy obciążeń

udział energii sprężystej gwałtownie maleje, natomiast rośnie różnica między energią dyssypowaną w próbce jednorodnej i w próbce z warstwą; w próbce jednorodnej jest ona nawet dwukrotnie większa przy tej samej wartości amplitudy. Zgodnie z kryterium (2.2.12) dla maksymalnej uwzględnionej tu amplitudy trwałość rdzenia (punkt *A*) próbki z warstwą jest ok. czterokrotnie większa. Stąd między próbką jednorodną, a próbką z warstwą, dla dużych amplitud obciążenia, czyli przy zmęczeniu niskocyklowym, jest duża różnica w przebiegu krzywych Woehlera odnoszących się do punktu *A*.

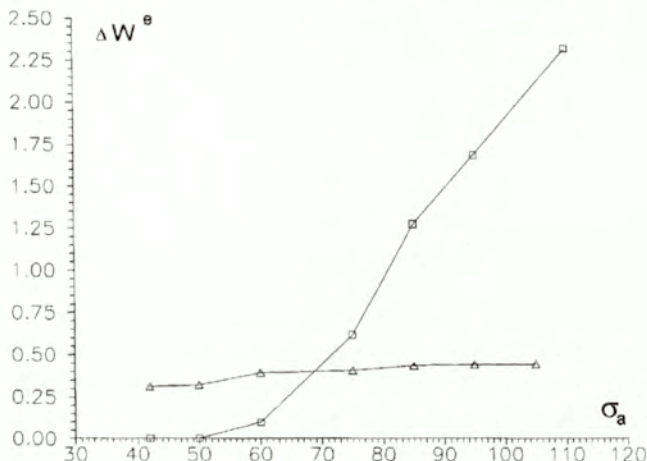
Różnica zachowania się próbek jednorodnej i z warstwą przy zmęczeniu wysokocyklicznym (dla małych amplitud) jest konsekwencją różnic energii sprężystej, co pokazano dla punktu *A* na rys.5.35.



Rys.5.35. Energia sprężysta na cyklu w punkcie *A* w funkcji amplitudy naprężeń nominalnych;  $\Delta$ - próbka jednorodna; \*- próbka z warstwą

Z rys.5.35 wynika, że największe różnice energii sprężystej w rdzeniu (punkt *A*) między próbką jednorodną, a próbką z warstwą występują dla małych amplitud, dla których energia plastyczna jest bardzo mała lub równa zero. Dla małych amplitud naprężenia nominalnego, rzędu 40-60 MPa, energia sprężysta jest równa całkowitej energii odkształcenia odpowiedzialnej za zniszczenie i jest ona ok. dwukrotnie większa w przypadku próbki jednorodnej niż w przypadku próbki z warstwą. Na podstawie kryterium (2.2.12) stwierdzamy, że trwałość próbki z warstwą jest większa. Potwierdza to obserwowany w doświadczeniach fakt dużego wpływu TWW na trwałość zmęczeniową przy obciążeniach wysokocyklicznych.

Przebieg krzywej Woehlera dla punktu *B* (warstwa wierzchnia) zaznaczonej □ na rys.5.33 można wyjaśnić przy pomocy wykresów energii sprężystej w punkcie *B* przedstawionych na rys. 5.36.



Rys.5.36. Energia sprężysta na cyklu w punkcie "B", w funkcji amplitudy naprężeń nominalnych;  
 □-próbka z warstwą; Δ- próbka jednorodna

Wartość tej energii w próbce jednorodnej jest niemal stała, w niewielkim stopniu zależy od amplitudy, zatem dla małych amplitud, gdzie o zniszczeniu decyduje energia sprężysta krzywa Woehlera jest prawie pozioma. Dla próbki z warstwą wartość  $\Delta W^e$  dla małych amplitud jest równa zero (a więc również stała), następnie gwałtownie rośnie w miarę zwiększania amplitudy i dla dużych amplitud znacznie przewyższa energię występującą w próbce jednorodnej. Maksymalna amplituda, dla której energia sprężysta jest mniejsza lub równa stałej *C* (kryterium (2.2.12)), a jednocześnie energia plastyczna jest równa zero to innymi słowy wytrzymałość zmęczeniowa. Dla próbki z warstwą wynosi ona w naszym przypadku 60 MPa.

W zakresie dużych amplitud mamy w punkcie *B* próbki z warstwą tak dużą dyssypację energii, że krzywa Wohlera przechodzi nawet poniżej krzywej odnoszącej się do próbki jednorodnej (rys.5.33). Można tym wytłumaczyć obserwowany w doświadczeniach fakt, że dla dużych amplitud (obciążenia niskocyklowe) znika korzystny wpływ warstwy wierzchniej na wytrzymałość zmęczeniową.

## Wnioski

Analizując krzywe Woehlera dla próbki jednorodnej i próbki z warstwą widzimy, że korzystny wpływ warstwy wierzchniej na trwałość zmęczeniową próbki z karbem zaznacza się szczególnie przy obciążeniach średnio i wysokocyklicznych, w zakresie małych amplitud. Przedstawione tu wyniki symulacji dotyczą konkretnej warstwy ukonstruowanej na próbce o stosunkowo dużym współczynniku koncentracji naprężeń w karbie ( $K_t=3.0$ ), wykonanej z materiału o danych krzywych wzmocnienia plastycznego. Należy pamiętać, że wyniki te zostały uzyskane pomimo przybliżonych wartości danych materiałowych dotyczących warstwy i rdzenia. Krzywe wzmocnienia dla rdzenia tylko w przybliżeniu odpowiadają materiałowi rzeczywistemu. Krzywe wzmocnienia warstwy zostały przyjęto szacunkowo w ten sposób, by różnica sztywności rdzenia i warstwy odpowiadała w przybliżeniu różnicy ich mikrotwardości. Ponadto wykorzystane tu kryterium zmęczeniowe nie zostało wykalibrowane dla analizowanego tu materiału. Stałe występujące w tym kryterium przyjęto jako w pracy [44], to znaczy jak dla stali A516 i w tej postaci było ono wykorzystane do oceny trwałości warstwy i rdzenia. Pomimo tych przybliżeń otrzymane wyniki są jakościowo zgodne z obserwacjami doświadczalnymi próbek z karbem i warstwą. Dla uzyskania zgodności ilościowej konieczne jest wykonanie badań identyfikujących dokładnie stan warstwy wierzchniej i rdzenia (krzywe wzmocnienia, naprężenia własne, moduł Younga). Po spełnieniu tego warunku przedstawiony tu algorytm umożliwia dokonanie optymalnego doboru stanu TWW (naprężenia resztkowe, granica plastyczności, grubość) dla zadanego kształtu i sposobu obciążenia elementu z warstwą wierzchnią.

## 6. Weryfikacja doświadczalna symulacyjnego wyznaczania krzywej zmęczenia elementu z karbem i warstwą wierzchnią.

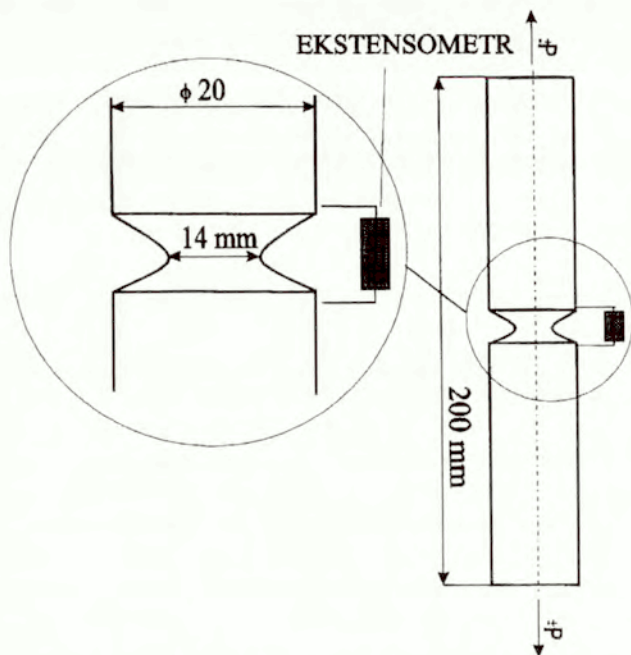
W przedstawionych wyżej rozdziałach pokazano wyniki symulacji numerycznej stanu naprężenia i procesu zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią. Na podstawie tych wyników można wyciągnąć wniosek, że proponowane rozwiązania dość dobrze modelują pod względem ilościowym stan naprężenia i odkształcenia próbek z warstwą wierzchnią obciążonych cyklicznie. Natomiast określony metodami symulacyjnymi wpływ warstwy na krzywe zmęczeniowe elementów konstrukcyjnych jest jakościowo zgodny z obserwacjami doświadczalnymi. Problemy związane z praktycznym stosowaniem tych modeli polegają na tym, że dla większości warstw wierzchnich nie są znane wartości stałych materiałowych. Chodzi tu o stałe niezbędne do opisu stanu naprężenia (moduł Younga, wzmocnienie plastyczne materiału), jak również o parametry występujące w kryteriach zmęczeniowych koniecznych do obliczenia lokalnej trwałości materiału.

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawiona próba znalezienia parametrów warstwy poprzez rozwiązanie zadania odwrotnego, to znaczy próba wyznaczenia własności materiałowych warstwy wierzchniej przy wykorzystaniu opracowanych modeli oraz wyznaczanych doświadczalnie krzywych zmęczeniowych elementów z warstwą. Zakładamy przy tym, że parametry materiałowe rdzenia są znane. Zadanie to uznamy za rozwiązane, jeśli korzystając z wyznaczonych parametrów jako danych wejściowych do modelu otrzymamy krzywe zmęczeniowe próbek zgodne pod względem ilościowym z krzywymi doświadczalnymi.

Tak postawione zadanie odwrotnie zostało rozwiązane na przykładzie próbek z karbem i warstwą wierzchnią kulowaną przedstawionych na rys. 5.3 i 6.1.

Próbki zostały wykonane ze stali 18G2A, dla której krzywe wzmocnienia cyklicznego i monotonicznego podano w rozdz. 5.2, rys. 5.6. W rozdziale 5.3.1 zostało wykalibrowane kryterium zmęczeniowe dla tej stali (5.7).

Badania doświadczalne wykonano na maszynie MTS. Obciążenie cykliczne (osiowe ściskanie-rozciąganie) było zadawane z częstotliwością 10Hz. Dla zapewnienia osiowości obciążenia próbek wykonywane było specjalne osiowanie uchwytów maszyny pod obciążeniem. Odkształcenie próbek było monitorowane przy pomocy ekstensometru założonego w ten sposób by obejmował on karb próbki, tak jak to pokazano na rys. 6.1.

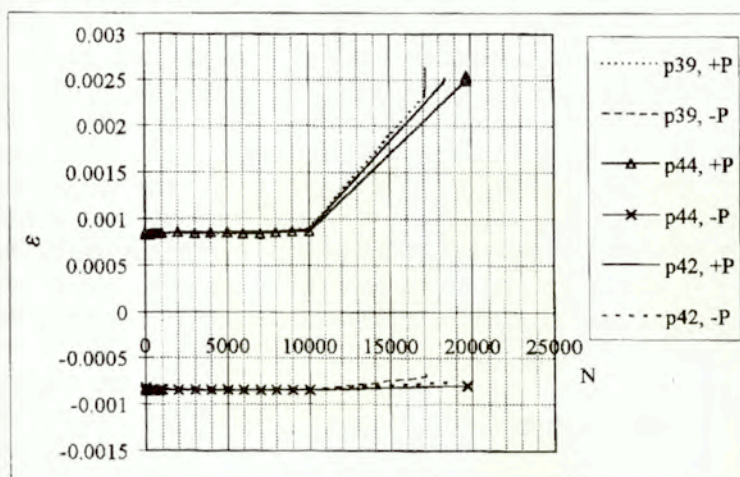


Rys. 6.1. Schemat obciążenia i rejestracja odkształcenia próbek

W procesie obciążania próbek rejestrowane były maksymalne (i minimalne) wartości odkształcenia mierzonego przez ekstensometr i siły obciążającej na cyklu jako funkcja liczby cykli  $N$ . Na podstawie tych danych sporządzano wykresy maksymalnych i minimalnych odkształceń na cyklu w funkcji liczby cykli, przykładowy wykres tego typu dla jednego poziomu obciążenia i trzech próbek podano na rys. 6.2. Na podstawie tych wykresów można dość precyzyjnie wyznaczyć początek zniszczenia próbek.

Przyjęto, że liczba cykli  $N$ , dla której następował gwałtowny wzrost maksymalnej wartości odkształcenia rejestrowanej przez ekstensometr w dnie karbu, rys. 6.2 odpowiada pojawieniu się szczeliny zmęczeniowej w dnie karbu. Tę liczbę cykli uznano jako niszczącą liczbę cykli przyjętą do wyznaczania doświadczalnych krzywych zmęczeniowych. Zwykle od zdefiniowanego w ten sposób momentu pojawienia się szczeliny do całkowitego zniszczenia próbki następowało jeszcze od  $10^2$  do  $10^5$  cykli (w zależności od poziomu obciążenia). Korzystając z tych definicji wyznaczono doświadczalnie krzywą zmęczeniową próbki jednorodnej i próbki z warstwą kulowaną. Do wyznaczenia każdej krzywej wykorzystano pięć punktów (pięć

poziomów obciążenia). Każdy punkt wyznaczano jako średnią z badania trzech próbek. W przypadku, gdy dla jakiegoś poziomu obciążenia był zbyt duży rozrzut wyników, wykonywano dodatkową czwartą próbę obciążenia dla tego poziomu. Badania miały na celu pokazanie różnicy między trwałością zmęczeniową próbek z warstwą i bez warstwy. Stąd największa przyjęta w badaniach amplituda to taka, dla której trwałość próbki jednorodnej i próbki z warstwą nie różnią się od siebie. W naszym przypadku amplituda ta wynosi 55kN. Jako minimalną przyjętą w badaniach amplitudę przyjęto tę, dla której trwałość zmęczeniowa próbek przekracza ok.  $1.2 \cdot 10^6$  cykli. W wielu pracach dotyczących zmierzania próbek z warstwą obliczana jest jedynie wytrzymałość zmęczeniowa, co odpowiada w przybliżeniu jednemu punktowi na krzywej zmęczeniowej. Natomiast w niniejszej pracy wyznaczono metodą symulacyjną całą krzywą Woehlera.



Rys. 6.2. Maksymalne i minimalne odkształcenia próbek (p39, p44, p42) w funkcji liczby cykli.

Do weryfikacji modelu wybrano warstwę kulowaną. Warstwa ta jest szeroko stosowana w technologii. Badaniom warstw kulowanych poświęcono wiele konferencji. W pracach dotyczących tych warstw można znaleźć ich opisy metalograficzne, profile twardości i profile naprężeń własnych. Przedmiotem prac są również modele procesu kulowania, które umożliwiają określenie parametrów warstwy, na przykład grubości lub naprężeń własnych, na podstawie parametrów procesu. W niektórych pracach podane są nawet monotoniczne krzywe ściskania i rozciągania dla warstwy kulowanej, na

przykład w [4] podano takie krzywe dla warstwy ukonstytuowanej na stali 42CrMo4. Pomimo, że brak jest explicite wszystkich stałych materiałowych niezbędnych do modelowania stanu naprężenia i zmęczenia warstwy kulowanej, to korzystając z modeli procesu możemy szacować te parametry. Na podstawie dostępnych w literaturze badań możemy stwierdzić, że warstwa wierzchnia ukonstytuowana w procesie kulowania charakteryzuje się zwiększoną w stosunku do rdzenia twardością. Większa twardość oznacza wyższą granicę plastyczności. Początkowe naprężenia własne w takiej warstwie mają wartość ujemną i są co do wartości bezwzględnej bliskie granicy plastyczności stali poddanej kulowaniu. Uwzględniając fakt, że materiał warstwy kulowanej to po prostu stal poddana dużym odkształceniom plastycznym, możemy założyć, że model plastyczności warstwy jest taki sam, jak model plastyczności stali. Przyjmujemy, że powierzchnia plastyczności jest powierzchnią Misesa. Proces kulowania odpowiada lokalnym kontaktowym plastycznym odkształceniom cyklicznym, które doprowadzają do wytworzenia stanu ustalonego w warstwie. Możemy więc dalej przyjąć, że wzmocnienie izotropowe w warstwie zostało wysyczone w trakcie procesu kulowania. Wynika stąd, że w procesie dalszego obciążania (eksploatacja elementu z warstwą) promień powierzchni płynięcia w warstwie nie zmienia się. W konsekwencji zakładamy, że jeśli w warstwie następują odkształcenia plastyczne, to wartość wzmocnienia izotropowego jest równa zero, a całkowite wzmocnienie plastyczne jest równe wzmocnieniu kinematycznemu, którego wartość przyjmujemy taką, jak w przypadku obciążeń cyklicznych rdzenia (stali) w stanie ustalonym.

Poszukiwanie parametrów warstwy rozpoczęto od sprawdzenia, czy przyjęte kryterium zmęczeniowe (5.7) i parametry materiałowe umożliwiają wystarczająco dokładne obliczenie krzywej zmęczeniowej próbki jednorodnej. Porównanie krzywych zmęczeniowych wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie dla próbki jednorodnej przedstawiono na rys. 6.4. Krzywa teoretyczna przebiega nieco poniżej krzywej doświadczalnej. Różnice między krzywymi możemy uzasadnić następująco. W eksperymencie numerycznym przyjęto, że początek zniszczenia próbki następuje przy liczbie cykli odpowiadającej pojawieniu się szczeliny na powierzchni, którą w przypadku próbki jednorodnej modelowano jako cienką błonę o tych samych własnościach co rdzeń. Przyjęto, że grubość błony wynosi 80  $\mu\text{m}$ , rys. 5.5. Zniszczenie tej błony odpowiada pojawieniu się szczeliny o głębokości 80  $\mu\text{m}$ . W badaniach doświadczalnych tak niewielka szczelina może być jeszcze niewykrywalna przez ekstensometr, którego baza wynosi 25mm, gdyż mierzy on odkształcenia osiowe próbki, czyli prostopadłe do „głębokości” szczeliny.



Widoczne zmiany odkształcenia mogą następować dopiero po odpowiednim wroście tej szczeliny. Stąd krzywa doświadczalna jest nieco przesunięta w kierunku większej trwałości w stosunku do krzywej otrzymanej teoretycznie. Ogólnie jednak wynik symulacji należy uznać za zadowalający.

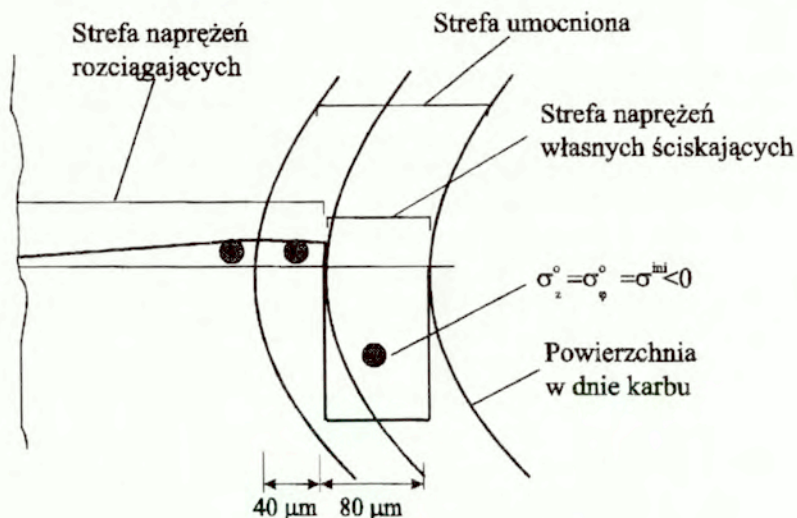
W celu oszacowania parametrów mechanicznych (cykliczne i monotoniczne krzywe wzmocnienia) warstwy wierzchniej koniecznych do przyjętego modelu, wykonano szereg obliczeń trwałości zmęczeniowej próbki z warstwą dla różnych poziomów obciążenia. W obliczeniach trwałości przyjęto metodykę postępowania opisaną w rozdziale 5.3.2. Otrzymaną teoretycznie trwałość zmęczeniową porównywano z danymi doświadczalnymi i do kolejnych obliczeń wprowadzano odpowiednie korekty parametrów warstwy. Do obliczeń przyjęto następujące założenia:

- i) dla kulowanej warstwy wierzchniej znamy jedynie moduł Younga, który jest taki jak dla stali, natomiast krzywe wzmocnienia plastycznego i granicę plastyczności szacujemy zgodnie z podanymi wyżej uwagami.
- ii) do oceny trwałości zmęczeniowej warstwy stosujemy - podobnie jak w przypadku próbki jednorodnej - kryterium zmęczeniowe z płaszczyzną krytyczną, 5.7, jednak krzywa przedstawiająca parametr uszkodzeń w funkcji liczby cykli nie jest znana dla warstwy. Dla warstwy konieczne jest więc oszacowanie parametrów  $\sigma_f'$ ,  $\tau_f'$ , występujących w kryterium zmęczeniowym 5.7.
- iii) ze względu na to, że warstwa wierzchnia różni się znacznie własnościami od rdzenia, zniszczenie elementu może rozpoczynać się od warstwy lub od rdzenia. W odróżnieniu od próbki jednorodnej, obliczając trwałość dla próbki z warstwą należy obliczać lokalnie trwałość w warstwie i pod warstwą i przyjmować mniejszą z nich jako trwałość całej próbki.

W procesie identyfikacji parametrów warstwy, korzystając z warunku iii) najpierw znajdujemy naprężenia własne w warstwie i grubość warstwy. Do obliczeń przyjęto uproszczony model warstwy przedstawiony na rys. 6.3. W modelu przyjęto, że naprężenia w warstwie mają stałą wartość i grubość strefy występowania naprężeń własnych ściskających nie pokrywa się z grubością strefy umocnionej. Naprężenia rozciągające w rdzeniu wynikają ze zrównoważenia naprężeń ściskających w warstwie.

Stan własny naprężeń w warstwie wpływa na stan naprężeń w rdzeniu pod warstwą. Parametry warstwy powinny być tak dobrane, aby zapewnić poprawę trwałości nie tylko warstwy wierzchniej, ale również rdzenia w strefie najbardziej narażonej na zniszczenie, czyli przylegającej do warstwy. Ponieważ znamy parametry materiałowe rdzenia, stan naprężeń własnych i

wzmocnienie plastyczne w warstwie dobieramy w ten sposób, aby spełniony był warunek, że trwałość zmęczeniowa rdzenia pod warstwą jest nie mniejsza niż określona doświadczalnie trwałość całej próbki z warstwą. W wyniku wielu symulacji okazało się, że maksymalnie uproszczony model warstwy, który spełnia powyższy warunek przedstawia się tak jak na rys. 6.3.

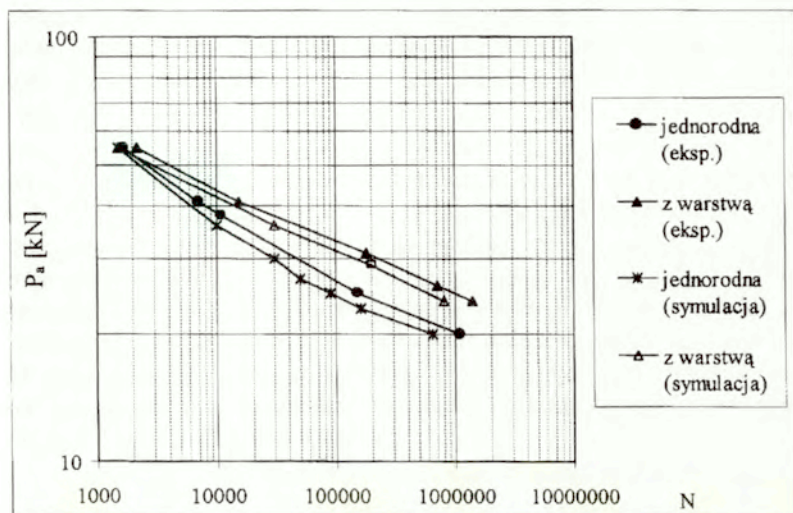


Rys. 6.3. Przyjęty model warstwy kulowanej.

Przyjmując naprężenia własne w warstwie  $\sigma_\varphi = \sigma_z = -360 \text{ MPa}$  oraz granicę plastyczności w rdzeniu pod warstwą w strefie umocnionej (rys. 6.3) równą 550 MPa otrzymano drogą symulacyjną krzywą zmęczeniową w rdzeniu bliską krzywej zmęczeniowej wyznaczonej doświadczalnie dla całej próbki z warstwą. Do otrzymania krzywej teoretycznej wykorzystano kryterium zmęczeniowe wykalibrowane dla stali 18G2A; wpływ warstwy polegał tu na zmianie stanu odkształcenia w rdzeniu wynikającym z sąsiedztwa sztywnej warstwy.

Przyjmując oszacowane w ten sposób granicę plastyczności i wzmocnienie warstwy oraz korzystając z wielu symulacji, określono również wartości parametrów warstwy wierzchniej występujących w kryterium zmęczeniowym. Wynoszą one  $\sigma_f' = 1470$ ,  $\tau_f' = 800$ .

Na podstawie tak określonych parametrów warstwy otrzymano teoretycznie krzywe zmęczeniowe dla próbek z warstwą. Krzywe teoretyczne i doświadczalne porównano na rys. 6.4.



Rys. 6.4. Krzywe zmęczeniowe próbki jednorodnej i z warstwą otrzymane teoretycznie i doświadczalnie.

W przypadku próbek z warstwą, krzywa zmęczeniowa uzyskana drogą symulacji również leży nieco poniżej krzywej doświadczalnej. Może to wynikać z opisanej wyżej różnicy definicji początku zniszczenia przyjętych w badaniach doświadczalnych i symulacyjnych.

## 6.1 Wnioski

W niniejszym rozdziale dokonano weryfikacji proponowanych modeli pod względem nie tylko jakościowym, ale również ilościowym. Okazuje się, że stosunkowo proste modele stanu naprężeń i proste kryteria zmęczeniowe wystarczają do przewidywania trwałości warstwy. Niewielka rozbieżność między wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi może wynikać z następujących przyczyn:

- brak dokładnych danych na temat naprężeń własnych i umocnienia warstwy,

- za mało precyzyjne wykrywanie początku zniszczenia elementu w eksperymencie,
- stosowanie zbyt uproszczonych modeli.

Dla usunięcia tych przyczyn konieczny jest pomiar naprężeń własnych jedną ze znanych metod, np. metodą rentgenowską oraz wyznaczenie wzmocnienia materiału metodą zaproponowaną w części II. Zastosowanie bardziej złożonych modeli konstytutywnych byłoby trudne, gdyż pociągałoby za sobą konieczność wyznaczania dodatkowych parametrów warstwy. Jednakże błąd popełniony w przewidywaniu trwałości zmęczeniowej jest błędem niedomiaru, a więc w kierunku bezpieczeństwa, stąd autor uznał, że na tym etapie badań jest to błąd akceptowalny. Porównując rysunki 5.24 i 6.4 można wyciągnąć jeszcze jeden ważny wniosek. Na rys. 5.24 wyznaczono teoretycznie krzywą zmęczeniową dla próbki z pewną hipotetyczną warstwą wierzchnią, która różniła się jedynie tym od rdzenia (stal 18G2A), że występowały w niej naprężenia własne. Krzywa zmęczeniowa dla tej próbki leży poniżej krzywej zmęczeniowej dla próbki kulowanej. Wynika stąd, że zmiana jednego tylko parametru (naprężeń własnych) nie wystarczy do wyjaśnienia faktu zwiększenia trwałości próbki po kulowaniu. Jest to pośrednie potwierdzenie prawidłowości przyjętego modelu.

## Bibliografia do części I

- [1] P.Peyre, P.Merrien, H.P.Lieurade, R.Dabbro, „Laser induced shock waves as surface treatment for 7075-T7351 aluminium alloy”, Surface Engineering, Vol. 11, 1, 47-52, 1995
- [2] I.Kisuke T.Kazunori, „Relaxation of residual stress distribution produced by shot peening under fatigue test”, The Sixth Int. Conf. of Shot Peening, ICSP<sup>6</sup>, San Francisco, California, USA
- [3] H.Holzapfel, V.Schulze, O.Vohringer, E.Macherauch, „Stability and relaxation behaviour of shot peening induced residual stresses in AISI 4140 during bending fatigue”, The Sixth Int. Conf. of Shot Peening, ICSP<sup>6</sup>, San Francisco, California, USA, 320-329, 1996
- [4] V.Schulze, „Die Auswirkungen kugelgestrahlter Randschichten auf das quasistatische sowie ein- und zweistufige zyklische Verformungsverhalten von vergueteten 42CrMo 4”, praca doktorska, Wyd. Budowy Maszyn, Uniwersytet Karlsruhe, 1993
- [5] E.R.de los Rios, A.Walley, M.T.Milan and G.Hammersley, “Fatigue crack initiation and propagation on shot-peened surfaces in A316 stainless steel”, Int. J.Fatigue, Vol. 17, 7, 493-499, 1995
- [6] S.Suresh, “Crack initiation in cyclic compression and its applications”, Engng Fracture Mech. 21, 453-463, 1985
- [7] S.Suresh, T.Christman and C.Bull, “Crack initiation and growth under far-field cyclic compression, theory, experiments and applications”, In: Small Fatigue Cracks (Edited by R.O.Ritchie and J.Lankford), TMS AIME, Warrendale, Pennsylvania, PA, 1986
- [8] R.Hermann, “Fatigue crack growth in ductile materials under cyclic compressive loading”. Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., 17, 93-103, 1994
- [9] A.Turnbull, E.R.De Los Rios, R.B.Tait, C.Laurant and J.S.Boobaid, “Improving the fatigue crack resistance of waspalo by shot peening”, Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, , 21, 1513-1524, 1998
- [10] R.Fathallah, G.Inglebert, L.Castex, „Modelling of shot peening residual stress and plastic deformation induced in metallic parts” The Sixth Int. Conf. of Shot Peening, ICSP<sup>6</sup>, San Francisco, California, USA, 1996
- [11] Y. Le Guernic, J.S.Eckersley, „Peenstress software selects shot peening parameters” The Sixth Int. Conf. of Shot Peening, ICSP<sup>6</sup>, San Francisco, California, USA 1996

- [12] H.Stamm, U.Halzwarth, D.J.Boerman, F.Dos Santos Marques, A.Olchini, R.Zausch, "Effect of laser surface treatment on high cycle fatigue of AISI 316L stainless steel", *Fatigue Fract. Engng Mater.Struct.* Vol. 19, 8, 985-995, 1996
- [13] P.Merrien, H.P.Lieurade, M.Theobalt, G.Baudry, T.Puig, F.Leroy, „Fatigue strength of laser beam surface treated structural steels”, *Surface Engineering*, Vol. 8, 1, 1992
- [14] S.Putatunda, M.Nambiar, N.Clark, „Influence of laser hardening on mechanical properties of a low alloy steel”, *Surface Engineering*, Vol. 13, 5, 407-414, 1997
- [15] Y.Hanada, T.Bell, Y.Sun, "Plasma nitriding of high strength low alloy bainitic steels", *Surface Engineering*, Vol. 11, 2, 149-151, 1995
- [16] P. De la Cruz, M.Oden, T.Ericsson, "Influence of plasma nitriding on fatigue strength and fracture of a B-Mn steel", *Materials Science Engng.*, A242, 181-194, 1998
- [17] M.Guagliano and L.Vergani, „Effect of nitriding on low-cycle fatigue properties”, *Int. J.Fatigue* Vol. 19, 1, 67-73, 1997
- [18] Developments in the nitriding of iron and titanium based alloys: report of discussion; *Surface Engineering*, Vol. 11, 2, 1995
- [19] U Kreft, F.Hoffman, T.Hirsch, P.Mayr, „Investigation of the formation of residual stress in the compound layer during gas nitriding“, *Proc. of European Conference of Residual Stress*, Frankfurt a.M., Germany, 115-122, 1992
- [20] M.A.J.Semers and E.J.Mittermaier, "Development and relaxation of stress in surface layers; composition and residual stress profiles in  $\gamma^{\delta}$ -Fe<sub>4</sub>N<sub>1-x</sub> layers on  $\alpha$ -Fe substrates", *Metall. Trans.*, 21A, 189-204, 1990
- [21] P.C.Van Wigger, H.C.F.Rozendaal and E.J.Mitte-meijer, "The nitriding behaviour of iron-chrom-carbon alloys", *J. Mater. Sci.*, 20, 4561- 4582, 1985
- [22] J.Morrow, "Cyclic plastic strain energy and fatigue of materials", *International Friction. Damping and Cyclic Plasticity*, ASTM STP 378, 4-48, 1965
- [23] K.Molsky, G.Glinka, "A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root", *Mater. Sci. Engng.*, Vol.50, 93-110,1981
- [24] H.Neuber, "Theory of stress concentrations for shear strained prismatic bodies with arbitrary non linear stress-strain law", *J.Appl. Mech.* 28, 544-551, 1961

- [25] K.Shiozawa., S.Nishino and K.Handa, "The influence of applied stress ratio on fatigue strength of TiN-coated carbon steel", JSME Int. Journal serie I., 35, 347-353, 1992
- [26] K.Saruki, S.Hotta, H.Fujita T.Arai, "Fatigue strength of steels with thin hard coating", Thin Solid Films, 181, 383-395, 1989
- [27] S.Hotta, K.Saruki T.Arai, "Endurance limit of thin hard-coated steels in bending fatigue", Surface and Coatings Technology, 70, 121-129, 1994
- [28] K.Shiozava L.Han, "The effect of TiN film on low-cycle fatigue behaviour of steel coated by PVD method", In Computer Methods and Experimental Measurements for Surface Treatment Effects, eds. M.H.Aliabadi and C.A.Brebbia, 369-378, 1992
- [29] K.Shiozawa and S.Ohshima., "The effect of TiN coating on fatigue strength of carbon steel", Proc. Fourth Int. Conf. on Fatigue and Fat. Thresholds. Honolulu, 299-304, 1990
- [30] J.A.M.Ferreira, J.D.M.Costa and V.Lapat, "Fatigue behaviour of 42Cr Mo4 steel with PVD coatings", Int.J.Fatigue, Vol. 19, 4, 293-299, 1997
- [31] S.Hotta, Y.Iton, K.Saruki and T.Arai, "Fatigue strength at a number of cycles of thin hard coated steels with quenchhardened substrates", Surface and Coatings Technology, 1994
- [32] J.W.He, B.C.Hendrix, N.S.Hu, K.W.Xu, T.Bell, Y.Sun, and K.Mao, "Interfacial fatigue limit as measure of cyclic bonding strength of hard coatings", Surface Engineering, Vol. 12, 1, 1996
- [34] H.J.Spies, "Fatigue behaviour of nitrided steels", Steel Research, 64 (8/9) 441-446, 1993
- [35] E.Macherauch and K.H.Kloos, „Eigenspannungen und Lastspannungen“, Harterei-Tech. Mitt. Beiheft, 175-194, 1982
- [36] K.H.Kloos and E.Velten, „Berechnung der Dauerschwingfestigkeit von plasmanitrierten bauteilähnlichen Proben unter Beruecksichtigung des Haerte-und Eigenspannungsverlaufs“ Konstruktion, 36 (5), 181-195, 1984
- [37] N.D.Tan, „Untersuchung des Zusammenhanges zwischen dem Aufbau von Nitrierschichten und Schwingfestigkeit gekerbter Proben“ Dr.-Ing. Diss. Bergakademie Freiberg, 1990
- [38] A.Baumel, T. Seeger, "Life calculation for specimens with residual stress distribution and different material zones Proc. of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Residual Stresses (ICRS2), Nancy, 809-914, 1988
- [39] B.Eigenmann, V.Schultze, O.Voehringer, „Surface residual stress relaxation by thermal or mechanical treatment“, Proc. of the 4th International Conference on Residual Stresses (ICRS4),Bethel (USA), 598-607; 1994

- [40] Z. Hashin, "Fatigue Failure Criteria for Combined Cyclic Stress", *International Journal of Fracture*, Vol.17, 2, 101-109, 1981
- [41] G.Sines, G.Ohgi, "Fatigue Criteria Under Combined Stresses or Strains", *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.103, 82-90, 1981
- [42] E.G.Ellison, J.M.H.Andrews, "Biaxial Cyclic High-Strain Fatigue of Aluminium Alloy RR58", *Journal of Strains Analysis*, Vol.8, 3, 209-219, 1973
- [43] D.F.Lefebvre, "Hydrostatic, "Effect on the Life Prediction in Biaxial Low-Cycle Fatigue", *Proc. 2nd Int. Conf. on Multiaxial Fatigue*, Sheffield, 1985
- [44] F.Ellyin, "A Criterion for Fatigue Under Multiaxial States of Stress", *Mechanics Research Communications*, Vol.1, 219-224, 1974
- [45] F.Ellyin., D.Kujawski, "Plastic Strain Energy in Fatigue Failure", *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol.106, 4, 342-347, 1984
- [46] F.Ellyin, K.Gołoś, "Multiaxial Fatigue Damage Criterion", *J. of Engineering Mat. and Technology*, Vol. 110, 63-68, 1988
- [47] Z.Xia, D.Kujawski, F.Ellyin, "Effect of Mean Stress and Ratcheting Strain on Fatigue Life of Steel", *Int. J. Fatigue* Vol. 18, 5, 335-341, 1996
- [48] Z.Xia, K.Golos, F.Ellyin, "In-Phase and Out-of-Phase Multiaxial Fatigue", *J. of Engineering Mat. and Techn.*, Vol. 113,1, 112-118, 1991
- [49] K.Gołoś, "The Fatigue Criterion with Mean Stress Effect on Failure", *Materials Science and Engineering*, A111, 63-69, 1989
- [50] D.Kujawski, F.Ellyin, "A unified approach to mean stress effect on fatigue threshold conditions", *Int.J.Fatigue* Vol.17, 2, 101-106, 1995
- [51] F.Ellyin, D.Kujawski, "Advances in Multiaxial Fatigue", *American Society for Testing and Materials*, ASTM STP 1191, 55-66, 1993
- [52] C.-C.Chu, "Fatigue Damage Calculation Using the Critical Plane Approach", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 117, 41-48, 1995
- [53] R.N.Smith, P.Watson and T.H.Topper, "A Stress Strain Function for the Fatigue of Metals", *Journal of Materials*, Vol. 5,4, 767-778, 1970
- [54] M.W.Brown, K.J.Miller, "A Theory for Fatigue under Multiaxial Stress-Strain Conditions", *Proceedings The Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 187, 65, 745-755, 1973
- [55] C.-C.Chu, F.A.Conle and J.J.F.Bonnen, "Multiaxial Stress-Strain Modeling and Fatigue Life Prediction of SAE Axle Shaft", *Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 1191, 1993



- [56] Jinsoo Park, Drew Nelson, „Evaluation of an energy-based approach and a critical plane approach for predicting constant amplitude multiaxial fatigue life”, *International Journal of Fatigue* Vol. 22, 23-39, 2000
- [57] G.Glinka, G.Wang and A.Plumtree, „Mean Stress Effects in Multiaxial Fatigue”, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* Vol. 18, 7/8, 755-764, 1995
- [58] Z.Mróz, G.Starzyński, “An elasto-plastic analysis of a cylinder with surface layer under cyclic loading”, *Archiwum Budowy Maszyn, Zeszyt 3-4*, Vol.XLII, 3-4, 189-209, 1995
- [59] H.Ziegler, “A modification of Prager’s hardening rule”, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 17, 1, 55-65, 1959
- [60] S.Kucharski, “The use of transitional elements for stress analysis of structures with a technological surface layer by the method of finite elements”, *Engng. Trans.* Vol. 42, 1-2, 19-31, 1994
- [61] S.Kucharski, „Cyclic loading of a notched element with a technological surface layer”, *Engng. Trans.*, Vol. 34, 4, 553-569, 1995
- [62] Xu Kewei, Hu Naisai, Zhou Huijiu, „Prediction of notch fatigue limits in a compressive residual stress field”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 54, 2, 171-176, 1996
- [63] S.Bentachfine, G.Pluvinage, J.Gilgert, Z.Azari, D.Bouami, “Notch effect in low cycle fatigue”, *Int. J.Fatigue*, 21, 421-430, 1999
- [64] Yao Weixing, Xia Kaiquan and Gu Yi, “On the fatigue notch factor,  $K_f$ ”, *Int. J. Fatigue*, 245-251, 1995
- [65] Ye Du-yi and Wang De-jun, “A new approach to the prediction of fatigue notch reduction factor  $K_f$ ”, *Int. J. Fatigue*, Vol. 18, 2, 105-109, 1996
- [66] S.Kocańda., J.Szala, „Podstawy obliczeń zmęczeniowych”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997
- [67] C.C.Chu, F.A.Conle, „Multiacial Neuber-type of elastic to elastic-plastic stress-strain correction”, *Fourth Int. Conf. Biaxial/Multiaxial Fatigue*, Paris, France, 1994
- [68] M.Tipton, V.Nelson, ”Advances in multiaxial fatigue life prediction for components with stress concentrations”, *Int. J.Fatigue*, Vol. 19, 503-515, 1997
- [69] Kewei Xu, Jiawen He and Huijiu Zhou, “Effect of residual stress on fatigue behaviour of notches”, *Fatigue*, Vol. 16, 337-343, 1994
- [70] L.Bertini, V.Fontanari; “Fatigue behaviour of induction hardened notched components”, *Int. J.Fatigue*, 21, 611-617, 1999
- [71] E.Sender, W.Trampczyński, „The 18G2A Steel (Construction Steel) Cyclic Behaviour in the Case Of Complex Uniaxial Loading”, *Engng. Trans.* 43, 1-2, 327-355, 1995

- [72] . G.Starzyński, S.Kucharski, "Evolution of the residual stress state in the surface layer elements under torsion", 2000 AIMETA International Tribology Conference, September 20-22, L'Aquila, Italy, 746-753, 2000
- [73] D.Kujawski, „Modelowanie trwałości zmęczeniowej i propagacji pęknięć w metalach”, Prace Naukowe Mechanika, z.133, Wydawnictwa PW, 1991
- [74] S. Kucharski, G.Starzyński, Z.Handzel-Powierza „The evolution of stress states in the element with surface layer exposed to cyclic torsion” złożone do druku w Archive of Mechanical Engineering

## **CZĘŚĆ II**

# **IDYTYFIKACJA WŁASNOŚCI WARSTWY WIERZCHNIEJ METODĄ WCISKANIA WGŁĘBNIKA KULISTEGO**

## 1. Przegląd literatury

### 1.1 Analiza numeryczna prób twardości oraz korelacja prób twardości i sprężysto-plastycznych stałych materiałowych.

Próby twardości są od dawna stosowane do oceny własności materiałów, szczególnie metali. Twardość jest definiowana jako iloraz maksymalnej siły wciskającej wgłębnik i pola powierzchni trwałego odcisku. Badania twardości mogą być klasyfikowane ze względu na kształt stosowanego wgłębnika. Do jednej grupy zaliczyć możemy próby wykonywane przy pomocy wgłębników „ostrych”, mających kształt piramidy o podstawie kwadratowej (Vickers), trójkątnej (Berkovich) i romboidalnej (Knoop) lub mające kształt stożka (Rockwell). Powszechnie stosowanym wgłębnikiem o „łagodnym” kształcie jest kula, którą wykonuje się testy twardości Brinella.

W ostatnich latach obok klasycznego badania twardości (pomiar maksymalnej siły i trwałego odcisku) rozwinięto techniki umożliwiające pomiar całej krzywej siła-zagłębienie ( $P-h$ ) przy obciążeniu i odciążeniu wgłębnika. Tego typu test będziemy w dalszej części pracy nazywać testem wciskania (indentation test). W dostępnych komercyjnie aparatach do pomiaru zależności  $P-h$  stosowane są najczęściej wgłębniki Vickersa [1,2,3] lub Berkovicza [4,5]. Na kształt krzywej siła-zagłębienie wpływa nie tylko twardość, ale również moduł Younga, granica plastyczności i wzmocnienie materiału. Zatem krzywa  $P-h$  dostarcza znacznie więcej informacji o własnościach badanego materiału niż pomiar twardości, który odpowiada jednemu (końcowemu) punktowi tej krzywej.

Ostatnio stosuje się również technikę nanoindentacji, która umożliwia pomiar krzywych siła-zagłębienie dla bardzo małych obciążeń (rzędu  $mN$ ) i zagłębień rzędu nanometrów. Technikę tę stosuje się do badania cienkich warstw [6,7].

Z punktu widzenia identyfikacji pewne uprzywilejowane miejsce wśród testów twardości zajmuje test Brinella. Twardość Brinella zależy bowiem od wielkości siły zagłębiającej kulkę, stąd obciążając kulkę różnymi siłami otrzymujemy kilka par liczb siła-twardość lub siła-średnie ciśnienie pod kulą. Zatem uzyskujemy więcej informacji o materiale niż mierząc twardość przy pomocy wgłębników „ostrych”. W przypadku stosowania takich wgłębników np. Vickersa twardość nie zależy od wielkości siły obciążającej, a w wyniku pomiaru otrzymujemy tylko jedną liczbę tzn. wartość twardości. Ponadto testy wykonywane przy pomocy wgłębników o ostrych kształtach są gorzej opisane teoretycznie niż test Brinella. Wynika to z faktu, że w rozwiązaniu

teoretycznym w przypadku ostrych węgłników należy uwzględnić osobliwości, które nie występują w przypadku kuli.

Z powyższych rozważań wynika, że w przypadku stosowania węgłników o ostrych kształtach, z klasycznej próby twardości możemy zidentyfikować co najwyżej jeden parametr materiałowy, dla identyfikacji większej liczby parametrów konieczne jest wykonanie testu wciskania (pomiar krzywej  $P-h$ ). Stąd większość metod identyfikacji materiałów przy pomocy węgłników „ostrych” opiera się na teście wciskania. Wraz z rozpowszechnieniem komercyjnych programów MES nastąpił gwałtowny rozwój prac poświęconych analizie całego procesu wciskania węgłnika. Ze względu na to, że w dalszej części rozprawy zaproponowana jest metoda, w której do identyfikacji materiału korzysta się z testu wciskania kuli, omówimy tu szczegółowo dwie prace poświęcone identyfikacji materiału na podstawie testu wciskania węgłnika Vickersa [8,9]. Umożliwi to czytelnikowi porównanie możliwości zastosowania obydwu metod identyfikacji.

W pracy [8] można znaleźć obszerny materiał poświęcony analizie numerycznej (MES) wciskania piramidy Vickersa. Pracę rozpoczęto od postawienia problemu w MES. Przetestowano różne siatki podziału na elementy i różne typy elementów. Określono błąd rozwiązania. Porównano rozwiązanie, w którym korzysta się z prawa Hooke’a, oraz rozwiązanie hiposprężyste. Porównano rozwiązania sprężysto-plastyczne uzyskane przy założeniu nieskończonej małych oraz skończonych odkształceń dla materiałów z liniowym wzmocnieniem plastycznym i materiałów sprężysto-idealnie plastycznych. Dla zakresu sprężystego podano zależność między siłą  $P$  i zagłębieniem  $h$

$$P = 2.0746 (1 - 0,1655\nu - 0,1737\nu^2 - 0,1862\nu^3) \frac{E}{(1 - \nu^2)} h^2, \quad (1.1)$$

oraz wyrażenie na średnie ciśnienie  $p_{av}$

$$p_{av} = 0.21(1 - 0,165\nu - 0,1737\nu^2 - 0,1862\nu^3) \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (1.2)$$

gdzie:  $E$ ,  $\nu$  moduł Younga i stała Poissona.

Okazuje się, że ciśnienie  $p_{av}$  nie zależy od zagłębienia  $h$ , a więc od siły obciążającej. Dla rozwiązania sprężystego podano odkształcone siatki podziału na elementy oraz warstwicę naprężeń. Stwierdzono, że naprężenia główne w badanym materiale są, zawsze ściskające. Zatem źródłem pęknięć obserwowanych w przypadku badań niektórych materiałów mogą być jedynie naprężenia ścinające występujące przy wierzchołku węgłnika.

Dla materiału sprężysto-plastycznego podano następującą zależność między twardością (czyli średnim ciśnieniem) a stałymi materiałowymi:

$$p_{av} = \frac{2}{3} \sigma_r \left( 1 + \ln \frac{E \tan \Psi}{3 \sigma_y} \right), \quad (1.3)$$

gdzie

$\sigma_r$  - naprężenie przy jednoosiowym ściskaniu odpowiadające  $\varepsilon_p = 0.07$

$\sigma_y$  - granica plastyczności

$\Psi = 19.7^\circ$

Powyższe równanie obowiązuje dla  $1 \leq \sigma_r / \sigma_y \leq 1.6$ . W równaniu tym nie test uwzględniony wpływ wypłytki lub zapadnięcia się materiału wokół wgłębnika na pole kontaktu (a więc na naprężenie średnie). Podano również zmodyfikowany wzór na  $p_{av}$ , w którym uwzględniono ten efekt:

$$p_{av} = C \sigma_u \left( 1 + \sigma_y / \sigma_u \right) \left( 1 + \ln \frac{E \tan 22^\circ}{3 \sigma_u} \right) \left( 1 - \frac{u_{2max}}{h} \right) \quad (1.4)$$

gdzie:

$\sigma_u$  - maksymalne naprężenie (odpowiada ono odkształceniu ok. 6-7%, zakłada się, że powyżej tego odkształcenia nie ma wzmocnienia)

$u_{2max}$  - wysokość wypłytki mierzona na środku ściany bocznej wgłębnika

Człon korekcyjny  $(1 - u_{2max}/h)$  umożliwia uwzględnienie faktu, że w wyniku powstania wypłytki rzut powierzchni kontaktu jest różny od kwadratu.

Mając  $p_{av}$ , z czysto geometrycznych zależności wyznacza się  $P(h)$

$$P = 1.06 h^2 (\tan 22^\circ)^{-2} \sigma_u \left( 1 + \frac{\sigma_y}{\sigma_u} \right) \left( 1 + \ln \frac{E \tan 22^\circ}{3 \sigma_y} \right) = \quad (1.5)$$

$$p_{av} 4 h^2 (\tan 22^\circ)^{-2} \left( 1 - \frac{u_{2max}}{h} \right)^{-1}.$$

Wzmocnienie materiału wpływa na powstanie zapadnięcia lub wypłytki materiału; jest to uwzględnione we wzorach (1.4), (1.5) poprzez człon z  $u_{2max}$ .

Modułu Younga oblicza się na podstawie krzywej odciążenia korzystając z wzoru:

$$\frac{E}{1 - \nu^2} = \frac{1}{1.142 \sqrt{A_{max}}} \frac{dP}{dh} \quad (1.6)$$

Szywność  $dP/dh$  w (1.6) jest liczona na podstawie początkowego fragmentu doświadczalnej krzywej odciążenia. Korzystając z powyższego wzoru można

wyznaczyć moduł Younga materiału z dokładnością 1-4% w zależności od badanego materiału.

Stwierdzono, że sprężyste cofnięcie się odcisku w trakcie odciążenia wynosi ok. 10% maksymalnej głębokości. Rzut odcisku zmienia się bardzo niewiele przy odciążaniu, dlatego twardość można mierzyć z dobrą dokładnością na podstawie geometrii trwałego odcisku.

Powyższe wzory dotyczą przypadku, gdy powyżej pewnej wartości naprężenia  $\sigma_u$  odpowiadającego  $\varepsilon_p=7\%$  nie występuje już wzmocnienie plastyczne. W pracy wykonano również badania symulacyjne materiału ze wzmocnieniem. Wzmocnienie ma wpływ na sposób deformacji na konturze kontaktu. Wyływka maleje jeśli jest wzmocnienie. Dla większych wartości wzmocnienia, pojawia się zapadnięcie materiału tak jak w stanie czysto sprężystym. Zaobserwowano, że powstanie wyływki lub zapadnięcia materiału wokół odcisku zależy wyłącznie od wzmocnienia. Jest to zgodne z analizą teoretyczną dokonaną w pracy Hill, Storakers [30] dla testu Brinella, gdzie graniczna wartość wykładnika wzmocnienia potęgowego  $1/n \cong 1/4.5$ ; poniżej tej wartości powstaje wyływka, a powyżej zapadnięcie materiału.

W przypadku materiału ze wzmocnieniem większe jest również sprężyste cofnięcie odcisku przy odciążaniu i przestaje obowiązywać wzór (1.6). Do wzoru tego można mieć zaufanie tylko przy małym wzmocnieniu. Ponadto ciśnienie (naprężenie) hydrostatyczne pod wgłębnikiem jest wówczas tylko dodatnie, w przeciwieństwie do przypadku, gdy nie ma wzmocnienia plastycznego. Generalnie powstanie zapadnięcia materiału oznacza problemy w pomiarze twardości.

Otrzymane przez autorów wyniki badań symulacyjnych porównano z rezultatami badań eksperymentalnych. Porównano krzywe siła-zagłębienie ( $P-h$ ). Doświadczalne potwierdzenie wyników symulacji wskazuje, że wzory (1.3)-(1.5) mogą być stosowane do wyznaczania własności materiałowych na podstawie testu twardości i krzywej siła zagłębienie. Stwierdzono też, że można korzystać z wzoru (1.6) do wyznaczania stałych sprężystych, jeżeli doświadczalna krzywa odciążenia będzie wyznaczana przy małych (ujemnych) przyrostach siły.

Praca [9] jest w pewnym sensie kontynuacją pracy [8]. Wzory otrzymane drogą symulacji komputerowej w pracy [8] zostały uściślone, a na bazie tych wzorów opracowano algorytm identyfikacji parametrów materiałowych. W algorytmie korzysta się z pomiaru krzywej siła-zagłębienie i przekątnej trwałego odcisku. Zamiast wzorów (1.4) i (1.5) w pracy [9] przyjęto

$$p_{av} = 0.30\sigma_y \left(1 + \frac{\sigma_u}{\sigma_y}\right) \left(1 + \ln \frac{E \tan 22^\circ}{3\sigma_u}\right), \quad (1.7)$$

$$P = 1.19h^2 \sigma_y \left(1 + \frac{\sigma_u}{\sigma_y}\right) (\tan 22^\circ)^{-2} \left(1 + \ln \frac{E \tan 22^\circ}{3\sigma_y}\right), \quad (1.8)$$

gdzie:

$\sigma_u$  - naprężenie przy jednoosiowym ściskaniu odpowiadające  $\varepsilon_p = 0.3$ ,  
 $\sigma_y$  - granica plastyczności.

Ponadto wykorzystano następujący wzór na  $c^2$  (promień strefy plastycznej)

$$c^2 = \frac{0.48P}{\sigma_y} \approx \left(\frac{2h}{\tan 22^\circ}\right)^2 \quad (1.9)$$

Proponowany algorytm identyfikacji stałych materiałowych składa się z następujących etapów

1) Obliczenie twardości Vickersa według wzoru

$$H = \frac{0.464P}{a^2} \quad (a \text{ - połowa przekątnej}) \quad (1.10)$$

2) Aproksymacja krzywej  $P-h$ , możemy ją przedstawić w postaci (8):

$$P = C_1 h^2 \quad (1.11)$$

$C_1$  - jest znajdowane przez najlepsze dopasowanie do doświadczalnej krzywej  $P-h$

Średnie ciśnienie podczas obciążania liczone jest jako iloraz siły  $P$  i rzeczywistej powierzchni rzutu pola kontaktu  $A_{true}$ , na razie nieznanej

$$p_{av} = \frac{P}{A_{true}} \quad (1.12)$$

Przyjmując  $p_{av} = H$  otrzymujemy

$$p_{av} = \frac{C_1 h^2}{A_{true}} = \frac{C_1 h^2}{p_{av}} = \frac{C_1 h^2}{H} = C h^2 \quad (C = C_1/H). \quad (1.13)$$

Założenie, że  $H = p_{av}$ , ( $H = P_{max}/A_{true}$ ) oznacza, że przekątna odcisku nie zmienia się w wyniku sprężystego cofnięcia, oraz że zrzutowana powierzchnia kontaktu jest idealnym kwadratem. Do obliczenia twardości  $H$  zwykle jako  $P$  bierze się zmierzoną maksymalną siłę obciążającą, a przekątna  $2a$  jest mierzona po odciążeniu.



3) Wprowadzono pojęcie geometrycznej powierzchni rzutu odcisku  $A_{ideal}$  - można ją obliczyć mając głębokość odcisku przy założeniu idealnej geometrii (takiej, że nie ma ani zapadnięcia ani wypłytki) jako

$$A_{ideal} = 24.5h^2 = \frac{4}{(\operatorname{tg}22)^2} h^2 = 2a^2, \quad (1.14)$$

jeśli  $h$  jest mierzone od poziomu powierzchni nieodkształconej.

Wprowadza się dalej współczynnik obliczony z (1.13) i (1.14)

$$\beta = \frac{A_{ideal}}{A_{true}} = \frac{24.5}{C}. \quad (1.15)$$

Wartość  $\beta$  wskazuje czy wokół wgłębienia powstaje zapadnięcie materiału, czy wypłytki.

4) Z przebiegu krzywej  $P-h$  określa się wartość modułu Younga, mierząc nachylenie krzywej odciążenia  $dP/dh$  na 1/3 jej długości licząc od maksymalnej siły. Przecięcie prostej przechodzącej przez tę część krzywej odciążenia z osią poziomą ( $h$ ) definiuje wartość  $h_p$ . Mając wartość  $h_p$  można obliczyć twardość.

Inną metodą wyznaczenia tego nachylenia jest aproksymacja krzywej odciążenia przy pomocy funkcji potęgowej i obliczenie pochodnej tej funkcji przy zagłębieniu bliskim maksymalnej sile.

5) Wprowadza się pojęcie rzeczywistego przemieszczenia pionowego  $h_c$ , to jest takiego, aby spełnione było równanie

$$A_{true} = \frac{A_{ideal}}{\beta} = \frac{24.5}{\beta} h^2 = 24.5h_c^2 \quad (1.16)$$

Wartość  $h_c$  to wielkość zagłębienia w pewnym fikcyjnym materiale, w którym nie powstaje ani wypłytki ani zapadnięcie więc rzeczywista powierzchnia kontaktu mogłaby być obliczona z prostej zależności geometrycznej;  $h_c$  można też wyrazić jako

$$h_c = \frac{h}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{C}{24.5}} h = C_2 h \rightarrow \frac{1}{C_2} = \sqrt{\beta} \quad (1.17)$$

gdzie  $h$  - jest zagłębieniem liczonym od powierzchni niezdeformowanej  
Określono jeszcze przemieszczenie pionowe powierzchni poza obszarem kontaktu (inaczej przemieszczenie brzegu kontaktu)

$$h_s^L = h - h_c = (1 - C_2)h = C_3 h \quad (1.18)$$

Indeks „L” oznacza, że przemieszczenie następuje w procesie obciążenia.

Można porównać  $h_c$  i  $h_p$  oszacowane z krzywej odciażenia i określić, jaki popełniamy błąd biorąc  $h_p$  zamiast  $h_c$  do obliczenia twardości.

6) Wstawienie  $h_c$ ,  $P_{max}$  do wzoru (1.9) i wyznaczenie granicy plastyczności  $\sigma_y$ :

$$\sigma_y = \frac{0.48P}{(2h_c / \tan 22^\circ)^2} \quad (1.19)$$

Następnie wyznaczone wartości  $E$ ,  $\sigma_y$ ,  $p_{av}=H$  są podstawiane do równania (1.7), z którego następnie wyznacza się  $\sigma_u/\sigma_y$ . Na koniec obliczone wartości  $E$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_u/\sigma_y$  podstawia się do równania (1.8), biorąc  $h_c$  w miejsce  $h$ , przez co uwzględnia się przemieszczenie brzegu odcisku. W ten sposób zostaje odtworzona krzywa  $P-h$  na podstawie zidentyfikowanych stałych materiałowych i można ją następnie porównać z krzywą doświadczalną. Stanowi to weryfikację otrzymanych drogą identyfikacji parametrów materiałowych.

W pracy przedstawiono ponadto otrzymane doświadczalnie krzywe siła zagłębienie dla kilku rodzajów szkła i ceramiki. Otrzymano dobrą zgodność tych krzywych, z krzywymi wyznaczonymi numerycznie przy pomocy MES. Dokonano analizy zmian pola rzutu odcisku w trakcie odciażenia. Stwierdzono, że powierzchnia kontaktu inaczej zmienia się przy obciążeniu inaczej przy odciażeniu. W początkowej fazie odciażenia (liniowej) powierzchnia kontaktu pozostaje niezmienniona i cały materiał, także poza brzegiem kontaktu, wraz z wgłębniem podnosi się sprężysto. W tej fazie odciażenia materiał zachowuje się analogicznie jak przy obciążaniu. Jeśli powierzchnia kontaktu nie zmieniałaby się w trakcie całego procesu odciażania, to krzywa odciażenia powinna kontynuować charakter liniowy, taki jak na początku odciażenia. Zwykle jednak krzywa ta odchodzi od liniowości, świadczy to o tym, że rzeczywista powierzchnia kontaktu nie jest już stała. Wynika to z faktu, że prędkość cofania materiału bezpośrednio pod wgłębniem jest inna niż materiału położonego na powierzchni i na brzegu kontaktu. Tak więc materiał blisko swobodnej powierzchni zaczyna tracić kontakt z wgłębniem, podczas gdy końcówka jest nadal w kontakcie, stąd powierzchnia kontaktu stopniowo maleje.

Poniżej pewnej wartości siły podczas odciażenia, powierzchnia na zewnątrz kontaktu przestaje się cofać. Po całkowitym odciażeniu powierzchnia wewnątrz obszaru kontaktu jest krzywoliniowa, a nie płaska. Wtedy zależność między głębokością odcisku a jego przekątną nie jest już taka, jak wynikałoby to z kształtu wgłębniaka Vickersa. Dlatego  $A_{ideal}$  obliczone z na podstawie reszkowego zagłębienia  $h_f$  według wzoru (1.14) jest mniejsze

niż rzeczywista wielkość odcisku po odciążeniu. Potwierdzają to badania zamieszczone w innych publikacjach. Podano przykłady opisanych tu efektów w różnych materiałach.

Dokonano również szczegółowej analizy krzywej odciążenia pod kątem jej przydatności do wyznaczania modułu Younga. Analizując krzywą odciążenia możemy zaobserwować trzy różne fazy:

- i) przemieszczenie powierzchni swobodnej położonej na zewnątrz brzegu kontaktu.
- ii) przemieszczenie powierzchni wewnątrz pierwotnego brzegu kontaktu to znaczy wewnątrz trwałego odcisku (zmniejszanie się pola powierzchni kontaktu), które odpowiada za utratę liniowości krzywej odciążenia
- iii) przemieszczanie malejącej powierzchni rzeczywistego kontaktu z wgłębniakiem

Opisane fazy zaznaczono na krzywej odciążenia.

W ostatniej części pracy [9] zidentyfikowane parametry materiałowe wykorzystano do odtworzenia krzywych  $P-h$  i porównania z krzywymi doświadczalnymi. Stwierdzono, że moduł Younga w niewielkim stopniu wpływa na krzywe obciążenia natomiast w dużym stopniu na krzywe odciążenia. Zastosowane sprężysto-plastyczne rozwiązanie problemu przy pomocy MES jest dokładniejsze w zakresie większych obciążeń. Granice plastyczności przy ściskaniu wyznaczone dla niektórych z badanych materiałów porównano z danymi dostępnymi w literaturze. Stwierdzono zgodność wyników.

W omówionych dotąd pracach starano się skorelować krzywe  $P-h$  otrzymane w teście wciskania wgłębniaka Vickersa z własnościami sprężysto-plastycznymi materiału. W przypadku wciskania wgłębniaka w materiały kruche, w których występuje pękanie ważne jest znalezienie metody pośredniego pomiaru powierzchni kontaktu (pęknięcia utrudniają pomiar bezpośredni). Doerner Nix w pracy [10] zaproponowali metodę wyznaczenia powierzchni kontaktu wgłębniaka Vickersa przy maksymalnym obciążeniu na podstawie części krzywej siła-zagłębienie odpowiadającej odciążeniu. Ich metoda polega na założeniu, że powierzchnia kontaktu jest stała podczas początkowego odciążania.

Podjęmowane były również próby zastosowania innego rodzaju wgłębniaków. Analizie teoretycznej procesu wciskania innych wgłębniaków poświęcono szereg prac. Bhattacharya i Nix [17] dokonali symulacji numerycznej wciskania stożków. Stwierdzili, że strefa plastyczna nie pokrywa się ze strefą przewidzianą przez teorię rozprzestrzeniających się puste.

W pracy [12] Bishop przedyskutował wciskanie stożka w materiały ciągliwe. Otrzymał korelację twardości  $H$  i granicy plastyczności  $\sigma_y$ , analizując strefę uplastycznienia jako rozprzestrzenianie się sferycznej pustki z ciśnieniem wewnętrznym w materiale sprężysto-plastycznym. Porównanie testów wciskania wgłębników o różnych kształtach przedstawiono w pracy [14]. W pracach [15], [16] test wciskania wgłębnika „ostrego” wykorzystano do identyfikacji naprężeń własnych w warstwie wierzchniej. W algorytmie identyfikacji założono, że pozostałe parametry warstwy są znane.

Przykładem zupełnie innego podejścia do problemu identyfikacji materiału niż w opisanych wyżej publikacjach jest praca [18]. W pracy tej podano metodę wyznaczania plastycznej części krzywej rozciągania korzystając z prób mikrotwardości wykonanej za pomocą kilku geometrycznie podobnych wgłębników (stożki o różnych kątach rozwarcia). Ideą tej metody jest wyznaczenie jednego punktu na krzywej rozciągania  $\sigma$ - $\varepsilon$  z parametrów odcisku jednego wgłębnika.

Na początku wykonano analizę procesu wciskania wgłębnika Berkovicha przy pomocy MES. Do obliczeń przyjęto uproszczony model wgłębnika, to znaczy stożek zamiast trójsiennej piramidki. Przyjęto sprężyste stałe materiałowe jak dla stali 1070, oraz dla krzemu. Wzmocnienie plastyczne przyjęto według prawa potęgowego Ramberga-Osgooda, (1.20), biorąc różne wykładniki  $N$ .

Wprowadzono pojęcie odkształcenia średniego w zdeformowanej plastycznie objętości materiału pod wgłębieniem. Stwierdzono, że odkształcenie to zależy od materiału (od wykładnika  $N$ ), zatem nie może być wielkością charakterystyczną dla danego wgłębnika.

Aby zdefiniować odkształcenie plastyczne  $\varepsilon_p$  charakterystyczne dla wgłębnika o danym kącie rozwarcia korzystano z następującego rozumowania. Najpierw przedstawiono zależność między naprężeniem i odkształceniem plastycznym w postaci prawa Ramberga-Osgooda

$$\varepsilon_p = K \left( \frac{\sigma}{E} \right)^N. \quad (1.20)$$

Przez analogię do tego prawa charakterystyczne odkształcenie  $\varepsilon_p$  zdefiniowano jako

$$\varepsilon_p = K' \left( \frac{H}{E} \right)^{N'}, \quad (1.21)$$

gdzie  $H$  jest twardością, a stałe  $N'$ ,  $K'$  charakteryzują materiał.

Charakterystyczne  $\varepsilon_p$  spełnia wówczas następujące warunki:

- 1) zależy od kształtu wgłębnika (gdyż twardość zależy od kształtu)
- 2) nie zależy od zagłębienia wgłębnika (o ile dla danego typu wgłębnika  $H$  nie zależy od zagłębienia)

Porównując równania (1.20) i (1.21) możemy napisać zależność między twardością i naprężeniem

$$\frac{H}{E} = A \left( \frac{\sigma}{E} \right)^B, \quad (1.22)$$

gdzie

$$A = \frac{K}{K'}^{1/N'}, \quad B = \frac{N}{N'}. \quad (1.23)$$

Dla danych  $K$ ,  $N$  (dla danego materiału) można tak dobrać  $K'$ ,  $N'$ , że parametry  $A$  i  $B$  są stałe. Równania (1.20)–(1.22) można napisać dla różnych krzywych rozciągania. Wzięto 12 materiałów (różne kombinacje  $E$ ,  $\sigma_0$ ,  $N$ ), dla każdego materiału obliczono iloraz  $H/E$  przy pomocy MES oraz stosunek  $\sigma_i/E$ , gdzie  $\sigma_i$  wzięto z krzywej rozciągania (1.20) ( $i$ - numer materiału) tak, aby odpowiadało pewnej wartości  $\varepsilon_p^i$  (jednakowej dla wszystkich materiałów). Następnie sprawdzono czy dla danego  $\varepsilon_p^i$  można przeprowadzić przez punkty  $H/E$ ,  $\sigma_i/E$  krzywą w postaci (1.22). Jako  $\varepsilon_p$  charakterystyczne dla danego wgłębnika przyjęto tę wartość  $\varepsilon_p^i$ , dla której równanie (1.22) najdokładniej aproksymuje punkty  $(H/E; \sigma_i/E)$  odpowiadające dwunastu badanym materiałom. Tak określone odkształcenie charakterystyczne nie zależy od materiału ani od zagłębienia, zatem może być przypisane geometrii wgłębnika. Drogą symulacji numerycznej znaleziono odkształcenie charakterystyczne dla stożków o kątach rozwarcia  $84.6^\circ$  oraz  $140.6^\circ$ ; wynoszą one odpowiednio 0.225 i 0.07. Ponadto obliczono stałe  $A$  i  $B$  w równaniu (1.22), które okazały się niezależne od kąta rozwarcia stożka. Równanie przypisujące twardości odpowiednią charakterystyczną wartość naprężenia ma postać:

$$\frac{H}{E} = 1.7 \left( \frac{\sigma}{E} \right)^{0.92}. \quad (1.24)$$

Charakterystyczne odkształcenie  $\varepsilon_p$  dla danego stożka i przypisane mu  $\sigma$  obliczone z (1.24) są współrzędnymi punktu na krzywej rozciągania.

Z prób twardości wykonanych dwoma stożkami otrzymujemy dwa punkty krzywej rozciągania w postaci potęgowej (1.20). Na podstawie tych

dwóch punktów możemy już określić stałe  $N$  i  $K$  występujące w równaniu (1.20).

W pracy podano też wzory, z których można wyznaczyć jako z układu równań  $h_c$ ,  $E_r$  i  $H$ . Wielkość  $h_c$  oznacza tu tę część całkowitego zagłębienia  $h$  (mierzonego od poziomu powierzchni nieodkształconej), dla której stożek jest w kontakcie z badanym materiałem. W ten sposób uwzględnia się istnienie wypłytki lub zapadnięcia materiału wokół odcisku.

$$\frac{h_c}{h} = \frac{I}{\xi + \Omega H / E_r}$$

$$S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E_r \sqrt{\alpha h_c^2}$$

$$H = \frac{P_{max}}{A}$$

gdzie

$\xi, \Omega$  - stałe przypisane każdemu stożkowi,

$S$  - nachylenie krzywej odciążenia,

$A$  - pole kontaktu ( $h_c^2 \alpha$ ).

Wyznaczono doświadczalnie krzywe siła-zagłębienie dla krzemu i stali 1070. Następnie korzystając z proponowanej metody wyznaczono twardość i krzywe rozciągania dla tych materiałów. Warto zauważyć, że w proponowanej metodzie mierzonymi parametrami są siła i zagłębienie (pole kontaktu obliczane jest na podstawie zagłębienia), natomiast pomija się pomiar średnicy odcisku.

W pracy stwierdzono, że problemem, na który należy zwrócić uwagę w przypadku badania materiałów ceramicznych jest dobór zagłębienia stożka tak, aby uniknąć pęknięcia tych materiałów.

Autorzy postawili również zagadnienie odwrotnie polegające na obliczeniu twardości z wyprowadzonych wzorów, mając krzywe rozciągania. Obliczono twardość korzystając z (1.22) tzn. wzięto dla  $\varepsilon_p$  charakterystycznego dla stożka o kącie  $140.6^\circ$  odpowiednią wartość  $\sigma$  z krzywej rozciągania i podstawiono ją do (1.22), obliczając  $H$ . Operację tę wykonano dla różnych materiałów, czyli różnych krzywych rozciągania. Dla tych samych krzywych rozciągania obliczono twardość korzystając z wzoru (1.7) według [9] dotyczącego zagłębienia piramidki Vickersa

$$H = 0.27(\sigma_o + \sigma_{o,3}) \left(1 + \ln \frac{E \tan 22}{3\sigma}\right). \quad (1.25)$$

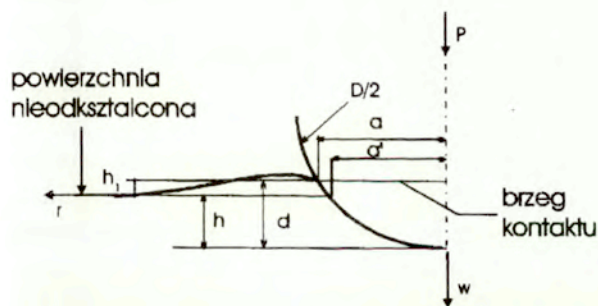
Z wzoru (1.22) otrzymuje się nieco wyższą twardość niż (1.25), wyjaśnia się to niedokładnością wzoru (1.25).

Różnicę między twardością Berkovicha i Vickersa wyjaśnia się często różnicą wypływek wokół każdego z tych wgłębników, jednak autorzy nie zgadzają się z tym poglądem i przypisują ją różnicy zagłębień obydwu wgłębników przy tej samej sile obciążającej.

Jak wspomniano na początku rozdziału z klasycznego pomiaru twardości Brinella dla różnych obciążeń można uzyskać więcej informacji o materiale niż z pomiaru twardości wgłębnikiem „ostрым”. Stąd klasyczne pomiary twardości Brinella były najwcześniej wykorzystywane do wyznaczania krzywych rozciągania materiału. W teście Brinella mierzona jest siła obciążająca i promień brzegu odcisku kuli w materiale rys. 1.1. Niekiedy korzysta się również z innych parametrów odcisku takich jak średnica odcisku na poziomie powierzchni nieodkształconej  $a'$ , oraz zagłębienie kuli w materiale  $h$ , rys. 1.1. Twardość Brinella zdefiniowana jest jako

$$H_B = \frac{P}{F},$$

gdzie:  $F$  – pole powierzchni czasy kulistej powstającej w wyniku trwałego odcisku kuli.



Rys. 1.1 Parametry odcisku kuli

W literaturze określa się również średnie ciśnienie pod kulą z wzoru

$$p_{av} = \frac{P}{\pi a^2}.$$

Pierwsze zależności funkcyjne dotyczące procesu wciskania kuli zostały podane przez Meyera [19], który zauważył, że średnie ciśnienie  $p_{av}$  zależy w sposób potęgowy od ilorazu  $a/D$

$$p_{av} \approx K \left( \frac{a}{D} \right)^m \quad (1.25)$$

Znacznie później O'Neil i Tabor [13] stwierdzili na podstawie wielu doświadczeń, że wykładnik potęgi występujący we wzorze (1.25) jest taki sam jak w prawie konstytutywnym opisującym badany materiał, tzn.

$$\sigma = k \varepsilon_p^m \quad (1.26)$$

Ponadto zauważyli oni, że istnieje proste odwzorowanie krzywej  $p_{av}-a/D$  na krzywe rozciągania  $\sigma-\varepsilon_p$ , które można zapisać w następującej postaci:

$$\varepsilon_p = \beta \frac{a}{D} \quad \sigma = \frac{1}{\alpha} p_{av}, \quad (1.27)$$

gdzie:  $\alpha, \beta$  oznaczone niekiedy jako  $\Psi$  i  $\xi$  są uniwersalnymi stałymi

$$\Psi = \alpha = 2.87, \quad \beta = \xi = 0.4. \quad (1.28)$$

Korzystając z tych zależności można napisać:

$$p_{av} = \frac{P}{\pi a^2} = k \alpha \beta^m \left( \frac{a}{D} \right)^m. \quad (1.29)$$

W pracy [13] stwierdzono również, że dla danego materiału

$$\frac{a^2}{hD} = c^2 \quad (1.30)$$

gdzie:  $c^2$  zależy jedynie od wykładnika wzmocnienia plastycznego  $m$ .

Wartość  $c^2$  jest miarą wypłytki lub zapadnięcia materiału, które powstaje wokół odcisku kuli, dla  $c^2 > 1$  w materiale występuje wypływka natomiast dla  $c^2 < 1$  zapadnięcie materiału. Wzory (1.25-1.30) zostały otrzymane na podstawie doświadczalnych pomiarów geometrii odcisku kuli  $(a, h)$  w konfiguracji odciążonej.

Wzory te umożliwiają identyfikację stałych  $k$  i  $m$ . Procedura identyfikacyjna polega na wykonaniu kilku odcisków z różnymi siłami  $P_i$  i pomiarze średnicy odcisku  $2a_i$ . Stałe materiałowe  $k$  i  $m$  wyznacza się rozwiązując układ  $n$  równań utworzony z równania (1.29) poprzez wstawienie do niego wartości  $P_1, P_2, \dots, P_n, a_1, a_2, \dots, a_n$  zmierzonych dla  $n$ - odcisków. Równania te mają prostą interpretację geometryczną. Jeśli naniesiemy punkty pomiarowe w układzie  $\log(P/\pi a_i^2) - \log(a_i/D)$ , to stała  $m$  jest tangensem kąta nachylenia prostej wyznaczonej przez te punkty.



Proste wzory (1.27-1.30) podane przez Tabora zostały wykorzystane do wyznaczania krzywych rozciągania cienkich powłok w pracy [20]. W pracy tej założono, że moduł Younga warstwy jest znany, a wyznaczana jest jedynie plastyczna część krzywej rozciągania. Badano cienkie warstwy galwaniczne Au i Co-Au, których grubość wynosiła ok. 20 $\mu$ m. Jako wglębnik stosowano kulkę diamentową o średnicy 40 $\mu$ m. Pomimo, że w równaniu (1.29) występuje promień odcisku mierzono krzywą siła-zagłębienie ( $P-h$ ). Zagłębienie liczone od poziomu powierzchni nieodkształconej nie przekraczało 5 $\mu$ m. Biorąc kilka punktów takiej krzywej obliczano kilka wartości  $\epsilon_p$  i  $\sigma$  zgodnie z (1.27) wyznaczając w ten sposób krzywą rozciągania. Autorzy nie podają jednak, w jaki sposób mając zagłębienie kulki obliczali promień odcisku. Relacja  $h-a$  zależy od wielkości wypłytki wokół odcisku, która z kolei zależy od wzmocnienia, a efekt ten nie jest w ogóle wspomniany przez autorów. Dla weryfikacji wyników otrzymane krzywe rozciągania dla warstw były aproksymowane przy pomocy prawa potęgowego, a następnie wykorzystane jako dane do numerycznego wyznaczenia krzywej  $P-h$  przy pomocy MES. Tę otrzymaną numerycznie krzywą porównywano następnie z krzywą doświadczalną. Jeśli wyniki nie były zadowalające korygowano wartość współczynnika  $\alpha$  we wzorze (1.27); na przykład dla niklu okazało się, że najlepszą zgodność wyników otrzymuje się dla  $\alpha=2.0$ . Waznym wnioskiem z pracy jest to, że krzywa  $P-h$  jest bardzo wrażliwa na przebieg krzywej rozciągania materiału. Zidentyfikowane krzywe rozciągania w zakresie  $0 < \epsilon_p < 5\%$  otrzymano wyłącznie drogą ekstrapolacji, gdyż w tym zakresie metoda jest mało dokładna i nieuwzględniano punktów pomiarowych z tego zakresu. W pracy nie zostało zbadane, czy przy stosowanym zagłębieniu kulki należało uwzględnić wpływ podłoża. Wynika z niej również, że przy bardzo małych odciskach należy korzystać raczej z pomiaru zagłębienia  $h$ , a nie z pomiaru średnicy odcisku.

Nieco inne podejście do problemu identyfikacji przy pomocy testu Brinella zaproponowano w pracy [21]. Przedstawiono tam metodę wyznaczania krzywej naprężenie-odkształcenie na podstawie testu wciskania kuli, w którym mierzona jest krzywa siła-zagłębienie ( $P-h$ ) i korzysta się z tej części krzywej, która opisuje odciążenie. Metoda umożliwia wyznaczenie krzywej naprężenie-odkształcenie zdefiniowanej w ten sposób, że naprężenie jest naprężeniem średnim na styku kuli i badanego materiału ( $p_{av}$ ), natomiast miarą odkształcenia jest iloraz zagłębienia i średnicy wciskanej kuli. Nie podano jednak, jaki jest związek tak zdefiniowanej krzywej naprężenie-odkształcenie i tradycyjnej krzywej rozciągania mierzonej na maszynie wytrzymałościowej. W pracy zauważono, że w procesie obciążania

początkowy fragment krzywej  $P-h$  pokrywa się z rozwiązaniem Hertza dla kuli wciskanej w półprzestrzeń. Powyżej pewnej wartości siły, odpowiadającej przekroczeniu granicy plastyczności w materiale, krzywa  $P-h$  oddala się od rozwiązania Hertza. Natomiast w procesie odciążenia krzywa  $P-h$  pokrywa się z rozwiązaniem Hertza dla kuli zagłębianej w nieckę kulistą, o promieniu większym od promienia kuli. Dla odciążenia możemy napisać

$$h_e = \sqrt[3]{\frac{9}{8}(k_1 + k_2)^2 P^2 \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right)}, \quad k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (1.31)$$

gdzie:

$h_e$  - sprężyste cofnięcie kuli

$D_1$  - średnica kuli

$D_2$  - średnica niecki

Proponowana procedura identyfikacyjna polega na wykonaniu serii testów obciążenia-odciążenia w jednym punkcie, przy czym zwrot obciążenia następuje dla coraz większych sił. Krzywe odciążenia mają przebieg zgodny z (1.31), przy czym ich kąt nachylenia rośnie ze wzrostem maksymalnej siły, ze względu na to, że dla większych sił obciążających zmniejsza się średnica  $D_2$  trwałej niecki (dla małych sił  $D_2 = \infty$ ). Mając wartość sprężystego przemieszczenia  $h_e$  w trakcie odciążenia można obliczyć średnice  $D_2$  odpowiadające kolejnym punktom zwrotu obciążenia:

$$\frac{1}{D_2} = \frac{8h_e^3}{9P^2(k_1 + k_2)^2} - \frac{1}{D_1} \quad (1.32)$$

Prawidłowość obliczeń  $D_2$  można sprawdzić mierząc zagłębienie resztkowe  $h_p$  oraz średnicę brzegu odcisku  $2a$  i korzystając z zależności geometrycznej

$$a = \sqrt{h_p(D - h_p)} \quad (1.33)$$

Korzystając z wzoru Hertza można obliczyć średnie ciśnienie na styku kulki i materiału.

$$p_{av} = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{1}{(k_1 + k_2)} \left[ \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) h_e \right]^{1/2} \quad (1.34)$$

Bezwymiarowe wyrażenie  $\left[ \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) h_e \right]^{1/2}$  przyjęto jako definicję odkształcenia sprężystego  $\varepsilon_e$ . Odkształcenie plastyczne zdefiniowano jako:

$$\varepsilon_p = (h_p / D_1)^{0.5} \quad (1.35)$$

Zatem odkształcenie całkowite ma postać

$$\varepsilon_t = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \left( \frac{l}{D_1} + \frac{l}{D_2} \right) h_e^{0.5} + \left( \frac{h_p}{D_1} \right)^{0.5}. \quad (1.36)$$

Wstawiając  $D_2$  z (1.32) do (1.34) otrzymujemy wyrażenie na naprężenie średnie w zależności od  $P$  i  $h_e$ .

$$p_{av} = \sigma = \frac{16\sqrt{2}}{9\pi(k_1 + k_2)^2} \frac{h_e^2}{P}. \quad (1.37)$$

Zauważmy, że wyrażenie (1.37) nie zależy od średnicy kuli i średnicy niecki w materiale. Zatem średnie ciśnienie pod kulą możemy oszacować na podstawie sprężystego cofnięcia  $h_e$  i siły  $P$ .

Powyższą metodę zastosowano do identyfikacji własności próbki aluminiowej przy pomocy kuli o średnicy 6.35mm, maksymalna stosowana siła wynosiła 942 N. Podano wykres  $p_{av}$  w funkcji zdefiniowanego wcześniej odkształcenia  $\varepsilon_t$ . Wykres ten jakościowo przypomina krzywą rozciągania badanego materiału. Podano również wykres tzw. naprężenia Meyera zdefiniowanego jako

$$\sigma_M = \frac{P}{\pi D_2 h_p} \quad (1.38)$$

w funkcji  $\varepsilon_t$  oraz wykres  $\varepsilon_e$  w funkcji  $\varepsilon_t$ . Okazuje się, że przy przyjętej tu definicji odkształcenia granica plastyczności jest osiągnięta dla  $\varepsilon_t = 1,27\%$ .

Praca [21] jest jedną z pierwszych prób wykorzystania krzywej  $P$ - $h$  mierzonej w teście wciskania kuli do wyznaczania własności materiału. Brak jest jednak korelacji między identyfikowaną w pracy krzywą naprężenie-odkształcenie ( $p_{av}$ - $\varepsilon_t$ ) a klasyczną krzywą rozciągania mierzoną na maszynie wytrzymałościowej. Ponadto we wzorach przedstawionych w pracy nie uwzględniono efektu powstawania wypłytki lub zapadnięcia materiału wokół odcisku.

Podobnie jak w przypadku próby Vickersa próba twardości Brinella była przedmiotem wielu prac teoretycznych, w których dokonano szczegółowej analizy (rozkłady naprężeń i odkształceń, powstawanie wypłytki) procesu zagłębiania kuli w materiał sprężysto-plastyczny. Autorami pierwszych prac poświęconych analizie wciskania kuli przy pomocy MES są Hardy [22] oraz niezależnie Lee [23]. Przedstawili oni relację między obciążeniem i polem kontaktu oraz rozmiarem stref plastycznych. W miarę rozwoju komercyjnych programów MES pojawiły się kolejne prace m.in. Folansbee i Sinclair [24], Sinclair [25], Murakami Yuan [26]. Rozważano różne modele konstytutywne,

tarcie, stany naprężeń resztkowych i wrażliwość na powstawanie pęknięć. Montmitonnet [27] rozważał zagłębienie kuli w półprzestrzeń z warstwą. Obszerną analizę numeryczną procesu wciskania kuli w materiał sprężysto-plastyczny można znaleźć w pracy Krala [28] gdzie analizowano pole naprężeń i odkształceń pod kulą, krzywe siła-zagłębienie, wysokość wypływki przy wielokrotnym obciążaniu.

## 1.2 Rozwiązania samopodobne problemu zagłębienia kuli w ośrodek nieliniowo-sprężysty i sztywno-plastyczny.

Rozwiązania teoretyczne problemu zagłębienia kuli w półprzestrzeń, które można uznać za przełomowe zostały przedstawione w serii prac opublikowanych przez Hilla, Storakersa i współpracowników [29-32]. Prace te dotyczyły wciskania kuli w półprzestrzeń nieliniowo sprężystą, w której zależność naprężenie-odkształcenie spełnia prawo potęgowe  $\sigma = k\varepsilon^m$  oraz w półprzestrzeni sztywno-plastyczną i lepko-plastyczną gdzie również obowiązuje prawo potęgowe  $\sigma = k\varepsilon_p^m$ . Prace te omówimy szczegółowo, gdyż stanowią one podstawę proponowanych metod identyfikacji

Dla materiału nieliniowo sprężystego podano pełne rozwiązanie problemu w pracy [30]. Znalaziono tam funkcje przedstawiające potencjały dualne sprężyste  $\Phi(\sigma_{ij}), \Psi(\varepsilon_{ij})$  spełniające warunki

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \Phi + \Psi. \quad (1.39)$$

Funkcje te są funkcjami wypukłymi i są funkcjami jednorodnymi odpowiednio stopnia  $n+1$  i  $m+1$ , zatem z twierdzenia Eulera mamy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} = (n+1)\Phi = (m+1)\Psi = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

$$\Phi = m\Psi. \quad (1.40)$$

Przekształcając (1.39) i (1.40) otrzymujemy

$$\Psi = n\Phi, \quad mn = 1. \quad (1.41)$$

Równania funkcji  $\Phi$  i  $\Psi$  można wyrazić przez osobne funkcje dodatnio określone stopnia pierwszego względem dodatnich mnożników

$$\tau(\sigma_{ij}) = \text{const} \quad \gamma(\varepsilon_{ij}) = \text{const} \quad (1.42)$$

Potencjały  $\Phi$  i  $\Psi$  mają zatem następującą postać

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \frac{k[\tau(\sigma_{ij})/k]^{n+1}}{(n+1)}, \quad (1.43)$$

$$\Psi(\varepsilon_{ij}) = \frac{k[\gamma(\varepsilon_{ij})]^{m+1}}{(m+1)}, \quad (1.44)$$

gdzie  $k$  jest stałą materiałową

$$\tau = k\gamma^m, \quad \gamma = (\tau/k)^n.$$

Dla tak skonstruowanych funkcji możemy napisać

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = k \left(\frac{\tau}{k}\right)^n \frac{1}{k} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} = \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.45)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = k\gamma^m \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Z powyższych równań wynika, że  $\varepsilon_{ij}$  jest prostopadłe do lokalnego konturu  $\tau$  w punkcie  $\sigma_{ij}$ , a  $\sigma_{ij}$  jest prostopadłe do lokalnego konturu  $\gamma$  w punkcie  $\varepsilon_{ij}$ . To samopodobieństwo powoduje, że odpowiedź na radialną ścieżkę odkształceń lub naprężeń jest radialna (zmieniające się składowe tensora zachowują ustalone stosunki i znaki).

Dla  $n \geq 1$  i dla  $0 \leq m \leq 1$  prawo potęgowe dość dobrze aproksymuje własności metali w teście jednoosiowego rozciągania. Takie wartości  $m$  i  $n$  powodują, że funkcje  $\Psi$  i  $\Phi$  nie są analityczne i nie mogą być rozwijane w szeregi. Biorąc pod uwagę izotropię materiału funkcje  $\tau$  i  $\gamma$  wprowadzamy w postaci

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ \left( \frac{(1-2\nu)}{3(1+\nu)} \right) \sigma_{kk}^2 + s_{ij}s_{ij} \right]^{1/2},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \left( \frac{(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \right) \varepsilon_{kk}^2 + e_{ij}e_{ij} \right]^{1/2}. \quad (1.46)$$

gdzie  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  dewiatory odpowiednio naprężenia i odkształcenia, a  $\sigma_{kk}$ ,  $\varepsilon_{kk}$  części kuliste tensora naprężenia i odkształcenia.

Do rozwiązania problemu przyjęto następnie, że  $\nu = 1/2$  zatem

$$\tau = \frac{3}{2} (s_{ij}s_{ij})^{1/2} \quad \gamma = \frac{2}{3} (e_{ij}e_{ij})^{1/2}. \quad (1.47)$$

Tak skonstruowane rozwiązanie dla nieliniowej sprężystości jest podobne do rozwiązania przyrostowej teorii plastyczności przy założeniu że powierzchnia płynięcia jest zgodna z  $\Phi(\sigma_{ij})$  oraz że wzmocnienie materiału jest takie, że przyrosty energii dyssypowanej wynoszą  $n\delta\Phi(\sigma_{ij})$  na jednostkę objętości. Założono, że dla niewielkich zagłębień kształt kuli może być

aprosymowany przy pomocy paraboli. Zatem w rejonie deformacji (dla  $r \leq a$ ) kształt profilu przedstawia się następującym równaniem

$$w(r) = h - \frac{r^2}{D}.$$

Równania problemu wciskania kuli w półprzestrzeń ( $x_3 \geq 0$ ) przedstawiają się następująco:  
związki konstytutywne

$$\varepsilon_{ij} = \gamma \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \sigma_{ij} = \tau \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \gamma = \left(\frac{\tau}{k}\right)^n,$$

związki geometryczne (małe odkształcenia)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.48)$$

równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0.$$

Warunki brzegowe mają postać

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{dla } r > a \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad u_3 = h - \frac{r^2}{D}, \quad \text{dla } r \leq a \end{aligned} \quad (1.49)$$

(założono tu, że dla małych zagłębień, kulisty kształt odcisku może być przybliżony parabolą). Dwie z trzech wielkości  $a$ ,  $h$ ,  $D$  traktujemy jako dane. W tej postaci równania (1.48), (1.49) na każdym etapie zagłębienia kulki przedstawiają inny problem brzegowy. Okazuje się jednak, że rozwiązanie ogólne może być generowane przez jednokrotne rozwiązanie problemu brzegowego sformułowanego w odpowiednio przeskalowanych zmiennych. Jest to konsekwencją jednorodności potencjałów dualnych. Skalowania zmiennych dokonuje się według wzorów

$$\begin{aligned} a\bar{x}_i = x_i, \quad a\bar{r} = r, \quad a\bar{u}_i = \left(\frac{D}{a}\right)u_i(x_k, a, D), \\ \bar{\varepsilon}_{ij} = \left(\frac{D}{a}\right)\varepsilon_{ij}(x_k, a, D), \quad \bar{\gamma}(\bar{\varepsilon}_{ij}) = \left(\frac{D}{a}\right)(\varepsilon_{ij}), \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$k\bar{\sigma}_{ij} = \left(\frac{D}{a}\right)^{1/n} \sigma_{ij}(x_k, a, D).$$

Równania (1.48) zapiszą się teraz jako:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \bar{\gamma} \partial \bar{\tau} / \partial \bar{\sigma}_{ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \bar{\tau} \partial \bar{\gamma} / \partial \bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \bar{\gamma} = \bar{\tau}^n \\ \bar{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right), \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{x}_i} = 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Warunki brzegowe po transformacji przyjmują postać

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{33} &= 0 \quad (\bar{r} > 1), \\ \bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{23} &= 0, \quad \bar{u}_3 = \frac{1}{c^2} - \bar{r}^2 \quad (\bar{r} \leq 1) \end{aligned} \quad (1.52)$$

gdzie:

$$c^2 = \frac{a^2}{hD} \quad (1.53)$$

W takim sformułowaniu parametry  $a$ ,  $h$ ,  $D$  występują w układzie równań wyłącznie w wyrażeniu na  $c^2$ . Wartość własna  $c^2$  jest więc niezmiennikiem procesu zagłębiania kuli w określony materiał. Dokładna wartość  $c^2$  zależy od wykładnika  $n$  i od kształtu samopodobnych konturów gęstości energii. Stałość ilorazu  $\frac{a^2}{hD}$  została zauważona wcześniej przez wielu autorów w badaniach doświadczalnych [13]. Niezmiennosc rozwiązania zredukowanego problemu związana z  $c^2$  ma wpływ na przebieg wielkości fizycznych  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ . Warstwy tych wielkości mają zawsze podobny kształt, a ich wartość zmienia się wraz ze wzrostem promienia kontaktu. Ich wzrost jest proporcjonalny do  $a^2, \frac{a}{D}$  i  $(\frac{a}{D})^{1/n}$ . Z przeskalowanego sformułowania problemu wynika również zależność między obciążeniem  $P$  i promieniem kontaktu  $a$ . Średnie ciśnienie pod kulką możemy zapisać jako

$$\frac{P}{\pi a^2} = - \int_0^a \sigma_{33}(r) d\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = -k \left(\frac{a}{D}\right)^{1/n} \int_0^1 \bar{\sigma}_{33}(\bar{r}) d(\bar{r})^2. \quad (1.54)$$

Całka z  $\sigma_{33}$  w układzie bezwymiarowym zależy wyłącznie od  $n$ , zatem dla danego materiału średnie ciśnienie jest proporcjonalne do  $(a/D)^{1/n}$ . Zależność ta została stwierdzona doświadczalnie przez Meyera i Tabora [19],[13]. Z



rozwiązania numerycznego problemu przeskalowanego otrzymano następnie, że całkę w (1.54) można wyrazić wzorem

$$2 \int_0^1 \bar{p}(r) \bar{r} d\bar{r} \approx \alpha \beta^{1/n}$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$  są stałymi podanymi przez Tabora, (1.28). Z powyższego wzoru i z (1.54) otrzymamy wzór zaproponowany przez Meyera (1.25)

$$\frac{P}{\pi \alpha^2} = \alpha k \left( \beta \frac{\alpha}{D} \right)^{1/n}. \quad (1.55)$$

Korzystając z porównania pracy siły zewnętrznej  $L$  i energii odkształcenia obliczanej przez całkowanie zdefiniowanych wcześniej funkcjonałów można otrzymać wyrażenie na  $c^2$

$$c^2 = \frac{2n-1 \int_0^1 \bar{p}(\bar{r})(\bar{r}) d\bar{r}}{4n+1 \int_0^1 \bar{p}(\bar{r}) \bar{r}^3 d\bar{r}} \quad (1.56)$$

Powyższy wzór wyraża zależność parametru  $c^2$  od  $n$ .

Problem brzegowy opisany równaniami (1.50-1.52) został rozwiązany przy pomocy metody elementów skończonych, dla różnych wartości  $c^2$ , tj. dla różnych wartości  $n$ . Jako wynik rozwiązania podano między innymi profile odcisku w układzie bezwymiarowym  $w/a-r/a$  dla różnych  $n$ . Dla danego wykładnika  $n$  i zagłębienia  $h$  rzeczywisty profil wyznaczamy w ten sposób, że rzędne profilu bezwymiarowego mnożymy przez  $h$ , a odcięte przez  $c(Dh)^{1/2}$ . Na rys. 1.2 przedstawiono takie profile.

Okazało się, że otrzymane z rozwiązania MES wartości uniwersalnych stałych  $\alpha$  i  $\beta$  wynoszą

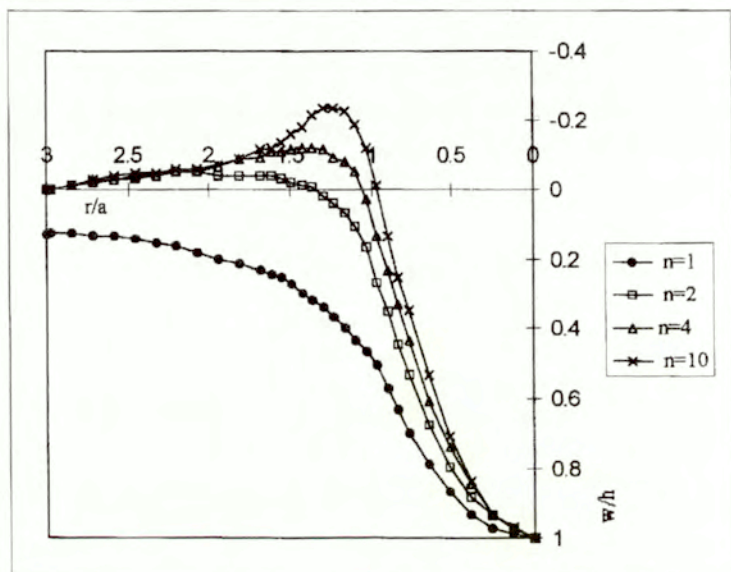
$$\alpha = 2.8, \quad \beta = 0.4, \quad (1.57)$$

a więc są takie same jak podane przez Tabora, (1.28).

W pracy podano również wykres  $c^2$  w funkcji  $n$  otrzymany na podstawie proponowanego rozwiązania i porównano go z wykresem uzyskanym doświadczalnie przez innych autorów. Ustalono, że stałą  $c$  można obliczyć z wzoru

$$c^2 = 2.5 \frac{2n-1}{4n+1} \quad (1.58)$$

Przedstawiono też wykres rozkładu ciśnień  $p$  pod kulką w układzie bezwymiarowym  $\frac{r}{a} \sim p(r)/p(0)$ . Okazuje się, że według proponowanej teorii rozkład ciśnienia pod kulką tylko w niewielkim stopniu zależy od  $n$ . Ponadto przedstawiono wykresy składowych naprężenia i odkształcenia w układzie bezwymiarowym otrzymane z rozwiązania problemu przeskalowanego dla różnych wartości  $n$ .



Rys. 1.2 Profile odcisku kulki o średnicy w układzie bezwymiarowym dla różnych materiałów ( $1/n$  - wykładnik potęgowej krzywej wzmocnienia).

Autorzy podają, że opisany tu model może być stosowany do opisu procesu wciskania o ile spełniony jest warunek, że  $a/D < 0.2$ , w nowszych pracach [40] warunek ten określają jako  $a/D < 0.08$ .

Obszerną analizę testu Brinella można znaleźć również w pracy Biwa-Storakers [31], gdzie przedstawiono rozwiązanie problemu na bazie teorii plastyczności stosując potęgowe prawo wzmocnienia. Pokazano, że samopodobieństwo zachowane jest również w tym przypadku, a w szczególności, że rozwiązanie może być otrzymane przez wykorzystanie pól odkształceń wywołanych w półprzestrzeni przez płaski okrągły stempel. Idea wykorzystania rozwiązania problemu wciskania płaskich stempli do

wyznaczania odkształceń pod stemplami zakrzywionymi była wcześniej stosowana w zagadnieniach liniowej sprężystości przez wielu badaczy. Stosowanie pól wywołanych płaskim stemplem jako rozwiązania pośredniego dla stempli zakrzywionych nie jest oczywiste w przypadku nieliniowego zachowania materiału, gdy nie jest możliwe stosowanie zasady superpozycji. Jednak takie podejście zostało zastosowane w pracy Storakers-Larsson [32] do problemów lepko-sprężystych, poprzez kumulatywną superpozycję serii pól wywołanych płaskimi stemplami, dla których rozwiązanie otrzymano metodą elementów skończonych. W pracy [31] rozwiązano problem wciskania kuli w materiały plastyczne. Konieczna była jednak pewna modyfikacja, gdyż w przypadku plastycznym deformacja jest zależna od historii obciążenia (po transformacji) co prowadzi w sposób sztuczny do nielokalnych praw konstytutywnych.

Korzyścią z zastosowania metody samopodobieństwa jest to, że odkształcenie zakumulowane w półprzestrzeni może być śledzone wzdłuż ścieżek radialnych. W rozwiązaniu problemu sztywno-plastycznego uwzględnia się prawo płynięcia, wzmocnienie potęgowe warunki równowagi i warunki brzegowe. Podobnie jak w pracy [30] kształt wgłębnika kulistego jest aproksymowany przy pomocy paraboli. Stąd przemieszczenia na powierzchni wyrażają się wzorem:

$$u_3 = h - \frac{r^2}{D} \quad \text{dla } r \leq a, \quad x_3 = 0. \quad (1.59)$$

Warunki brzegowe wyrażone są w postaci przyrostowej

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 = \dot{h}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{dla } x_3 = 0, \quad r \leq a \\ \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{dla } x_3 = 0, \quad r > a \end{aligned} \quad (1.60)$$

Założono liniową zależność między przemieszczeniami i odkształceniami (małe odkształcenia). Stwierdzono, że założenie to jest dopuszczalne, o ile  $a/D < 0.2$ . Podobnie w przypadku rozwiązania nieliniowo-sprężystego wprowadzono transformację zmiennych, tak aby rozważany problem brzegowy był stacjonarny i nie zależał od wielkości zagłębienia (od promienia kontaktu). Dzięki temu problem został sprowadzony do analizy wciskania płaskiego stempla w nieliniowo sprężystą półprzestrzeń. W przypadku rozwiązania tego problemu dla zagadnień lepkich prędkość punktów materialnych, prędkość odkształceń i naprężeń może być otrzymana przez zwykłe skalowanie. Następnie przemieszczenia i odkształcenia otrzymuje się przez specjalną procedurę całkowania, gdzie nakłada się kolejne

rozwiązania dla płaskiego stempla i w ten sposób obliczana jest aktualna deformacja kontaktowa.

W przypadku plastyczności gdzie zachowanie materiału zależy od historii obciążenia powyższy algorytm powinien być zmodyfikowany poprzez wprowadzenie do problemu przeskalowanego superpozycji zastępczych odkształceń, które w przypadku rozwiązania problemów lepkoplastycznych mogą być traktowane w sposób niezależny.

Zastosowano następujące skalowanie zmiennych

$$\begin{aligned}x_i &= a\bar{x}_i, \\ \dot{u}(x_k, a) &= \dot{h}\bar{u}(\bar{x}_k), \\ \dot{\varepsilon}_{ij}(x_k, a) &= \frac{\dot{h}}{a} \bar{\varepsilon}_{ij}(\bar{x}_k).\end{aligned}\tag{1.61}$$

Przy tak zdefiniowanym skalowaniu warunki brzegowe (kinematyczne) (1.60) można zapisać jako

$$\bar{u}_3 = 1, \quad \bar{x}_3 = 0 \quad \text{dla} \quad \bar{r} \leq 1 \quad \bar{r}^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2.\tag{1.62}$$

Formalnie te warunki brzegowe odpowiadają wciskaniu w półprzestrzeń płaskiego stempla o jednostkowym promieniu.

Przeskalowana prędkość  $\bar{u}_3$  po scałkowaniu musi spełniać warunek przemieszczeniowy (1.59). Całkując kinematyczny warunek (1.60) oraz korzystając z (1.62) i (1.59) (całkujemy po zmiennej  $a$  zamiast po zmiennej  $t$ ) otrzymujemy równanie całkowe na niewiadomą funkcję  $h(a)$ .

$$h(r) - \int_0^r \bar{u}_3\left(\frac{r}{s}\right) h'(s) ds = \frac{r^2}{D},\tag{1.63}$$

gdzie  $h'(a) = \frac{dh}{da}$ .

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$h(a) = \frac{a^2}{c^2 D},\tag{1.64}$$

gdzie  $c^2$  jest zdefiniowane jako

$$c^2 = 1 - 2 \int_1^\infty \frac{\bar{u}_3(\bar{r})}{\bar{r}^3} d\bar{r}.\tag{1.65}$$

Zatem po przeskalowaniu układ równań problemu przedstawia się następująco

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} \right),$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \bar{\varepsilon}_e \frac{\bar{s}_{ij}}{\bar{\sigma}_e}, \quad \bar{\sigma}_e = \bar{\varepsilon}_e^{1/m}, \quad \bar{\varepsilon}_e(\bar{\rho}) = \bar{\rho} \int_{\bar{\rho}}^{\infty} \frac{\bar{\varepsilon}_e(\bar{\rho}_t)}{\bar{\rho}_t^2} d\bar{\rho}_t, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{x}_j} = 0, \quad (1.66)$$

$$\bar{u}_3 = 1, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{21} = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{r} \leq 1 \quad (1.67)$$

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{33} = 0, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{r} > 1$$

Powyższe równania zostały rozwiązane przy pomocy MES. Jako wynik rozwiązania podano wykresy ciśnienia pod kulą, warstwicę naprężeń i odkształceń, podobnie jak w przypadku rozwiązania problemu nieliniowo-sprężystego. Dla materiału sztywno-plastycznego uzyskano jednak nieco inne wartości stałych  $\alpha$ ,  $\beta$  mianowicie

$$\alpha = 3.02, \quad \beta = 0.32, \quad (1.68)$$

oraz inne wyrażenie na  $c^2$  w funkcji wykładnika  $m$

$$c^2 = 1.43^{-0.97m}. \quad (1.69)$$

Podsumowując, w wyniku fundamentalnych prac teoretycznych dotyczących wciskania kuli, bazujących na ścisłych rozwiązaniach matematycznych udowodniono, że jeśli materiał spełnia potęgowe prawo wzmocnienia

$$\sigma = k \varepsilon^m, \quad (1.70)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest odkształceniem sprężystym w przypadku materiału nieliniowo-sprężystego lub odkształceniem plastycznym w przypadku materiału sztywno-plastycznego, to dla testu Brinella spełnione są w sposób ścisły identyczne wzory jak te, które podali Meyer i Tabor (1.27-1.30) na podstawie badań doświadczalnych wykonanych na materiałach sprężysto-plastycznych to jest

$$\frac{P}{\pi a^2} = \alpha \beta^m k \left( \frac{a}{D} \right)^m, \quad (1.71)$$

$$c^2 = \frac{a^2}{hD}. \quad (1.72)$$

W przypadku materiału nieliniowo-sprężystego stałe  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $c$  wyrażają się wzorami (1.57-1.58), a dla materiału sztywno-plastycznego wzorami (1.68-1.69). Zakres zagłębień kuli, w którym te wzory obowiązują określany jest przez autorów prac [29-32] jako  $a/D < 0.2$ .

### 1.3 Metody identyfikacji bazujące na wzorach otrzymanych z rozwiązania samopodobnego

Zauważmy, że opisane tu rozwiązania problemu zagłębienia kuli odnoszą się do konfiguracji obciążonej. Tak jest w przypadku rozwiązania dla materiału sztywno-plastycznego, w którym konfiguracja obciążona jest identyczna jak odciążona, oraz w przypadku materiału nieliniowo sprężystego (tu analiza konfiguracji odciążonej byłaby niecelowa). Występujące we wzorach (1.70-1.72) parametry  $P$ ,  $a$ ,  $h$  odnoszą się do konfiguracji obciążonej, wzory te mogą być bezpośrednio stosowane do identyfikacji materiałów nieliniowo-sprężystych lub sztywno-plastycznych.

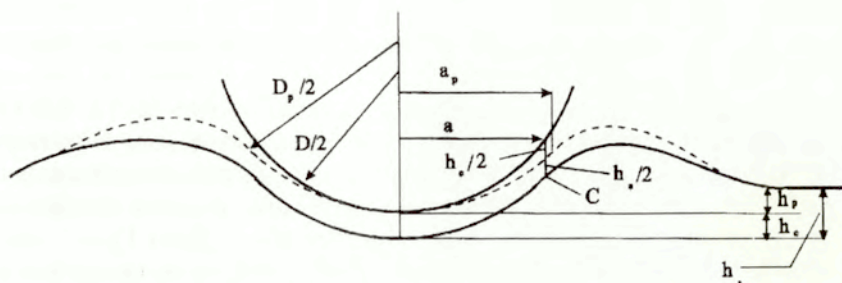
Inaczej jest w przypadku równań (1.27-1.30), które zostały otrzymane na podstawie badań doświadczalnych wykonanych dla materiałów sprężysto-plastycznych. Przy wyprowadzaniu tych równań popełniono pewną nieścisłość; siłę  $P$  obciążającą kulkę mierzono w konfiguracji obciążonej, natomiast parametry geometryczne odcisku  $a$  i  $h$  w konfiguracji odciążonej. W przypadku materiałów sprężysto-plastycznych konfiguracje te różnią się od siebie, różnica ta może być pominięta jedynie wtedy, gdy odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu z plastycznymi. Wpływ tej różnicy konfiguracji na wyniki pomiarów można wyjaśnić odwołując się do opisu procedury pomiarowej. W badaniach doświadczalnych średnica odcisku mierzona jest na ogół przy pomocy mikroskopu jako średnica załamania materiału powstającego na brzegu obszaru kontaktu pod wpływem nacisku kuli. Załamanie to tworzy się pod wpływem działania siły, ale pozostaje również po usunięciu obciążenia w konfiguracji odciążonej, stąd możliwy jest pomiar  $a$  po zdjęciu obciążenia. Podobnie po zdjęciu obciążenia mierzona jest głębokość trwałego odcisku  $h$ . Jednak w trakcie procesu odciążania zmienia się zarówno średnica brzegu odcisku (załamania materiału) od wartości  $a$  do wartości  $a_p$ , jak i średnica niecki powstającej w badanym materiale pod wpływem kontaktu z kulą od wartości  $D$  do wartości  $D_p$ , a także głębokość odcisku, rys.1.3. W odniesieniu do materiałów sprężysto-plastycznych wzory (1.27-1.30), (1.70-1.72) należy traktować jako przybliżone.

Stosowanie wzorów (1.27-1.30) lub (1.70-1.72) do identyfikacji materiałów sprężysto-plastycznych może w ogólnym przypadku prowadzić do dużych błędów. Błędy te są tym większe im większy jest stosunek granicy plastyczności do modułu Younga badanego materiału. Z tego względu szereg prac poświęcono wprowadzeniu do wzorów (1.70-1.72) pewnych członów korekcyjnych, które umożliwiłyby uwzględnienie faktu, że parametry

geometryczne odcisku kuli mierzone są w konfiguracji odciążonej i redukcje wynikających stąd błędów.

Zagadnieniu temu poświęcono między innymi pracę [33]. W pracy tej zagłębienie całkowite  $h_t$  podzielono na część sprężystą i część plastyczną (rys.1.3):

$$h = h_e + h_p. \quad (1.73)$$



Rys. 1.3. Parametry odcisku obciążonego i odciążonego.

Wprowadzono dodatkowy parametr  $d$  (rys.1.1) oznaczający zagłębienie dna odcisku poniżej brzegu odcisku, które również podzielono na część sprężystą i plastyczną:

$$d = d_e + d_p. \quad (1.74)$$

Zakładając, że spełniona jest zależność:

$$a/D = d/a, \quad (1.75)$$

(tzn. odcisk jest płytki) oraz, że średnica odcisku nie zmienia się w trakcie odciążenia  $a_t = a_p = a$ , wykorzystując (1.72) otrzymano zależność:

$$d_p = h_p c. \quad (1.76)$$

Uwzględniając zmianę średnicy czaszy odcisku po odciążeniu, wzór (1.71) zapisano w postaci:

$$\frac{P}{\pi a^2} = \alpha \beta^m k \left( \frac{a}{D_p} \right)^m. \quad (1.77)$$

Korzystając z (1.74), (1.75) otrzymujemy zależność

$$\frac{1}{D_p} = \frac{1}{D} - \frac{1}{D_e}. \quad (1.78)$$

Wstawiając (1.76) do (1.77), oraz wykorzystując rozwiązanie Hertza dla odcieżenia sprężystego otrzymujemy:

$$P_{av} = k\alpha\beta^m \left(\frac{a}{D} - C_1 P_{av}\right)^m, \quad (1.79)$$

gdzie:

$$C_1 = \frac{3\pi(1-\nu^2)}{8E}.$$

Równanie (1.79) jest podstawowym równaniem do wyznaczenia parametrów  $k$  i  $m$ .

Inną metodą uwzględnienia sprężystej poprawki we wzorach (1.70-1.72) zaproponowano w pracy Field, Swain [34]. Zrezygnowali oni z pomiaru promienia odcisku  $a$ , (który jest wielkością trudną do zmierzenia, zwłaszcza w przypadku płytkich odcisków) natomiast wprowadzili promień odcisku na poziomie powierzchni nieodkształconej oznaczony jako  $a'$  (rys.1.1).

Jeśli przyjmiemy założenie o płytkich odciskach (1.75), to wielkości  $a$  i  $a'$  związane są wzorem

$$c^2 = a^2/a'^2 \quad (1.80)$$

Wzór (1.71) można zatem napisać w postaci

$$P = \pi\alpha\beta^m kc^{m+2} \left(\frac{1}{D}\right)^m (a')^{m+2}, \quad (1.81)$$

$a'$  wyznacza się z twierdzenia Pitagorasa zgodnie z wyrażeniem

$$a' = \sqrt{Dh_b - h_b^2}, \quad (1.82)$$

w którym

$$h_b = h_p + h_e/2, \quad (1.83)$$

gdzie

$h_p$  - zagłębienie resztkowe, rys. 1.3,

$h_e$  - część sprężysta zagłębienia całkowitego, rys.1.3 (sprężyste cofnięcie kulki w wyniku odcieżenia).

Wzory identyfikacyjne (1.79) i (1.81) są jednak obarczone pewnymi błędami. Równanie (1.75) wykorzystane przy ich wyprowadzeniu jest równaniem przybliżonym. Błąd w zawarty w tym równaniu zależy od względnej głębokości danego odcisku, czyli od stosunku  $a/D$ ; np. dla  $a/D=0.2$  prawa strona równania jest równa lewej z dokładnością do 4%. Należy pamiętać, że jeśli błąd z jakim określamy promień  $a$  wynosi 4%, to błąd z jakim określamy średnie ciśnienie  $P/\pi a^2$  jest równy ok. 8%. Jak wspomniano, dla wyznaczenia stałych  $k$  i  $m$  bierzemy pod uwagę kilka punktów pomiarowych, o różnych, najlepiej skrajnych wartościach  $a/D$ . Każdy z tych



punktów będzie obarczony innym błędem, co może niekorzystnie wpłynąć na dokładność wyznaczania stałych  $k$  i  $m$ . W porównaniu z równaniem (1.79) lub z podstawowym równaniem (1.71) zaletą wzoru (1.81) jest to, że korzystamy w nich z pomiaru zagłębienia  $h$ , a nie z pomiaru średnicy odcisku  $2a$ . Pomiar średnicy odcisku jest mało precyzyjny, zwłaszcza w przypadku płytkich odcisków.

Dość złożoną metodę identyfikacji opartą na teście wciskania kuli przedstawiono w pracy Taljat, Zacharia [35]. W proponowanej metodzie korzysta się z zaproponowanej przez Tabora [13] idei odwzorowania krzywej  $p_{av}-a/D$  na krzywą naprężenie-odkształcenie (oznaczoną tu jako  $\sigma_r-\varepsilon_p$ ). Każdemu punktowi na krzywej  $p_{av}-a/D$  przypisuje się pewne odkształcenie i naprężenie reprezentatywne według odwzorowania (1.27), które są współrzędnymi punktu na krzywej  $\sigma_r-\varepsilon_p$ . Dla wyznaczenia naprężenia reprezentatywnego korzysta się z wzoru (1.27<sub>2</sub>) przyjmując, że  $\Psi=1/\alpha$  nie jest stałe, lecz zależy od etapu zagłębienia kulki. Wprowadzono szereg dodatkowych parametrów odcisku kuli, rys. 1.4. Niektóre z nich służą do obliczenia wartości  $\Psi$ .

Wyróżniono 3 etapy procesu zagłębienia - sprężysty, sprężysto-plastyczny i całkowicie plastyczny - gdy obszar odkształceń plastycznych zainicjowany pod kulka dochodzi do powierzchni próbki. Dla tych trzech etapów wartość współczynnika  $\Psi$  wyraża się odpowiednio wzorami, [36]

$$\Psi = \begin{cases} C_1 & \phi \leq 1 \\ C_1 + C_2 \ln \phi & 1 \leq \phi \leq C_3 \\ \Psi^C & \phi > C_3 \end{cases}, \quad (1.84)$$

$$\phi = \tan(\nu) \frac{E}{\sigma_t} = \frac{4Eh_{ps}}{d\sigma_t}, \quad (1.85)$$

gdzie:  $\nu$  - kąt między powierzchnią nieodkształconą i styczną do kuli na brzegu kontaktu,

$h_{ps}$  - według rys. 1.4.

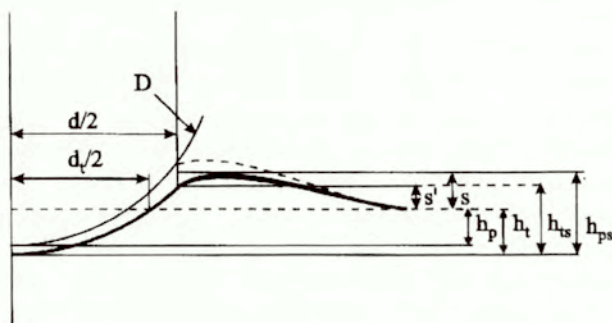
Wartość  $\phi$  wyznacza się w zależności od parametrów materiału i parametrów odcisku. Dla  $d \ll D$  można również przyjąć

$$\phi = \frac{Ed}{D\sigma_t} \quad (1.86)$$

W omawianej pracy, [35], przyjęto

$$\phi = \frac{4Eh_t}{d_t\sigma_t} \quad (1.87)$$

gdzie  $d_t$  jest średnicą odcisku na poziomie powierzchni nieodkształconej, rys.1.4.



Rys. 1.4 Parametry odcisku kuli wykorzystane w pracy [35]

Wartość  $a/D$  wyznaczoną doświadczalnie przelicza się na  $\varepsilon_p$  zgodnie z wzorem podanym przez Tabora (1.27<sub>1</sub>) w którym przyjęto  $\beta=0.4$

$$\varepsilon_p = 0.2d/D \quad (1.88)$$

W pracy przedstawiono wykresy zredukowanego odkształcenia plastycznego na styku kuli i badanego materiału,  $\varepsilon_{eq}^{pl}$  w funkcji odległości od środka odcisku ( $2r/d$ ) dla różnych  $m$ , przy tym samym względnym zagłębieniu kuli to znaczy  $d/D=0.5$ . Okazało się, że dla  $r$  bliskiego  $d/2$  (blisko brzegu odcisku) i dla wszystkich  $m$  są one równe  $\varepsilon_{eq}^{pl} = 0.2d/D = 0.1$ . Oznacza to, że odkształcenie wyrażone wzorem (1.27<sub>1</sub>) lub (1.88) jest równe odkształceniu zredukowanemu (Misesa) na okręgu położonym blisko brzegu odcisku, a naprężenie  $\sigma_t$  wyznaczone dla  $\Psi$  obliczonego według (1.84) jest naprężeniem zredukowanym w tym punkcie. Tak wyznaczone wartości  $\sigma_t$  i  $\varepsilon_p$  (punkty krzywej rozciągania) zwane są naprężeniem i odkształceniem reprezentatywnym dla danego odcisku.

Wartość współczynnika  $\Psi^C$  można również wyrazić jako funkcję wykładnika  $m$  ( $\Psi^C$  odnosi się do zakresu całkowicie plastycznego)

$$\Psi^C = \frac{P_{av}}{\sigma_t} = \frac{6}{2+m} \left( \frac{40}{9\pi} \right)^m \quad (1.89)$$

We wzorze (1.89) korzysta się z wykładnika wzmocnienia  $m$  występującego w prawie (1.26), chociaż metoda nie jest ograniczona do identyfikacji krzywych rozciągania w postaci potęgowej.

W proponowanej tu metodzie średnica brzegu odcisku  $d$  nie jest mierzona bezpośrednio, lecz obliczana na podstawie zagłębienia kuli. Podano wyrażenia, z których można obliczyć średnice  $d$ ,  $d_t$  lub  $d'=d_t$  występujące w wyrażeniach (1.84-1.87) mając zmierzone  $h_p$  lub  $h_t$  rys. 1.3,

$$d_t = 2\sqrt{h_t(D - h_t)}, \quad d = c^2 d_t^2,$$

$$d' = \left( \frac{3FD}{E_r} \frac{h_p^2 + (d'/2)^2}{h_p^2 + (d'/2)^2 - h_p D} \right)^{1/3}, \quad (1.90)$$

gdzie  $c^2(m)$ , (wzory (1.53), (1.58)), jest miarą wypłytki lub zapadnięcia materiału w wyniku wciskania kuli. Zatem faktycznie parametrami mierzonymi w eksperymencie identyfikacyjnym są siła  $P$  i zagłębienie kuli  $h_t$ .

Zwrócono uwagę, że wartość  $c^2$  jest inna dla konfiguracji obciążonej niż dla konfiguracji odciążonej, gdyż wartość  $d_t$  zależy w dużym stopniu od sprężystego cofnięcia kuli, podczas gdy rzeczywista średnica kontaktu  $d$  zmienia się w niewielkim stopniu w trakcie odciążenia (ok. 2%). Na przykład dla  $E/\sigma_y=500$  wzory na  $c^2(m)$  odpowiadające konfiguracji obciążonej i odciążonej mają postać

$$c_t^2 = \frac{h_{ts}}{h_t} = \frac{1}{4}(5 - 3m^{7/10}) \quad \text{oraz} \quad c^2 = \frac{1}{10}(13 - 8.5m^{8/10}), \quad (1.91)$$

a więc różnią się wyrażen podanych dla materiału sztywno-plastycznego.

Stwierdzono, że obliczanie  $d$  z wzoru  $d=d_t c^2$  daje dobre wyniki, jeśli jest on stosowany dla konfiguracji obciążonej, przy małych zagłębieniach,  $d \ll D$ . Stosując ten wzór w konfiguracji odciążonej otrzymujemy wynik przybliżony, gdyż następuje zmiana średnicy niecki (staje się ona większa od  $D$ ) i wtedy obliczenia  $d$  są niedokładne.

Dla stosowania proponowanej metody identyfikacji konieczne wyznaczenie funkcji  $\Psi(\phi)$  dla możliwie szerokiego zakresu parametrów materiałowych. W tym celu skorzystano z następującego algorytmu. Zaczęto się od wyznaczenia zależności  $P-d$  i  $P-p_{av}$  dla różnych  $m$  drogą symulacji numerycznej (MES). Następnie wyznacza się  $\varepsilon_p(d)$  z wzoru (1.88) i temu  $\varepsilon_p$  przypisuje się odpowiednie  $\sigma_t$  z krzywej rozciągania, wykorzystanej jako dana do symulacji MES. Obliczonym wartościom  $p_{av}$  i  $\sigma_t$  przypisuje się wartości  $\Psi$  według (1.27). Z kolei tym wartościom  $\Psi$  przypisuje się wartość  $\phi$

korzystając z tego samego  $d$  i (1.86). Otrzymaną w ten sposób zależność  $\Psi-\phi$  porównano z wynikami innych autorów.

Zależność  $\Psi-\phi$  można też obliczyć stosując opisany wyżej algorytm i korzystając z parametru  $d_1$  obliczonego według (1.90<sub>1</sub>) zamiast  $d$ , oraz wzoru (1.87) zamiast (1.86) jako definicji  $\phi$ . W tak wyznaczonej wartości  $\Psi$  uwzględniony jest efekt zapadnięcia lub wypłytki i z tego powodu przy nowej definicji  $\phi$  (1.87) wartość  $\Psi$  zależy w większym stopniu od wykładnika  $m$  i przyjmuje wartości od 0 do 4 (w poprzedniej wersji od 0 do 3).

Weryfikacja proponowanej tu metody identyfikacji polega na wyznaczeniu krzywej  $\sigma_r-\varepsilon_p$  korzystając ze znalezionej wcześniej funkcji  $\Psi(\phi)$  i wyznaczonej numerycznie krzywej  $P-h_t$ . Tak otrzymaną krzywą  $\sigma_r-\varepsilon_p$  porównuje krzywą rozciągania wykorzystaną do numerycznego wyznaczenia krzywej  $P-h_t$ . Według podobnego schematu postępowano, przy weryfikacji metod zaproponowanych w niniejszej rozprawie.

W ogólnym przypadku wyznaczone przy pomocy odwzorowania (1.27) punkty krzywej rozciągania  $\sigma_r-\varepsilon_p$  przedstawiają jednocześnie stan naprężenia i odkształcenia w pewnym wybranym punkcie obszaru kontaktu kuli z badanym materiałem i są one naprężeniem i odkształceniem reprezentatywnym dla tego odcisku, wykonanego z określoną siłą. Przedstawione wyżej wartości  $\Psi$  dotyczą przypadku, gdy odkształcenie reprezentatywne jest zdefiniowane jako odkształcenie na brzegu kontaktu. W omawianej pracy zaproponowano również inne definicje odkształcenia i naprężenia reprezentatywnego dla odcisku. Są to maksymalne i minimalne wartości  $\varepsilon_{eq}^{pl}$  i  $\sigma_{eq}$  w obszarze kontaktu, występujące w punktach położonych w pewnej odległości od brzegu odcisku. Przy zmienionej definicji odkształcenia i naprężenia reprezentatywnego należy również zmienić współczynniki w odwzorowaniu (1.27).

Stwierdzono, że odkształcenie maksymalne  $\varepsilon_{p,max}$  występuje w odległości  $d/3$  od brzegu kontaktu i jest funkcją nie tylko  $d/D$  ale również  $m$  ( $\beta$  we (1.27<sub>1</sub>) wzorze nie jest stałe). Zamiast z (1.27<sub>1</sub>) korzystamy z zależności

$$\varepsilon_{pn} = (0.5m + \frac{1.44}{\sqrt{m+0.1}}) (\frac{d_1}{D})^2 \quad (1.92)$$

Przyjmując odkształcenie maksymalne jako reprezentatywne, współczynnik  $\Psi(\phi)$  oznaczony tu jako  $\Psi_{max}$  wyraża się wzorem

$$\Psi_{max} = \begin{cases} -0.65 + \ln(\phi) \\ \Psi_{max}^c \end{cases} \quad (1.93)$$

Przyjmując jako odkształcenie reprezentatywne odkształcenie minimalne korzystamy z wzoru

$$\varepsilon_{p,min} = (-2 + 0.87m + \frac{1.47}{\sqrt{m + 0.36}}) (\frac{d_t}{D})^{2.45 - 0.85m} \quad (1.94)$$

Zatem  $\varepsilon_{p,min}$  również zależy od  $m$  i od  $d_t/D$  i występuje na zewnątrz brzegu odcisku w odległości  $d_t/10$  od brzegu. Odpowiadająca  $\varepsilon_{p,min}$  wartość funkcji  $\Psi$  oznaczona jako  $\Psi_{min}$  wyraża się wzorem

$$\Psi_{min} = 3.65 - 4.03m^2 + 4.36m^3 \left(\frac{d_t}{D}\right)^{(-3.18m^2 + 2.89m^3)} \quad (1.95)$$

Procedura identyfikacyjna zaproponowana w pracy składa się z następujących kroków:

- i) Pomiar krzywej  $P-h_t$
- ii) obliczenie średnicy  $d_t$  zgodnie z (1.90<sub>1</sub>) i rzeczywistej średnicy  $d$  według (1.90<sub>2</sub>)
- iii) obliczenie  $\Psi$  zgodnie z (1.84), lub (1.93), lub (1.95).
- iiii) wyznaczenie punktów krzywej  $\sigma-\varepsilon_p$  zgodnie z odwzorowaniem (1.27)

Wadą metody jest to, że parametry  $\Psi$ ,  $\beta$  i  $c$  wykorzystywane w procedurze identyfikacyjnej zależą od wykładnika  $m$ , który nie jest na początku znany i musi być wyznaczany iteracyjnie. Dla obliczania wartości  $m$  autorzy proponują korzystanie z krzywej  $P-a$  zakładając, że spełnione jest prawo Meyera  $P=Ka^{m+2}$ , albo wykorzystanie pomiaru wypływu lub zapadnięcia materiału wokół odcisku.

Trudności w zastosowaniu tej metody identyfikacji wynikają również z faktu, że funkcja  $\Psi$  nie jest znana w ogólnym przypadku dla wszystkich wartości  $m$  i  $E/\sigma_y$ . Ponadto proponowana procedura zawiera pewne niekonsekwencje, teoretycznie może być ona stosowana do identyfikacji dowolnych krzywych rozciągania, jednak pewne parametry w procedurze zależą od  $m$ , które jest identyfikowane z wzorów wyprowadzonych dla materiałów spełniających prawo potęgowe. Warto zauważyć, że w zaproponowanej tu metodzie identyfikacji korzysta się z parametrów odcisku  $P$  i  $h$  zmierzonych w konfiguracji obciążonej.

Zupełnie inne podejście do problemu identyfikacji jest zastosowane w pracy Huber Tsakmakis [37]. W proponowanej tam metodzie identyfikacji korzysta się z pomiaru krzywej  $P-h$ . Korzystając z numerycznego rozwiązania problemu wciskania kuli otrzymano wzory, które uzależniają przebieg krzywej  $P-h$  od modułów wzmocnienia plastycznego i sprężystego. Rozważania ograniczono do przypadku liniowego wzmocnienia plastycznego.

Uwzględniono wzmocnienie mieszane kinematyczne i izotropowe, którym odpowiadają moduły  $E_t^{(is)}$ ,  $E_t^{(kin)}$ . Krzywą siła zagłębienie przedstawiono w funkcji bezwymiarowych parametrów

$$P/(\sigma_y R^2) = \bar{P}(\sigma_y/E, E_t^{(is)}/E, E_t^{(kin)}/E, \nu, h/R). \quad (1.96)$$

Zdefiniowano względne sprężyste cofnięcie jako

$$r = (h_t - h_p) / h_t. \quad (1.97)$$

Sprężyste cofnięcie  $r$  wyrażono również jako funkcję bezwymiarowych parametrów materiałowych

$$r = \bar{r}(\sigma_y/E, E_t^{(is)}/E, E_t^{(kin)}/E, \nu, h/R). \quad (1.98)$$

Wzór na  $r$  podany jest explicite tylko dla przypadku wzmocnienia czysto kinematycznego. Mając tę funkcję oraz mierząc  $r$  w teście wciskania można obliczyć wartości  $E_t^{(kin)}/E$ ,  $\sigma_y/E$ . Jednak obydwa moduły wzmocnienia (kinematyczny i izotropowy) nie mogą być wyznaczone z pojedynczego testu obciążenie-odciążenie. Dla ich identyfikacji konieczne jest wykonanie testu odciążenie-ponowne obciążenie. Energia dyssypowana w powstałej w takim teście zamkniętej pętli jest skorelowana z modułem wzmocnienia kinematycznego  $E_t^{(kin)}$ . Podane w pracy wzory umożliwiają identyfikację wyłącznie wzmocnienia kinematycznego. Dla identyfikacji wzmocnienia izotropowego konieczne jest wyprowadzenie dodatkowych wzorów, co wymaga wykonania wielu symulacji numerycznych. Inną wadą metody jest to, że przyjęto uproszczony model materiału (stałe moduły wzmocnienia plastycznego), podczas gdy rzeczywiste materiały charakteryzują się nieliniowym wzmocnieniem w zakresie odkształceń występujących w teście wciskania kuli.

Możliwość wykorzystania rozwiązania samopodobnego przedstawionego w pracach [30], [31] do opisu testu wciskania kuli w materiał sprężysto-plastyczny były badane w pracy [40]. W pracy tej analizowano dwa warianty sprężysto-plastycznego prawa konstytutywnego. W pierwszym nazwanym dalej liniowo-potęgowym przyjęto, że granica plastyczności materiału,  $\sigma_0$ , jest większa od 0, dla naprężeń mniejszych od granicy plastyczności nie występują odkształcenia plastyczne

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \sigma \quad \text{dla} \quad \sigma \leq \sigma_0 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad \text{dla} \quad \sigma > \sigma_0 \end{aligned} \quad (1.99)$$

lub oznaczając

$$\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} = E \frac{1}{E} \left( \frac{1}{\sigma_o} \right)^{n-1} = \frac{1}{(K')^n}, \quad (1.100)$$

mamy

$$\varepsilon = \left( \frac{\sigma}{K'} \right)^n \text{ dla } \sigma > \sigma_o, \quad (1.101)$$

oraz

$$\varepsilon_p = \varepsilon_o \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n - \frac{\sigma}{\sigma_o} \right] = \left( \frac{\sigma}{K'} \right)^n - \frac{\sigma}{E}, \quad (1.102)$$

Drugim prawem konstytutywnym, dla którego rozwiązano problem jest prawo Ramberga-Osgooda

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} + \left( \frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n, \quad (1.103)$$

lub uwzględniając (1.100)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{K'} \right)^n. \quad (1.104)$$

W przypadku prawa (1.102) prawo potęgowe wyraża odkształcenie całkowite, natomiast we wzorze (1.104) tylko część plastyczna odkształcenia wyrażona jest przez prawo potęgowe. Zgodnie z równaniem (1.104) odkształcenia plastyczne pojawiają się jednocześnie ze sprężystymi od początku obciążania.

Obliczenia wykonano dla dwóch przypadków:

- i) materiał sprężysto-idealnie plastyczny,  $n \rightarrow \infty$ ,
- ii) materiał sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem  $n=3$ .

Oszacowano błąd obliczeń poprzez porównanie średniego ciśnienia pod kulką oraz ilorazu  $a^2/2hR=c^2$  otrzymanych z rozwiązania Hertza i z rozwiązania numerycznego w zakresie sprężystym dla różnych wartości  $a/D$ . Błąd rozwiązania numerycznego szacowany jest na  $4 \div 8\%$ .

Warto zauważyć, że obydwa badane prawa konstytutywne zawierają trzy niezależne stałe  $\sigma_o, \varepsilon_o, n$  (prawo (1.103)) lub  $E, K', n$  (prawo (1.101), (1.104)). Zatem współczynnik wzmocnienia  $K'$  w prawie potęgowym zależy od granicy plastyczności  $\sigma_o$ , modułu  $E$  i wykładnika  $n$ .

W przypadku prawa (1.103) lub (1.104) parametr  $\sigma_o$  (granica plastyczności) nie ma sensu fizycznego, gdyż odkształcenia plastyczne występują już na początku obciążenia.

Dla przypadku i) oraz ii) wyznaczono numerycznie wykresy

$$p_{av} \sim \frac{a}{R}, \quad p_{av} \sim \frac{a E}{R \sigma_0}; \quad (1.105_1)$$

$$c^2 \sim \frac{a}{R}, \quad c^2 \sim \frac{a E}{R \sigma_0}; \quad (1.105_2)$$

$$\frac{P}{\pi R^2 \sigma_0} \sim \frac{h}{R}. \quad (1.105_3)$$

Wykresy te porównano z wartościami obliczonymi z rozwiązania samopodobnego, Hill-Storakres [30]. Według tego rozwiązania w przypadku materiału sztywno-idealnie plastycznego funkcje (1.105<sub>1</sub>) (1.105<sub>2</sub>) są stałe, a (1.105<sub>3</sub>) jest funkcją liniową. Okazuje się, że gdy materiał jest sprężysto-idealnie plastyczny,  $n \rightarrow \infty$ , funkcje (1.105) osiągają wartości wynikające z rozwiązania samopodobnego wtedy, gdy zagłębienie względne kuli  $a/R$  jest większe od pewnej wartości granicznej  $\gamma^*$ .

Wartość  $\gamma^*$  zależy od iloraz modułu Younga i granicy plastyczności, im większy jest ten iloraz tym mniejsza jest graniczna wartość  $\gamma^*$ . Oznacza to, że dla dużych wartości  $E/\sigma_0$  rozwiązanie sprężysto-plastyczne jest bliskie rozwiązaniu samopodobnemu we wcześniejszym etapie zagłębienia kuli, niż wtedy gdy  $E/\sigma_0$  jest małe. Najmniej wrażliwa na wartość ilorazu  $E/\sigma_0$ , szczególnie w zakresie małych zagłębień jest funkcja  $P(h)$ , (1.105<sub>3</sub>). Ponadto w tym zakresie jest ona bliska wartościom otrzymanym z rozwiązania sztywno-plastycznego. Dla większych zagłębień, odpowiadających skończonym deformacjom, sztywność kontaktowa  $P/h$  dla materiałów sprężysto-plastycznych jest mniejsza niż wynika to z rozwiązania samopodobnego.

Wykresy średniego ciśnienia w układzie przeskalowanym, w funkcji  $aE^*/R\sigma_0$  otrzymane z rozwiązania sprężysto-plastycznego pokrywają się ze sobą w początkowym etapie zagłębienia kuli, dla  $\frac{P}{\pi a^2 \sigma_0} \leq 1.6$ , a dla większych zagłębień kuli są bliskie sobie. Dla  $aE^*/R\sigma_0=40+50$  krzywe otrzymane dla wszystkich wartości  $E^*/\sigma_0$  pokrywają się z krzywą z rozwiązania samopodobnego, a następnie w miarę wzrostu  $aE^*/R\sigma_0$  zaczynają różnić się od tego rozwiązania ( $E^*=E/(1-\nu^2)$ ).

Dla materiałów o wysokiej granicy plastyczności średnie ciśnienie nie osiąga wartości wynikającej z rozwiązania samopodobnego, nawet przy dużym zagłębieniu względnym. W układzie  $p_{av}-a/D$ , dla  $a/D > 0.08$  krzywe średniego ciśnienia pokrywają się ze sobą niezależnie od tego, jakie są



wartości  $E^*/\sigma_o$  i  $a/D$ . Stwierdzono, że dla większych zagłębień  $a/D > 0.08$  średnie ciśnienie zmniejsza się w stosunku do wartości przewidywanej przez rozwiązanie samopodobne. Wynika to z faktu, że założenia o małych odkształceniach i jednorodne warunki brzegowe przyjęte w rozwiązaniu samopodobnym nie są wystarczająco dokładnie spełnione dla  $a/D > 0.08$ .

Obserwacje wykresu funkcji  $c^2(\frac{a}{R} \frac{E}{\sigma_o})$  lub  $c^2(\frac{a}{R})$  prowadzą do następujących wniosków. Dla małych zagłębień odpowiadających początkowemu uplastycznieniu,  $c^2=0.5$  - wartość ta jest taka sama jak w rozwiązaniu sprężystym. Przy dalszym zwiększaniu obszaru kontaktu osiągana jest wartość  $c^2$  odpowiadająca rozwiązaniu samopodobnemu, ale tylko dla materiałów charakteryzujących się dużą wartością ilorazu  $E^*/\sigma_o$ .

Autorzy wprowadzili również poprawkę zakresu, w którym można stosować rozwiązanie samopodobne. Może być ono stosowane o ile  $a/R$  jest mniejsze od pewnej wartości granicznej  $s_r$ . Stwierdzili oni, że  $s_r=0.16$  podczas gdy według wcześniejszych analiz, Hill, Storakers, przyjmowano  $s_r=0.4$ .

Opracowano mapę procesu wciskania w układzie współrzędnych  $(\frac{a}{R}, \frac{\sigma_o}{E^*})$ , na której wyróżniono 5 obszarów odpowiadających różnym reżimom deformacji materiału: obszar sprężysty, sprężysto-plastyczny, sztywno-plastyczny według rozwiązania samopodobnego, plastyczny w zakresie dużych deformacji i sprężysty w zakresie dużych deformacji. Na mapie zamieszczono wartości średniego ciśnienia i wartości  $c^2$  dla poszczególnych obszarów.

Obszar odpowiadający rozwiązaniu Herta (sprężysty) w zależności od wartości  $\sigma_o/E^*$  przechodzi w obszar sprężysto-plastyczny lub w obszar sprężysty dla dużych deformacji. W przypadku materiału bez wzmocnienia opisane wyżej rezultaty nie zależą do tego, czy stosujemy model Ramberga-Osgooda czy model liniowo-potęgowy.

Analogiczne analizy przeprowadzono dla materiałów ze wzmocnieniem plastycznym,  $n=3$ . Przedstawiono wykresy  $p_{av}$  i  $c^2$  (1.105<sub>1</sub>, 1.105<sub>2</sub>), przy czym  $p_{av}$  na wykresie jest dzielone przez  $\sigma_o(a/\varepsilon_o R)^{1/m}$ . Dla  $n=3$  można zauważyć różnice wykresów odpowiadających prawu konstytutywnemu i i i ii/. Różnica ta zanika dla zagłębień, dla których proces może być opisany przez rozwiązanie samopodobne.

Dla ustalonej wartości  $aE^*/R\sigma_o$  rozwiązanie według prawa liniowo-potęgowego daje większe wartości średniego ciśnienia i większe wartości  $c^2$

niż rozwiązanie dla prawa Ramberga-Osgooda. Dla większych zagębień różnice wynikające ze stosowania różnych modeli znikają.

Według rozwiązania samopodobnego dla  $n=3$  siła  $P$  jest proporcjonalna do  $h^{7/6}$ , dokładność tego rozwiązania zmniejsza się stopniowo dla zagębień, dla których  $a/R > 0.16$  (zakres deformacji skończonych). Różnica między rozwiązaniem sprężysto-plastycznym i samopodobnym jest jednak mniejsza niż w przypadku materiału bez wzmocnienia. Przy tych samych parametrach materiałowych krzywa penetracji otrzymana według prawa Ramberga-Osgooda jest mniej „sztywna” niż krzywa otrzymana według prawa liniowo-potęgowego.

Zbadano również wpływ tarcia na postać funkcji (1.105) dla materiału sprężysto-idealnie plastycznego. Uwzględniono jedynie przypadek tarcia spoczynkowego (brak poślizgu między kulą i materiałem). Stwierdzono, że przy uwzględnieniu tarcia wzrasta średnie ciśnienie natomiast zmniejsza się wartość  $c^2$  w porównaniu z wciskaniem kuli bez tarcia. Stosunkowo niewielki jest wpływ tarcia na przebieg krzywej  $P(h)$ .

Zbadano również wpływ naprężeń własnych w półprzestrzeni na proces wciskania kuli w materiał sprężysto-idealnie plastyczny. Rozważono jednorodny stan naprężenia  $\sigma_r = \sigma_\phi = \sigma$ . Stwierdzono, że wpływ naprężeń własnych na krzywą  $P-h$  w zakresie sprężysto-plastycznym jest niewielki.

Prace zakończono następującymi wnioskami:

- zakres ważności rozwiązania samopodobnego jest bardzo ograniczony przez efekty

sprężyste dla małych zagębień względnych i przez efekty skończonych deformacji dla dużych zagębień względnych

- tarcie ma duży wpływ na pole odkształceń i pole kontaktu kuli. W przypadku rozwiązania samopodobnego tarcie ma niewielki wpływ na krzywe  $P(h)$

- naprężenia własne mają niewielki wpływ na proces wciskania

- wyznaczenie parametrów materiałowych  $\sigma_0$  i  $n$  na podstawie pomiaru  $P$  i  $h$  jest możliwe pod warunkiem zastosowania bardziej złożonych procedur pomiarowych niż te, które są obecnie stosowane.

Ostatnio pojawiło się szereg prac poświęconych wciskaniu węgelnika kulistego w ośrodki warstwowe. W pracy [38] dokonano analizy przy pomocy MES naprężeń powierzchniowych i pól odkształceń powstających pod wpływem wciskania węgelnika w ośrodek warstwowy.

Rozpatrywano cienką jednorodną warstwę ukonstituowaną na półprzestrzeni. Badania symulacyjne przeprowadzono dla dwóch warstw o różnych grubościach przyjmując, że materiał warstwy może być dwu lub czterokrotnie sztywniejszy niż materiał podłoża. Rozpatrywano cienkie

warstwy, maksymalne zagłębienie kuli było większe niż grubość warstwy. Na proces wciskania kuli miały wpływ zarówno własności warstwy jak i podłoża. Przyjęto, że materiał spełnia warunek plastyczności Misesa

$$\frac{3}{2} [S_{ij} S_{ij}]^{1/2} - \sigma_o = 0$$

i charakteryzuje się potęgowym wzmocnieniem plastycznym

$$\frac{\sigma_o}{\sigma_y} = \frac{K}{\sigma_y} \varepsilon_{eq}^m,$$

gdzie:  $\sigma_y$  - granica plastyczności,

$\varepsilon_{eq}$  - długość trajektorii w przestrzeni odkształceń plastycznych.

W pracy zbadano wpływ grubości warstwy, własności materiałowych warstwy i rdzenia na rozkład ciśnienia kontaktu, naprężeń obwodowych i radialnych oraz na przemieszczenia powierzchni w obszarze kontaktu. Ponadto zbadano wpływ własności materiałowych naprężenia i przemieszczenia residualne. Zamieszczone wykresy przedstawiają obliczone wielkości jako bezwymiarowe:  $p_{av}/\sigma_y$ ,  $P/P_y$ ,  $r/a_y$ ,  $z/a_y$ , gdzie  $\sigma_y$  – granica plastyczności,  $P_y$  – siła odpowiadająca inicjacji odkształceń plastycznych,  $a_y$  – promień kontaktu odpowiadający inicjacji odkształceń plastycznych.

W obliczeniach zakładano, że w warstwie moduł Younga i współczynnik  $K$  są  $\beta$  razy większe niż w rdzeniu ( $\beta=2$  lub  $4$ ). Promień ściskanej kuli wynosi  $1.5 \mu\text{m}$ . Grubość warstwy przyjmowano  $t=10 \text{ nm}$  ( $\xi = \frac{t}{R} = 0.0067$ ) lub  $t=30 \text{ nm}$  ( $\xi = \frac{t}{R} = 0.02$ ). Wykładnik wzmocnienia  $m$  przyjmowano jednakowy dla warstwy i rdzenia ( $m=0$ ,  $m=0.3$ ,  $m=0.5$ ). Stwierdzono, że dla  $m=0$  przy ustalonej wartości siły  $P$  obecność twardej warstwy powoduje zwiększenie wartości średniego ciśnienia i zmniejszenie promienia kontaktu. Ciśnienie kontaktowe nie jest równomiernie rozłożone, tak jak w przypadku półprzestrzeni jednorodnej, lecz posiada wyraźne maksimum blisko brzegu kontaktu. Maksimum to jest bardziej wyraźne w przypadku twardszej warstwy.

Promień kontaktu maleje w miarę zwiększania grubości i sztywności warstwy. W przypadku materiału ze wzmocnieniem,  $m>0$ , rozkład ciśnienia jest bardziej jednorodny niż dla materiału bez wzmocnienia. Dla  $m=0$  przedstawiono również ewolucję rozkładu ciśnienia w funkcji obciążenia. Dla małych sił maksimum ciśnienia występuje na osi symetrii i przesuwa się w kierunku brzegu kontaktu w miarę zwiększania obciążenia. Efekt ten

przypisuje się uplastycznieniu materiału. Przedstawiono wykresy krzywych siła-zagłębienie. Okazuje się, że w przypadku materiału bez wzmocnienia obecność nawet bardzo cienkiej warstwy ( $\xi=0.0067$ ,  $\beta=2$ ) powoduje zauważalną zmianę krzywej  $P-h$ , natomiast dla grubszej warstwy,  $\xi=0.02$ , efekt ten jest bardzo wyraźny. Dla warstwy sztywniejszej,  $\beta=4$  wpływ zmiany wzmocnienia materiału (parametru  $m$ ) na krzywą penetracji jest większy niż w przypadku warstwy bardziej podatnej.

Warto zauważyć, że warstwa wierzchnia ma znaczący wpływ na przebieg krzywych obciążenia, natomiast nachylenie krzywych odciążenia w początkowej ich fazie, w niewielkim stopniu zależy od grubości, sztywności i parametrów wzmocnienia warstwy.

Przedstawiono wpływ warstwy na konfigurację odciążoną, to jest na kształt trwałego odcisku kuli. Okazuje się, że nawet bardzo cienka, twarda warstwa ukonstruowana na materiale bez wzmocnienia ( $m=0$ ) powoduje znaczące zmniejszenie wypłytki materiału wokół brzegu odcisku. Ponadto w wyniku oddziaływania warstwy zmniejsza się również głębokość trwałego odcisku.

Przedstawiono również wpływ warstwy na naprężenia radialne i obwodowe na powierzchni badanego materiału. Naprężenia radialne są ściskające wewnątrz obszaru kontaktu i rozciągające na zewnątrz tego obszaru. Rozciągające naprężenia radialne rosną ze wzrostem twardości, a maleją ze wzrostem grubości warstwy. Naprężenia obwodowe są ujemne w obszarze kontaktu, a na zewnątrz tego obszaru w przypadku cienkich twardych warstw są dodatnie.

Maksimum naprężeń własnych obwodowych i radialnych jest położone wyżej dla materiału ze wzmocnieniem,  $m=0.3$ , niż dla materiału bez wzmocnienia.

Dla większości przyjętych wartości stałych materiałowych maksymalne naprężenia rozciągające obwodowe i radialne są większe w przypadku półprzestrzeni z warstwą niż w przypadku półprzestrzeni jednorodnej. Zauważono, że w przypadku twardszej i sztywniejszej warstwy promień trwałej niecki kulistej jest mniejszy niż promień wciskanej kuli (w przypadku materiału jednorodnego jest odwrotnie). Przy powtórnym obciążeniu dla  $m=0$  naprężenia powierzchniowe wykazują niewielkie zmiany w stosunku do wartości osiąganych przy pierwszym obciążeniu, natomiast dla  $m>0$  naprężenia powierzchniowe przy pierwszym i powtórnym obciążeniu nie różnią się od siebie.

Praca [39] dotyczy również wciskania kuli w półprzestrzeń z warstwą. W pracy analizowano stan naprężeń na połączeniu warstwa-rdzeń oraz w rdzeniu. Przedstawiono wpływ warstwy na rozkład naprężeń w półprzestrzeni

pod warstwą. Stwierdzono, że na granicy warstwy i rdzenia występuje nieciągłość naprężeń promieniowych i obwodowych, natomiast naprężenia normalne i styczne są ciągłe. Zbadano ewolucję stref plastycznych. Stwierdzono, że na przykład dla  $\beta = 2$  uplastycznienie rozpoczyna się w warstwie, a w miarę wzrostu obciążenia strefa plastyczna osiąga granicę warstwy i rdzenia. Plastyczne płynięcie w rdzeniu rozpoczyna się od osi symetrii układu i rozwija się w głąb rdzenia. Zwiększenie grubości warstwy hamuje rozwój strefy plastycznej w rdzeniu. Warstwice naprężeń zredukowanych są jakościowo podobne dla  $m=0$  i  $m>0$ . Maksimum naprężeń w rdzeniu znajduje się na osi symetrii, na granicy warstwy i rdzenia. Wpływ wzmocnienia materiału na wielkość strefy plastycznej w rdzeniu jest niewielki. Maksymalne naprężenia w warstwie wznoszą się ze wzrostem wykładnika wzmocnienia  $m$  i modułu Younga warstwy.

Badano również rozkłady składowych naprężeń wzdłuż osi symetrii dla różnych sztywności i grubości warstwy. W warstwach grubszych i sztywniejszych powstają rozciągające naprężenia radialne i w związku z tym warstwy te są bardziej narażone na pęknięcie. Warstwa wierzchnia powoduje powstanie dużych gradientów naprężeń połączonych ze zmianą znaku naprężeń obwodowych i radialnych wzdłuż osi z, blisko powierzchni kontaktu. Gradienty te są większe w przypadku, gdy materiał wykazuje wzmocnienie,  $m>0$ .

Dla  $m>0$  mamy również większe rozciągające naprężenia i radialne na granicy warstwy i rdzenia na osi symetrii. Wynika stąd, że dla  $m>0$  połączenie warstwy i rdzenia jest bardziej wrażliwe na pęknięcie.

Przedstawiono również wykresy naprężeń radialnych i stycznych na połączeniu warstwy i rdzenia w funkcji odległości od osi symetrii. W tym miejscu naprężenia obwodowe są w większości przypadków rozciągające i przyjmują większe wartości w przypadku twardszych warstw. Naprężenia rozciągające w warstwie przypisywane są różnicy modułu Younga warstwy i rdzenia. Grubość warstwy ma wpływ na naprężenia obwodowe normalne i styczne na połączeniu warstwy i rdzenia. Natomiast niewielki wpływ na naprężenia normalne i styczne mają własności materiałowe warstwy.

W elemencie jednorodnym na brzegu kontaktu powstają duże obwodowe naprężenia rozciągające. Natomiast w rdzeniu elementu z warstwą naprężenia te są znacznie mniejsze. Wynika stąd, że warstwa chroni rdzeń przed uszkodzeniami wynikającymi z obwodowych lub promieniowych naprężeń rozciągających.

Przedstawiono również ewolucję odkształceń plastycznych w warstwie i rdzeniu. Określono miejsce inicjacji odkształceń plastycznych dla różnych

układów parametrów materiałowych warstwy i rdzenia. Porównano wielkości stref plastycznych w rdzeniu elementu z warstwą i w elemencie jednorodnym. Dla  $m = 0$  maksymalne odkształcenia plastyczne w warstwie pojawiają się pod brzegiem (okręgiem) kontaktu, natomiast w rdzeniu są umiejscowione na połączeniu z warstwą na odcinku między osią symetrii i brzegiem kontaktu. We wszystkich badanych przypadkach maksymalne odkształcenia plastyczne pojawiają się w rdzeniu.

Zbadano również rozkład naprężeń resztkowych na połączeniu warstwy i rdzenia. Stwierdzono, że w warstwie generowane są naprężenia rozciągające. Porównano naprężenia rozciągające powstające pod obciążeniem i po odciążeniu na połączeniu warstwy i rdzenia. Stwierdzono, że po odciążeniu może nastąpić delaminacja warstwy.

Podano rozkłady naprężeń resztkowych wzdłuż osi symetrii oraz warstwie naprężeń resztkowych w warstwie i w rdzeniu. Przedstawiono ewolucję maksymalnych naprężeń głównych w warstwie i w rdzeniu w czasie pierwszych czterech półcykli obciążenia. Ogólnie pola naprężeń w kolejnych cyklach są podobne jak w pierwszym półcyklu. Zaobserwowano, że w półprzestrzeni z warstwą w trakcie półcyklu odciążenia pojawia się ponowne uplastycznienie warstwy i rdzenia na połączeniu z warstwą. Efekt wtórnej plastyczności nie występował w przypadku odciążenia materiału jednorodnego [28].

Przedstawiono również wykresy odkształcenia plastycznego akumulowanego w każdym cyklu obciążenia. Przyrosty odkształcenia plastycznego zmniejszają się w kolejnych cyklach.

Zbadano możliwości plastycznego przystosowania warstwy i rdzenia w procesie odkształceń cyklicznych. Stwierdzono, że w przypadku grubszych warstw nie obserwuje się zjawiska przystosowania, natomiast w przypadku cieńszych warstw zjawisko takie może wystąpić.

## 1.4 Wnioski

Z przedstawionego tu przeglądu literatury wynika, że obok testu twardości, (który jest porównawczą metodą badań) podejmowanych jest coraz więcej prób wykorzystania danych uzyskanych w procesie wskania wgłębników do wyznaczania stałych materiałowych takich jak: moduł Younga, moduł wzmocnienia, granica plastyczności i wytrzymałości.

W przypadku wgłębników „ostrych” opracowano dość złożone procedury identyfikacyjne np. [9], w których korzysta się z pomiaru krzywej siła-zagłębienie. Jednak pomimo złożonych algorytmów nie uzyskuje się

pełnej krzywej rozciągania a jedynie jej dwa punkty to jest granicę plastyczności i granicę wytrzymałości. Autorzy innej pracy poświęconej identyfikacji wskazują, że w przypadku wgłębników „ostrych” nie ma jednoznacznego odwzorowania między sprężysto-plastyczną krzywą rozciągania, a krzywą siła-zagłębienie całkowite.

W przypadku wgłębnika kulistego opracowane metody identyfikacji można podzielić na dwie grupy. W pierwszej korzysta się z pomiaru siły i promienia trwałego odcisku, podobnie jak przy pomiarze twardości, w drugiej z ciągłego pomiaru krzywej siła-zagłębienie. Niewiele podanych w literaturze metod można zaliczyć do drugiej grupy, brak jest metody, w której korzysta się bezpośrednio z rozwiązywania samopodobnego i pomiaru h.

W przypadku pierwszej grupy identyfikacja dokonywana jest na podstawie prostych wzorów Tabora, potwierdzonych w teoretycznym rozwiązaniu samopodobnym (1.70-1.72) dla materiałów sztywno-plastycznych. Związane jest to jednak z następującymi ograniczeniami:

- dokładne wyniki można otrzymać jedynie dla materiałów których krzywa  $\sigma$ - $\varepsilon_p$  spełnia prawo potęgowe, dla innego typu krzywych identyfikacja obarczona jest błędem.
- błąd identyfikacji wzrasta gdy rośnie udział odkształceń sprężystych w procesie wciskania kuli, (maleje iloraz  $E/\sigma_0$ ), ze względu na to, że parametry geometryczne i siła odcisku mierzone są w różnych konfiguracjach.

Wysiłek twórców metod identyfikacyjnych zmierzał do zredukowania tych błędów. Wprowadzano pewne poprawki (na przykład w [33],[34]) do wzorów (1.70-1.72) wynikających z rozwiązania samopodobnego lub całkowitą modyfikację tych wzorów [35], [37]. Modyfikacje te miały na celu uwzględnienie wpływu odkształceń sprężystych na mierzone parametry geometryczne odcisku oraz nadanie wzorom identyfikacyjnym postaci bardziej ogólnej, umożliwiającej identyfikację również takich krzywych rozciągania, które nie spełniają prawa potęgowego.

Metody identyfikacji materiałów przy pomocy wgłębnika kulistego można również sklasyfikować ze względu na stosowane równanie identyfikacyjne. Większość metod odwołuje się w sposób pośredni lub bezpośredni do równań (1.70-1.72). W metodach tych wykorzystuje się trzy typy relacji między parametrami wciskania:

$$P_{av} - \left(\frac{a}{D}\right)^m \quad - \text{średnie ciśnienie - promień kontaktu} \quad (1.110)$$

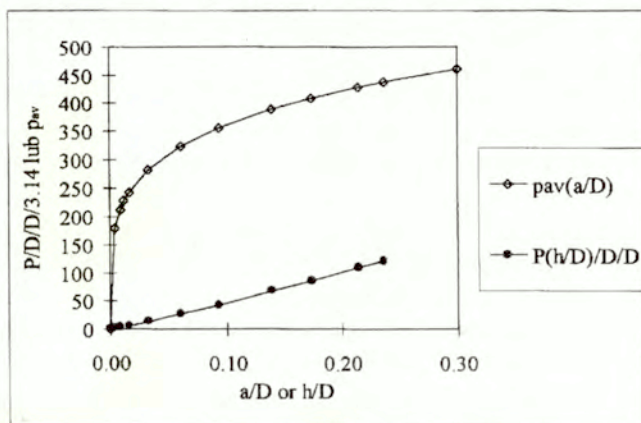
$$P - \left(\frac{a}{D}\right)^{m+2} \quad - \text{siła - promień kontaktu} \quad (1.111)$$

$$P - \left(\frac{h}{D}\right)^{m/2+1} \text{ - siła-zagłębienie} \quad (1.112)$$

Każde z tych równań umożliwia obliczenie parametrów  $k$  i  $m$  oraz ewentualnie, jeśli jest napisane w postaci bardziej ogólnej, [35], bezpośrednie wyznaczenie krzywej  $\sigma$ - $\varepsilon_p$ .

W pracy [20], [33] korzysta się z równania (1.110), w [35] mierzona jest głębokość wciskania, ale następnie obliczany jest promień  $a'$  i faktycznie korzysta się z równań z wzoru (1.110). W pracy [33] mierzona jest również głębokość wciskania, po czym wyznaczane jest  $a'$  i korzysta się z wzoru (1.111). Relacja (1.112) jest wykorzystywana we wzorach identyfikacyjnych w pracy [37].

Korzystanie z wzorów identyfikacyjnych (1.110), (1.111) związane jest z jeszcze jedną niedogodnością. Analizując równanie typu (1.110), które dla wzmocnienia potęgowego przyjmuje postać (1.71) widzimy, że pochodna tego równania względem  $a$  zmierza do nieskończoności dla  $0 < m < 1$  i  $a \rightarrow 0$ , rys.1.5.



Rys. 1.5 Przebieg krzywych  $P(h/D)$ ,  $p_{av}(a/D)$  według równań (1.70-1.72) dla  $m=0.24$ ,  $k=800$ .

Wskazuje to za dużą wrażliwość równania (1.71) na błędy pomiarowe dla małych  $a$ .

Ponadto pomiar promienia kontaktu  $a$  w przypadku płytkich odcisków jest utrudniony, gdyż brzeg kontaktu (charakterystyczne załamanie materiału) nie jest wystarczająco wyraźny, co również prowadzi do błędów pomiarowych. W przypadku korzystania z wzoru typu (1.110) i pomiaru promienia  $a$  trzeba spełnić dwa sprzeczne warunki. Z jednej strony odciski nie



mogą być zbyt głębokie, gdyż nie może być przekroczony zakres stosowalności rozwiązania samopodobnego, z drugiej nie mogą być zbyt płytkie, gdyż wtedy utrudniony jest pomiar promienia odcisku poza tym rośnie udział odkształceń sprężystych w polu deformacji pod kulką [40]. Ponadto w zależności od układu parametrów badanego materiału błędy identyfikacji wymienione w punktach a) i b) mogą się sumować lub odejmować, oraz mogą maleć lub rosnać przy zmniejszaniu dolnej granicy siły, przy której wykonywane są odciski. Superpozycją tych błędów można też wytłumaczyć zaobserwowany m.in. przez autora fakt, że wykorzystanie dużych odcisków kuli ( $a/D \leq 0.27$ ) w niektórych przypadkach daje dobre wyniki identyfikacji, pomimo że zakres, w którym obowiązuje rozwiązanie samopodobne jest przekroczony. Stąd, jeśli korzystamy z metod identyfikacji omówionych we wstępie trudno jest ocenić dokładność identyfikacji parametrów nieznanego materiału.

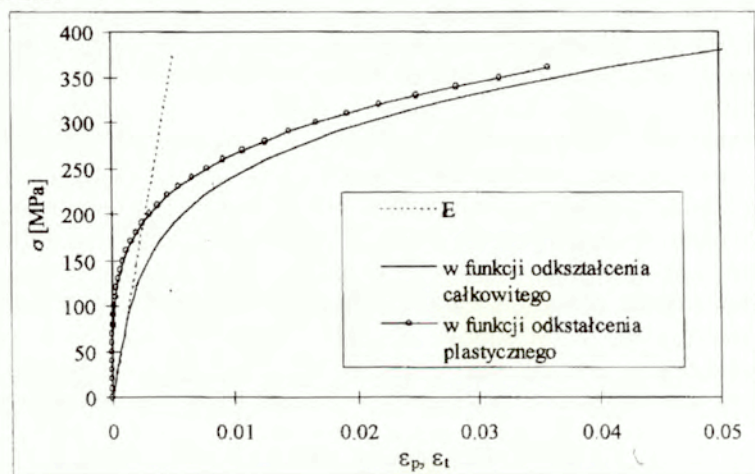
W celu praktycznego rozpoznania metod identyfikacji opartych na wzorach Tabora (Meyera) wykonano badania wstępne, w których wyznaczono parametry  $k$  i  $m$  dla mosiądzu, miedzi i stali. Wykorzystano twardościomierz uniwersalny umożliwiający pomiar średnicy trwałego odcisku. Przeprowadzone badania wstępne wskazują, że najlepsze wyniki można uzyskać, jeśli dla badanych punktów pomiarowych iloraz  $a/D$  spełnia warunek  $0.07 < 0a/D < 0.27$ , a punkty pomiarowe  $P_i$ ,  $a_i$  są uzyskane przy pomocy dwóch kulek o różnych średnicach. Stosowanie tylko jednej kulki prowadziło do znacznie gorszych wyników, pomimo spełnienia wspomnianego warunku. W przypadku małych obciążeń trudny jest odczyt średnicy brzegu odcisku na mikroskopie, gdyż brzeg odcisku nie jest wyraźnie zaznaczony. Różnice między krzywymi identyfikowanymi, a krzywymi rzeczywistymi wynikają też z faktu, że badane materiały nie spełniały w sposób ścisły prawa potęgowego.

## 2. Proponowane metody identyfikacji własności materiałów jednorodnych.

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione metody identyfikacji opracowane przez autora. W punktach 2.1-2.5 omówimy metody, w których korzysta się z rozwiązania samopodobnego, gdzie wzmocnienie plastyczne materiału opisane jest dwoma parametrami  $m$  i  $k$  według (1.26). Metody te mogą być stosowane w sposób ścisły do identyfikacji materiałów sprężysto-plastycznych, dla których krzywą rozciągania da się przedstawić w postaci

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{1/m}. \quad (2.1)$$

Przykładową krzywą rozciągania (2.1) w układzie  $\sigma-\varepsilon_t$  i  $\sigma-\varepsilon_p$  przedstawiono na rys. 2.1.



Rys. 2.1 Krzywe rozciągania plastyczna i sprężysto-plastyczna

W punkcie 2.6 zostanie przedstawiona metoda umożliwiająca identyfikację trzech parametrów wzmocnienia plastycznego  $m$ ,  $k$ , i  $\sigma_0$ .

### 2.1 Maksymalna siła, maksymalne zagłębienie i sprężyste cofnięcie kuli jako parametry służące do identyfikacji materiału.

Jak wspomniano we wstępie, bezpośrednie stosowanie wzorów z rozwiązania samopodobnego (1.70-1.72) do identyfikacji materiałów sprężysto-plastycznych powoduje pewne niekonsekwencje. Jedną z nich

polega na tym, że geometria odcisku (tzn. promień brzegu kontaktu  $a$ ) mierzona jest w konfiguracji odciążonej, natomiast siła  $P$  w konfiguracji obciążonej, rys.2.2. Nie powoduje to jednak dużych błędów, gdyż  $a$  zmienia się w niewielkim stopniu w trakcie odciążenia. Większe błędy mogą być spowodowane drugą niekonsekwencją, to znaczy tym, że występujący we wzorze (1.71) iloraz  $a/D$ , który jest miarą odkształceń pod kulką odnosi się do konfiguracji obciążonej, gdyż  $D$  jest średnicą niecki pod obciążeniem, gdy kulka przylega do materiału. W tej konfiguracji występują zarówno odkształcenia sprężyste jak i plastyczne. Natomiast ze względu na to, że promień  $a$  mierzony jest w konfiguracji odciążonej, to konsekwentnie w ilorazie  $a/D$  należałoby wstawić wartość  $D$  odpowiadającą tej konfiguracji, a więc nieco większe. Tak obliczone  $a/D$  odpowiadałoby trwałym, plastycznym odkształceniom materiału.

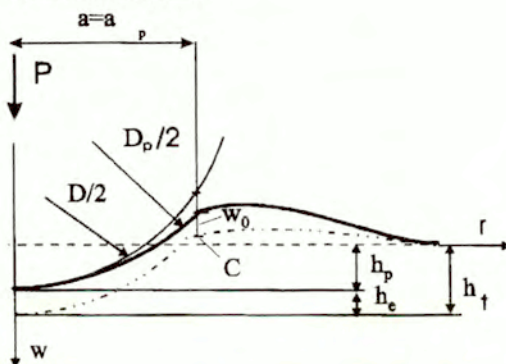
W tym rozdziale zaproponowano metodę, w której korzysta się z pomiaru siły  $P$  i zagłębienia  $h$  i uwzględniony jest wpływ odkształceń sprężystych na geometrię odcisku. Przedstawiono również porównanie proponowanej metody z innymi, omówionymi w przeglądzie literatury. Jako punkt wyjścia bierzemy równanie (1.71), które dla konfiguracji obciążonej ma postać:

$$\frac{P}{\pi a^2} = \alpha \beta^m k \left(\frac{a}{D}\right)^m \quad (2.2)$$

Dążymy do wyznaczenia zależności  $P(h/D)$ , zatem z powyższego równania chcemy wyeliminować  $a$ . Zależność między  $a$ ,  $h$  i  $D$  wyraża równanie (1.72). W sposób ścisły obowiązuje ono jednak tylko wtedy, gdy obciążany materiał jest sztywno-plastyczny, oraz jeśli  $a$  i  $h$  mierzone są w konfiguracji obciążonej (dla takiego materiału równoważnej odciążonej). O ile wpływ odkształceń sprężystych (proces odciążenia) na wartość  $a$  jest pomijalnie mały, to nie możemy pominąć tego wpływu na zagłębienie  $h$ ; różnica między  $h_p$  i  $h_t$  (rys.2) jest dość znaczna. Do równania (1.72) nie możemy wstawić ani  $h_t$ , gdyż zależy ona od wielkości odkształceń sprężystych, ani  $h_p$ , gdyż odnosi się ono do konfiguracji odciążonej, w której nie jest znana średnica niecki  $D_p$ , (rys. 2.2). Zatem w próbie wciskania kulki w materiał sprężysto-plastyczny równanie (1.72) obowiązuje dla pewnego zagłębienia zastępczego  $h_{eq}$ , przy czym  $h_p < h_{eq} < h_t$ .

Wartość  $h_{eq}$  możemy określić analizując proces sprężystego odciążania kulki. Zakładamy, że w trakcie odciążenia mamy do czynienia z odkształceniami wyłącznie sprężystymi i korzystamy z pewnych zależności wynikających ze wzorów Hertza. Rozpatrzmy trajektorię punktu  $C$ , który

znajdował się na brzegu kontaktu w chwili, gdy siła  $P$  osiągnęła maksimum (rys.2.2). Z rozwiązania Herta problemu kontaktu kulki z półprzestrzenią wynika, że w trakcie sprężystego odciążenia kulka przemieszcza się o  $h_e$ , dno odcisku przemieszcza się również o  $h_e$ , natomiast przemieszczenie punktu  $C$  wynosi  $w_0 = h_e/2$ . W przypadku materiału sprężysto-plastycznego odciążana sprężystość jest trwała niecka kulista uformowana wcześniej w procesie obciążania kuli. Zatem zależność  $w_0 = h_e/2$  wyprowadzona dla kontaktu kuli z półprzestrzenią może okazać się niedokładna, powinna być zweryfikowana przy pomocy odpowiednich obliczeń.



Rys.2.2 Konfiguracja obciążona i odciążona (oznaczenia w tekście)

Bardziej dokładny wzór otrzymano drogą wielu symulacji numerycznych dla różnych wartości zagłębienia kulki i wzmocnienia plastycznego (patrz rozdz. 2.2.1, wzór (2.21)); ma on następującą postać:

$$w_0 = 0.62h_e$$

Na rys.2.3 przedstawiono przemieszczenie brzegu kontaktu, oraz dna kontaktu w funkcji siły podczas sprężystego obciążania-odciążania twardej niecki w materiale sprężysto-plastycznym. Analizując rys.2.3 można zaobserwować, że drogę kulki w trakcie odciążenia możemy podzielić na dwie fazy. W trakcie pierwszej fazy przyrosty przemieszczeń na brzegu kontaktu i na osi kontaktu są w przybliżeniu jednakowe. W trakcie drugiej fazy przyrosty przemieszczenia dna kontaktu (na osi symetrii) są większe niż na brzegu kontaktu. Różnica przemieszczeń brzegu i dna kontaktu rośnie osiągając wartość  $(1-0.62)h_e = 0.38h_e$  po odciążeniu. Na podstawie wykresów z rys.2.3 przyjmujemy w przybliżeniu, że graniczną wartością przemieszczenia kulki, która oddziela te fazy jest wartość  $0.5h_e$ . Przyjmujemy, że jeśli przemieszczenie kulki podczas odciążenia jest mniejsze od  $0.5h_e$  to nie zmienia się powierzchnia kontaktu i jest taka sama jak przy pełnym

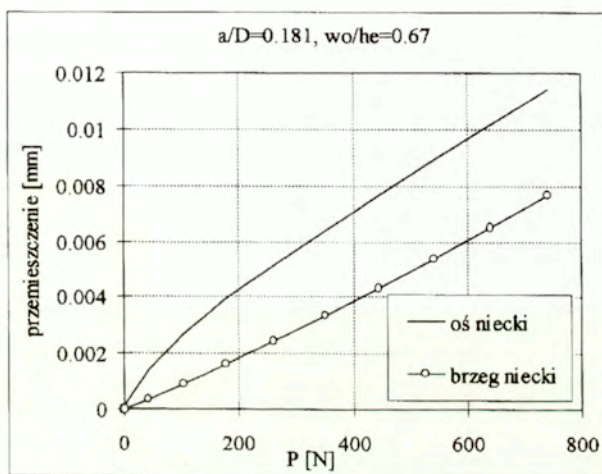
obciążeniu. Natomiast dalsze odciążanie powoduje stopniowe odrywanie się kulki od badanego materiału i kulka osiąga trwałe zagłębienie  $h_p$ . Powstała przy tym niecka osiąga średnicę  $D_p$ .

Z powyższych rozważań wynika, że możemy przyjąć

$$h_{eq} = h_p + h_e/2 \quad ,$$

gdzie:  $h_e = h_r h_p$ , (2.3)

$$a = c^2 D h_{eq} \quad . \quad (2.4)$$



Rys.2.3. Przemieszczenia brzegu kontaktu i dna kontaktu w funkcji siły.

Dla tak zdefiniowanego zagłębienia kulki równego  $h_{eq}$  spełniony jest w przybliżeniu warunek, że promień obszaru kontaktu jest taki jak przy maksymalnej sile i maksymalnym zagłębieniu kulki. Oznacza to, że kulka przylega do powierzchni na całym obszarze kontaktu odpowiadającym obciążeniu maksymalnemu. Zatem konfiguracja powstająca przy zagłębieniu kulki o  $h_{eq}$  jest najbliższa konfiguracji obciążonej zastępczego materiału sztywno-plastycznego, dla którego wzory (1.70-1.72) są ścisłe i można wykorzystać zależność (1.72).

Zależność (2.4) wstawiamy dalej do (2.2) i otrzymujemy wyrażenie, w którym siła  $P$  jest uzależniona od  $h_{eq}$

$$P = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 \left( \frac{h_{eq}}{D} \right)^{m/2+1} \quad , \quad (2.5)$$

gdzie  $c$  obliczane jest według (1.58).

Równanie (2.5) bierzemy jako podstawę do identyfikacji stałych materiałowych.

Reasumując możemy rozpatrywać cztery wersje równania identyfikacyjnego do wyznaczenia stałych materiałowych  $k$  i  $m$ :

- a/ wykorzystanie równania (1.71) (pominięcie efektu odciążenia sprężystego)
- b/ wykorzystanie równania (1.79) (uwzględnienie efektu odciążenia sprężystego)
- c/ wykorzystanie równania (1.81) (uwzględnienie efektu odciążenia sprężystego)
- d/ wykorzystanie proponowanego równania (2.5) (uwzględnienie efektu odciążenia sprężystego)

W ramach weryfikacji przedstawimy porównanie wyników identyfikacji otrzymanych przy pomocy proponowanej metody z wynikami otrzymanymi z pozostałych wymienionych tu metod.

### 2.1.1. Weryfikacja metody

Podstawowe wzory, z których korzystamy w proponowanej tu metodzie odnoszą się do identyfikacji materiałów, których krzywe rozciągania spełniają równanie potęgowe postaci (1.70). Jednak nie dla wszystkich metali prawo potęgowe jest spełnione. Dla dokładnego opisu krzywych rozciągania niektórych materiałów konieczne jest korzystanie z bardziej ogólnego równania w postaci

$$\sigma = \sigma_0 + k \varepsilon_p^m \quad (2.6)$$

Większość metod identyfikacji opisanych we wstępie oraz metoda zaproponowana w tym rozdziale umożliwiają wyznaczenie tych krzywych jedynie w uproszczonej postaci (1.70), a nie w postaci (2.6). Jest to przybliżenie, które z konieczności przyjmujemy.

Dla oceny przydatności omówionych wzorów wykonane zostały numeryczne eksperymenty wciskania kuli, mające na celu identyfikację krzywych rozciągania dwóch materiałów, których własności opisują krzywe w postaci:

materiał I

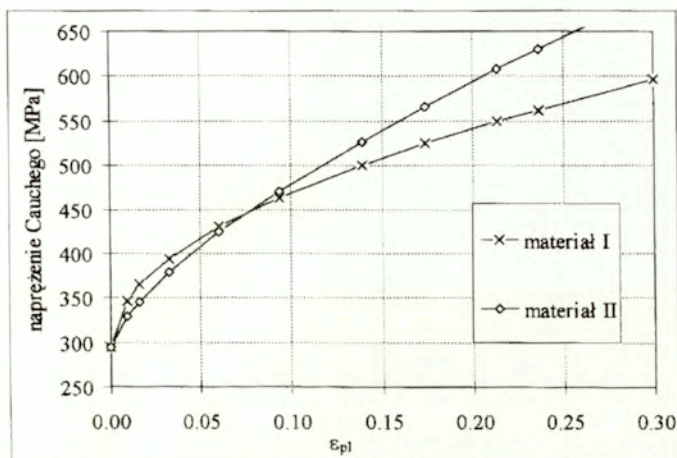
$$\sigma = 295 + 550 \varepsilon_p^{0.5} \quad (2.7)$$

materiał II

$$\sigma = 295 + 920 \varepsilon_p^{0.7} \quad (2.8)$$

Krzywe te są położone blisko siebie i ich identyfikacja jest jednocześnie ilustracją rozdzielczości metody. Są to krzywe bliskie rzeczywistej krzywej rozciągania stopu aluminiowego PA6, zaś wykresy tych krzywych zostały przedstawione na rys.2.4. Do obliczeń przyjęto moduł Younga  $E=74500\text{MPa}$ ,  $\nu=0.3$ , oraz prawo konstytutywne analogicznie jak w (2.1), odpowiadające (2.6)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{k} \right)^{1/m}$$



Rys.2.4. Identyfikowane krzywe rozciągania

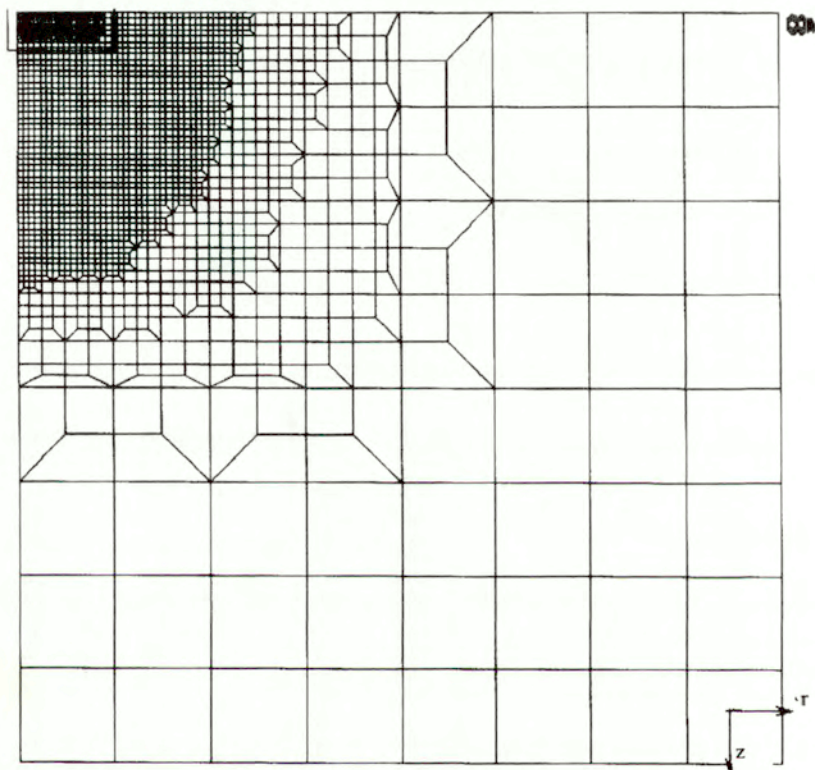
Parametry wciskania kuli w te materiały zostały obliczone przy pomocy metody elementów skończonych. Poprzez porównanie zidentyfikowanych krzywych rozciągania z krzywymi rzeczywistymi (2.7) i (2.8) wprowadzonymi jako dane do obliczeń można sprawdzić, która z metod najlepiej nadaje się do identyfikacji stałych materiałowych.

### 2.1.1.1 Model procesu zagłębienia kulki w badanym materiale

Odciski kuli niezbędne do wykonania identyfikacji otrzymujemy drogą eksperymentu numerycznego. Polega on na wprowadzeniu krzywych rozciągania (2.7), (2.8) jako danych do obliczeń MES i wykonaniu symulacji wciskania kulki o średnicy 2.5mm różnymi siłami i wyznaczeniu dla każdej z

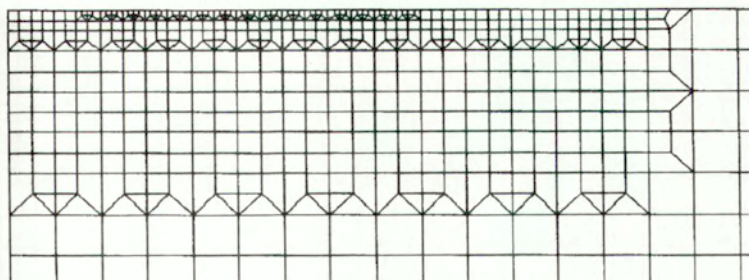
nich parametrów procesu ( $P, a, h_p, h_t$ ). Następnie korzystając z metod a/ b/ c/ d/ wyznacza się krzywe rozciągania.

W przypadku rozwiązywania zagadnienia kontaktowego przy pomocy MES, dokonując podziału na elementy skończone należy pamiętać, że dokładność z jaką określamy promień brzegu kontaktu zależy od odległości między węzłami położonymi na powierzchni z którą kontaktuje się kulka. Zastosowano dwie różne siatki podziału na elementy: dla płytkich odcisków ( $a/D < 0.08$ ), rys.2.5 i dla głębokich odcisków ( $a/D > 0.08$ ), rys.2.6. Obydwie siatki są zagęszczone w strefie kontaktu.

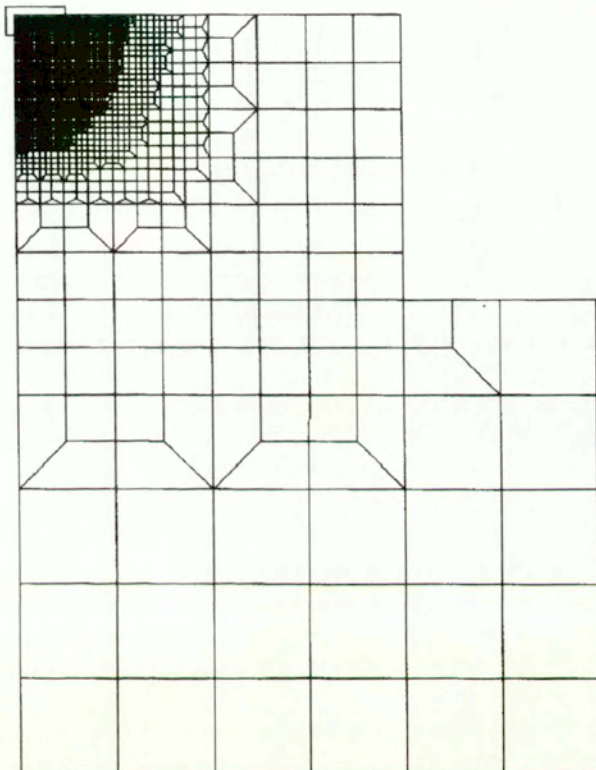


Rys.2.5a Siatka podziału na elementy dla  $a/D < 0.08$

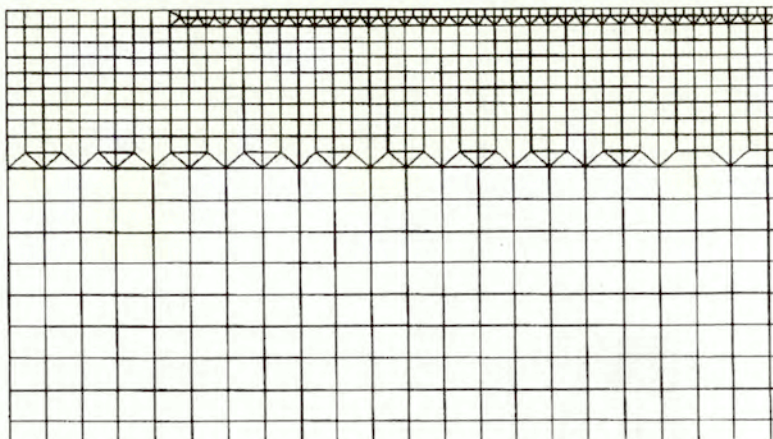




Rys.2.5b Siatka podziału na elementy w strefie kontaktu dla  $a/D < 0.08$



Rys.2.6a Siatka podziału na elementy dla  $a/D > 0.8$



Rys.2.6b Siatka podziału na elementy w strefie kontaktu dla  $a/D > 0.8$

Przy ustalonej średnicy kulki  $D$ , dla płytkich odcisków wartość promienia  $a$  może być nawet kilkukrotnie mniejsza niż w przypadku głębokich odcisków. Zatem konieczna jest większa rozdzielczość przy odczycie wartości  $a$ , więc siatka podziału powinna być bardziej zagęszczona w pobliżu przewidywanego brzegu kontaktu, położonego bliżej osi symetrii niż dla odcisków głębokich. Z drugiej strony działają wówczas mniejsze siły, naprężenia zanikają w mniejszej odległości od kulki, więc fizycznie mniejszy obszar musi być podzielony na elementy. Siatka podziału dla  $a/D < 0.08$  składa się z 2198 osiowosymetrycznych czterowęzłowych elementów czworokątnych, 144 osiowosymetrycznych elementów trójkątnych i 2012 węzłów. Podzielony obszar ma wymiary  $r/R=3.2$  oraz  $z/R=3.2$  ( $R$ - promień kuli), najmniejszy element jest kwadratem o boku  $b=0.0028R$ .

Siatka podziału dla  $a/D > 0.08$  składa się z 5666 osiowosymetrycznych czterowęzłowych elementów czworokątnych, 5817 węzłów. Podzielony obszar ma wymiary  $r/R=5.6$ ,  $z/R=6.4$ , najmniejszy element jest kwadratem o boku  $b=0.0031R$ . Jako warunki brzegowe przyjęto unieruchomienie przemieszczeń pionowych na dolnym brzegu i przemieszczeń poziomych na osi symetrii. Poprzez wykonanie obliczeń próbnych stwierdzono, że dalsze zwiększanie obszaru dyskretyzacji nie powoduje znaczących różnic w wynikach. Wciskana kulka traktowana jest jako ciało nieskończenie sztywne. Fragment sfery kontaktujący się z badanym materiałem podzielono na 40 elementów. Poprawność dyskretyzacji sprawdzono poprzez rozwiązanie problemu

kontaktu sprężystego i porównanie wyników z wynikami uzyskanymi przy pomocy wzorów Hertza.

Obliczenia wykonano przy pomocy systemu MARC. Wykorzystano opcję programu umożliwiającą analizę dużych odkształceń sprężysto-plastycznych (nieliniowość geometryczna). Przyjęto sprężysto-plastyczny model materiału ze wzmocnieniem izotropowym, w/g podanych krzywych rozciągania (2.7), (2.8), uwzględniając teorię plastycznego płynięcia. Pominięto tarcie, gdyż według wcześniejszych analiz tego zagadnienia wykonanych przez innych autorów, [28], nie odgrywa ono znaczącej roli.

### 2.1.1.2 Wyniki obliczeń.

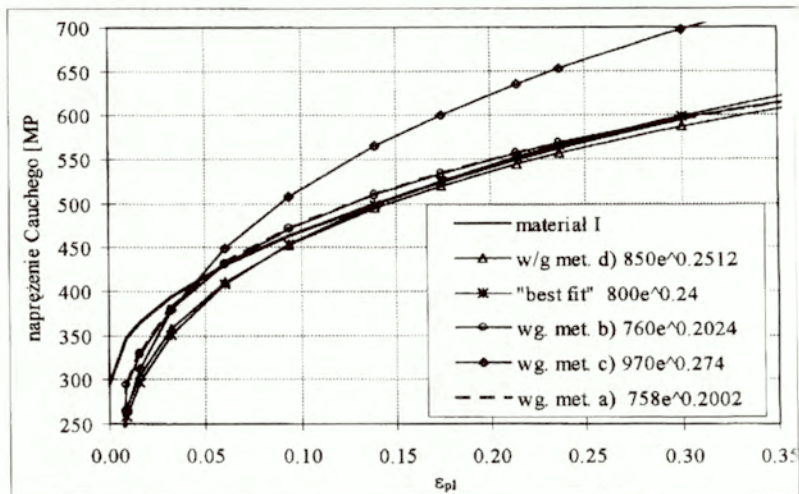
Dla materiału I dokonano symulacji 5 odcisków, a dla materiału II 7 odcisków. Parametry tych prób przedstawiono odpowiednio w tabelach I i II. Wykresy krzywych rozciągania dla materiału I i II otrzymane metodami a/,b/,c/,d/ przedstawiono na rys 2.7, 2.8. Podano również krzywe wprowadzone jako dane do wyznaczania parametrów odcisków kulki. Dla porównania przedstawiono krzywe stanowiące najlepszą możliwą aproksymację w zakresie dużych odkształceń równań danych krzywych (2.7,2.8) przy pomocy równań w postaci potęgowej, (1.70).

Tabela I

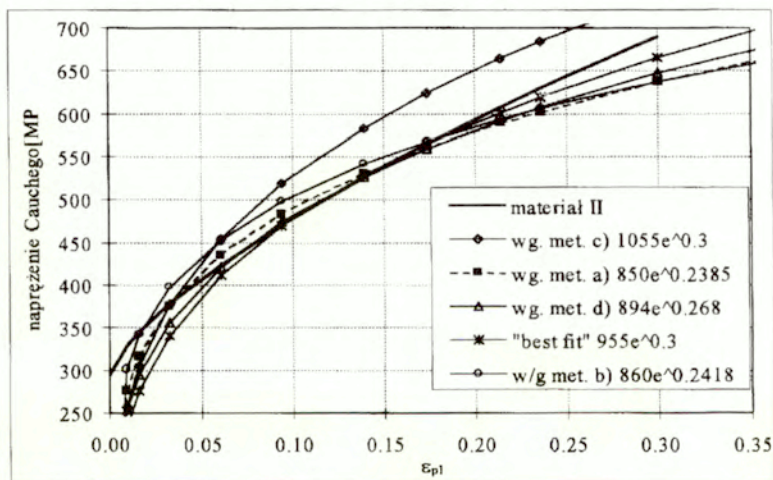
$a$ [mm]	$P$ [N]	$a/D$	$P/\pi a^2$ dla $295+550\varepsilon_p^{0.5}$	$D$ [mm]	$h_p$ [mm]	$h_t$ [mm]	$c^2 = \frac{a_p^2}{h_p D}$	$c^2 = \frac{a_p^2}{h_{qt} D}$
0.0941	25	0.03764	91.74978	2.5	0.0028	0.0048	1.264973	0.932085
0.15725	79	0.0629	103.8222	2.5	0.0083	0.012	1.19169	0.974485
0.23291	184	0.093162	110.2312	2.5	0.0183	0.024	1.185677	1.025905
0.5023	1040	0.20092	133.9526	2.5	0.0937	0.108	1.077077	1.000715
0.66	1820	0.264	135.7775	2.5	0.1614	0.18	1.079554	1.020738

Tabela II

$a$ [mm]	$P$ [N]	$a/D$	$P/\pi a^2$ dla $295+920\varepsilon_p^{0.7}$	$D$ [mm]	$h_p$ [mm]	$h_t$ [mm]	$c^2 = \frac{a_p^2}{h_p D}$	$c^2 = \frac{a_p^2}{h_{qt} D}$
0.09413	24.5	0.037652	89.85748	2.5	0.0028	0.0048	1.26578	0.93268
0.12573	46.5	0.050292	95.59153	2.5	0.0053	0.008	1.193059	0.950859
0.15735	77.5	0.06294	101.7214	2.5	0.00846	0.012	1.171193	0.968284
0.23274	180	0.093096	107.9878	2.5	0.01843	0.024	1.175646	1.021313
0.49985	1030	0.19994	133.9683	2.5	0.09367	0.108	1.066937	0.991124
0.5831	1430	0.23324	136.6766	2.5	0.127	0.144	1.070884	1.003707
0.6453	1830	0.25812	142.8144	2.5	0.161	0.18	1.034564	0.97692



Rys.2.7 Zidentyfikowane krzywe rozciągania dla materiału I



Rys.2.8 Zidentyfikowane krzywe rozciągania dla materiału II

### 2.1.2. Wnioski

W pracy zdecydowano się na wykonanie eksperymentów numerycznych zamiast eksperymentów fizycznych. Takie postępowanie pozwala uniknąć pewnych zaburzeń jakie występują w eksperymencie fizycznym na przykład

odkształcenia kuli, sił tarcia, które w omawianych tu wzorach są konsekwentnie pomijane. Ponadto korzystając z eksperymentu numerycznego mamy pewność, że charakterystyka identyfikowanego materiału jest dokładnie opisana zadaną funkcją. Na podstawie pomiaru sił i odcisków kuli odtworzono krzywe rozciągania dwóch materiałów opisanych różnymi funkcjami.

Z przedstawionych wykresów wynika, że najdokładniejsze odtworzenie zadanej krzywej rozciągania otrzymujemy stosując metodę d). Metody a), b), c), dają nieco gorsze wyniki. Krzywa odpowiadająca metodzie d) stosunkowo najmniej się różni się od krzywej oznaczonej jako „best fit” czyli od krzywej możliwie najlepiej dopasowanej do krzywej wyjściowej.

Najmniej dokładną metodą okazała się metoda c). Wynika to z niekonsekwencji założeń, które tkwią u podstaw tej metody: Korzysta się w niej z dokładnego wzoru (1.82) dla obliczenia  $a'$ , jednocześnie wykorzystywana jest zależność (1.75) obowiązująca dla płytkich odcisków. Na podstawie wielu przeprowadzonych analiz stwierdzono, że błąd tej metody silnie zależy od głębokości odcisków wykorzystanych do obliczeń. Przy wyznaczaniu krzywych przedstawionych na rys. 2.7, 2.8 pominięto odciski, dla których  $a/D < 0.06$ . Stwierdzono bowiem, że uwzględnienie tych odcisków spowodowałoby pogorszenie wyników otrzymanych wszystkimi czterema metodami. Ponadto stwierdzono, że metodą najmniej wrażliwą na zmniejszanie względnych wymiarów odcisków kulki ( $a/D$ ) jest metoda d). Dość dobre rezultaty daje metoda a). Wynika to z faktu, że korzystamy w niej wyłącznie z pomiaru promienia odcisku, którego wartość zmienia się w niewielkim stopniu w trakcie sprężystego odciążenia.

Należy tu również zwrócić uwagę, że do naszych obliczeń, promień odcisku  $a$  jest brany z rozwiązania numerycznego, zatem niezależnie od średnicy odcisku jest on wprowadzany z taką dokładnością jaka wynika z rozwiązania MES. Natomiast w praktyce, gdy  $a$  odczytywane jest z rzeczywistych zagłębień w materiale, przy płytkich odciskach mamy duże trudności z właściwym odczytaniem  $a$ , gdyż brzeg odcisku jest bardzo niewyraźny. Stąd dla celów praktycznych najwłaściwszą wydaje się zaproponowana tu metoda d), w której nie trzeba odczytywać  $a$ . Aby korzystać z tej metody trzeba jednak dysponować urządzeniem umożliwiającym pomiar  $h_p$  i  $h_r$ . Dokładność metody d) można potwierdzić analizując dane w dwóch ostatnich kolumnach tabel I i II. Podano tam wartości  $c^2$  dla wszystkich odcisków, obliczone według (1.72) po podstawieniu zamiast  $h$  wartości  $h_p$  lub  $h_{eq}$ . Teoretycznie  $c^2$  powinno być stałe, warunek ten jest lepiej spełniony dla jeśli jako  $h$  przyjmujemy wartość  $h_{eq}$  wykorzystaną w proponowanej metodzie identyfikacji.

## 2.2. Maksymalna siła, maksymalne zagłębienie i zagłębienie resztkowe jako parametry służące do identyfikacji.

### 2.2.1. Podstawy teoretyczne metody

W tym rozdziale przedstawiona zostanie kolejna propozycja modyfikacji wzorów wynikających z rozwiązania samopodobnego, mającej na celu lepsze przystosowanie ich do identyfikacji krzywej  $\sigma$ - $\varepsilon_p$  materiałów sprężysto-plastycznych. Warto też zauważyć, że proponowane tu metody identyfikacji umożliwiają wyznaczenie zależności naprężenie-odkształcenie plastyczne badanego materiału sprężysto-plastycznego. Korzystając z wzorów (1.70-1.72) nie możemy wyznaczyć własności sprężystych, odkształcenia sprężyste muszą być pomijane w metodach bazujących na tych wzorach. Wzory (1.70-1.72) obowiązują w sposób ścisły dla materiału sztywno-plastycznego, dla którego konfiguracja obciążona jest taka sama jak odciążona.

Parametry trwałego odcisku w materiale sprężysto-plastycznym mierzone po odciążeniu są miarą odkształceń plastycznych. Stąd w zaproponowanym tu algorytmie identyfikacji przyjmujemy, że konfiguracja odciążona materiału sprężysto-plastycznego jest identyczna jak konfiguracja obciążona pewnego hipotetycznego materiału sztywno-plastycznego, którego własności chcemy zidentyfikować. Dla takiego materiału obowiązują wzory (1.70-1.72). W proponowanym podejściu zakładamy, że wzory te będą spełnione w sposób ścisły, jeśli wstawimy do nich parametry odcisku w konfiguracji odciążonej ( $h_p, a_p, D_p, P_p$ ). Istotą proponowanej metody jest konsekwentne uwzględnienie w równaniach identyfikacyjnych (1.70-1.72) parametrów mierzonych w tej samej konfiguracji (odciążonej). Dokładna analiza procesu odciążenia jest bardzo ważna dla właściwej oceny tych parametrów. W przypadku eksperymentu numerycznego proces odciążenia może być analizowany numerycznie (MES), lub przy pomocy wzorów Hertza zastosowanych do kontaktu kuli o promieniu  $D$  z nieką kulistą o promieniu  $D_p$ . Zauważmy, że rozwiązanie Hertza nie musi się pokrywać z rzeczywistym procesem odciążenia kulki uprzednio zagłębionej w ośrodek sprężysto-plastyczny, gdyż w tym rzeczywistym procesie generowane są naprężenia własne, a ponadto resztkowe zagłębienie w materiale niedokładnie odpowiada założeniom rozwiązania Hertza.

Równanie (1.71) zapisane w konfiguracji odciążonej ma postać

$$\frac{P}{\pi a_p^2} = \alpha \beta^m k \left( \frac{a_p}{D_p} \right)^m \quad (2.9)$$

Korzystając z przekształconego równania (1.72)

$$a_p^2 = c^2 D_p h_p \quad (2.10)$$

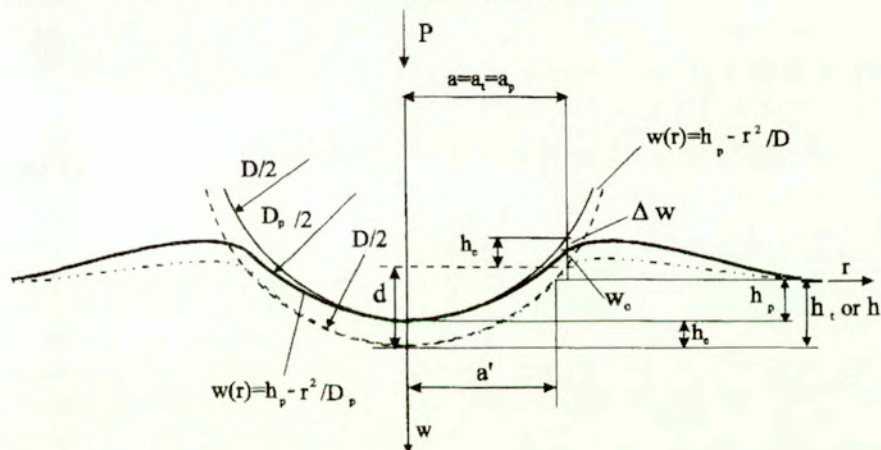
siłę  $P$  możemy przedstawić jako funkcję  $h_p$  i  $D_p$  tzn.

$$P = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D_p^2 \left( \frac{h_p}{D_p} \right)^{m/2+1} \quad (2.11)$$

W równaniu (2.10) znamy wielkość  $h_p$  (możemy ją bezpośrednio zmierzyć), natomiast nie jest znana wartość średnicy  $D_p$ . Średnicę tę możemy obliczyć na podstawie następujących rozważań geometrycznych. W rozwiązaniu samopodobnym wgłębnik kulisty modelowany jest za pomocą paraboloidy obrotowej o równaniu

$$w(r) = h - r^2/D$$

Pokazaną na rys. 2.9 różnicę zagłębień  $\Delta w$  między odciskami kul o średnicy  $D$  i  $D_p$  możemy przedstawić jako różnicę rzędnych odpowiadających im parabol w punkcie o odciętej  $r = a_p = a$ . Parabole musimy przy tym tak ustawić, aby pokrywały się ich wierzchołki (rys.2.9).



Rys.2.9 Porównanie odcisków obciążonego i odciążonego

Różnica  $\Delta w$  wyraża się wzorem

$$\frac{a^2}{D} - \frac{a^2}{D_p} = \Delta w \quad (2.12)$$

Znajdujemy najpierw wyrażenie na iloraz  $h_p/D_p$  występujący w równaniu identyfikacyjnym (2.11)

$$\frac{h_p}{D_p} = \frac{h_p}{D} - \frac{h_p \Delta w}{a^2} \quad (2.13)$$

Zakładając, że  $a=a_p$  korzystamy następnie z (2.10)

$$\frac{h_p}{D_p} = \frac{h_p}{D} - \frac{\Delta w}{c^2 D_p},$$

$$\frac{1}{D_p} = \frac{h_p}{D(h_p + \frac{\Delta w}{c^2})} \quad (2.14)$$

Równanie (2.14) możemy również zapisać jako

$$D_p h_p = D(h_p + \frac{\Delta w}{c^2}) = D h_b, \quad (2.15)$$

gdzie: 
$$h_b = h_p + \frac{\Delta w}{c^2} \quad (2.16)$$

Wielkość  $h_b$  jest zastępczą głębokością odcisku odpowiadającą kulce o średnicy  $D$ .

Równanie (2.14) przekształcamy do postaci

$$D_p = D(1 + \frac{\Delta w}{h_p c^2}), \quad (2.17)$$

w której explicite występuje wielkość  $D_p$ .

Wyrażenia (2.16) i (2.17) wstawiamy do równania identyfikacyjnego (2.11) i otrzymujemy

$$P = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 (1 + \frac{\Delta w}{h_p c^2})^2 (\frac{h_p^2}{D(h_p + \frac{\Delta w}{c^2})})^{m/2+1} =$$

$$= \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 (\frac{h_p c^2 + \Delta w^2}{h_p c^2})^2 (\frac{c^2 h_p h_p}{D(c^2 h_p + \Delta w)})^{m/2+1} =$$

$$= \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 (\frac{h_p}{D})^{m/2+1} (\frac{c^2 h_p}{(c^2 h_p + \Delta w)})^{m/2-1},$$

a następnie



$$P = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 \left(\frac{h_p}{D}\right)^{m/2+1} \left(\frac{h_p}{h_b}\right)^{m/2-1}. \quad (2.18)$$

Równanie (2.18) możemy również zapisać w postaci

$$P = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 \left(\frac{h_b}{D}\right)^{m/2+1} \left(\frac{h_p}{h_b}\right)^m. \quad (2.19)$$

We wzorze (2.18) znamy  $h_p$  z bezpośredniego pomiaru, natomiast  $h_b$  obliczamy z (2.16). Nieznaną różnicę  $\Delta w$  możemy w przybliżeniu oszacować z rozwiązania Hertza dla kuli wciskanej w sprężystą półprzestrzeń, gdyż znamy zależność przemieszczenia brzegu odcisku  $w_o$  (dla  $r=a$ ) od przemieszczenia dna odcisku  $h_e$  (dla  $r=0$ )

$$w_o = \frac{h_e}{2}. \quad (2.20)$$

Jednak nieka pozostająca w materiale jako trwałe odcisk tylko w przybliżeniu spełnia założenie rozwiązania Hertza. Stąd proces odciążenia jest ograniczony z jednej strony rozwiązaniem dla kontaktu kuli ze sztywną płaszczyzną, a z drugiej strony rozwiązaniem dla kontaktu kuli z wyłobioną nieką kulistą o promieniu większym niż kula (patrz Załącznik). Zatem zamiast (2.20) można napisać wyrażenie bardziej ogólne

$$w_o = \lambda \left(\frac{h}{D}\right) h_e. \quad (2.21)$$

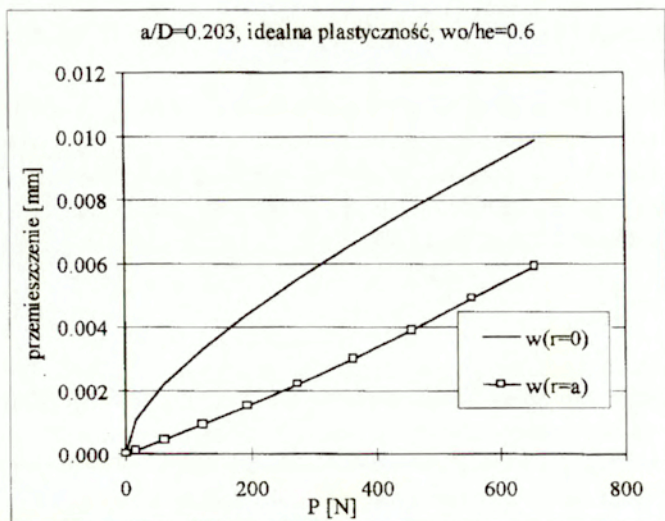
gdzie  $\lambda$  jest funkcją zagłębienia względnego  $h/D$  lub  $a/D$ . Na podstawie licznych symulacji wykonanych przy pomocy MES można stwierdzić, że dla zagłębień spełniających warunek  $0.05 \leq a/D \leq 0.23$  i dla materiałów ze wzmocnieniem wartość  $\lambda$  jest zawarta w granicach  $0.6 \leq \lambda \leq 0.67$  gdzie większa wartość  $a/D$  odpowiada większej wartości  $\lambda$ , rys.2.3, 2.10a,b. Efekt ten można też stwierdzić jakościowo na podstawie rozwiązań Hertza podanych w Załączniku. Dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego i dla  $0.06 \leq a/D \leq 0.2$  obliczono, że  $0.6 \leq \lambda \leq 0.63$  przy czym  $\lambda=0.63$  odpowiada mniejszej wartości  $a/D$  to jest  $a/D=0.06$ . Dla dokładnego wyznaczenia funkcji  $\lambda(a/D)$  należałoby zrobić więcej badań symulacyjnych. W proponowanej metodzie przyjęto stałe  $\lambda=0.62$  dla wszystkich rozpatrywanych wartości zagłębienia względnego  $a/D$  (lub  $h/D$ ) i wzmocnienia.

Biorąc pod uwagę (2.21), mamy

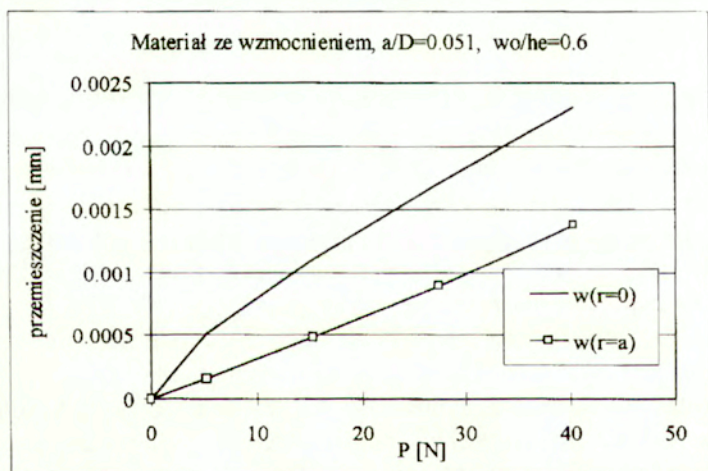
$$\Delta w = h_e - w_o = h_e (1 - \lambda). \quad (2.22)$$

Wartość  $h_b$  obliczamy teraz z wzoru

$$h_b = h_p + \frac{h_e(1-\lambda)}{c^2} \quad (2.23)$$



a)



b)

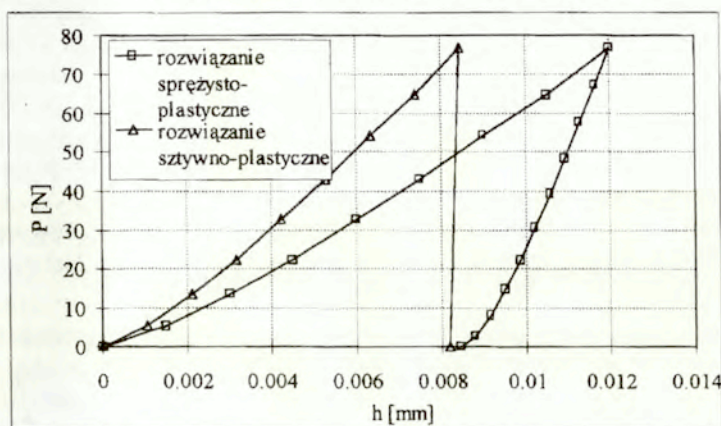
Rys. 2.10 Przemieszczenie na osi symetrii  $w(r=0)$  i na brzegu kontaktu  $w(r=a)$  podczas obciążenia-odciążenia niecki kulistej dla różnych wartości  $a/D$

Zakładając  $\lambda=0.62$  mamy

$$h_b = h_p + 0.62 \frac{h_e}{c^2}, \quad (2.24)$$

gdzie:  $h_e = h_r - h_p$  jest różnicą między maksymalnym i reszkowym zagłębieniem.

Dla celów identyfikacji należy jeszcze odpowiedzieć na pytanie, czy dla danego trwałego (residualnego) odcisku wykonanego siłą  $P$  w materiale sprężysto-plastycznym, identyczny odcisk w materiale sztywno-plastycznym wymaga przyłożenia tej samej siły  $P$ . Aby odpowiedzieć na to pytanie porównajmy procesy wciskania kuli w obydwa materiały. Porównanie krzywych obciążenie-odciążenie dla materiału sztywno-plastycznego i sprężysto-plastycznego przedstawiono schematycznie na rys. 2.11.



Rys.2.11 Krzywe siła-zagłębienie dla procesu obciążenia-odciążenia materiałów sztywno-plastycznego i sprężysto-plastycznego

W materiale sztywno-plastycznym geometria odcisku jest taka sama w stanie odciążonym jak w stanie obciążonym tzn. konfiguracja obciążona jest taka sama jak konfiguracja odciążona. W materiale takim nie powstają naprężenia reszkowe. Cała energia włożona przez siłę zewnętrzną jest dyssypowana w trakcie odkształcenia plastycznego. Kształt odcisku jest konsekwencją odkształceń plastycznych, średnica powstałej czaszy kulistej jest równa dokładnie średnicy wciskanej kuli  $D$ . Krzywa odciążenia jest zdegenerowana do pionowej prostej.

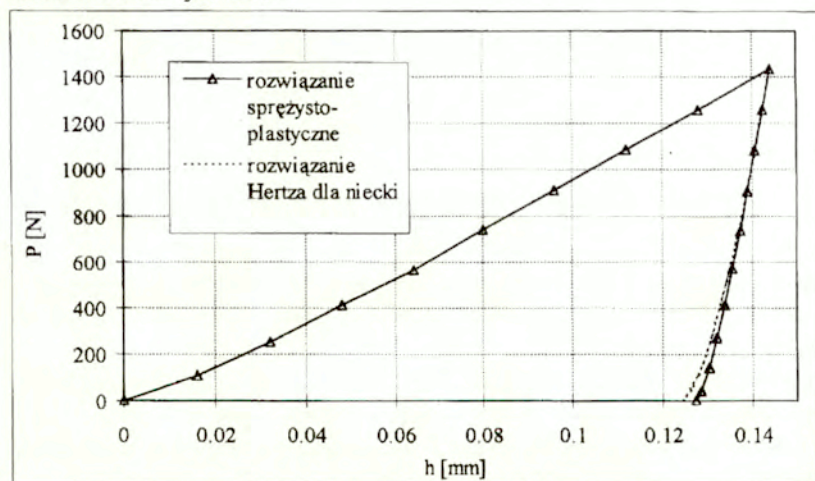
W materiale sprężysto-plastycznym w trakcie obciążenia część energii jest dyssypowana, a część magazynowana w postaci odkształceń sprężystych.

Przyjmujemy, że dla większości materiałów w procesie odciążenia nie występuje powtórne uplastycznienie. Zatem dysypacja również nie występuje, natomiast generowane są naprężenia resztkowe oraz zmienia się kształt odcisku. Trwały odcisk kuli jest więc wypadkową odkształceń plastycznych i pewnych odkształceń sprężystych wynikających z działania naprężeń resztkowych. Trwały odcisk ma kształt kuli o średnicy  $D_p$  większej niż średnica  $D$  kulki wciskanej. Uzyskanie odpowiedzi na postawione wyżej pytanie wymaga dokładnego prześledzenia krzywej siła-zagłębienie w procesie obciążenie-odciążenie kulki (rys. 2.11). Szczególnie interesująca jest krzywa odciążenia. Krzywa odciążenia może być porównywana z krzywą zagłębienia kulki o średnicy  $D$  w nieckę o średnicy  $D_p$  wyźłobioną w materiale sprężystym bez generowania naprężeń własnych. Krzywą taką możemy przedstawić wzorem Hertza:

$$h_H = \sqrt[3]{\frac{9 P^2 (1 - \nu^2)^2}{8 E^2} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D_p} \right)} \quad (2.25)$$

Krzywa ta opisuje proces wyłącznie sprężysty, któremu nie towarzyszy ani powstawanie naprężeń własnych, ani odkształceń plastycznych.

Porównanie krzywych odciążenia rzeczywistej, to jest otrzymanej z symulacji wciskania przy pomocy MES i otrzymanej w/g Hertza (2.25) przedstawiono na rys. 2.12.



Rys.2.12. Krzywe siła-zagłębienie kulki w materiale sprężysto-plastycznym obliczone przy pomocy MES i z wzorów Hertza.

Możemy zaobserwować, że dla dużych sił wciskających, odciążenie liczone od momentu maksymalnego zagłębienia według wzorów Hertza, a więc z pominięciem naprężeń resztkowych daje mniejsze zagłębienie trwałe, a krzywa odciążenia ma mniejszy kąt nachylenia niż krzywa rzeczywista. Energia odciążenia liczona jako pole pod tą krzywą jest większa niż energia wynikająca z krzywej rzeczywistej. Jest to zrozumiałe, gdyż w procesie rzeczywistym część energii w trakcie odciążania jest magazynowana w postaci naprężeń resztkowych. Stąd, aby porównywać odciski wykonane tą samą siłą w materiale sztywno-plastycznym i sprężysto-plastycznym, jako zagłębienie resztkowe należy przyjąć zamiast zmierzonego  $h_p$  pewną wartość  $h_{pt}$  obliczoną z wykorzystaniem wzorów Hertza (2.25) jako różnicę  $h_r - h_H$ . W ten sposób pomijamy wpływ naprężeń residualnych.

Warto pamiętać, że średnica  $D_p$  zależy od  $h_b$ , które z kolei zależy od  $h_e$ , równania (2.15), (2.17), (2.24) mierzonego w eksperymencie. Wartość  $D_p$  jest wykorzystana do obliczenia prawidłowego  $h_e$  z wzoru Hertza (2.25). Wielkości  $h_e$ ,  $h_b$ ,  $D_p$  są więc od siebie uzależnione i muszą być wyznaczone drogą kolejnych iteracji, jeśli chcemy dokładnie porównywać konfigurację odciążoną w materiale sprężysto-plastycznym z konfiguracją odciążoną w materiale sztywno-plastycznym.

Należy też zwrócić uwagę, że wzór (2.25) odnosi się do kontaktu dwóch kul, z których jedna ma ujemny promień i w naszym zadaniu jest wzorem przybliżonym. Wynika to z faktu, że płytki odcisk kuli ( $a/D < 0.2$ ) stanowi jedynie fragment kulistego wyłobienia (kulistej pustki), dla którego wzór Hertza obowiązuje w sposób ścisły. W przypadku odciążenia płytkiej niecki w kształcie odcisku kuli (bez naprężeń własnych) rzeczywiste przemieszczenie  $h_{un}$  będzie miało wartość zawartą między następującymi granicami

$$h^l < h < h^u, \quad (2.26)$$

gdzie:

$$h^u = \sqrt[3]{\frac{9 P^2 (1-\nu)^2}{8 E^2} \frac{I}{D}}, \quad h^l = \sqrt[3]{\frac{9 P^2 (1-\nu^2)^2}{8 E^2} \left(\frac{I}{D} - \frac{I}{D_p}\right)} = h^u \sqrt[3]{1 - \frac{D}{D_p}} \quad (2.27)$$

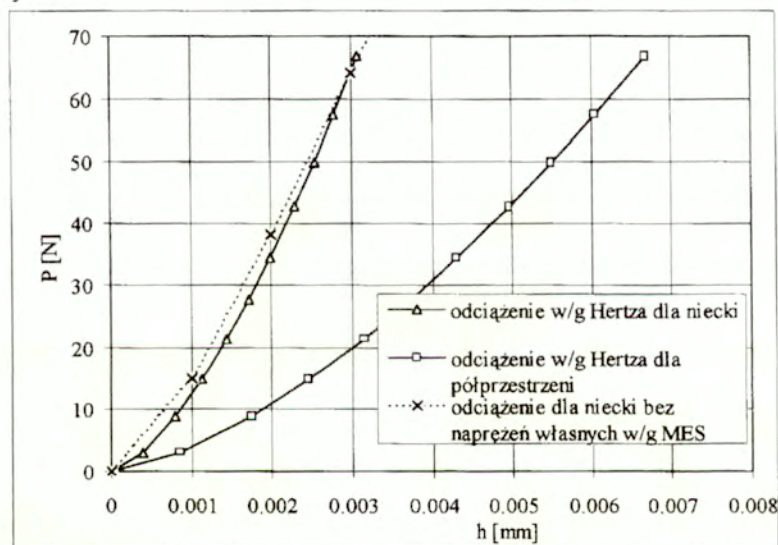
Wartość dolnej granicy wynika z rozwiązania problemu kontaktu kuli z brzegiem pustki kulistej wydrążonej w materiale (ujemna średnica  $D_p$ ). Wartość górnej granicy odpowiada rozwiązaniu problemu zagłębienia kuli w półprzestrzeń,  $D_p \rightarrow \infty$ .

W przypadku płytkich zagłębień (małe  $a/D$ ) wartość  $h_{un}$  będzie bliższa górnej granicy  $h^u$ , odpowiadającej odciążeniu płaskiej powierzchni, natomiast w przypadku dużych zagłębień względnych (duże  $a/D$ ) wartość  $h_{un}$  będzie bliska dolnej granicy  $h^l$ . Zatem dla właściwego obliczenia rzeczywistej wartości  $h_{un}$  przy odciążeniu należy przyjąć sumę:

$$h_{un} = \gamma\left(\frac{h}{D}\right)h^l + [1 - \gamma\left(\frac{h}{D}\right)]h^u, \quad (2.28)$$

gdzie:  $0 \leq \gamma\left(\frac{h}{D}\right) \leq 1$ .

Na podstawie wielu symulacji numerycznych stwierdzono, że nawet w przypadku małych zagłębień kuli ( $a/D < 0.05$ ) otrzymuje się  $\gamma\left(\frac{h}{D}\right) \approx 1$ . W symulacjach tych badano zagłębienie kuli w niekę wyciętą w materiale sprężystym bez generacji naprężeń własnych, identyczną co do kształtu jak ta, która powstaje po wciśnięciu kuli w materiał sprężysto-plastyczny. W analizowanym materiale nie było odkształceń plastycznych ani naprężeń własnych.



Rys. 2.13 Obciążenie w funkcji przemieszczenia dla kuli wciskanej w niekę wyżłobioną w materiale sprężystym obliczone przy pomocy formuł Hertza i MES. Dla porównania krzywa obciążenia w funkcji przemieszczenia dla sprężystej półprzestrzeni.

Otrzymany wynik (dla  $\gamma=1$ ) oznacza, że krzywa odciążenia wyznaczona z wzoru Hertza, (2.25), jest niemal identyczna jak krzywa obliczona przy pomocy MES dla odciążenia wyłobionej w materiale niecki kulistej (rys. 2.13). Ponieważ w tych testach rozważono przypadki, dla których  $a/D > 0.05$ , w proponowanych procedurach identyfikacyjnych przyjęto  $\gamma(h/D)=1$  dla wszystkich rozpatrywanych wartości  $a/D$  (lub  $h/D$ ).

Proponuje się następujący algorytm wyznaczania stałych  $m$  i  $k$  opisujących krzywą rozciążania:

1. Pomiar maksymalnej siły zagłębiającej  $P_m$ , maksymalnego zagłębienia  $h_t$  i zagłębienia trwałego  $h_p$

2. Obliczenie następujących wartości

i) różnicy zagłębienia maksymalnego i reszkowego równej rzeczywiście

przemieszczeniu dna odcisku w trakcie odciążenia

$$h_e = h_t - h_p$$

ii) średnicy trwałego odcisku po odciążeniu

$$D_p = D \left[ 1 + \frac{h_e(1-\lambda)}{h_p c^2} \right]$$

gdzie przyjmujemy  $\lambda=0.62$  niezależnie od wielkości zagłębienia

iii) wartości przemieszczenia kulki (równego przemieszczeniu dna odcisku) przy wyłącznie sprężystym odciążeniu podczas kontaktu z niecką o promieniu  $D_p$

$$h_H = \sqrt[3]{\frac{9 P_m^2 (1-\nu^2)^2}{8 E^2} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D_p} \right)}$$

3. Dla dalszych obliczeń wprowadzamy zastępczą wartość zagłębienia reszkowego  $h_{pt}$  jako

$$h_{pt} = h_t - h_H$$

Zagłębienie reszkowe  $h_{pt}$  powstałoby w materiale sprężysto-plastycznym, gdyby w trakcie odciążenia nie powstawały naprężenia residualne. Przyjmujemy, że jest ono równe zagłębieniu w fikcyjnym materiale sztywno-plastycznym pod działaniem siły  $P_m$ . Zatem  $h_{pt}$  powinno być wprowadzone do równań identyfikacyjnych.

4. Korzystając z obliczonych już wielkości wyznaczamy  $h_b$  korzystając z (2.24), przy czym możemy stosować różne warianty:

*Wariant 1*

$$h_b = h_p + \frac{h_e(1-\lambda)}{c^2},$$

*Wariant 2*

$$h_b = h_{pt} + \frac{h_H(1-\lambda)}{c^2}, \quad (2.29)$$

*Wariant 3*

$$h_b = h_{pt} + \frac{h_e(1-\lambda)}{c^2},$$

gdzie:  $\lambda=0.62$ .

Te wielkości są następnie używane we wzorach przedstawiających zależność obciążenia i zagłębienia kuli, (2.18).

5. Następnie obliczone wartości podstawiamy do równania identyfikacyjnego (2.18), które dla wygody rozwiązania zapisujemy w trzech wariantach odpowiednio do równań (2.29)

*Wariant 1*

$$P \left( \frac{h_p}{h_p + \frac{h_e(1-\lambda)}{c^2}} \right)^{\frac{2-m}{2}} = \pi \alpha K \beta^m c^{2+m} D^2 \left( \frac{h_{pt}}{D} \right)^{\frac{m+2}{2}} \quad (2.30)$$

*Wariant 2*

$$P \left( \frac{h_{pt}}{h_{pt} + \frac{h_H(1-\lambda)}{c^2}} \right)^{\frac{2-m}{2}} = \pi \alpha K \beta^m c^{2+m} D^2 \left( \frac{h_{pt}}{D} \right)^{\frac{m+2}{2}}$$

*Wariant (3):*

$$P \left( \frac{h_{pt}}{h_{pt} + \frac{h_e(1-\lambda)}{c^2}} \right)^{\frac{2-m}{2}} = \pi \alpha K \beta^m c^{2+m} D^2 \left( \frac{h_{pt}}{D} \right)^{\frac{m+2}{2}} \quad (2.31)$$



Sens fizyczny poszczególnych wariantów równań można łatwo zinterpretować, jeśli przyjrzymy się bliżej równaniu identyfikacyjnemu (2.18). Wartości  $h_b$  i  $h_p$ , które są pośrednio lub bezpośrednio uaktualniane przy pomocy wzoru (2.25) pojawiają się po obydwu stronach równań identyfikacyjnych (2.18, 2.30, 2.31). W tym równaniu iloraz  $h_p/h_b$  jest odpowiedzialny za zamianę średnicy  $D$  na średnicę  $D_p$  (2.18), natomiast iloraz  $h_p/D$  odpowiada za nachylenie linii przedstawiającej równanie (2.18) w skali logarytmicznej, które wyznacza wartość wykładnika  $m$ .

W pierwszym wariantie poprawiona wartość  $h_p$  to jest  $h_{pt}$  jest zastosowana tylko do wyznaczenia ilorazu  $h_p/D$  po prawej stronie. Zarówno  $h_p$  jak i  $h_b$  pozostają niezmienione w ilorazie po lewej stronie i wpływ naprężeń własnych na  $D_p$  jest pominięty.

W drugim wariantie wartości  $h_{pt}$   $h_H$  są wstawione odpowiednio zamiast  $h_p$  i  $h_e$  zarówno w ilorazie  $h_p/D$  jak i w  $h_p/h_b$ . Zatem uwzględniony jest wpływ naprężeń residualnych zarówno na  $D_p$  jak i na tg kąta nachylenia  $m$ .

Trzeci wariant jest podobny do drugiego z tą różnicą, że inny wzór jest wykorzystany do obliczenia  $h_b$ . Ponieważ w tym wzorze  $h_e$  zmierzone w eksperymencie pozostaje niezmienione, zatem wpływ generowanych naprężeń własnych na  $D_p$  jest uwzględniony tylko częściowo, poprzez zmianę  $h_p$ , (2.29)<sub>3</sub>, (2.31)<sub>2</sub>.

Zatem różnica między wariantami wynika ze sposobu uwzględnienia relacji (2.25) w uściśleniu równania (2.18). Różnice wynikające z zastosowania tych trzech wariantów zostały uwzględnione przy weryfikacji metody. Stwierdzono, że najprostszy wariant 1 daje wystarczająco dokładne rezultaty. Ten wariant został przyjęty do proponowanej procedury identyfikacyjnej.

Wprowadzając oznaczenie

$$P' = P \left( \frac{h_p}{h_b} \right)^{1-m/2}, \quad (2.32)$$

równanie (2.31) wariant 1 możemy zapisać jako

$$P' = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 \left( \frac{h_{pt}}{D} \right)^{m/2+1}, \quad (2.33)$$

gdzie wielkość  $P'$  jest tu nową zastępczą siłą obciążającą. Równanie (2.33) rozwiązujemy metodą regresji liniowej podobnie jak równania identyfikacyjne Meyera. Ze względu na to, że niewiadoma  $m$  występuje również po lewej stronie równania w wykładniku potęgi, równanie (2.33) rozwiązujemy w sposób iteracyjny. W pierwszej iteracji przyjmujemy, że

$$P' = P \left( \frac{h_p}{h_b} \right)^l,$$

a w następnych iteracjach korzystamy z wzoru podstawiając wartość  $m$  obliczoną w poprzedniej iteracji. W kolejnych iteracjach jest również poprawiana wartość  $c^2$  potrzebna do obliczenia  $D_p$  (2.24).

### 2.2.2. Weryfikacja metody

Dla sprawdzenia przydatności powyższych równań dokonano identyfikacji krzywej rozciągania materiału sprężysto-plastycznego, krzywą rozciągania tego materiału przedstawiono na rys. 2.14. Moduł Younga przyjęto  $E=74500 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.3$ , a równanie tej krzywej w układzie  $\sigma-\varepsilon_p$  zapisuje się w postaci

$$\sigma = 800(\varepsilon_p + \varepsilon_{p0})^{0.24} \quad (2.34)$$

W symulacji MES przyjęto, że materiał ma wyraźną granicę plastyczności tzn. krzywą (2.34) podano w postaci łamanej przechodzącej w układzie  $\sigma-\varepsilon_p$  przez punkty podane w tabeli 1. Pierwszy z tych punktów odpowiada granicy plastyczności. Taka krzywa rozciągania odpowiada założeniu, że odkształcenie plastyczne  $\varepsilon_p$  startuje dla  $\sigma > \sigma_y = 150 \text{ MPa}$  (naprężeniu  $\sigma_0$  odpowiada pewne niewielkie odkształcenie  $\varepsilon_{p0}$ , które jest offsetem). Dla takiego materiału wyznaczono parametry pięciu odcisków kuli o średnicy  $D=2.5 \text{ mm}$  drogą symulacji numerycznej MES.

Tab. 1

$\varepsilon_p$ (plastic strain)	$\sigma$ (true stress) [MPa]
0.000	150
0.002864	210
0.009891	270
0.027354	340
0.067298	420
0.193496	540
0.344811	620
0.572345	700

Wyznaczone parametry odcisków przedstawiono w tabeli 2. Stanowią one podstawę do dalszych obliczeń.

Tab.2

Number of indentation	a [mm]	P [N]	a/D	$h_p$ [mm]	$h_t$ [mm]
1	0.129496	40.2	0.051798	0.00569	0.008
2	0.15716	66.5	0.062864	0.00895	0.012
3	0.22857	153	0.091428	0.01904	0.024
4	0.45481	741	0.181924	0.07857	0.09
5	0.49817	915	0.199268	0.09525	0.108

W pierwszej kolejności wykonano obliczenia, które umożliwiły porównanie wymienionych wyżej wariantów wzorów. Wartości  $m$  i  $k$  otrzymane przy wykorzystaniu wymienionych wcześniej wariantów wyprowadzonych wzorów przedstawiono w tabeli 3. W tabeli zamieszczono również stałe  $m$  i  $k$  otrzymane na podstawie wzorów Tabora (1.29).

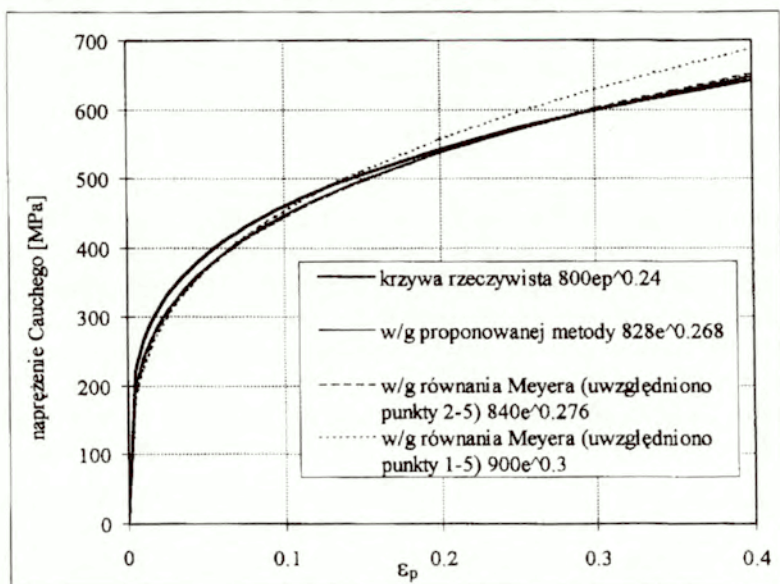
Na podstawie przedstawionych wyników możemy stwierdzić niewielkie różnice między wartościami  $m$  i  $k$  uzyskanymi przy pomocy różnych wariantów, krzywe potęgowe odpowiadające każdej parze parametrów  $m, k$  wyznaczonych przy pomocy kolejnych wariantów niemal się pokrywają.

Tab. 3

Rzeczy-wista, (dana)	Otrzymane z identyfikacji							
	Według wzoru Tabora (1.29)			Według proponowanych wzorów (2.33)				
	$\alpha=3.07, \beta=0.32, c^2$ według (1.69). (mat. sztywno-plastyczny)	$\alpha=2.8, \beta=0.4, c^2$ według (1.58) (mat. nieliniowo-sprężysty)		$\alpha=3.07, \beta=0.32, c^2$ według (1.69) (mat. sztywno-plastyczny)		$\alpha=2.8, \beta=0.4, c^2$ według (1.58) (mat. nieliniowo-sprężysty)		
		Dla punktów 2-5 z Tab.2	Dla punktów 1-5 z Tab. 2	var. 1	var 1	var. 2	var. 3	
m	0.24	0.276	0.276	0.3	0.268	0.268	0.287	0.289
k	800	815	840	900	730	828	890	910

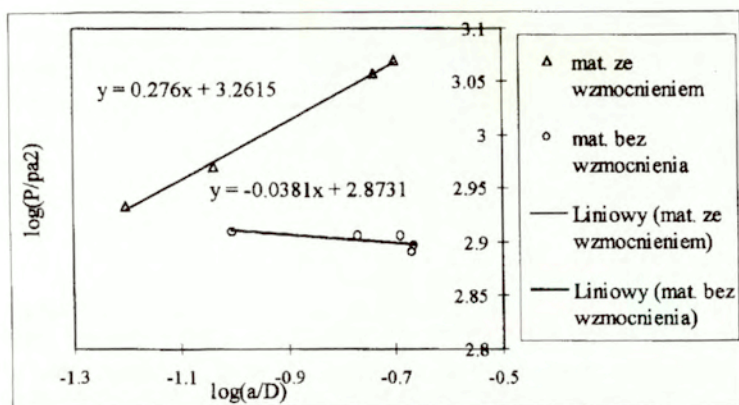
Zatem modyfikacje związane ze stosowaniem różnych wariantów dotyczą wielkości małych wyższego rzędu, stąd przyjęto wariant 1. Przyjęto również, jako korzystniejsze wartości  $\alpha=2.8, \beta=0.4$  uzyskane z rozwiązania nieliniowo-sprężystego. Porównania stałych  $m$  i  $k$  uzyskanych przy pomocy wzorów Tabora (1.29) i proponowanych wzorów (2.33) możemy dokonać na

wykresach odpowiadających im krzywych przedstawionych na rys.2.14. Warto zwrócić uwagę, że wynik uzyskany metodą Tabora jest wrażliwy na to, czy uwzględnimy odcisk kuli wykonany najmniejszą siłą.

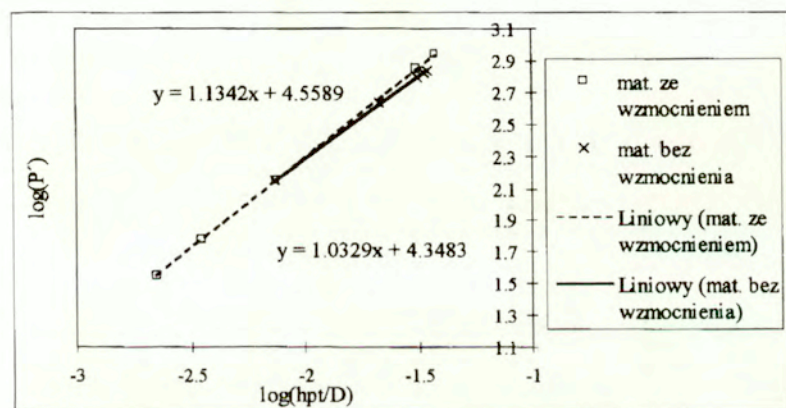


Rys. 2.14 Porównanie krzywych rozciągania zidentyfikowanych różnymi metodami.

Dla analizy uzyskanych wyników istotne może być porównanie prostej Meyera, z równania (1.29) i odpowiadającej jej prostej uzyskanej na podstawie równania (2.33). Proste te przedstawiono odpowiednio na rys. 2.15, 2.16 wraz z opisującymi je równaniami. Tangensy kąta nachylenia tych prostych to odpowiednio wartości wykładników ( $m$ ) i  $(1+m/2)$ . Punkty, z których wyznaczono prostą Meyera, rys.2.15, odpowiadają potęgowej krzywej rozciągania, zatem powinny być współliniowe. W rzeczywistości jednak warunek ten nie jest spełniony. Wynika to z niedokładności wzoru i powoduje, że położenie uśrednionej prostej Meyera bardzo zależy od liczby wziętych pod uwagę punktów. Teoretycznie powinny wystarczyć dowolne dwa punkty do jednoznacznego określenia tej prostej. Warunek współliniowości odnosi się także do punktów wyznaczonych na podstawie równania (2.33). W tym przypadku warunek ten jest lepiej spełniony, rys 2.16.



Rys.2.15 Proste Meyera dla identyfikowanych krzywych (materiał ze wzmocnieniem i bez wzmocnienia)



Rys. 2.16 Odpowiedniki prostych Meyera dla równania (2.33) (materiał ze wzmocnieniem i bez wzmocnienia)

Przydatność wyprowadzonych równań sprawdzono również dokonując identyfikacji krzywej rozciągania materiału bez wzmocnienia (sprężysto-idealnie plastycznego). Dla wyznaczenia numerycznych parametrów odcisków kuli podanych w tabeli 4, przyjęto  $k = \sigma_e = 295 \text{ MPa}$ ,  $m = 0$ ,  $E = 74500 \text{ MPa}$ ,

$$\sigma = 295 \varepsilon_p^0 \quad (2.35).$$

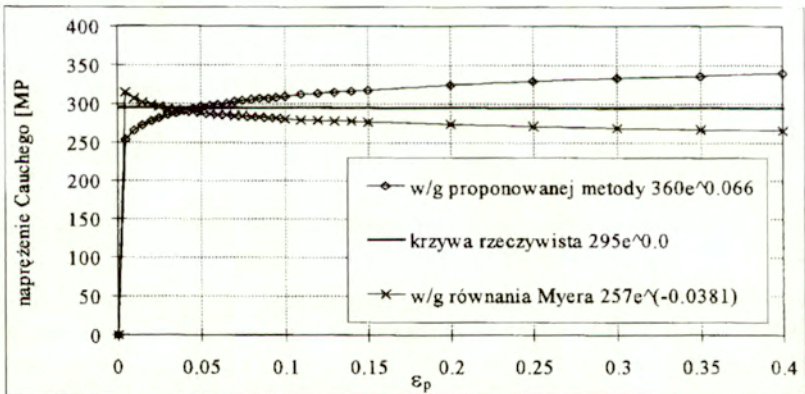
Tab.4

Numer odcisku	a [mm]	P [N]	a/D	$h_p$ [mm]	$h_t$ [mm]
1	0.54	723	0.216	0.0889	0.0989
2	0.5364	702	0.21456	0.086	0.096
3	0.50956	657	0.203824	0.08022	0.09
4	0.4254	458	0.17016	0.0548	0.063
5	0.2465	155	0.0986	0.01916	0.024

Obliczenia parametrów  $m$  i  $k$  wykonano w/g wariantu pierwszego proponowanych wzorów, to jest (2.30) oraz w/g wzoru (1.29). Przyjęto stałe  $\alpha, \beta, c^2$ , w/g rozwiązania nieliniowo sprężystego. Wyniki zamieszczono w tabeli (5).

Tab. 5

	Rzeczywista (dana)	Otrzymane z identyfikacji	
		Według wzoru Tabora (1.29)	Według proponowanych wzorów (2.33)
		$\alpha=2.8, \beta=0.4, c^2$ według (1.58) (mat. nieliniowo-sprężysty)	$\alpha=2.8, \beta=0.4, c^2$ według (1.58) (mat. nieliniowo-sprężysty)
		<i>War. 1</i>	
m	0	-0.0381	0.066
k	295	257	360



Rys. 2.17 Porównanie zidentyfikowanych krzywych rozciągania materiału bez wzmocnienia.

Na rys 2.15 i 2.16 przedstawiono prostą Meyera i prostą wyznaczoną z równania (2.33). Tu również wyraźnie widać brak współliniowości punktów wyznaczonych w/g równania Tabora (Meyera). Krzywe rozciągania wyznaczone na podstawie stałych  $m$  i  $k$  podanych w tabeli 5 przedstawiono na rys.2.17.

### 2.2.3. Wrażliwość metody na błędy pomiarowe.

Interesujące jest porównanie wrażliwości wzorów identyfikacyjnych na błędy pomiarowe. W metodzie Meyera (Tabora), gdzie korzysta się z pomiaru  $a$  i  $p_{av}$ , które są skorelowane przez równanie (1.29) wykładnik  $m$  jest wyznaczany z następującego równania

$$m = \frac{\log(p_{av}) - K}{\log\left(\frac{a}{D}\right)}, \quad (2.36)$$

gdzie  $K = \log(\alpha\beta^m k)$

jest znane z wykresu  $p_{av}(a/D)$  w skali logarytmicznej.

Korzystając z równania (2.36) otrzymamy następujące wyrażenie na wariację wykładnika  $m$  w funkcji wariacji promienia kontaktu  $a$

$$\delta m = \frac{\delta(\log(p_{av})) \log\left(\frac{a}{D}\right) - [\log(p_{av}) - K] \delta \log\left(\frac{a}{D}\right)}{[\log\left(\frac{a}{D}\right)]^2}. \quad (2.37)$$

Zakładając, że  $\delta P = 0$  wariacja  $p_{av}$  dana jest wzorem mamy

$$\delta p_{av} = \delta\left(\frac{P}{\pi a^2}\right) = -\frac{2P}{\pi a^2} \frac{\delta a}{a} = -2 p_{av} \frac{\delta a}{a}, \quad (2.38)$$

oraz

$$\delta m = -\frac{(2+m) \delta a}{\log\left(\frac{a}{D}\right) a}. \quad (2.39)$$

Podobnie, zgodnie z proponowaną metodą, w której stosujemy równanie (2.11), wykładnik  $m$  jest obliczany z wzoru

$$\frac{m}{2} + 1 = \frac{\log(P) - L}{\log\left(\frac{h_p}{D}\right)}, \quad (2.40)$$

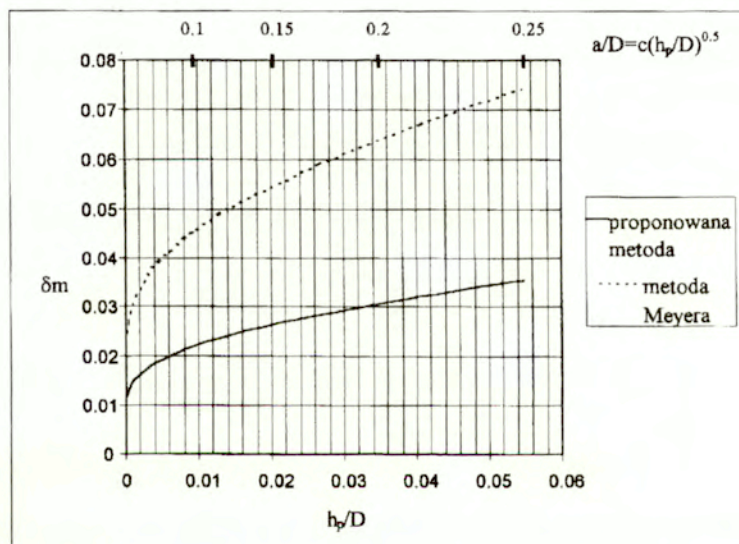
gdzie  $L = \log(\pi\alpha\beta^m c^{2+m} D^2)$  (2.41)

jest wyznaczane z wykresu  $P(h_p/D)$  w skali logarytmicznej.

Zakładając, że  $\delta P=0$  to znaczy nie popełniamy błędu w pomiarze siły  $P$ , otrzymuje się następujące wyrażenia na wariację  $m$  w zależności od wariacji  $h_p$

$$\delta m = - \frac{(m+2)}{\log\left(\frac{h_p}{D}\right)} \frac{\delta h_p}{h_p} \quad (2.42)$$

Równania (2.42) i (2.39) umożliwiają porównanie wariacji wykładnika  $m$  jeśli  $a$  i  $h_p$  są mierzone z tym samym błędem względnym. Ponieważ  $h_p/D$  jest dużo mniejsze niż  $a/D$ , błąd przy wyznaczaniu wartości  $m$  proponowaną metodą jest mniejszy niż w przypadku metody Meyera. Wykres  $\delta m$  jako funkcji względnego zagłębienia  $h_p/D$  i względnego promienia kontaktu  $a/D$  dla  $\delta a/a = \delta h_p/h_p = 0.02$  (tzn. 2% błędu w pomiarze) i dla  $m=0.24$  został przedstawiony na rys. 2.18.



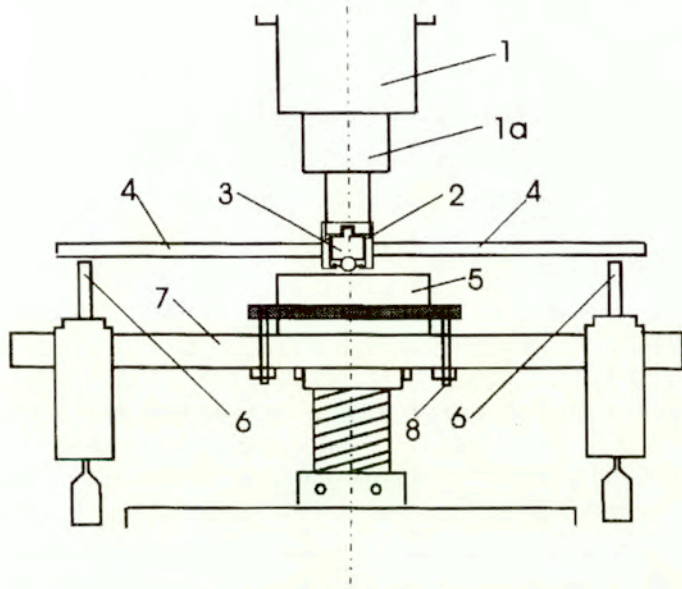
Rys. 2.18 Porównanie błędów w wyznaczeniu wykładnika  $m$  metodą proponowaną i metodą Meyera przy założeniu tego samego błędu względnego w pomiarze parametrów geometrycznych.



#### 2.2.4. Weryfikacja eksperymentalna.

Metoda została zweryfikowana również przy pomocy badań eksperymentalnych. W ramach tych badań dokonano identyfikacji krzywych rozciągania stopu PA6 i stali.

Wykorzystano przyrząd, który powstał według projektu autora na bazie standardowego twardeściomierza Brinella, rys. 2.19. Został wykonany w ramach kierowanego przez autora projektu badawczego KBN.



Rys. 2.19 Schemat stanowiska pomiarowego

Obciążenie zadawane jest przy pomocy prasy hydraulicznej (1), a siła mierzona jest przy pomocy czujnika siły, 1a. Wgłębnikiem jest kula stalowa o średnicy 2.5 mm. Jest ona dociskana przez śrubę (2), która dociska ją do głębokiej niecki kulistej ukształtowanej w uchwycie (3). Do uchwytu dołączone są wsporniki (4), które umożliwiają pomiar przemieszczenia przez trzy czujniki indukcyjne (6). Próbkę dociska się do stolika (7) przez śruby (8) aby zminimalizować jej osiadanie w trakcie eksperymentu.

W proponowanej metodzie zakłada się, że wgłębnik jest sztywny, zatem należy uwzględnić podatność systemu pomiarowego. Zakładamy, że podatność sprężysta systemu pomiarowego składa się z dwóch części: ugięcia kuli wynikającego z kontaktu z próbką i ugięcia kuli wynikającego z kontaktu

z uchwytem (3). Zakładamy, że ugięcia próbki w wyniku kontaktu z stolkiem mogą zostać pominięte. Ugięcie kulki wynikające z kontaktu z próbką może być w przybliżeniu obliczone jako

$$h_{ss} = h_{el}(P) - h_{rg}(P), \quad (2.43)$$

gdzie:

$h_{el}(P)$ ,  $h_{rg}(P)$  są funkcjami Hertza zastosowanymi odpowiednio do sprężystej i sztywnej kuli wciskanej w półprzestrzeń sprężystą z wyciętą niecką kulistą. Funkcje  $h_{el}(P)$  i  $h_{rg}(P)$  mogą być wyrażone jako

$$h_{el}(P) = \sqrt[3]{\frac{9}{8} [P(1-\nu^2) \left(\frac{1}{E_s} + \frac{1}{E_{sem}}\right)]^2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_p}\right)}, \quad (2.44)$$

$$h_{rg}(P) = \sqrt[3]{\frac{9}{8} [P(1-\nu^2) \frac{1}{E_{sem}}]^2 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_p}\right)}, \quad (2.45)$$

gdzie:  $D_p$  jest średnicą trwałego odcisku obliczoną z równania 2.24. Wyrażenie  $h_{el}(P)$  może być też wykorzystane do obliczenia ugięcia  $h_c(P)$ , które pojawia się w obszarze kontaktu kuli i uchwytu. W tym celu należy w (2.44) zamienić  $D_p$  na  $D_s$  gdzie:  $D_s$  oznacza średnicę niecki ukształtowanej w uchwycie. Porównując krzywą siła zagłębienie zmierzona doświadczalnie dla kulki wciskanej w płaską próbkę z hartowanej stali (sprężysty kontakt) z krzywą otrzymaną z wzoru Hertza możemy obliczyć rzeczywiste ugięcie na powierzchni kontaktu kulki i uchwytu,  $h_{sc}(P)$ . Znając funkcję  $h_{sc}(P)$  możemy z równania (2.44) obliczyć średnicę  $D_s$  niecki wydrążonej w uchwycie.

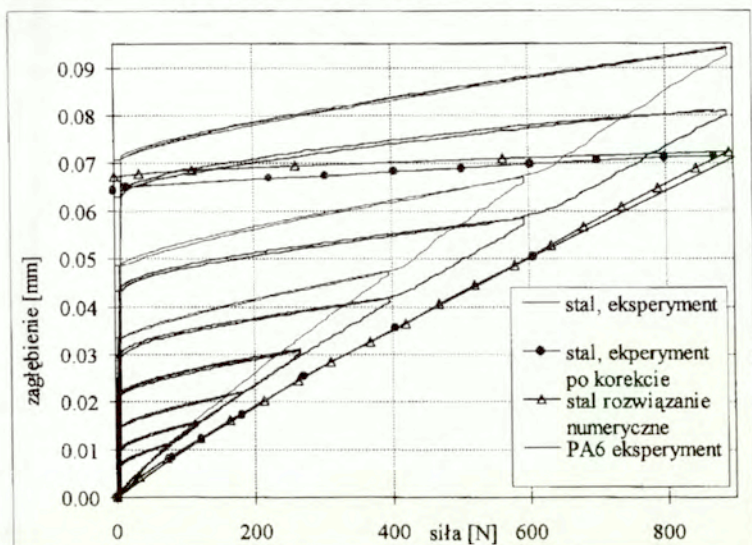
Krzywa siła-zagłębienie odpowiadająca sztywnej kuli może być otrzymana z krzywej zmierzonej doświadczalnie przez odjęcie funkcji korygującej  $h_{cor}(P)$

$$h_{cor} = h_{ss}(P) + h_{sc}(P) \quad (2.46)$$

Krzywa  $P-h$  zmierzona eksperymentalnie dla kilku wartości zwołów obciążenia, a następnie skorygowana przy pomocy (2.46) dla maksymalnej wartości  $P$  została przedstawiona na rys. 2.20.

Funkcja korygująca  $h_{cor}(P)$  dla stali została zweryfikowana przy pomocy obliczeń MES. Na rys. 2.20 możemy zauważyć, że krzywa siła-zagłębienie wyznaczona numerycznie dla stali 18G2A i sztywnej kuli pokrywa się z krzywą doświadczalną poprawioną o funkcję korygującą  $h_{cor}(P)$ . Z każdej krzywej obciążenie-odciążenie wzięto dwa punkty:  $(P, h_t)$  oraz

$(0, h_p)$  do procedury identyfikacyjnej. Dla każdego zwrotu obciążenia wartość  $h_p$  była obliczona z ekstrapolacji krzywej odciążenia dla dokładnego wyznaczenia punktu jej przecięcia z osią Y.



Rys. 2.20 Zmierzone i skorygowane krzywe siła-zagłębienie dla stali, oraz porównanie z krzywą teoretyczną (MES). Krzywa doświadczalna dla PA6.

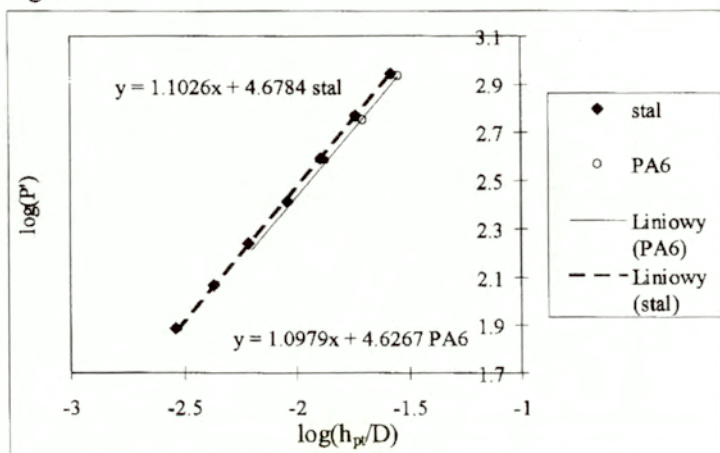
Otrzymane wartości  $P, h_p, h_t, h_{cor}$  zostały przedstawione w tabeli 5 i 6. Rys. 2.21 przedstawia graficzną ilustrację równania (2.33) w skali logarytmicznej dla wartości przedstawionych w tabeli 6. Korzystając z proponowanej metody identyfikacji otrzymuje się  $m=0.205$  i  $k=974 \text{ MPa}$ . Zidentyfikowana krzywa  $\sigma-\varepsilon_p$  i rzeczywista krzywa otrzymana z testu rozciągania zostały przedstawione na rys. 2.22. Możemy zaobserwować, że krzywa została zidentyfikowana z dobrą dokładnością. Różnice między krzywymi na rys. 2.22 wynikają z faktu, że rzeczywista krzywa nie spełnia dokładnie prawa potęgowego.

#### Identyfikacja parametrów stopu aluminium PA6.

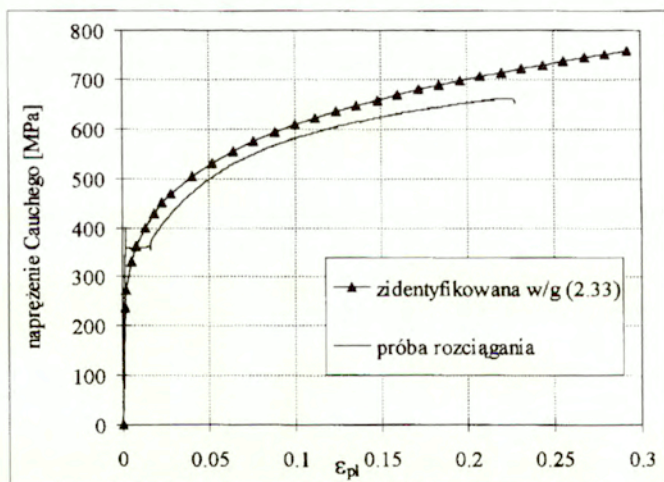
Metodę tę zastosowano również do identyfikacji stopu aluminium. Krzywa siła-zagłębienie została zmierzona przy trzech zwrotach obciążenia, rys. 2.20. Zmierzone parametry przedstawiono w tabeli 6, a ilustrację graficzną

równania (2.33) dla tych parametrów przedstawiono na rys. 2.21. Otrzymano  $m = 0.196$  i  $k = 851 \text{ MPa}$ .

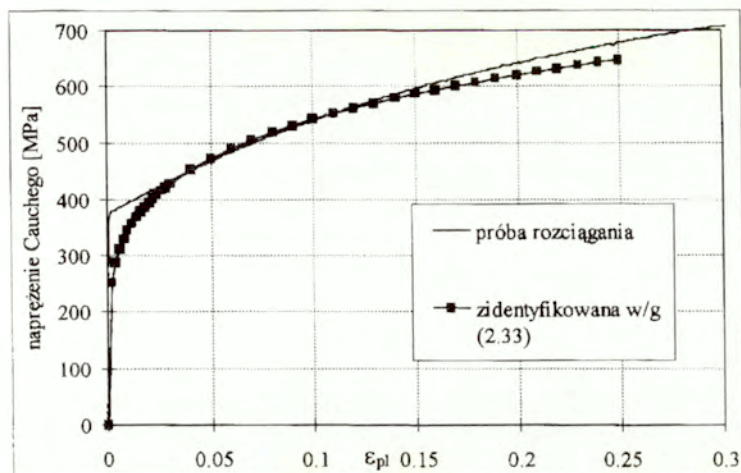
Krzywe rozciągania rzeczywista i zidentyfikowana przedstawiono na rys. 2.23. W przypadku PA6 również można zaobserwować różnicę między krzywymi wynikającymi z faktu, że rzeczywista krzywa nie spełnia prawa potęgowego.



Rys.2.21 Identyfikacja parametrów  $k$  i  $m$  dla stali i stopu PA6



Rys.2.22 Krzywe rozciągania rzeczywista i zidentyfikowana dla stali 18G2



Rys. 2.22 Krzywe rozciągania rzeczywista i zidentyfikowana dla stopu PA6

#### 2.2.4 Wnioski

Przedstawiona metoda identyfikacji własności materiałowych bazująca na równaniu (2.33) daje dość dobrą zgodność wyznaczanych krzywych rozciągania z krzywymi rzeczywistymi. Metoda została porównana z metodą Meyera na przykładzie identyfikacji dwóch krzywych rozciągania.

W przedstawionej metodzie konieczny jest pomiar trzech parametrów odcisku kuli: siły, zagłębienia maksymalnego  $h_t$  i zagłębienia resztkowego  $h_p$ . Wymaga więc ona specjalnego stanowiska pomiarowego. W metodzie opartej o równanie Meyera mierzymy tylko dwa parametry siłę  $P$  i średnicę brzegu odcisku  $a$ . Z przedstawionych przykładów możemy wyciągnąć wniosek, że obydwie metody są porównywalne jeśli idzie o dokładność uzyskanych wyników.

Obliczenia wykonane metodą Meyera dają pewne uśrednienie własności sprężystych i plastycznych, gdyż siła jest mierzona w stanie obciążonym, natomiast średnica brzegu odcisku w stanie odciążonym a ponadto jest ona dzielona przez średnicę niecki kulistej  $D$  w stanie obciążonym. Zatem w metodzie tej występują pewne niekonsekwencje. Zaletą metody jest możliwość pomiaru średnicy brzegu odcisku na standardowym twardościomierzu, a więc bez korzystania ze specjalnego oprzyrządowania. Jednakże w praktyce, w przypadku płtykich odcisków (małe  $a/D$ ) średnica

odcisku jest trudna do określenia gdyż brzeg odcisku nie jest wyraźny, zwłaszcza po odciażeniu. W przypadku omawianych tu eksperymentów numerycznych przyjęto, że średnica ta jest jednoznacznie określona przez położenie ostatniego węzła, licząc od środka odcisku będącego w kontakcie z kulką. Zatem korzystając z symulacji numerycznej mamy również pewne kłopoty z dokładnym określeniem średnicy  $a$ , gdyż zależy ona od zagęszczenia siatki podziału na elementy skończone w sąsiedztwie brzegu kontaktu. Położenie brzegu z kolei zależy od wartości siły. Efekt ten może być przyczyną braku współliniowości punktów naniesionych w skali logarytmicznej na rys. 2.15, zwłaszcza dla małych wartości  $a/D$ .

Zatem w praktyce korzystanie z parametru  $a/D$  powoduje konieczność spełnienia sprzecznych warunków. Z jednej strony odległość między skrajnymi punktami powinna być jak największa, z drugiej strony występują trudności z pomiarem małych  $a/D$ , a odciski nie mogą być zbyt duże, gdyż  $a/D$  jest ograniczone wartością 0.2. Ten ostatni warunek wynika z faktu, że dla  $a/D > 0.2$  założenie o małych odkształceniach, z którego korzystano w rozwiązaniu samopodobnym przestaje być spełnione z wystarczającą dokładnością.

Jeśli korzystamy z proponowanej tu metody, opartej na wzorze (2.33), to konieczny jest pomiar zagłębień  $h_p$ ,  $h_t$ . Mając odpowiednią aparaturę wielkości te można zmierzyć znacznie dokładniej niż  $a$ , gdyż są one jednoznacznie zdefiniowane, szczególnie w przypadku małych odcisków. W przypadku eksperymentu numerycznego również łatwiej jest obliczyć  $h_t$  i  $h_p$  niż  $a$ , gdyż są to wielkości mniej wrażliwe na zagęszczenie siatki podziału niż wartość  $a$ .

Dla wzoru (2.33) również obowiązuje ograniczenie zagłębień od góry odpowiadające  $a/D < 0.2$ . Z kolei dla bardzo płtych odcisków (małe  $a/D$ ) wykorzystywane wzory Hertza dotyczące odciażenia niecki kulistej przestają być wystarczająco dokładne. Stąd konieczna jest pewna korekta tych wzorów, zaproponowana w postaci wag, bazująca na wielu obliczeniach numerycznych. Precyzyjne określenie tych wag jest przedmiotem dalszych badań. Wydaje się, że metoda oparta na wzorze (2.33) jest mniej wrażliwa na rozrzuty dokładności pomiaru parametrów odcisku niż metoda, w której stosujemy wzór Tabora (1.29).

## Załącznik Z1

Dla kontaktu dwóch kul o promieniach  $R_1$  i  $R_2$  mamy następujące wzory na promień kontaktu  $a$  i zbliżenie  $h$  środków kul.

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi P(k_1 + k_2)}{4 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}} , \quad (\text{A1})$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} P^2 (k_1 + k_2)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} , \quad (\text{A2})$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1}{\pi E_1} , \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2}{\pi E_2} , \quad (\text{A3})$$

a  $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$  są stałymi materiałowymi.

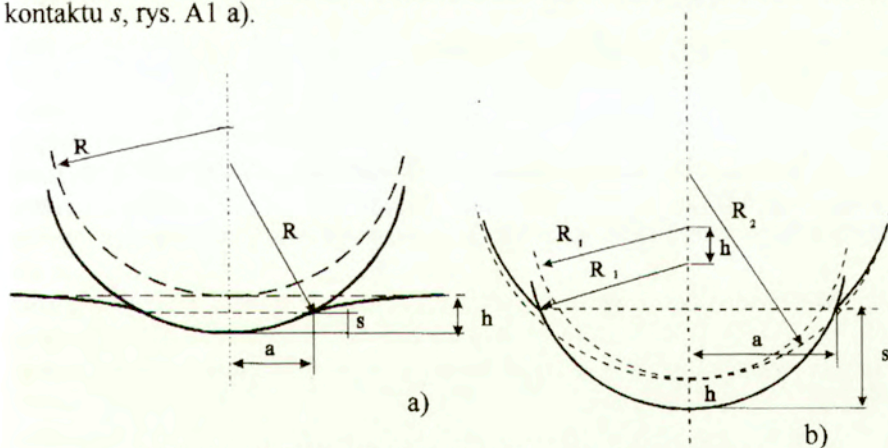
W przypadku kontaktu sztywnej kuli ze sprężystą półprzestrzenią mamy

$$a = \sqrt[3]{\frac{3PR(1-\nu^2)}{4E}} , \quad (\text{A4})$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{9P^2(1-\nu^2)^2}{16E^2R}} , \quad (\text{A5})$$

gdzie  $h$  jest zagłębieniem, a  $E, \nu$  stałymi materiałowymi.

Rozważmy zależność między zagłębieniem kuli  $h$  i zagłębieniem brzegu kontaktu  $s$ , rys. A1 a).



Rys. A1. Zagłębienie kuli a/ w sprężystą półprzestrzeń,  
b/ w sferyczną nieckę o promieniu  $R_2$

Wartości  $s$  i  $a$  są od siebie uzależnione

$$(R - s)^2 + a^2 = R^2 , \quad (\text{A6}) \quad \text{lub} \quad -2Rs + s^2 + a^2 = 0 . \quad (\text{A7})$$

Biorąc pod uwagę, że  $s \ll a$  otrzymujemy

$$a^2 = 2R s. \quad (\text{A8})$$

Z drugiej strony porównując (A4) i (A5) mamy

$$h = \frac{a^2}{R}. \quad (\text{A9})$$

Z ostatnich dwóch równań otrzymujemy

$$s = \frac{h}{2} \quad (\text{A10})$$

W przypadku kontaktu kuli o promieniu  $R_1$  ze sferyczną pustką o promieniu  $R_2$  (rys. A1b) możemy również napisać równanie A7. Jednak zamiast relacji (A9) otrzymujemy następujące równanie z (A1) i (A2)

$$h = a^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (\text{A11})$$

Eliminując  $a^2$  z (A11) przy wykorzystaniu (A8) otrzymujemy

$$h = 2R_1 s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2 \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) s \quad (\text{A12})$$

Zauważmy, że dla niecki kulistej możemy napisać

$$R_2 = -(R_1 + \Delta R) \quad (\text{A13})$$

Podstawiając (A13) do (A12) otrzymujemy

$$s = h \frac{1}{2} \frac{R_1 + \Delta R}{\Delta R} \quad (\text{A14})$$

Zatem zagłębienie kuli poniżej brzegu kontaktu zależy od różnicy  $\Delta R$  między promieniem kuli i promieniem niecki. Jeśli  $\Delta R = R_1$  wtedy  $s = h$  tzn. zagłębienie poniżej brzegu kontaktu jest równe całkowitemu zagłębieniu. Dla  $R_1 > \Delta R$  mamy  $s > h$  tzn. zagłębienie poniżej brzegu kontaktu jest większe niż zagłębienie całkowite (zdefiniowane jako przemieszczenie środka sztywnej kuli) rys. A1 b). W przypadku kontaktu sztywnej kuli z nieką pozostająca po odcisku mamy  $\Delta R \approx R_1 / 10$ , zatem  $s = 5.5h$ . Przemieszczenie brzegu kontaktu może być obliczone z

$$w = h - s = h \left( \frac{\Delta R - R_1}{2\Delta R} \right)$$

W naszym przypadku  $w$  ma przeciwny znak niż  $h$ . Zatem brzeg kontaktu porusza się w przeciwnym kierunku niż dno kontaktu podczas obciążenia.

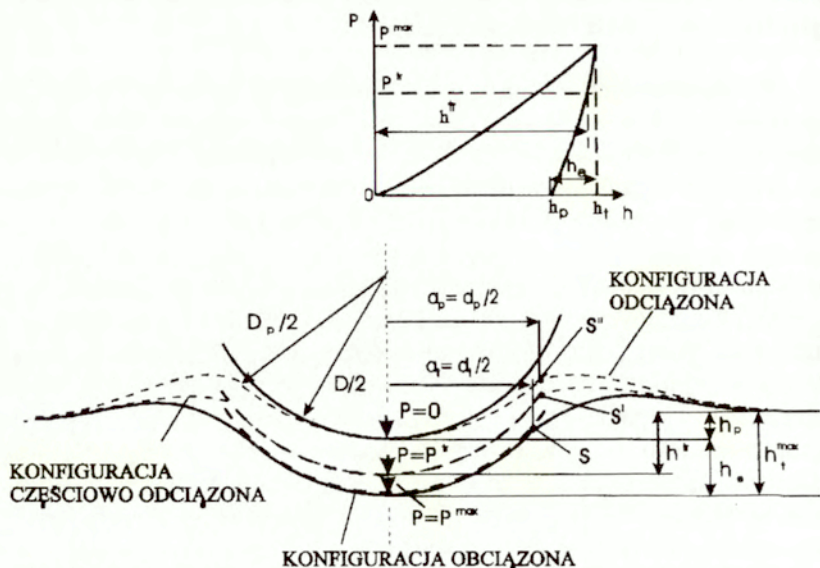


## 2.3 Identyfikacja własności materiału na podstawie pomiaru krzywej siła-zagłębienie przy obciążeniu-odciążeniu

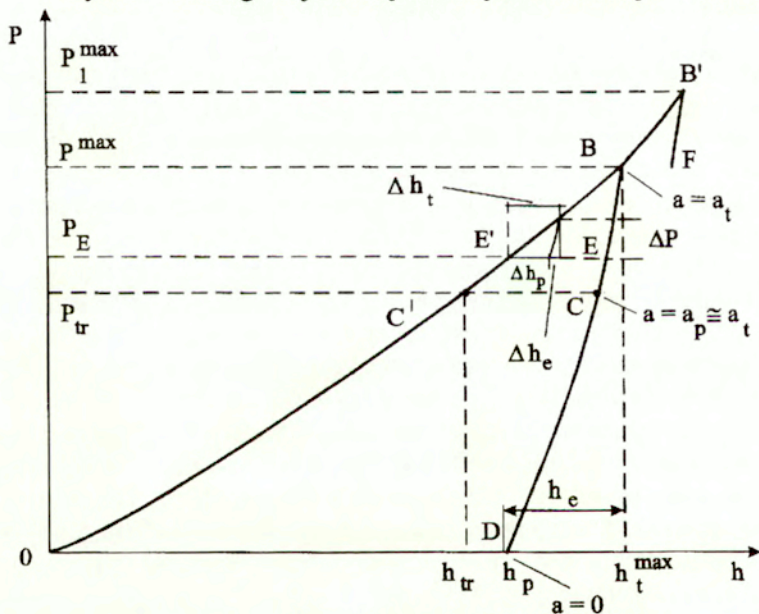
W poprzednich dwóch proponowanych metodach do identyfikacji wykorzystano jedynie dwa punkty mierzonej krzywej siła-zagłębienie całkowite (sprężysto-plastyczne),  $P-h_i$ , - jeden odpowiadający maksymalnej sile i drugi odpowiadający zerowej sile, po odciążeniu. Z tych dwóch punktów generowany był jeden punkt krzywej siła zagłębienie plastyczne,  $P-h_p$ , pewnego zastępczego materiału sztywno-plastycznego, a następnie kilka takich punktów służyło do identyfikacji parametrów  $k$  i  $m$ . Jednak mierzona krzywa siła-zagłębienie  $P-h_i$  składa się z wielu punktów pomiarowych stąd naturalnym wydaje się, by w procedurze identyfikacyjnej wykorzystać informacje, jakich dostarczają pozostałe punkty krzywej, nie tylko ekstremalne. Metodę taką przedstawiono w tym rozdziale. Istotą zaproponowanego w tym rozdziale algorytmu jest odejmowanie wpływu deformacji sprężystych na krzywą siła-zagłębienie całkowite mierzoną w teście wciskania. Stąd otrzymuje się krzywą siła-zagłębienie plastyczne,  $P-h_p$ , którą można wykorzystać we wzorach (1.71-1.72) do identyfikacji  $k$  i  $m$ .

### 2.3.1 Opis metody identyfikacji

W wyniku eksperymentu obciążenie-odciążenie kulki otrzymujemy krzywą przedstawiającą zależność siła-zagłębienie, rys.2.25. Krzywa ta składa się z dwóch części. Jedna oznaczona  $OB$  przedstawia proces obciążenia druga, oznaczona  $BD$  proces odciążenia. Na każdym etapie procesu obciążenia zagłębienie  $h$  kulki w materiale jest efektem odkształceń sprężystych i plastycznych powstających pod kulką. W czasie zagłębienia kulki w materiale tworzy się czasza kulista, której promień jest taki sam jak promień kulki równy  $D/2$ , rys.2.24. Przy założeniu sztywnej kulki promień ten nie zmienia się w całym procesie obciążania natomiast promień  $a$  brzegu kontaktu rośnie w sposób ciągły i osiąga wartość maksymalną  $a_i = a_i^{max}$  (punkt  $S$  na rys.2.24) przy maksymalnej sile  $P = P^{max}$  i maksymalnym zagłębieniu  $h_i^{max}$ . Na brzegu kontaktu powstaje charakterystyczne załamanie materiału (dzięki temu wartość maksymalnego promienia brzegu kontaktu można zmierzyć po zdjęciu obciążenia, punkt  $S''$  na rys. 2.24). Osiągnięta w ten sposób konfiguracja stanowi konfigurację początkową procesu odciążania. W początkowej fazie tego procesu promień brzegu kontaktu zachowuje osiągniętą wcześniej wartość tj.  $a_i^{max}$ .



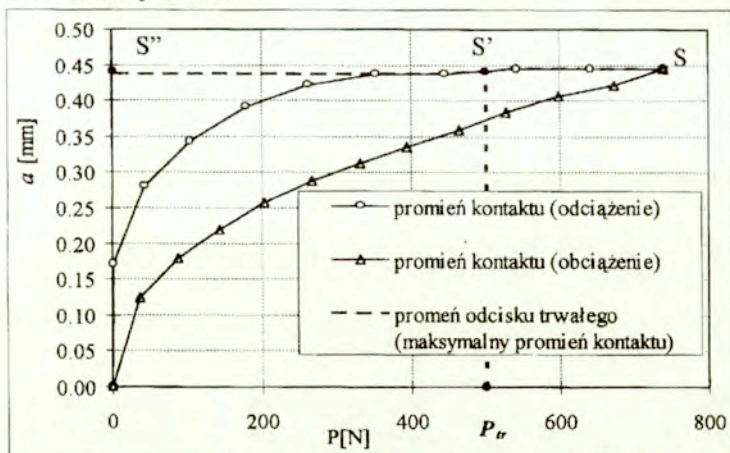
Rys.2.24 Konfiguracje obciążona częściowo odciążona i odciążona.



Rys. 2.25 Krzywa penetracji kuli.

Przyrosty przemieszczenia brzegu kontaktu są takie same jak przyrosty przemieszczenia kuli i punkt  $S$  przemieszcza się wraz z kulą. Koniec tej fazy oznaczono jako punkt  $C$  na rys.2.25, a na rys. 2.24 odpowiada osiągnięciu przez punkt  $S$  położenia  $S'$ . Siłę odpowiadającą punktowi  $C$  na krzywej odciążenia oznaczamy jako  $P_{tr}$ , rys.2.25. Dla siły mniejszej niż  $P_{tr}$ , zmieniają się warunki kontaktu. Przyrosty przemieszczenia kulki stają się większe niż przyrosty przemieszczenia materiału położonego na brzegu kontaktu ukształtowanym uprzednio przy maksymalnej sile (punkt  $S'$  na rys. 2.24). Kula traci kontakt z punktem  $S'$ , a promień kontaktu gwałtownie maleje. Ta faza odciążenia jest podobna do odciążania kuli będącej w kontakcie z nieką kulistą wyżłobioną w materiale. Na końcu tego etapu mamy siłę  $P=0$  i promień kontaktu  $a=0$ .

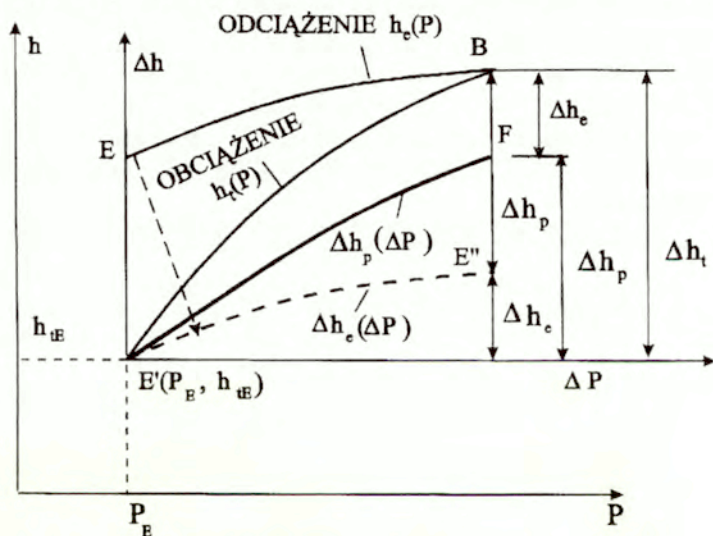
Na krzywej  $OB$  przedstawiającej obciążenie na rys. 2.25, zaznaczono punkt  $C'$  odpowiadający sile  $P_{tr}$ , zagłębienie i promień kontaktu odpowiadające tej sile oznaczamy jako  $h_{tr}$  i  $a_{tr}$ . Z powyższych rozważań wynika, że proces obciążenia i odciążenia na odcinkach  $OC'$  i  $CD$  ( $P < P_{tr}$ ) nie mogą być ze sobą porównywane gdyż odnoszą się do zupełnie różnych konfiguracji materiału. Natomiast stosunkowo bliskie sobie są konfiguracje odpowiadające odcinkom  $C'B$  i  $BC$  krzywych obciążania i odciążania. W trakcie obciążania na odcinku  $C'B$  promień brzegu kontaktu zwiększa się od wartości  $a_{tr}$  do wartości  $a_t^{max}$ , natomiast w trakcie odciążania na odcinku  $BC$  ( $P > P_{tr}$ ) pozostaje on stały, równy  $a_t^{max}$ . Ewolucję promienia kontaktu można zaobserwować na rys. 2.26.



Rys.2.26 Ewolucja promienia kontaktu  $a$  ( $m=0.24$ ,  $k=800\text{MPa}$ ,  $E=74500\text{MPa}$ ,  $D=2.5\text{mm}$ )

Jeśli punkty  $B$  i  $C$  są położone dostatecznie blisko siebie to  $a_{tr} \approx a^{max}$ , i procesy obciążania i odciążania na odcinkach  $C'B$  i  $BC$  zachodzą w bardzo podobnych konfiguracjach. W przeciwnym przypadku podobieństwo konfiguracji obciążenia i odciążenia zachodzi na odcinkach  $E'B$  i  $BE$ , gdzie  $E'$  jest pewnym punktem z przedziału  $C'B$ . W procesie obciążenia na odcinku  $C'B$  mamy pole przyrostów odkształceń sprężystych i plastycznych, natomiast w procesie odciążenia tylko pole przyrostów sprężystych. Ze względu na podobieństwo konfiguracji odcinkach  $C'B$  i  $BC$  przyjmujemy, że dla  $P > P_{tr}$  w każdym punkcie materiału przyrosty odkształceń trakcie obciążenia mogą być algebraicznie dodawane (lub odejmowane) do przyrostów w trakcie odciążania. Jest to podstawowe założenie proponowanej tu metody.

Zagłębienie  $h$  kulki jest całką z pola odkształceń. Zatem odejmując przyrosty zagłębienia w trakcie odciążania  $\Delta h_e$  (są to przyrosty sprężyste) od przyrostów zagłębienia w trakcie obciążania  $\Delta h_t$  (są to przyrosty sprężysto-plastyczne) otrzymujemy przyrosty zagłębienia plastycznych  $\Delta h_p$ , rys.2.25. Odejmowanie to przedstawiono na rys. 2.27.



Rys.2.27 Generowanie segmentów krzywej  $h_p(P)$

Dla wygody na rysunku tym zamieniono osie współrzędnych tj. siła  $P$  odkładana jest na osi odciętych, a przemieszczenie  $h$  na osi rzędnych. W tym układzie równania krzywych  $C'B$  i  $BC$  (rys.2.25) można zapisać jako  $h_t = h_t(P)$  (obciążenie) i  $h_e = h_e(P)$  (odciążenie). Na krzywej obciążenia wprowadzono

między punktami  $C'B$  punkt  $E'$  o współrzędnych  $(h_{tE}, P_E)$ , a na krzywej odciążenia punkt  $E$  odpowiadający tej samej sile  $P_E$ ,  $P_{tr} < P_E < P^{max}$ , rys. 2.25. Na rys. 2.27 przedstawiono fragment  $EBE'$  krzywej obciążenie-odciążenie. Wprowadzono dodatkowy, lokalny układ współrzędnych o początku w punkcie  $E'$ . Na osi odciętych tego układu zaznaczone są przyrosty siły  $\Delta P$ , natomiast na osi rzędnych przyrosty zagłębienia  $\Delta h$ . Krzywa odciążenia  $BE$  została przesunięta wzdłuż osi rzędnych do początku układu lokalnego tj. do punktu  $E'$ , i zajmuje teraz położenie  $E'E''$ . Krzywe  $E'E''$  i  $E'B$  można przedstawić w postaci funkcji  $\Delta h_e(\Delta P)$  i  $\Delta h_t(\Delta P)$ . Krzywą  $\Delta h_p(\Delta P)$  przedstawiającą przyrosty zagłębienia plastycznego, oznaczoną jako  $E'F$  na rys. 2.27, wyznaczamy jako różnicę funkcji

$$\Delta h_p(\Delta P) = \Delta h_t(\Delta P) - \Delta h_e(\Delta P) \quad (2.47)$$

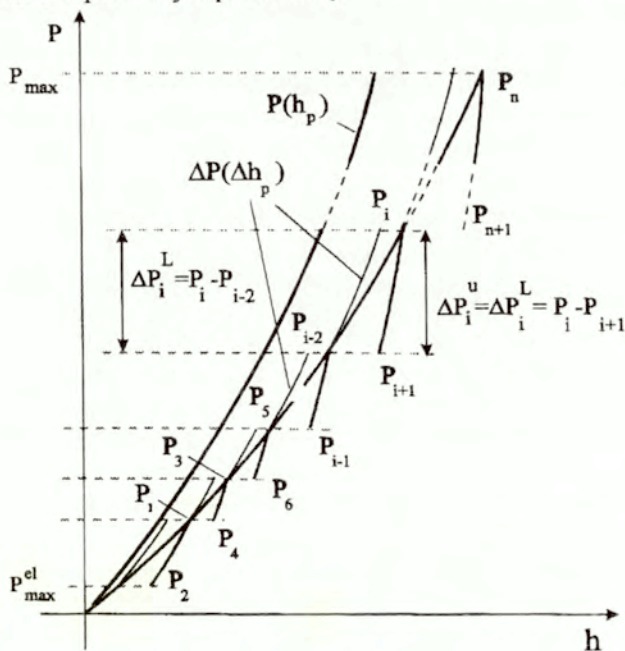
Otrzymana krzywa  $\Delta h_p(\Delta P)$  ma w każdym punkcie identyczne nachylenie jak fragment poszukiwanej przez nas krzywej  $h_p(P)$  zawarty w przedziale  $(P_E; P^{max})$ , jednak inny jest jej punkt początkowy. Otrzymana krzywa  $\Delta h_p(\Delta P)$  zaczepiona jest w punkcie  $E'(P_E, h_t(P_E))$ , natomiast rzeczywista rzędna jej punktu początkowego jest na razie nie znana.

Dla wyznaczenia krzywej  $\Delta h_p(\Delta P)$  w następnym przedziale tj.  $(P^{max}; P^{max}_1)$ , (gdzie  $P^{max}_1 > P^{max} = P_B$ , rys. 2.25) należy wykonać następnny eksperyment obciążenia od punktu  $E$  na krzywej odciążenia, poprzez punkt  $B$ , do kolejnego punktu zwrotu obciążenia  $B'$  (odpowiadającego sile  $P^{max}_1$ ), i dalej odciążenia do punktu  $F$ . Następnie postępując według powyższego opisu należy odjąć funkcje obciążenia i odciążenia w przedziale  $(P^{max}, P^{max}_1)$ . Analogiczne odejmowanie wykonujemy dla kolejnych przedziałów siły otrzymując następane fragmenty krzywej  $h_p(P)$ .

Zatem aby wyznaczyć całą krzywą  $h_p(P)$  należy wykonać program obciążania i częściowego odciążania kuli przyjmując jako punkty zwrotne wartości siły z przedziału  $(P_{el}^{max}; P^{max})$ , które oznaczamy jako  $P_1, P_3, \dots, P_n$ , rys. 2.28.  $P_{el}^{max}$  jest maksymalną siłą, przy której pod kulką występują wyłącznie sprężyste odkształcenia.

Oznaczmy punkty, w których odciążenie przechodzi w ponowne obciążenie jako  $P_2, P_4, \dots, P_{n+1}$  wówczas przyrost obciążenia możemy wyrazić jako  $\Delta P_i^L = P_i - P_{i-2}$ , po czym następuje odciążenie  $\Delta P_i^u = P_i - P_{i+1}$ , dla którego  $\Delta P_i^u = \Delta P_i^L$ , a następnie powtórne obciążenie  $\Delta P_i^L = \Delta P_i^u$ . Przyjmujemy, że wartość  $\Delta P_i^u$  stanowi ten sam ułamek wartości  $P_i$  dla wszystkich punktów zwrotnych  $P_1, P_3, \dots, P_n$ . Stąd mamy  $\Delta P_i^u = fP_i$  oraz

$P_i = (P_{i-2}) / (1-f)$  dla  $i=1,3,5,\dots,n$ , zatem wartości  $P_i$  we wszystkich punktach zwrotnych stanowią ciąg geometryczny i są jednoznacznie zdefiniowane poprzez wartość w pierwszym punkcie  $P_1$ .

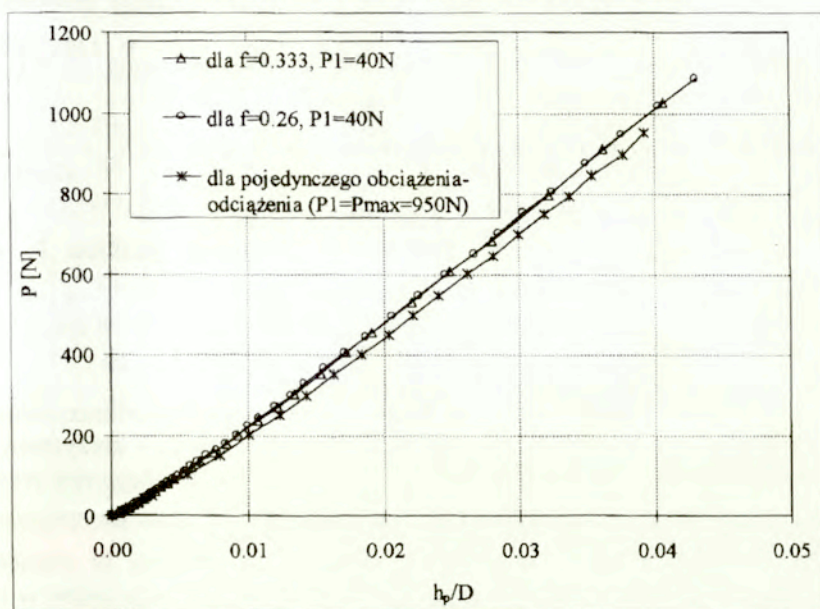


Rys. 2.28 Schemat cyklicznego obciążenia-częściowego odciążenia-ponownego obciążenia i generowanie krzywej  $P(h_p)$ .

Odejmując odcięte fragmenty krzywych obciążenia i odciążenia otrzymujemy fragmenty krzywej  $h_p(P)$  rozpoczynające się w punktach  $P_1, P_3, \dots, P_n$ , rys. 2.28. Otrzymane w ten sposób fragmenty krzywej  $h_p(P)$  odpowiadające przedziałom  $(P_i; P_{i-2})$  nie łączą się ze sobą (rys. 2.27, 2.28), gdyż ich punkty początkowe położone są na krzywej  $h_i(P)$ . Krzywą  $h_p(P)$  wyznaczamy w ten sposób, że przyjmujemy punkt  $(h_{max}^{el}, P_{max}^{el})$ , jako początek układu  $(h_p-P)$ , następnie do tego punktu przesuwamy wzdłuż osi  $h_p$  fragment krzywej  $h_p(P)$  z przedziału  $(P_{max}^{el}, P_n)$ , i dalej kolejne fragmenty, tak aby koniec jednego był początkiem następnego, rys.2.28.

Dokładność, z którą wyznaczamy krzywą  $h_p(P)$  w dużym stopniu zależy od wyboru odpowiedniego kroku obciążenia-odciążenia  $\Delta P_i$ . Wartości  $\Delta P_i$  muszą być tak dobrane, aby konfiguracja materiału w procesie obciążania  $E'B$  była wystarczająco bliska konfiguracji podczas odciążania  $BE$ , rys. 2.25.

Warunek ten jest tym lepiej spełniony im mniejsza jest wartość  $\Delta P_i$ . Na przykładzie wielu eksperymentów numerycznych zaobserwowano, że istnieje pewna wartość graniczna  $\Delta P_i^f$ , zmniejszanie kroku poniżej tej wartości nie powoduje znaczących zmian generowanej krzywej  $P-h_p$ . Na rys. 2.29a przedstawiono wrażliwość tej krzywej na zmianę kroku  $\Delta P_i = fP_i$  w zakresie obciążeń 0-1080 N, dla materiału identyfikowanego w następnym rozdziale w teście numerycznym. Widać, że stosując  $\Delta P_i=0.33P_i$  i  $\Delta P_i=0.26P_i$  otrzymuje się niemal jednakowe krzywe  $P-h_p$ . Krzywe te różnią się od krzywej  $P-h_p$  otrzymanej przez proste odjęcie funkcji przedstawiających krzywe obciążenia i odciążenia w całym zakresie 0-1080 N w jednym kroku. Zatem wartość  $\Delta f \leq 1/3$  wydaje się być właściwa dla otrzymania wystarczająco dokładnych wyników. Z rozważań przeprowadzonych w rozdziale 2.2. wynika, że dla  $\Delta f \leq 1/3$  w procesie odciążenia nie zmienia się promień kontaktu kuli. Oczywiście dokładność wygenerowanej krzywej  $P-h_p$  przy zadanym obciążeniu maksymalnym zależy od liczby punktów zwrotnych.



Rys. 2.29a Porównanie krzywych  $P-h_p$  otrzymanych dla różnych kroków  $\Delta P_i$ .

W ogólnym przypadku właściwa wartość  $f$  powinna być otrzymana przez wykonanie serii testów obciążenia odciążenia dla różnych  $f$  i zbadanie wrażliwości generowanej krzywej  $P-h_p$  na zmiany  $f$ . Dokładna relacja  $P(h_p)$  może być otrzymana przy założeniu bardzo małych kroków obciążenia gdy  $n \rightarrow \infty$ . Ważny jest również wybór wartości siły pierwszego zwrotu obciążenia  $P_1$ . Lepszą dokładność uzyskuje się dla mniejszych wartości  $P_1$ , ale wówczas przy ustalonej wartości  $P^{max}$  wzrasta liczba kroków obciążenia-odciążenia. W przeprowadzonych przez autora eksperymentach numerycznych wartość  $P_1$  przyjmowano od 7N do 40 N dla materiału wykorzystanego w zamieszczonym przykładzie identyfikacji. Stwierdzono, że dla  $20N \leq P_1 \leq 40N$  otrzymuje się praktycznie jednakowe krzywe  $P(h_p)$ . Wartość  $P_1$  powinna być oczywiście większa niż maksymalna siła, przy której w materiale występują wyłącznie odkształcenia sprężyste  $P_{el}^{max}$ , rys. 2.28.

Otrzymana w opisany wyżej sposób krzywa  $h_p(P)$  dana jest w postaci tablicy punktów  $j=nk$ , gdzie  $k$  oznacza liczbę punktów, w których wyznaczana jest różnica funkcji według równania (2.47) wewnątrz każdego przedziału  $\Delta P_i$ , a  $n$  liczbę przedziałów.

Jako równanie identyfikacyjne wykorzystujemy równanie (1.71), w którym  $a/D$  zostaje zastąpione przez  $h_p/D$  zgodnie z (1.72)

$$P = \pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2 \left( \frac{h_p}{D} \right)^{2+m} \quad (2.48)$$

Korzystając z tego równania i wyznaczonych wcześniej punktów  $P_i$ ,  $h_{pi}$  obliczamy stałe  $k$  i  $m$  metodą regresji liniowej.

### 2.3.2 Weryfikacja

Weryfikację metody wykonano na bazie eksperymentów numerycznych i fizycznych. Ze względu na to, że w proponowanej metodzie korzystamy z wzorów obowiązujących w sposób ścisły dla materiału spełniającego prawo potęgowe  $\sigma = k \varepsilon_p^m$  w eksperymencie numerycznym, w zakresie sprężysto-plastycznym wykorzystano prawo (2.1). W praktyce oznacza to przyjęcie wartości granicy plastyczności i  $\varepsilon_{p0}$  w (2.34) bliskich 0. Eliminujemy w ten sposób błędy identyfikacji wynikające z niezgodności przyjętego modelu materiału z materiałem identyfikowanym.

Dla pokazania wrażliwości (rozdzielczości) metody, w eksperymencie numerycznym przyjęto dwa materiały spełniające prawo potęgowe. Stałe

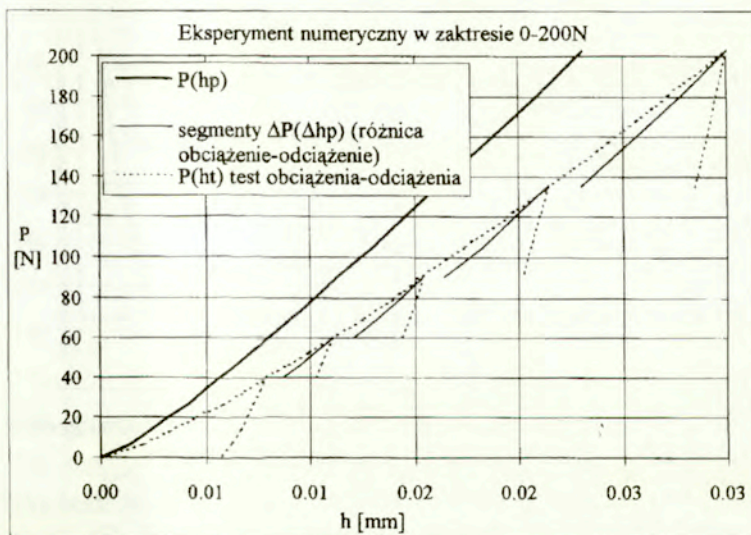


sprężyste tych materiałów są jednakowe  $E=74500 \text{ MPa}$ ,  $\nu=0.3$ , natomiast różnią się one wzmocnieniem plastycznym, ich zależności  $\sigma - \varepsilon_p$  mają postać:

$$\text{I) } \sigma = 800\varepsilon_p^{0.24}; \quad \text{II) } \sigma = 1100\varepsilon_p^{0.3} \quad (2.49)$$

Tak zdefiniowane własności materiałowe wprowadzono jako dane do programu MES. Następnie dla o obydwu materiałów wykonano testy numeryczne polegające na kolejnych obciążeniach i odciążeniach kuli o średnicy  $D=2.5\text{mm}$  wgniatanej w materiał, według programu przedstawionego na rys. 2.28. Pominięto wyznaczanie punktu  $h_{max}^{el}$ ,  $P_{max}^{el}$  i przyjęto za początek układu  $(h_p, P)$  pokrywa się z początkiem układu  $(h_0, P)$ . Uproszczenie to jest dopuszczalne ze względu na małe wartości  $h_{max}^{el}$ ,  $P_{max}^{el}$ . Przyjęto następujące wartości  $P_i$ : 40, 54, 72.9, 98.4, 132.8, 179.4, 242, 328, 442, 597.8, 806N dla  $i=1, \dots, 10$ , oraz  $\Delta P_i = 0.26P_i$ , gdyż na podstawie wielu eksperymentów numerycznych stwierdzono, że dla takiej wartości  $\Delta P$ , konfiguracje obciążona i odciążona w zakresie  $P_{tr} - P^{max}$  są podobne.

Wykres  $P(h_p)$  otrzymany z eksperymentu numerycznego dla materiału I) w zakresie 0-200N przedstawiono na rys. 2.29.

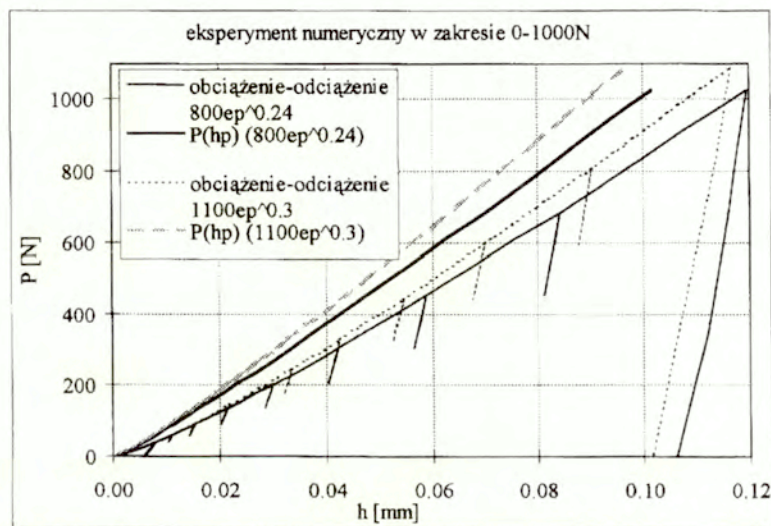


Rys. 2.29 Krzywe obciążenie-częściowe odciążenie-obciążenie  $P(h_p)$ , oraz  $P(h_p)$  dla materiału  $\sigma = 800\varepsilon_p^{0.24}$  w zakresie 0-200N

Na tym rysunku przedstawiono również fragmenty krzywej  $P(h_p)$  otrzymanej w wyniku odejmowania krzywych obciążenia i odciążenia oraz pełną krzywą  $P(h_p)$  utworzoną z tych fragmentów. Na rys. 2.30 przedstawiono wyniki eksperymentu numerycznego dla materiałów I i II) w zakresie 0-1000N oraz wygenerowane krzywe  $P(h_p)$ .

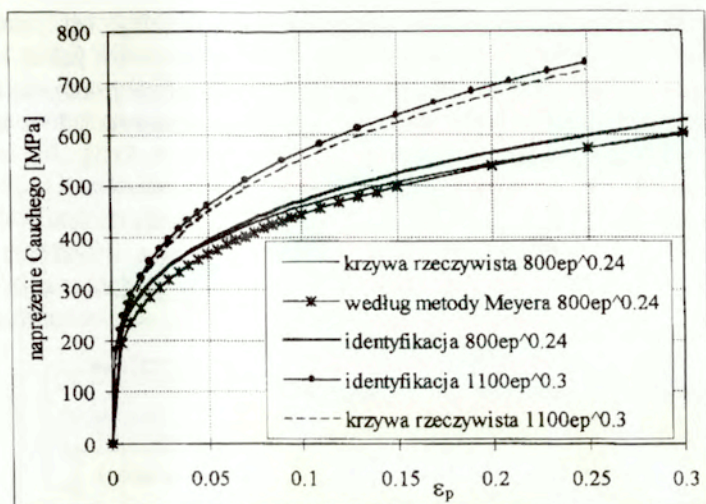
Wykładnik funkcji potęgowej przeprowadzonej przez punkty  $P(h_p)$  równy  $m/2+1$  ma wartość 1.129 dla materiału I) i 1.146 dla materiału II). Stąd  $m=0.258$ ,  $k=854\text{MPa}$  dla materiału I) oraz  $m=0.292$ ,  $k=1110\text{MPa}$  – dla materiału II) (do obliczeń przyjęto  $\alpha=2.8$ ,  $\beta=0.4$  jak dla materiału nieliniowo sprężystego, według pracy Hill (1989)). Otrzymane wartości  $k$  i  $m$  są więc bliskie założonym w (2.49). Krzywe rozciągania rzeczywiste oraz otrzymane z identyfikacji przedstawiono na rys.2.31.

Uwaga! w legendzie wykresów  $k\epsilon_p^m$  oznacza  $k\epsilon_p^m$ .

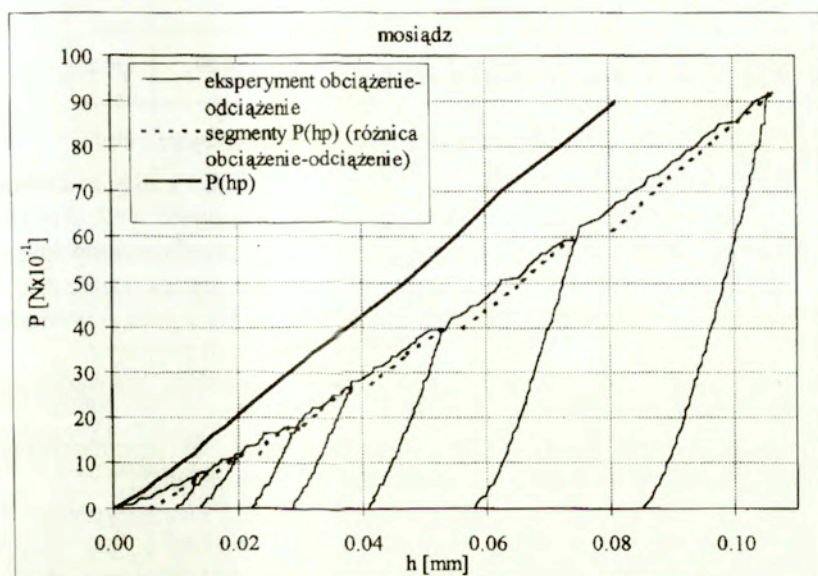


Rys. 2. 30 Krzywe obciążenie-częściowe odciążenie-obciążenie  $P(h_i)$ , oraz  $P(h_p)$  dla materiałów I) i II) w zakresie 0-1000N

Dla weryfikacji proponowanej metody wykonano również identyfikację materiałów rzeczywistych: mosiądzu, stali 35, oraz stali 45. Do identyfikacji mosiądzu wykonano opisany wyżej test wciskania przy kuli o średnicy  $D=2,5\text{mm}$  przyjmując  $n=7$  i  $\Delta P_i=0.333P_i$ , a  $P^{max}=900\text{N}$ , rys. 2.32.

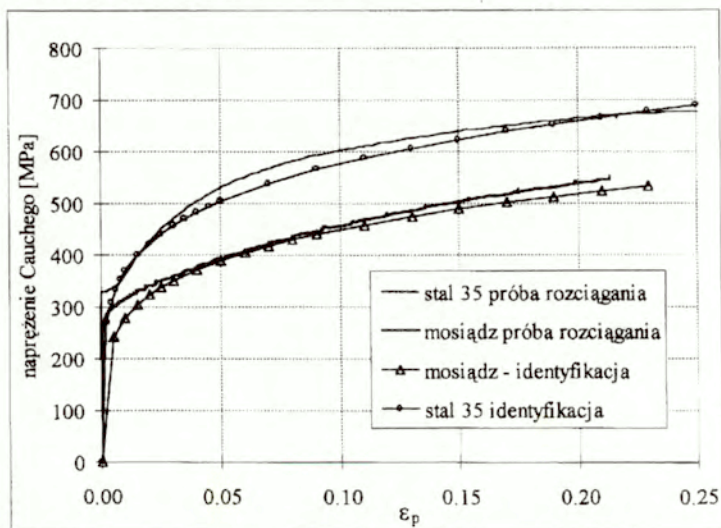


Rys.2.31 Krzywe rozciągania zidentyfikowane w eksperymencie numerycznym



Rys. 2.32 Krzywe obciążenie-częściowe odciążenie-obciążenie  $P(h_i)$ , oraz  $P(h_p)$  mosiądzu.

Na rys. 2.32 podano również fragmenty krzywej  $\Delta P(\Delta h_p)$  otrzymanej w wyniku odejmowania krzywych obciążenia i odciążenia oraz pełną krzywą  $P(h_p)$  utworzoną z tych fragmentów. Otrzymaną z identyfikacji krzywą  $\sigma-\varepsilon_p$  w postaci potęgowej ( $k=722 \text{ MPa}$ ,  $m=0.206$ ) porównano na rys. 2.33 z krzywą otrzymaną w teście rozciągania.



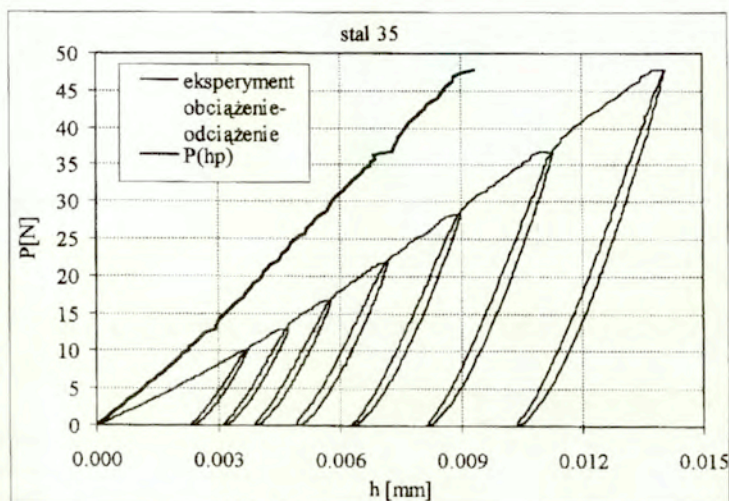
Rys. 2.33 Zidentyfikowane krzywe rozciągania mosiądzu i stali.

Identyfikację własności stali 35 wykonano stosując kulkę o średnicy  $D=1.0 \text{ mm}$ . W programie obciążenia-odciążenia kuli przyjęto  $n=7$ ,  $P_1=10 \text{ N}$ ,  $P_{max}=48.2 \text{ N}$  co odpowiada  $\Delta P_i=0.23 P_i$ . Na rys. 2.34 przedstawiono krzywe  $P(h_i)$ ,  $P(h_p)$  wyznaczone doświadczalnie. Na rysunku można zauważyć, że krzywe odciążenie-ponowne obciążenie nie pokrywają się z sobą – występuje niewielka pętla histerezy. Efekt ten może wynikać z dwóch przyczyn:

- pojawienie się wtórnej plastyczności przy odciążeniu spowodowanej wzmocnieniem kinematycznym [37]
- błędy urządzenia pomiarowego wynikające stąd, że przemieszczenia wgłębnika przy obciążeniu i odciążeniu mają przeciwne znaki

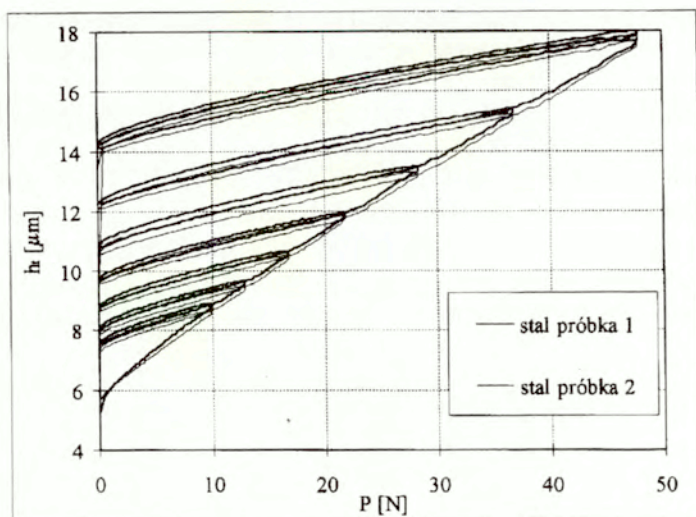
Pierwsza z tych przyczyn to jest efekt wzmocnienia kinematycznego nie została uwzględniona w naszych rozważaniach, podobnie jak autorzy większości opisanych we wstępie metod identyfikacji przyjmujemy, że efekt ten można pominąć. Dla eliminacji ewentualnego błędu urządzenia pomiarowego w procedurze generowania krzywej  $P(h_p)$ , w każdym punkcie

zwrotnym  $i$  przyjmowano jako krzywą częściowego odciążenia (od punktu  $P_i$  do  $P_{i+1}$  rys. 2.28) tę część zmierzonej krzywej, która odpowiada ponownemu obciążeniu, rys. 2.34. Takie postępowanie wynika z faktu, że ponowne obciążenie następuje w podobnych warunkach jak pierwsze obciążenie w tym zakresie sił, gdyż w obu tych przypadkach ruch węgłownika ma ten sam kierunek. Otrzymana z identyfikacji krzywa rozciągania dla stali została przedstawiona na rys.2.33,  $k=905 \text{ MPa}$ ,  $m=0.194$ . Warto również zauważyć, że w przypadku stali 35 dość dobry wynik identyfikacji uzyskano przy niewielkim zagłębieniu maksymalnym kulki wynoszącym ok.  $14\mu\text{m}$ . Oznacza to, że proponowana metoda może być wykorzystana do identyfikacji cienkich warstw.

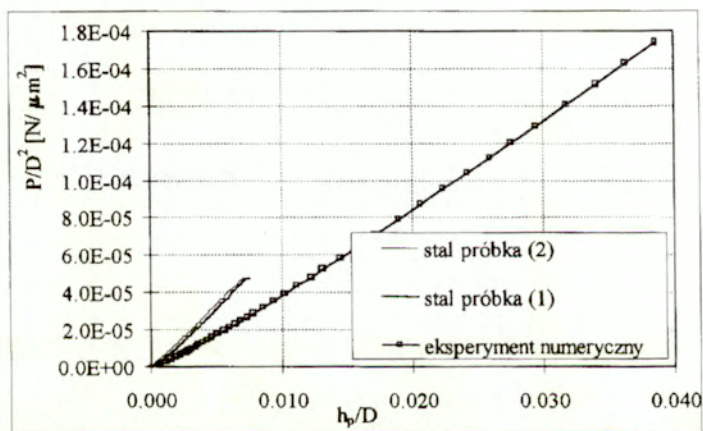


Rys. 2.34 Krzywe obciążenie-częściowe odciążenie-obciążenie  $P(h_d)$ , oraz  $P(h_p)$  dla stali 35.

W ramach weryfikacji metody wykonano również identyfikację krzywej rozciągania stali 45. Dla zmierzenia krzywej penetracji wykorzystano kulkę o średnicy  $D=1.0\text{mm}$  oraz wartości sił w punktach zwrotnych obciążenia tak jak w przypadku stali 35. Na rys. 2.35 przedstawiono dwie krzywe penetracji stali 45, które ilustrują średnią wielkość rozrzutu uzyskanych wyników. Podobny rozrzut zaobserwowano w przypadku pozostałych eksperymentów fizycznych. Wygenerowane krzywe siła-zagłębienie plastyczne dla obydwu próbek stalowych przedstawiono na rys.2.36 w układzie bezwymiarowym wraz z krzywą  $P(h_p)$  otrzymaną wcześniej w eksperymencie numerycznym.



Rys. 2.35 Krzywe penetracji dla stali 45 uzyskane doświadczalnie.

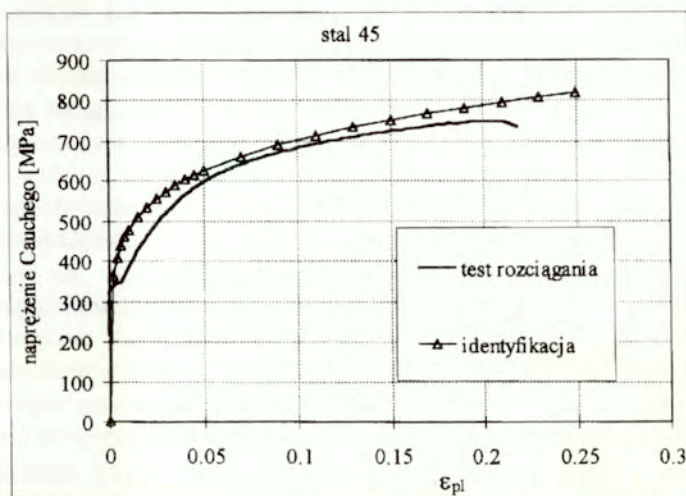


Rys. 2.36 Krzywe dla próbek ze stali 45 i materiału II) testowanego w eksperymencie numerycznym.

Porównując te krzywe możemy stwierdzić, że w przypadku stali zagłębienia względne kuli są znacznie mniejsze niż w materiale identyfikowanym w eksperymencie numerycznym.

Na rys. 2.37 można zaobserwować, że pomimo małego zagłębienia maksymalnego kuli krzywa rozciągania stali 45 również została

zidentyfikowana z zadowalającą dokładnością. Identyfikacji dokonano znajdując funkcję potęgową aproksymującą średnią krzywych  $P(h_p)$  dla stali przedstawionych na rys. 2.36.



Rys. 2.37 Identyfikacja krzywe rozciągania stali 45

### 2.3.3 Wnioski

Przedstawiona metoda umożliwia identyfikację własności materiałowych z dobrą dokładnością. W metodzie tej podobnie jak w większości znanych metod stałe materiałowe  $m$  i  $k$  wyznacza się z układu równań otrzymanych z zależności (2.48) zapisanych w skali logarytmicznej  $\log(P) - \log(h/D)$ . Liczba równań w układzie jest równa liczbie punktów pomiarowych  $(h_i, P_i)$ . Innym sposobem wyznaczenia stałych  $k$  i  $m$  jest znalezienie funkcji w postaci (2.48), która jest najlepszą aproksymacją punktów pomiarowych  $(h_i, P_i)$ . Wyniki uzyskane tą metodą są bardziej stabilne.

W proponowanych wcześniej metodach identyfikacyjnych jeden punkt wykorzystany w równaniu identyfikacyjnym  $(h_i, P_i)$  lub  $(a_i, P_i)$  odpowiada jednemu testowi obciążenia-odciążenia. Pewną niedogodność stanowi również to, że w przypadku pomiaru średnicy odcisku  $a$ , każdy test musi być wykonany w innym punkcie materiału. Ponadto eliminacja wpływu odkształceń sprężystych na parametry geometryczne odcisku, stosowana w tych metodach nie jest dokonywana w sposób konsekwentny.

Istotny jest również zakres wartości, jakie mogą przyjmować siły w wykonanej serii testów. Im większy jest ten zakres, tym większa jest dokładność identyfikacji. Istnieją jednak pewne ograniczenia co do zakresu sił. Maksymalna siła nie powinna przekraczać wartości odpowiadającej  $a/D=0.2$ , gdyż w tym zakresie obowiązuje rozwiązanie samopodobne, z którego pośrednio lub bezpośrednio korzysta się w proponowanych metodach identyfikacji. Wartości sił są również ograniczone od dołu, gdyż dla małych wartości zagłębienia brzeg odcisku jest niewyraźny i pomiar  $a$  jest utrudniony. Ponadto dla małych wartości zagłębienia wzrasta różnica między  $D$  i  $D_p$  i obliczanie  $a'$  z wzorów (1.82) (praca [34]) może prowadzić do znacznych błędów. Z doświadczeń autora wynika, że w przypadku metody Meyera dobrą dokładność można uzyskać dla  $0.07 < a/D < 0.25$ .

W proponowanej metodzie wykonuje się test obciążenia i częściowego odciażenia kulki przyjmując  $n$  wartości siły  $P$ , w których następuje zwrot obciążenia. Test taki może być wykonany w jednym punkcie materiału, a jego wykonanie nie nastęrcza żadnych trudności, o ile dysponujemy odpowiednim stanowiskiem pomiarowym. Po wykonaniu odejmowania krzywych obciążenia i odciażenia z testu otrzymuje się  $n \cdot k$  punktów pomiarowych, które określają zależność  $P(h_p)$  ( $k$  - oznacza liczbę punktów dyskretyzacji odejmowanych krzywych w przedziałach  $\Delta P_i$ ). Zatem w proponowanej metodzie korzystamy z wielu punktów krzywej wyznaczonej w teście obciążenia-odciażenia kuli, natomiast w innych metodach korzysta się zwykle z jednego tj. końcowego punktu tej krzywej.

Zaletą metody jest również możliwość uzyskania dobrych wyników identyfikacji przy relatywnie małych siłach zagłębiających. W proponowanej metodzie górne ograniczenie wartości sił jest takie jak podano wyżej, ( $a/D < 0.2$ ), natomiast dolne ograniczenie wynika z dokładności stanowiska pomiarowego i z relacji między modułem Younga i granicą plastyczności (rozd. 2.55). W praktyce dobrą dokładność identyfikacji można uzyskać dla  $a/D < 0.16$ . Możliwość uzyskania dobrych wyników identyfikacji przy relatywnie mniejszych zagłębieniach kuli jest szczególnie ważna w badaniach cienkich warstw. Jeśli siły zagłębiające kulę w warstwie wierzchniej są wystarczająco małe, możemy pomijać wpływ podłoża na krzywe siła-zagłębienie i proponowana metoda może być bezpośrednio stosowana do identyfikacji własności warstwy wierzchniej.

Inną zaletą proponowanej metody jest konsekwentne pominięcie wpływu własności sprężystych materiału na mierzone parametry wciskania. Wynika stąd możliwość identyfikacji własności plastycznych niezależnie od własności sprężystych materiału. Jeśli iloraz  $E/\sigma_0$  jest wystarczająco duży



(patrz też rozdz. 2.6), to własności sprężyste nie mają wpływu na dokładność identyfikacji stałych  $k$  i  $m$ . W przeciwieństwie do metod przedstawionych w innych pracach np. Taljat, Zacharia (1998) [35], w proponowanej metodzie postać wzorów identyfikacyjnych nie zależy od stałych  $E$  i  $\nu$ . Ponadto zaproponowany sposób eliminacji odkształceń sprężystych pozwala na uniknięcie błędów wynikających ze sprężystych deformacji elementów stanowiska pomiarowego to znaczy kulki, oprawy kulki, próbki itd. Dzięki temu można korzystać ze stanowisk o prostej konstrukcji, a więc łatwo dostępnych.

Proponowana metoda bazuje na wzorach identyfikacyjnych odnoszących się do materiałów spełniających prawo potęgowe (1.70), jednak stosując ją do materiałów nie spełniających tego prawa otrzymuje się również dość dobre wyniki identyfikacji.

## 2.4 Identyfikacja cienkich warstw

Opisaną w poprzednim rozdziale metodę zastosowano również do identyfikacji warstw wierzchnich: warstwy stopowanej staliitem i warstwy stopowanej węglikiem wolframu na stali 45, oraz warstw uzyskanych techniką nagniatania na stali 55. Zastosowanie proponowanej metody do identyfikacji warstw wymaga przyjęcia dwóch założeń:

- maksymalne zagłębienie kuli w warstwie jest odpowiednio małe, tak aby własności plastyczne podłoża nie wpływały na mierzoną krzywą
- $P-h_t$ ,
- warstwa jest jednorodna w tym sensie, że jej własności nie zmieniają się w kierunku prostopadłym do powierzchni

Z badań dotyczących pomiarów twardości znanych z literatury wiadomo, że pierwszy warunek jest spełniony o ile maksymalne zagłębienie węgelnika nie przekracza 1/10 grubości warstwy. W odniesieniu do drugiego warunku przyjmujemy, że jeśli warstwa nie jest jednorodna to krzywa penetracji zmierzona dla tej warstwy przedstawia uśrednione własności plastyczne wszystkich jej stref, które znajdują się w odległości od powierzchni mniejszej niż dziesięciokrotna wartość maksymalnego zagłębienia węgelnika.

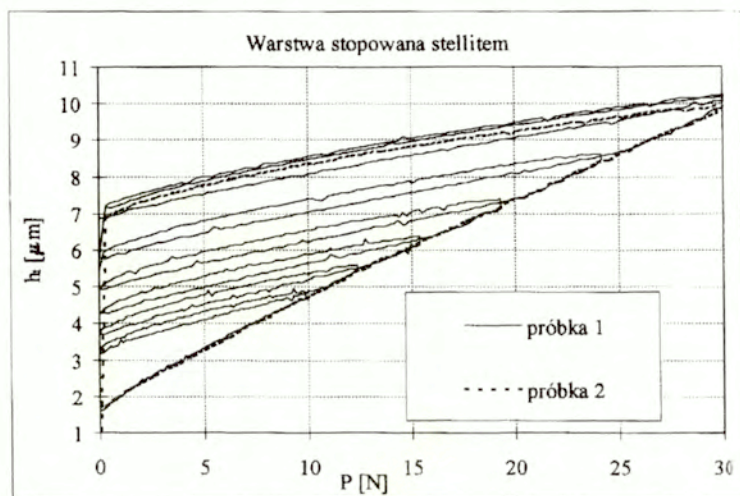
### 2.4.1 Identyfikacja warstw laserowych

Do pomiaru krzywej siła-zagłębienie warstw laserowych wykorzystano węgelnik Rockwella, który może być traktowany jako węgelnik kulisty o

promieniu  $200\mu\text{m}$  o ile zagłębienie całkowite nie przekracza  $28\mu\text{m}$ . Wgłębnik wciskano w środkowym obszarze ścieżki laserowej.

Warstwa stopowana stellem została wykonana przy następujących parametrach obróbki: moc wiązki 2.2 kW, prędkość przesuwu wiązki 16 mm/s, średnica wiązki 0.5 mm. Na podstawie badań metalograficznych oraz badań mikrotwardości stwierdzono, że całkowita grubość zmian strukturalnych wynosi 0.65 mm natomiast grubość strefy przetopionej 0.19mm.

W programie obciążania-odciążania próbki przyjęto następujące wartości siły w punktach zwrotu obciążenia: 10, 12.5, 15, 18.5, 24, 30 N. Na rys. 2.38 przedstawiono zmierzone krzywe siła zagłębienie.

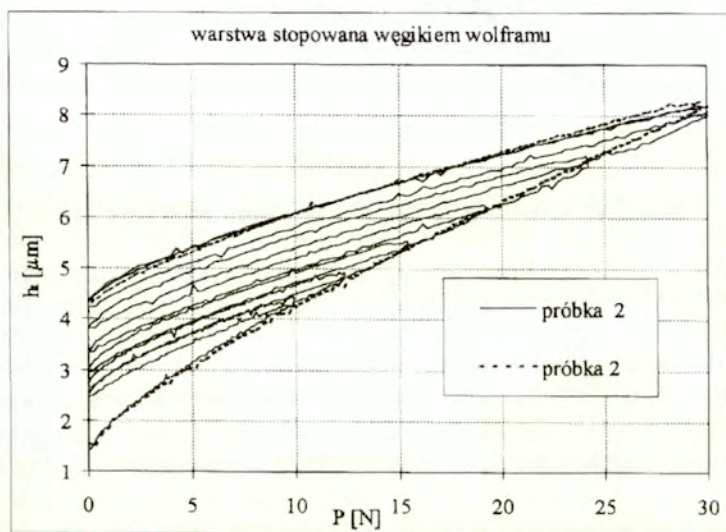


Rys. 2.38 Krzywe penetracji dla warstwy stopowanej stellem

Można zaobserwować bardzo małą różnicę krzywej cyklicznej obciążenia-odciążenia i krzywej odpowiadającej jednokrotnemu obciążeniu 0-30N co świadczy o niewielkim rozrzucie wyników. Maksymalne zagłębienie wgłębniaka wynosi ok.  $9\mu\text{m}$ , jest mniejsze niż 0.1 grubości warstwy, możliwe jest więc pominięcie wpływu podłoża na przebieg krzywych siła zagłębienie. Otrzymaną według proponowanej metody krzywą  $P(h_p)$  dla warstwy stopowanej stellem przedstawiono na rys. 2.40, w układzie bezwymiarowym. Zidentyfikowaną krzywą  $\sigma-\varepsilon_p$  dla warstwy stopowanej stellem przedstawiono

na rys. 2.41. Wartości parametrów  $k$  i  $m$  wynoszą odpowiednio 3230 MPa i 0.21.

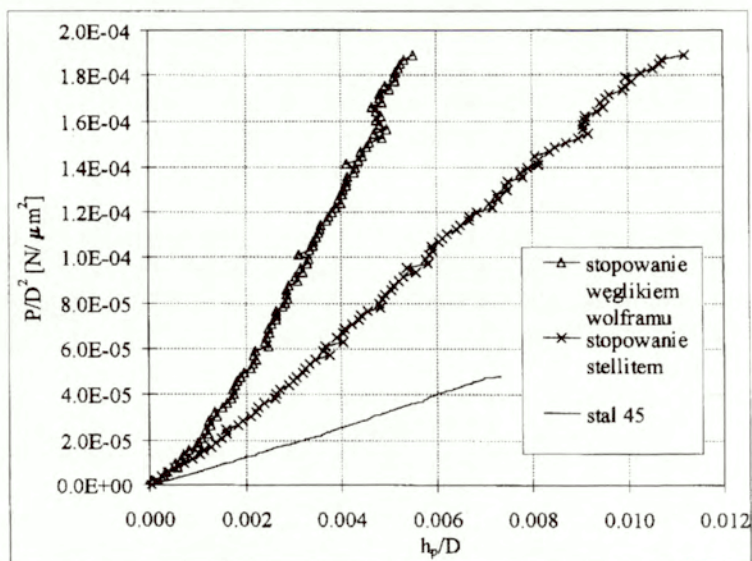
Warstwa stopowana węglikiem wolframu została ukonstytuowana przy następujących parametrach obróbki: moc wiązki 2.4 kW prędkość przesuwu wiązki 36 mm/s średnica wiązki 4 mm. W wyniku procesu otrzymano warstwę wierzchnią o grubości strefy przetopionej 0.23 mm, natomiast całkowita grubość zmian strukturalnych to jest strefy przetopu i strefy wpływu ciepła wynosiła 0.6 mm. Dla tej warstwy zmierzono krzywe  $P-h_p$ , przyjmując takie same wartości siły w punktach zwrotnych jak w przypadku warstwy stopowanej stellite to jest 10, 12.5, 15, 18.5, 24, 30 N. Otrzymane krzywe  $P-h_p$  przedstawione zostały na rys. 2.39. W przypadku warstwy stopowanej węglikiem wolframu maksymalne zagłębienie węgelnika nie przekracza  $7.5\mu\text{m}$ , a zatem również spełniony jest warunek, że jest ono mniejsze niż 1/10 grubości warstwy.



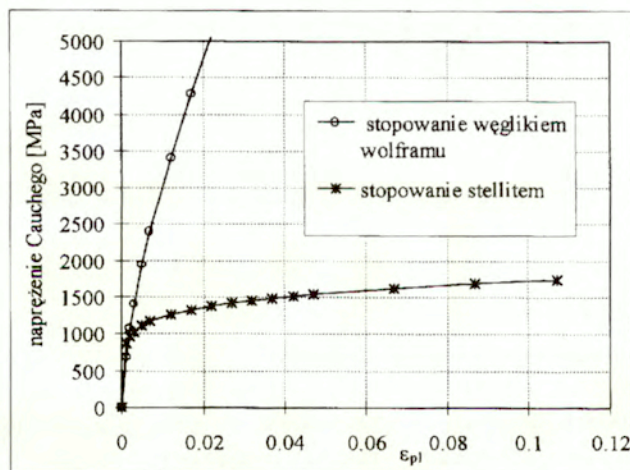
Rys. 2.39 Krzywe penetracji dla warstwy stopowanej węglikiem wolframu

Wygenerowane krzywe  $P-h_p$  oraz  $\sigma-\varepsilon_p$  przedstawiono na rys. 2.40 i 2.41, otrzymano  $k=62600\text{MPa}$  i  $m=0.674$ . Na rys. 2.40 przedstawiona jest również dla porównania krzywa  $P-h_p$  dla stali 45, na której ukonstytuowano warstwę. Można zauważyć znaczną różnicę sztywności warstw i stali. Profile mikrotwardości warstw w funkcji odległości od powierzchni przedstawiono na

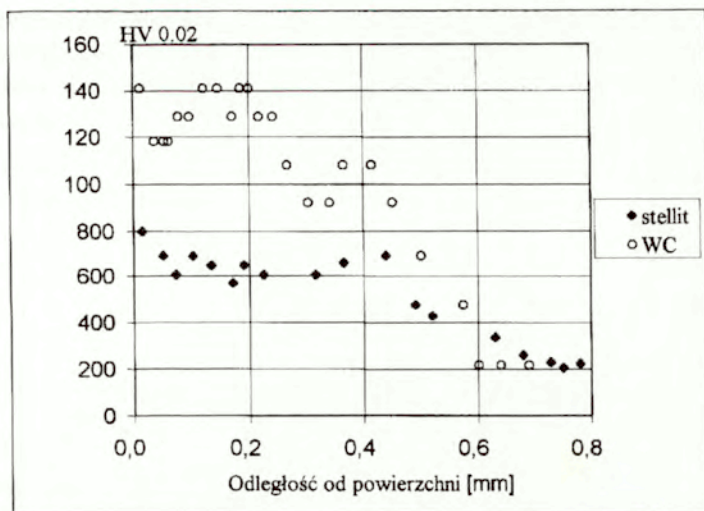
rys. 2.42. Więcej informacji na temat badanych tu warstw laserowych można znaleźć w pracy doktorskiej [41].



Rys.2.40 Krzywa  $P-h_p$  dla warstw laserowych i stali 45



Rys. 2.41 Zidentyfikowane krzywe rozciągania dla warstw laserowych



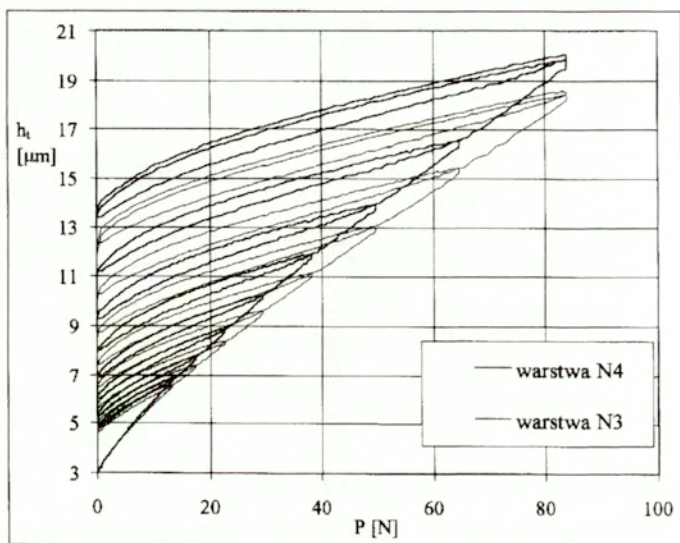
Rys. 2.42 Profile mikrotwardości dla warstw laserowych

## 2.4.2 Identyfikacja warstw nagniatanych.

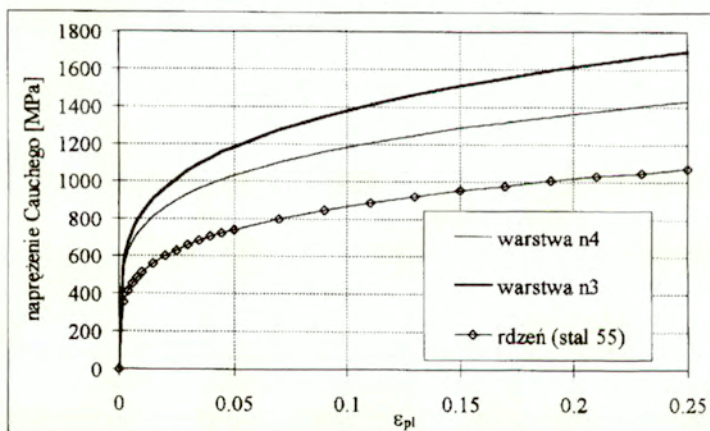
Przedmiotem badań były również warstwy nagniatane tocznie na stali 55. Wykonano dwie warstwy różniące się stopniem zgniotu w przypadku jednej warstwy, oznaczonej dalej jako N3, siła nacisku rolki wynosiła 1000 N a promień zaokrąglenia rolki 3mm, w przypadku drugiej warstwy oznaczonej dalej N4 siła wynosiła również 1000N, ale promień krążka wynosił 4mm. W przypadku warstwy N3 można się zatem spodziewać większych odkształceń plastycznych większej grubości warstwy i większego umocnienia materiału niż w przypadku warstwy N4. Pomiary mikrotwardości wykonane na zglądach prostopadłych do płaszczyzny nagniatanej wykazały wzrost twardości w warstwie o grubości około 200-220 $\mu$ m.

Badania własności plastycznych warstwy przeprowadzono zgodnie z proponowaną metodą. Wykorzystano węgłbnik kulisty o średnicy 1 mm. Przyjęto następujące wartości siły w punktach zwrotnych obciążenia: 13.5; 17.5; 22.8; 29.6; 38.5; 50.1; 65.1; 84.6N. Przy pomocy węgłbnika o średnicy 1 mm wykonano również pomiar krzywej siła-zagłębienie dla stali 55, na której ukonstytuowana została warstwa. W przypadku stali charakteryzującej się mniejszą twardością niż warstwa program obciążenia-odciążenia zaczęto od mniejszej wartości siły, przyjęto  $P_1=8N$ , a w pozostałych punktach zwrotnych siła ma wartość 10.4, 13.5, 17.5, 22.8, 38.5, 50.1N. Krzywe  $P-h_i$  dla warstwy

N3 i N4 przedstawiono na rys. 2.43. Dla przejrzystości rysunków wybrano jedynie średnie krzywe z kilku pomiarów. Na rys. 2.44 przedstawiono zidentyfikowane krzywe  $\sigma$ - $\varepsilon_p$  dla badanych warstw nagiętych oraz dla podłoża to jest stali 55.



Rys. 2.43 Krzywe penetracji dla warstw nagiętych



Rys. 2.44 Zidentyfikowane krzywe rozciągania dla warstw nagiętych

## 2.5 Wyznaczanie parametrów $k$ i $m$ przy pomocy odejmowania pochodnych krzywych obciążenia i odciążenia

### 2.5.1 Opis metody

Podstawowa zależność  $P(h_p)$  (2.48) wynikająca z rozwiązania samopodobnego obowiązuje w sposób ścisły dla materiałów sztywno-plastycznych spełniających prawo potęgowe.

Dla takiego materiału równanie (2.48) możemy odwrócić i napisać w postaci  $h_p(P)$ :

$$\frac{h_p}{D} = \left[ \frac{1}{\pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2} \right]^{m+2} P^{m+2}, \quad (2.49)$$

a następnie zróżniczkować. Otrzymujemy wówczas zależność pochodnej krzywej zagłębienia plastycznego od siły obciążającej

$$\frac{1}{D} \frac{d(h_p)}{dP} = \left[ \frac{1}{\pi \alpha k \beta^m c^{2+m} D^2} \right]^{m+2} \frac{2}{m+2} P^{m+2}^{-m}. \quad (2.50)$$

W proponowanym w tym rozdziale podejściu równanie (2.50) jest podstawowym równaniem identyfikacyjnym. Podobnie jak w przypadku równania (2.48) zapisując (2.50) dla kilku wartości  $(P_i, \frac{dh_p}{dP}_i)$ , otrzymuje się układ równań, którego niewiadomymi są parametry  $k$  i  $m$ . Ilustracją graficzną równania (2.50) w układzie logarytmicznym  $\log P - \log(\frac{1}{D} \frac{d(h_p)}{dP})$  jest prosta, której tg kąta nachylenia wynosi  $-m/(m+2)$ . Parametry  $k$ ,  $m$  można również wyznaczyć poprzez najlepsze dopasowanie funkcji potęgowej do wyznaczonych doświadczalnie punktów  $P_{(i)}, \frac{dh_p}{dP}_{(i)}$ .

Zależność  $\frac{1}{D} \frac{dh_p}{dP}(P)$  wyznacza się korzystając z cyklicznej krzywej obciążenie-częściowe odciążenie-ponowne obciążenie (rys. 2.28). Wzór (2.47), który służył do generowania krzywej  $P-h_p$  poprzez odejmowanie fragmentów funkcji przedstawiających obciążenie i odciążenie według metody opisanej w rozdziale 2.4 możemy napisać w postaci:

$$\frac{\Delta h_p}{\Delta P} = \frac{\Delta h_t}{\Delta P} - \frac{\Delta h_e}{\Delta P}. \quad (2.51)$$

Wzór (2.51) dla nieskończenie małych przyrostów przedstawia różnicę pochodnych

$$\frac{dh_p}{dP} = \frac{dh_t}{dP} - \frac{dh_e}{dP}, \quad (2.52)$$

z której można obliczyć pochodną funkcji zagłębienia plastycznego względem siły.

Występującą po prawej stronie (2.52) pochodną zagłębienia całkowitego  $dh/dP$  wyznacza się jako tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej obciążenia, a pochodną części sprężystej zagłębienia  $dh_e/dP$  jako tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej odciążenia w punkcie zwrotu obciążenia  $P_i$ .

Zatem zależność  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  może być wyznaczona doświadczalnie tylko w tych punktach, w których następuje częściowe odciążenie. Dzięki zastąpieniu występujących w (2.47) przyrostów przez pochodne, odejmowanie odkształceń występujących w procesach obciążenia i odciążenia następuje ściśle w tej samej konfiguracji materiału.

## 2.5.2 Praktyczne wyznaczanie pochodnych krzywej obciążenia i krzywej odciążenia

Dla stosowania proponowanej metody identyfikacji konieczne jest wyznaczenie pochodnych krzywych obciążenia i odciążenia w punktach zwrotu obciążenia. W niniejszym rozdziale zostaną omówione pewne trudności techniczne związane z wyznaczaniem tych pochodnych na przykładzie eksperymentów numerycznych. W pojedynczym eksperymencie numerycznym lub fizycznym wyznaczana jest jedna krzywa obciążenia  $h_t(P)$ , oraz kilka krzywych odciążenia  $h_e(P)$ , odpowiadających różnym wartościom zwrotu obciążenia, rys. 2.28. Krzywe eksperymentalne otrzymujemy w postaci zbioru punktów  $(h_i, P_i)$ . Generalnie wyznaczanie pochodnych zależności mierzonych doświadczalnie lub obliczonych metodami numerycznymi następuje dużo problemów. Można tu stosować trzy różne podejścia:

- metoda różnic skończonych

$$\frac{dh_t}{dP_i} = \frac{h_{t(i)} - h_{t(i-1)}}{P_i - P_{i-1}} \quad (2.53)$$

gdzie  $P_i, h_{t(i)}$  współrzędne i-tego punktu pomiarowego

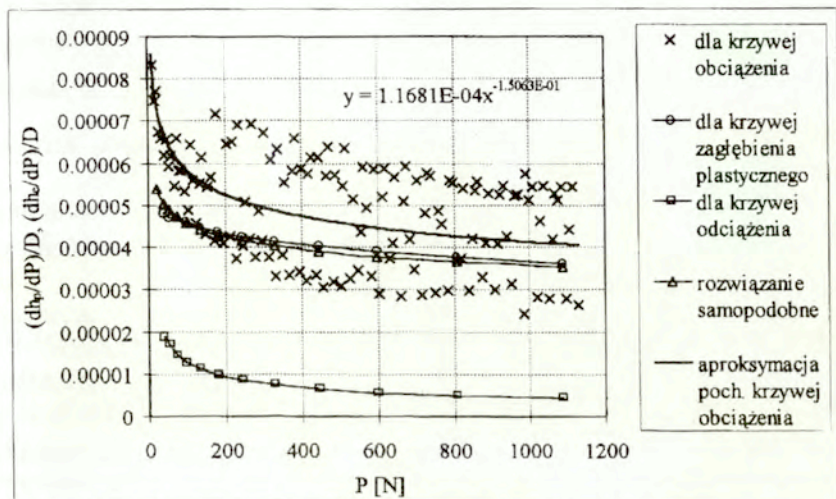
- metoda aproksymacji lokalnej polegająca na tym, że punkty krzywych  $h_e(P)$ , oraz krzywej  $h_t(P)$  są aproksymowane osobnymi funkcjami



różniczkowalnymi w sąsiedztwie punktów zwrotnych. Interesujące nas wartości  $dh_e(P)/dP$ ,  $dh_i(P)/dP$  obliczamy jako pochodne tych funkcji w punktach zwrotu obciążenia.

- metoda aproksymacji globalnej, w której całe krzywe odciążenia  $h_e(P)$ , oraz krzywa obciążenia  $h_i(P)$  są aproksymowane osobnymi funkcjami różniczkowalnymi. Funkcje te są następnie różniczkowane w punktach zwrotu obciążenia.

Na rys. 2.45 przedstawiono wykresy pochodnych  $dh_i(P)/dP$  obliczonych metodą różnic skończonych na podstawie krzywej obciążenie-odciążenie otrzymanej z eksperymentu numerycznego.



Rys. 2.45 Obliczanie pochodnej krzywej obciążenia metodą różnic skończonych, oraz wyznaczenie pochodnej zagłębienia plastycznego.

W eksperymencie przyjęto krzywą rozciągania w postaci potęgowej, według (2.49(1)), z rozdz. 2.3.2. Możemy zaobserwować, że korzystanie z metody różnic skończonych, (2.53), w odniesieniu do krzywej obciążenia  $h_i(P)$  powoduje powstanie dużych skoków wartości pochodnej w kolejnych punktach pomiarowych  $P_i$ . Dla określenia pochodnej w interesujących nas punktach zwrotu obciążenia konieczne było znalezienie funkcji wygładzającej (niekoniecznie różniczkowalnej) aproksymującej punkty  $\frac{dh_i}{dP}(P)_i$  otrzymane z (2.53). Wykres takiej funkcji w postaci potęgowej (wraz z równaniem) podano na rys. 2.45. Na rysunku tym podano również wartości pochodnej

$dh_e(P)/dP$ , oraz wartości obliczonej według (2.52) pochodnej krzywej plastycznego zagłębienia  $dh_p(P)/dP$ , które porównano z wartościami teoretycznymi obliczonymi z rozwiązania samopodobnego (2.50) dla  $k, m$  takich jak w eksperymencie numerycznym,  $k=800\text{MPa}$  i  $m=0.24$ . Pomimo dużego rozrzutu punktów  $\frac{dh_t}{dP_i}$  otrzymano dość dobrą zgodność krzywych

$dh_p(P)/dP$ . Należy jednak zwrócić uwagę, że zgodność tę otrzymano dla szczególnego przypadku, gdy krzywa wzmocnienia plastycznego oraz krzywa siła zagłębienie spełniają prawo potęgowe (przyjęta potęgowa postać funkcji wygładzającej była zgodna z charakterystyką materiału również przyjętą w postaci potęgowej). W ogólnym przypadku dokładność aproksymacji pochodnej może być znacznie gorsza ze względu na to, że rozrzut rzędnych punktów  $\frac{dh_t}{dP_i}$  jest tego samego rzędu co wartości tych rzędnych. W dalszej części pracy zrezygnowano z tej metody wyznaczania pochodnej krzywej obciążenia.

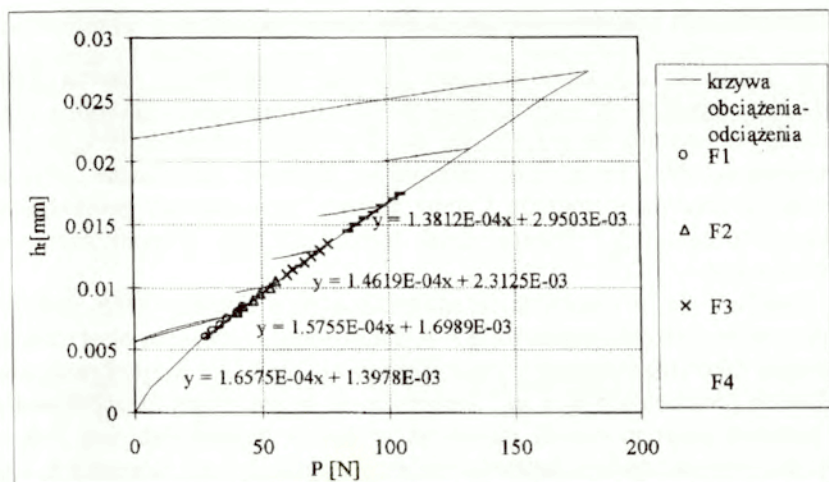
Natomiast w przypadku obliczania pochodnych krzywych odcieżenia  $h_e(P)$ , stosowanie metody różnic skończonych daje dobre rezultaty. Przez punkty  $\frac{dh_e}{dP_i}$  wyznaczone według wzoru

$$\frac{dh_e}{dP_i} = \frac{h_{e(i)} - h_{e(i-1)}}{P_i - P_{i-1}} \quad (2.54)$$

można przeprowadzić krzywe gładkie i nie trzeba stosować funkcji wygładzających, (rys. 2.45)

Do wyznaczenia pochodnej krzywych obciążenia zbadano również przydatność metody aproksymacji lokalnej. Przykład lokalnej aproksymacji krzywej  $h_t(P)$  przy pomocy funkcji liniowych  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , przedstawiono na rys. 2.46, gdzie podano również równania tych funkcji.

Można zaobserwować, że pochodne tych funkcji maleją monotonicznie wraz ze wzrostem  $P$ . Ogólnie wyniki otrzymane tą metodą zależą od rodzaju funkcji wykorzystanych do aproksymacji punktów pomiarowych oraz od tego w jakim otoczeniu punktów zwrotu obciążenia wykonywana jest aproksymacja. Niekiedy dla spełnienia warunku monotoniczności pochodnych konieczny jest kłopotliwy dobór funkcji aproksymujących i długości przedziałów, w których są one stosowane.



Rys.2.46 Aproksymacja lokalna krzywej obciążenia przy pomocy funkcji liniowych.

Jej efektywność zależy w dużym stopniu od subiektywnych decyzji osoby, która ją stosuje. Z tego względu zrezygnowano również z tej metody wyznaczania pochodnych.

Według doświadczeń autora dobre rezultaty otrzymuje się stosując metodę aproksymacji globalnej przy pomocy na przykład funkcji potęgowej. Ze względu na to, że zależność  $P-h_t$  (zakres sprężysto-plastyczny) nie spełnia prawa potęgowego, funkcja potęgowa nie przechodzi dokładnie przez wszystkie punkty pomiarowe, w całym zakresie obciążenia. Jednak dobrą dokładność uzyskuje się jeśli do wyznaczenia parametrów funkcji aproksymującej uwzględni się tylko te punkty pomiarowe ( $P_i, h_{ti}$ ), które są położone pomiędzy skrajnymi punktami zwrotu obciążenia,  $P_{min}, P_{max}$ , rys.2.29. Na rys.2.50 przedstawiono przykład aproksymacji krzywej obciążenia  $P-h_t$  otrzymanej drogą numeryczną. Cała krzywa obejmuje zakres obciążeń 0-180N, jednak do aproksymacji wzięto punkty z zakresu 40N-180N, to jest  $P_{min}, P_{max}$  z rys. 2.48, gdyż dla tego zakresu otrzymuje się dobre dopasowanie punktów pomiarowych i krzywej potęgowej. Na wykresie podano również równanie krzywej aproksymującej. Różniczkując to równanie otrzymujemy pochodną krzywej  $h_t(P)$ . Dobre wyniki można również uzyskać stosując do aproksymacji  $h_t(P)$  sumę funkcji potęgowych.

Metodę aproksymacji globalnej wybrano do wyznaczania pochodnych w dalszej części pracy.

### 2.5.3 Weryfikacja i porównanie proponowanych metod.

W rozdziale 2.3 przedstawiono metodę identyfikacji (zwaną dalej metodą I) polegającą na odejmowaniu funkcji obciążenia i odciążenia oraz weryfikację tej metody na przykładzie wyników eksperymentów fizycznych i numerycznych. W niniejszym paragrafie zostaną porównane wyniki identyfikacji otrzymane metodą I, oraz metodą odejmowania pochońnych, opisaną w rozdz. 2.5.1 (zwaną dalej metodą II) dla różnych zakresów zagłębienia kuli.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach przy pomocy MES zostanie wyznaczona krzywa siła-zagłębienie  $P-h_t$  dla materiału sprężysto-plastycznego przyjmując jako charakterystykę plastycznego wzmocnienia krzywą potęgową o zadanych parametrach  $k_g$  i  $m_g$ . Parametry te są następnie identyfikowane przy pomocy proponowanych metod na podstawie analizy krzywej  $P-h_t$ , a otrzymane wartości tych parametrów oznaczamy jako  $k_c$  i  $m_c$ . Wartości  $k_c$  i  $m_c$  porównywane są następnie z  $k_g$  i  $m_g$ . W przypadku obydwu metod korzystamy z analizy krzywej  $P-h_t$  otrzymanej w jednym eksperymencie numerycznym w cyklicznym procesie obciążenia - częściowego odciążenia - ponownego obciążenia. Celem tych porównań jest pokazanie wrażliwości obydwu metod identyfikacji na zakres obciążeń, którym poddawana jest kulka w teście wciskania. Ustalenie minimalnego zakresu zagłębienia kuli, dla którego uzyskuje się wystarczająco dokładne wyniki identyfikacji jest istotne szczególnie w badaniach cienkich warstw. W tym przypadku, jeśli maksymalne zagłębienie kuli jest odpowiednio mniejsze od grubości warstwy, można pominąć wpływ własności podłoża na generowane krzywe  $P-h_p$  i metoda może być zastosowana do identyfikacji własności danej warstwy. Porównania metod I i II dokonano najpierw w zakresie obciążenia odpowiadającym  $a/D < 0.09$ .

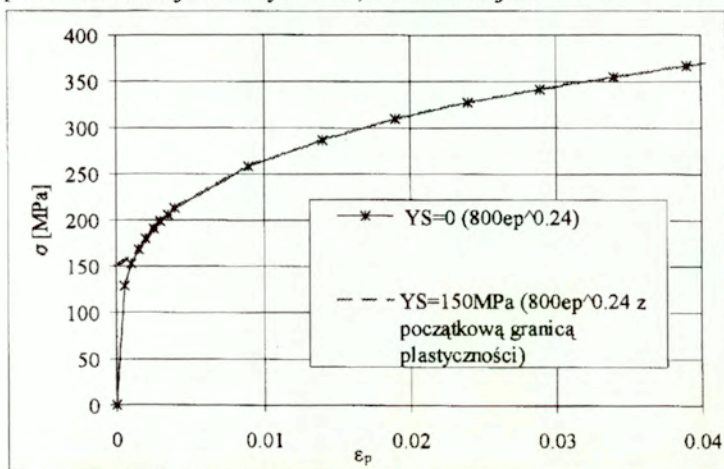
#### 2.5.3.1 Identyfikacja parametrów $k$ i $m$ na podstawie krzywej siła-zagłębienie wyznaczonej dla małych obciążeń ( $0 < a/D < 0.09$ ).

Do eksperymentu numerycznego przyjęto podobnie jak w rozdz. 2.3.2 następujące parametry materiałowe  $E=74500\text{MPa}$ ,  $\nu=0.3$ , oraz krzywą wzmocnienia plastycznego

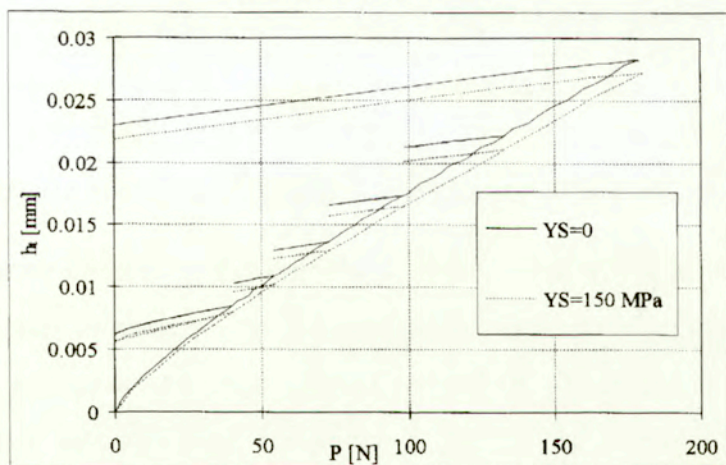
$$\sigma = 800 \varepsilon_p^{0.24} \quad (2.55)$$

Obliczenia wykonano przy pomocy programu MARC. Krzywa (2.55) została wprowadzona do programu w postaci linii łamanej, przyjęto  $D=2.5\text{mm}$ . Zadanie rozwiązano jako sprężysto-plastyczne przyjmując, że

odkształcenie plastyczne zaczyna się już dla bardzo małych wartości naprężenia (2 MPa), a więc praktycznie od początku obciążenia narastają składowe sprężysta i plastyczna odkształcenia, co jest zgodne z modelem konstytutywnym 2.1. Przyjęta do symulacji numerycznych krzywa  $\sigma-\varepsilon_p$ , (2.55), przedstawiona jest na rys. 2.47, oznaczona jako YS=0.



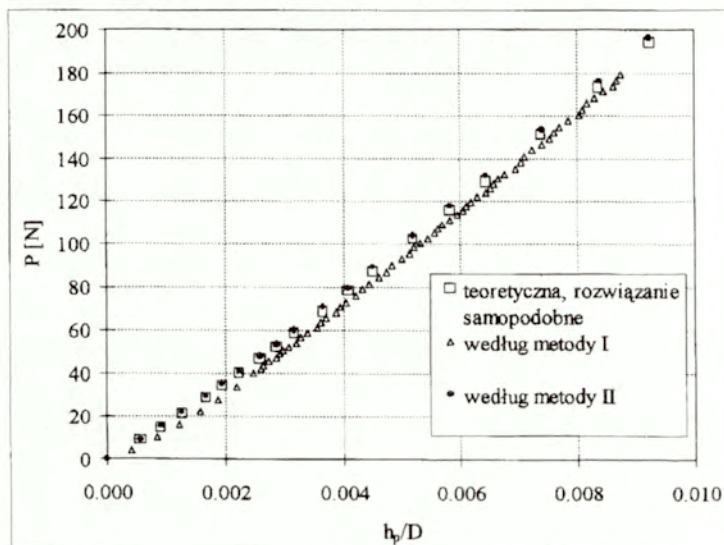
Rys. 2.47 Krzywe  $\sigma-\varepsilon_p$  identyfikowane w eksperymencie numerycznym dla weryfikacji metody.



Rys.2.48 Krzywe  $h_t(P)$  odpowiadające różnym krzywym  $\sigma-\varepsilon_p$ .

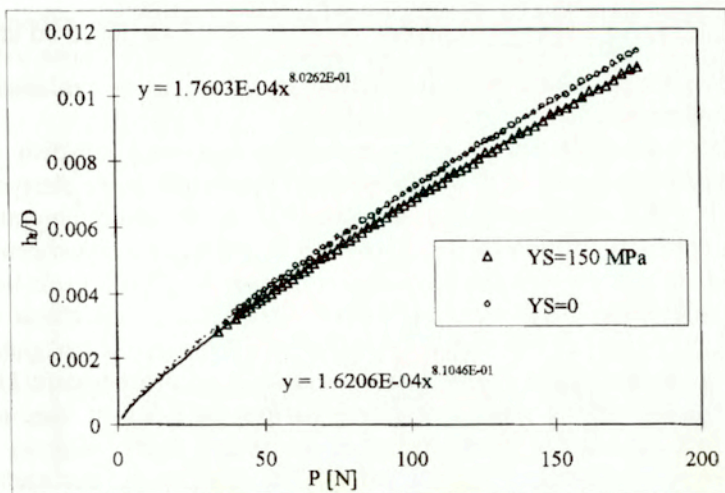
Dla materiału opisanego równaniem (2.55) obliczono krzywą siła-zagłębienie  $P-h_t$ , przyjmując zwrot obciążenia dla następujących wartości siły  $P_t=40\text{N}$ ,  $54\text{N}$ ,  $73\text{N}$ ,  $98\text{N}$ ,  $132\text{N}$ ,  $180\text{N}$ , co odpowiada  $f=1.35$ . Otrzymana krzywa  $P-h_t$  przedstawiona jest na rys. 2.48, oznaczona jako  $YS=0$ .

Korzystając z tej krzywej i z metody I wygenerowano krzywą  $P-h_p$ , rys. 2.49. Bazując na tej samej krzywej penetracji  $YS=0$ , rys. 2.48, zastosowano metodę II. Wymagało to w pierwszej kolejności znalezienia funkcji aproksymującej tę część krzywej  $YS=0$  przedstawionej na rys. 2.48, która odnosi się do obciążenia. Punkty tej krzywej oraz funkcję aproksymującą w postaci potęgowej przedstawiono na rys. 2.50.

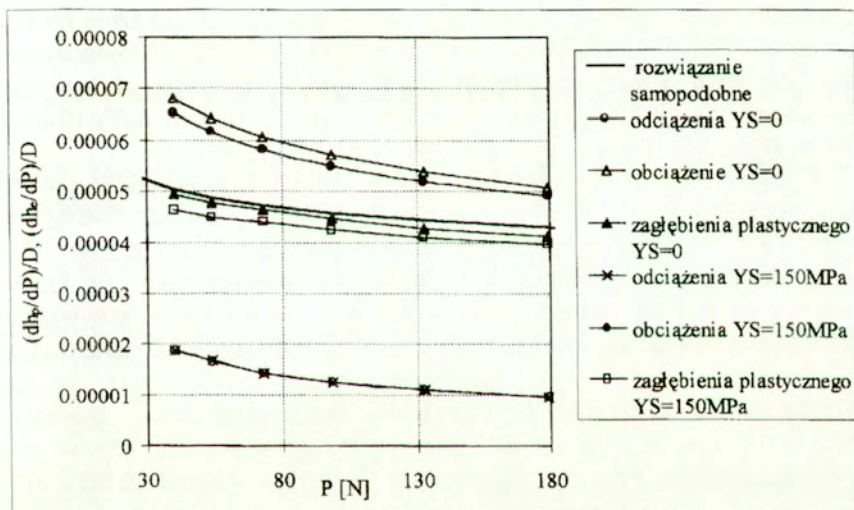


Rys. 2.49. Krzywe  $P-h_p$  dla materiału opisanego równaniem (2.55), ( $YS=0$ ), wygenerowane metodami I i II.

Na rys 2.51 przedstawiono wykresy pochodnych krzywych obciążenia i odciążenia w funkcji siły, oraz krzywą  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  wyznaczoną jako różnica tych pochodnych. Dla porównania przedstawiono też teoretyczną krzywą  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  według wzoru (2.50) z rozwiązania samopodobnego przyjmując  $m=0.24$  i  $k=800\text{MPa}$  (identycznie jak w (2.55)).



Rys.2.50 Przykłady aproksymacji krzywej obciążenia funkcją potęgową.



Rys. 2.51 Pochodne krzywej zagłębienia sprężystego, całkowitego i plastycznego dla  $a/D < 0.09$

Widać, że wygenerowana krzywa  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  różni się nieco od krzywej teoretycznej, odpowiada ona nieco sztywniejszemu niż w rzeczywistości zachowaniu materiału.

Wyniki identyfikacji przeprowadzonej przy pomocy obydwu metod porównano na rys. 2.49 i 2.52. Na rys.2.49 porównane są krzywe plastycznego zagłębienia  $P(h_p)$  odpowiadające parametrom  $m, k$  zidentyfikowanym metodą I i II, oraz parametrom rzeczywistym  $m=0.24, k=800MPa$ . Krzywa penetracji otrzymana metodą I w początkowej fazie zagłębienia ( $P < 40N$ ) jest bardziej podatna niż krzywa teoretyczna, natomiast dla większych sił zbliża się do krzywej teoretycznej. Niedokładność tę można wytłumaczyć w ten sposób, że dla sił mniejszych od 40 N odejmowany jest tylko jeden segment krzywej  $h_t(P)$ , rys. 2.48, wpływ ugięć sprężystych na krzywą  $P-h_t$  jest więc na tym odcinku niedoszacowany, zagłębienie plastyczne jest zatem większe niż w rzeczywistości. Niedokładność ta znika dla większych obciążeń. Dla uzyskania lepszej dokładności metody I przy tym zakresie obciążeń, (0-180N), należałoby program obciążenia-odciążenia rozpocząć od  $P_1 < 40N$

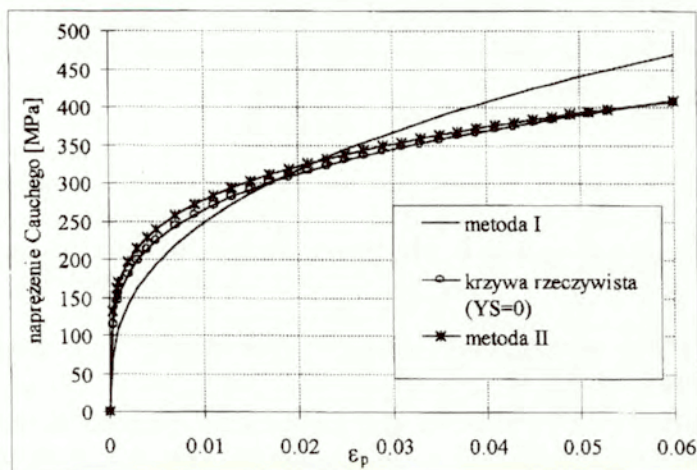
Krzywa  $P(h_p)$  otrzymana metodą II pokrywa się z krzywą teoretyczną w początkowej fazie obciążania, natomiast dla większych sił wskazuje na zbyt sztywne zachowanie materiału. Może to wynikać z faktu niedoszacowania pochodnej zagłębienia całkowitego  $dh_t/dP$  przy większych obciążeniach spowodowanego za małą dokładnością aproksymacji funkcji  $h_t(P)$  (funkcja potęgowa).

Krzywe rozciągania materiału  $YS=0$  zidentyfikowane przy pomocy omawianych metod przedstawiono na rys. 2.52. Według metody I otrzymano  $k=1280MPa$  i  $m=0.356$ , natomiast według metody II  $k=745MPa$  i  $m=0.216$ . Zakres odkształcenia plastycznego, w którym porównywane są krzywe przyjęto jako 0-0.05. Górna granica zakresu jest równa w przybliżeniu odkształceniu zastępczemu pod kulką,  $\varepsilon_{eff}$ , odpowiadającemu maksymalnej sile obciążającej (180N) przyjętej w teście,  $\varepsilon_{eff}=0.4a/D=0.036$ . W tym zakresie charakter krzywych rozciągania jest jakościowo zgodny z charakterem odpowiadających im krzywych  $P(h_p)$ ; na przykład krzywa  $\sigma-\varepsilon_p$  wyznaczona metodą I jest bardziej podatna dla małych odkształceń niż krzywa teoretyczna.

Widzimy, rys. 2.52, że korzystając z tego samego eksperymentu numerycznego, przeprowadzonego dla małych zagłębień kuli,  $0 < a/D < 0.09$ , w przypadku obydwu metod otrzymujemy charakterystykę materiału o większej niż w rzeczywistości sztywności. Dokładność identyfikacji jest jednak znacznie lepsza w przypadku metody II niż metody I.



W przypadku metody II wyniki w mniejszym stopniu zależą od przedziału obciążeń, ponadto nie jest konieczne kłopotliwe określanie punktu pierwszego odciążenia i przedziału, w którym odejmowane są funkcje.



Rys. 2.52 Krzywe rozciągania zidentyfikowane metodą I i II przy wykorzystaniu zakresu obciążeń odpowiadającego  $a/D < 0.9$ .

### 2.5.3.2 Identyfikacja parametrów $k$ i $m$ na podstawie krzywej siła-zagłębienie wyznaczonej w pełnym zakresie obciążeń ( $0 < a/D < 0.2$ ).

Porównania parametrów zidentyfikowanych przy pomocy obydwu proponowanych metod dokonano również w zakresie obciążeń odpowiadających większym obciążeniom to jest  $0 < a/D < 0.2$ . Wykonano eksperyment numeryczny, w którym przyjęto następujące wartości zwrotu obciążenia: 242.83, 327.95, 442.205, 597.39, 805.74, co odpowiada  $f=1.35$ .

W przypadku metody I poszukiwana krzywa  $P-h_p$  badanego materiału budowana jest poprzez składanie kolejnych segmentów, rys.2.28, zatem położenie segmentów odpowiadających dużym siłom zależy od kształtu segmentów odpowiadających mniejszym siłom. Budując krzywą w zakresie  $0.09 < a/D < 0.2$  korzysta się z danych dla zakresu  $0 < a/D < 0.09$ . Wyniki identyfikacji materiału  $YS=0$  metodą I, przy stosowanym zakresie obciążeń  $a/D < 0.2$  przedstawiono w rozdz.2.3, rys. 2.31.

Inaczej jest w przypadku metody II gdzie pochodne obciążenia i odciążenia mogą być odejmowane w dowolnym punkcie zwrotu obciążenia, a generowana wartość  $dh_p/dP$  obliczona w jednym punkcie nie zależy od wartości przyjmowanej w innym punkcie. Do identyfikacji mogą być wykorzystane pochodne obliczone na przykład wyłącznie w zakresie  $0.09 < a/D < 0.2$ , znajomość pochodnych z mniejszego zakresu nie jest konieczna. W rezultacie wielu doświadczeń numerycznych ustalono, że korzystając z metody II, dość dokładny wynik identyfikacji materiału  $YS=0$ , to jest  $k=816$ ,  $m=0.238$  można uzyskać już przy zagłębieniu kulki odpowiadającym  $a/D < 0.11$ , a więc w zakresie znacznie mniejszym niż  $a/D < 0.2$ . Zatem ta metoda jest bardziej przydatna do identyfikacji cienkich warstw. Wymaga to jednak bardzo dokładnego wyznaczania krzywych obciążenia odciążenia.

#### 2.5.4 Wpływ początkowej granicy plastyczności na dokładność identyfikacji.

Przedstawiona w rozdziale 2.5.3 weryfikacja proponowanych metod identyfikacji I i II dotyczyła materiału, spełniającego w sposób możliwie ścisły prawo konstytutywne

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{1/m} \quad (256)$$

Punkt początkowy krzywej wzmocnienia plastycznego miał współrzędne (0,0) i od początku procesu zagłębiania kuli występowały jednocześnie odkształcenia sprężyste i plastyczne.

Zauważmy, że proponowane metody (I i II) można podzielić na dwa etapy. Pierwszy etap polega na wykorzystaniu cyklicznej krzywej siła-zagłębienie całkowite w materiale sprężysto-plastycznym do wygenerowania krzywej siła-zagłębienie plastyczne lub jej pochodnej w pewnym fikcyjnym materiale sztywno-plastycznym. W drugim etapie z zależności  $P-h_p$  lub  $P-dh_p/dP$  dla materiału sztywno-plastycznego wyznacza się parametry  $k$  i  $m$  dla krzywej rozciągania tego materiału. Przyjmuje się, że identyczne prawo konstytutywne jest spełnione dla odkształceń plastycznych w badanym materiale sprężysto-plastycznym. Podstawowym założeniem w drugim etapie jest, że krzywa rozciągania spełnia równanie potęgowe.

Drugi etap proponowanych metod może być źródłem błędów identyfikacji, jeśli zależność  $\sigma-\varepsilon_p$  dla badanego materiału nie spełnia prawa potęgowego. Rzeczywiste materiały spełniają prawo potęgowe jedynie w

przybliżeniu. W tym podrozdziale pokażemy wynikające stąd błędy identyfikacji.

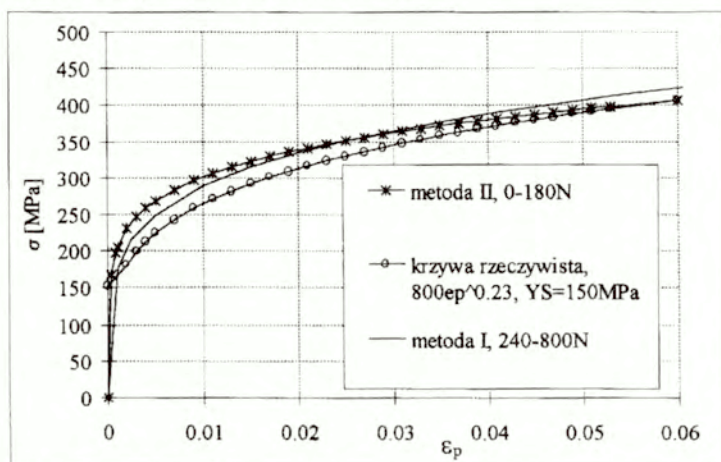
Zajmijmy się pewnym szczególnym przypadkiem krzywej rozciągania z początkową granicą plastyczności, gdy początek krzywej  $\sigma-\varepsilon_p$  nie pokrywa się z punktem  $(0,0)$ , lecz z  $(0,\sigma_0)$ , natomiast pozostałe punkty praktycznie pokrywają się z krzywą potęgową, rys. 2.47. Na rys. 2.47 przedstawiono dwie krzywe, z których jedna,  $YS=0$ , spełnia dokładnie prawo potęgowe, ( $k=800$ ,  $m=0.24$ ), natomiast druga krzywa, oznaczona jako  $YS=150\text{MPa}$  różni się od niej tylko położeniem punktu początkowego. Punkt ten odpowiada granicy plastyczności  $\sigma_0=150\text{MPa}$ . Różnica między krzywymi występuje jedynie w zakresie odkształceń  $0.0\pm 0.0015$ , dla większych odkształceń obie krzywe się pokrywają i w innych testach materiałowych, na przykład w teście rozciągania różnica między nimi jest niemal niezauważalna. Krzywą  $YS=150\text{MPa}$  opisuje dość dobrze równanie (2.34), o ile offset  $\varepsilon_{po}$  jest bardzo mały. Metody I i II zastosujemy do identyfikacji materiału opisanego taką krzywą i wynik porównamy z wynikiem identyfikacji materiału opisanego krzywą  $YS=0$ .

Okazuje się, że niewielka różnica krzywych rozciągania identyfikowanych materiałów może być łatwo zauważona w teście wciskania. Krzywe penetracji  $P-h_p$ , dla tych materiałów wyraźnie różnią się od siebie, rys. 2.48, 2.50. Podobnie różnią się generowane krzywe  $P-h_p$ . Efekt ten można wyjaśnić porównując stan odkształcenia pod kulą w materiale sztywno-plastycznym w obydwu przypadkach. W jednym przypadku ( $\sigma_0 > 0$ ) strefa materiału, w której naprężenia zredukowane są mniejsze niż 150 MPa (obejmuje ona materiał położony poniżej pewnej głębokości pod powierzchnią kontaktu kuli z półprzestrzenią) pozostaje nieodkształcona, a w drugim przypadku ( $\sigma_0 \approx 0$ ) podlega deformacji. Strefa ta teoretycznie rozciąga się do nieskończoności, zatem nawet niewielkie odkształcenia w tej strefie powodują zauważalne zmiany zagłębienia kuli  $h_p$ .

Identyfikacja według metody II (odejmowanie pochodnych) została pokazana na rys. 2.51, dla zakresu zagłębień  $0 < a/D < 0.09$ , gdzie przedstawiono wykresy pochodnych krzywych obciążenia, odciążenia i krzywej  $P-h_p$  (zaznaczone jako  $YS=150$ ). Porównując te wyniki z wynikami identyfikacji materiału, dla którego  $\sigma_0=0$  (oznaczonymi jako  $YS=0$ ) można zauważyć, że pochodne krzywych odciążenia w obydwu materiałach są takie same, natomiast pochodne krzywej obciążenia i krzywej  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  są mniejsze dla materiału z początkową granicą plastyczności ( $YS=150\text{MPa}$ ). Oznacza to, że zidentyfikowana krzywa  $\sigma-\varepsilon_p$  tego materiału jest zbyt „sztywna”. Błąd ten

jest relatywnie większy w zakresie obciążeń 0-180N niż w zakresie 242N-806N.

Krzywe rozciągania zidentyfikowane przy pomocy metod I i II na podstawie pomiarów krzywych penetracji wykonanych odpowiednio w zakresie 242N-806N i 0-180N dla materiału z początkową granicą plastyczności przedstawiono na rys. 2.53. Można stwierdzić, że w przypadku identyfikacji krzywej  $\sigma-\varepsilon_p$  z początkową granicą plastyczności, obie zidentyfikowane krzywe rozciągania są „sztywniejsze” niż rzeczywista krzywa materiału. Maksymalne zagłębienie kuli w teście wciskania, konieczne dla uzyskania zadanej dokładności identyfikacji jest znacznie mniejsze w przypadku metody II niż w przypadku metody I. Potwierdza to przydatność metody II do identyfikacji cienkich warstw.

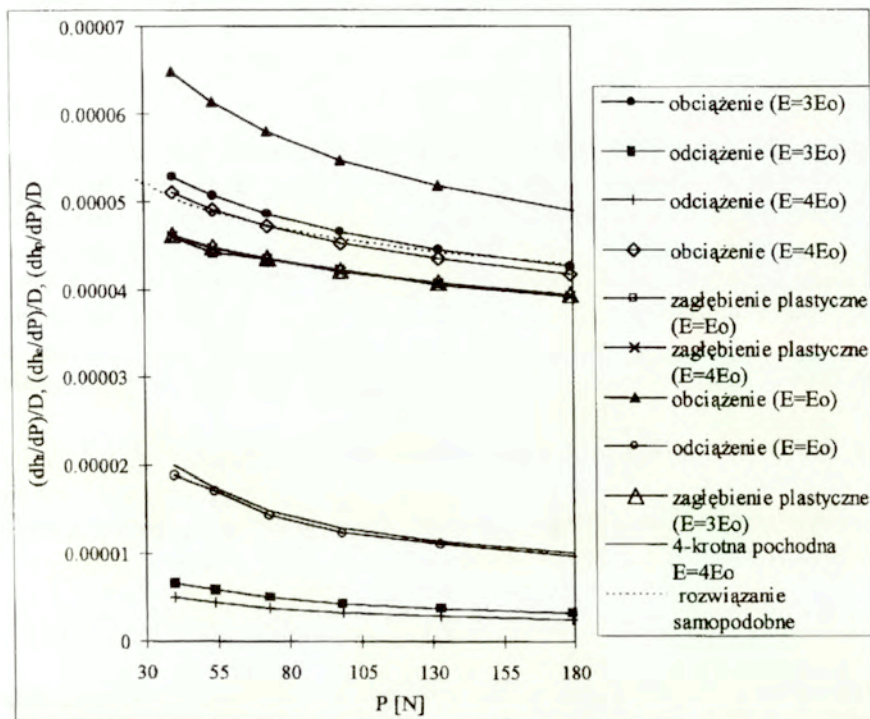


Rys 2.53. Krzywe rozciągania materiału z początkową granicą plastyczności zidentyfikowane na podstawie testu w zakresie 0-180N metodą II i 240-800N metodą I

### 2.5.5 Wpływ modułu Younga na identyfikowane parametry plastyczne.

Istotą omawianych tu metod identyfikacji jest pominięcie wpływu deformacji sprężystych na kształt mierzonych eksperymentalnie krzywych siła-zagłębienie całkowite (sprężysto-plastyczne) i korzystanie ze znanych rozwiązań dla materiału sztywno-plastycznego. Rezultaty identyfikacji nie zależą od sprężystych ugięć materiału, a więc powinny być również niezależne od sprężystych stałych materiałowych. Na rys 2.54 przedstawiono

wykresy pochodnych krzywych odciążenia i obciążenia dla różnych wartości modułu Younga to jest  $E=E_0$ ,  $E=3E_0$ ,  $E=4E_0$ , gdzie  $E_0=74500\text{MPa}$  jest podstawową wartością przyjmowaną we wszystkich omawianych eksperymentach numerycznych. W eksperymencie numerycznym przyjęto, że wzmocnienie plastyczne jest opisane krzywą z początkową granicą plastyczności ( $YS=150\text{MPa}$ , rys 2.47). Obliczenia wykonano dla zakresu obciążeń 0-180N.



Rys. 2.54. Identyfikacja krzywych  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  przy różnych wartościach modułu Younga

Widzimy że moduł Younga wpływa jedynie na wartość pochodnych krzywych obciążenia i odciążenia, natomiast otrzymana w wyniku odejmowania krzywa  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  jest taka sama dla wszystkich wartości modułu Younga. Krzywa ta jest położona poniżej krzywej teoretycznej, gdyż

została wyznaczona dla materiału z początkową granicą plastyczności. Wyniki otrzymane proponowaną metodą są więc niezależna od modułu Younga oczywiście przy założeniu, że iloraz modułu Younga i granicy plastyczności jest tego samego rzędu jak w materiałach występujących w praktyce inżynierskiej.

Warto również zauważyć, że pochodna zagłębienia sprężysto-plastycznego  $\frac{dh_t}{dP}(P)$  dla materiału z początkową granicą plastyczności i zwiększonym modułem Younga ( $E=4E_0$ ) jest bardzo bliska pochodnej zagłębienia plastycznego  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  w materiale sztywno plastycznym spełniającym prawo potęgowe (2.55) (linia przerywana na rys. 2.54).

Z przedstawionych na rys. 2.54 wykresów wynika również, że z testu monotonicznego wciskania kuli (bez odciążeń) nie można jednoznacznie zidentyfikować własności materiału. Krzywa penetracji materiału sprężysto-plastycznego z początkową granicą plastyczności ( $YS=150\text{MPa}$ , rys 2.47) i niewielką podatnością sprężystą,  $E=4E_0$ , przebiega niemal identycznie jak dla materiału sztywno plastycznego bez początkowej granicy plastyczności, o podobnej charakterystyce  $\sigma-\varepsilon_p$ , (patrz krzywe „obciążenie ( $E=4E_0$ )” i „rozwiązanie samopodobne” rys. 2.54).

Z wykresów na rys. 2.54 można wyciągnąć jeszcze jeden ważny wniosek. Porównując pochodne krzywych odciążenia otrzymane dla różnych wartości modułu Younga możemy stwierdzić, że z dobrą dokładnością istnieje liniowa zależność między nimi

$$\frac{dh_e}{dP}(P, sE^*) \approx \frac{1}{s} \frac{dh_e}{dP}(P, E^*), \quad (2.57)$$

gdzie: współczynnik  $s$  zależy od granicy plastyczności i wzmocnienia materiału.

Wzór ten jest prostą konsekwencją faktu, że w początkowej fazie odciążenia (rozdz. 2.2) nie zmienia się geometria kontaktu stąd kształt krzywej odciążenia w tej fazie zależy liniowo tylko od własności sprężystych materiału. Podobną obserwację w odniesieniu do wglębniaka Vickersa można znaleźć w pracy [8]. Wystarczy zatem wyznaczyć krzywą  $\frac{dh_e}{dP}(P)$  dla jednej wartości modułu Younga, a dla pozostałych wartości może być ona znaleziona za pomocą zwykłego liniowego skalowania. Przykład takiego skalowania przedstawiono na rys. 2.54.

Korzystając z wzorów podanych w rozdz. 2.2 można również znaleźć zależność między modułem Younga, a całkowitym przemieszczeniem  $h_e$  kuli w trakcie odciążenia dla materiałów spełniających prawo 2.1. Proces odciążenia kuli może być potraktowany jako proces kontaktu sztywnej kuli o promieniu  $D$  z nieką kulistą o promieniu  $D_p$  ( $D_p > D$ ) powstałą w wyniku odkształcenia plastycznego materiału, rozdz. 2.2. Krzywa odciążenia zależy od własności sprężystych materiału, oraz od średnicy niecki i może być z pewną dokładnością opisana wzorem Herta (Załącznik Z1):

$$h_e(P) = \sqrt[3]{\frac{9}{8}(1-\nu^2)^2 \left(\frac{1}{D_{eq}^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} P^{\frac{2}{3}}} \quad (2.58)$$

Dla ustalonej wartości  $P$  iloraz sprężystych cofnięć kuli  $h_{e1}$  i  $h_{e2}$  w materiałach, dla których moduły Younga wynoszą  $E_1$  i  $E_2$  wyraża się wzorem

$$\frac{h_{e1}}{h_{e2}} = \left(\frac{E_2 D_{eq2}^{\frac{1}{2}}}{E_1 D_{eq1}^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{D_{eq2}}{D_{eq1}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.59)$$

gdzie:

$$\frac{1}{D_{eq}} = \frac{1}{D} - \frac{1}{D_p} \quad (2.60)$$

biorąc pod uwagę (2.60) mamy

$$\frac{D_{eq2}}{D_{eq1}} = \frac{D_{p2}(D_{p1} - D)}{D_{p1}(D_{p2} - D)} \quad (2.61)$$

Uwzględniając (rozdz.2.2), że średnica niecki  $D_p$  może być obliczona jako funkcja zagłębienia trwałego  $h_p$  i sprężystego cofnięcia kuli  $h_e$  po całkowitym odciążeniu

$$D_p = D \left(1 + \frac{0.38 h_e}{h_p c^2}\right), \quad (2.62)$$

iloraz (2.61) możemy zapisać jako

$$\frac{D_{eq2}}{D_{eq1}} = \frac{h_{p2} c^2 + 0.38 h_{e2}}{h_{p1} c^2 + 0.38 h_{e1}} \frac{h_{e1}}{h_{e2}} \quad (2.63)$$

Wstawiając (2.63) do (2.59) mamy

$$\frac{h_{e1}}{h_{e2}} = \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{h_{p2}c^2 + 0.38h_{e2}}{h_{p1}c^2 + 0.38h_{e1}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{E_2}{E_1} W \quad (2.64)$$

Na podstawie eksperymentów numerycznych współczynnik  $W$  w (2.64) można oszacować w następujący sposób. Dla  $E_0 < E < 4E_0$  zagłębienie trwałe  $h_p$  nie zmienia się w istotny sposób i dla wartości  $E$  należących do tego przedziału można przyjąć  $h_{p1} = h_{p2}$ . Dla większości materiałów spełnione jest równanie

$$h_p = th_e, \quad t > 3 \quad (2.65)$$

zatem możemy przyjąć, że

$$W = \left( \frac{h_{p2}c^2 + 0.38h_{e2}}{h_{p1}c^2 + 0.38h_{e1}} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1$$

$$\frac{h_{e1}}{h_{e2}} \approx \frac{E_2}{E_1} \quad (2.66)$$

Dla obliczeń wykonywanych w naszym przypadku, dla  $E_1 = E_0$ ,  $E_2 = 4E_0$ ,  $h_{e1}/h_{e2} = 3.78$ ,  $W = 0.92$ , a dla  $E_1 = 3E_0$ ,  $E_2 = 4E_0$ ,  $h_{e1}/h_{e2} = 1.33$ ,  $W = 0.99$ . Dokładność oszacowania (2.66) jest tym większa im mniejsza jest różnica między  $E_1$  i  $E_2$ . Z eksperymentów numerycznych wykonanych przez autora wynika, że zależności (2.57), (2.66) obowiązują jeśli  $s \leq 4$ . Zatem dla oszacowania modułu Younga można też korzystać z równania (2.66), jednak jest ono mniej dokładne niż równanie 2.57.

### 2.5.6 Identyfikacja modułu Younga

Korzystając z równania (2.57) można zidentyfikować moduł Younga badanego materiału. Nieznany współczynnik  $s$  w tym równaniu można wyznaczyć z eksperymentu numerycznego obliczając iloraz pochodnych krzywych odciążenia badanego materiału i pewnego fikcyjnego materiału porównawczego. Algorytm identyfikacji składa się z następujących kroków:

- identyfikacja krzywej wzmocnienia plastycznego  $\sigma$ - $\varepsilon_p$  jedną z proponowanych tu metod
- numeryczne wyznaczenie krzywej odciążenia dla materiału porównawczego, którego krzywa wzmocnienia plastycznego jest taka jak zidentyfikowana, a moduł Younga jest równy pewnej porównawczej



- wartości  $E_c$ ; obliczenie  $\frac{dh_e}{dP}(P_{ri})_{(c)}$  w  $n$  ustalonych punktach zwrotu obciążenia  $P = P_{r1}, \dots, P_{rn}$ .
- eksperymentalne wyznaczenie pochodnych krzywej odciążenia  $\frac{dh_e}{dP}(P_{ri})_{(s)}$  w badanym materiale w  $n$  punktach zwrotu obciążenia
  - obliczenie poszukiwanego modułu Younga  $E_s$  jako średniej z wzorów

$$E_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} \frac{\frac{dh_e}{dP}(P_{ri})_{(c)}}{\frac{dh_e}{dP}(P_{ri})_{(s)}} E_c \quad (2.67)$$

Z przedstawionych w poprzednim rozdziale rozważań można wnioskować, że z identyfikacji własności sprężystych według wzoru (2.67) można otrzymać dość dobre wyniki nawet wtedy, gdy krzywa wzmocnienia plastycznego  $\sigma\text{-}\varepsilon_p$  nie jest zidentyfikowana wystarczająco dokładnie. Oczywiście dla uzyskania dobrej dokładności iloraz  $E/\sigma_o$  powinien być wystarczająco duży, warunek ten jest najczęściej spełniony w występujących w praktyce materiałach (problem ten zostanie dokładniej omówiony w rozdziale 2.6).

## 2.6 Identyfikacja parametrów plastycznych materiałów spełniających

prawo  $\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon_p^m$

W proponowanych dotąd w rozprawie metodach identyfikacji wykorzystywane jest rozwiązanie samopodobne, odnoszące się do materiałów sztywno plastycznych spełniających potęgowe prawo wzmocnienia plastycznego. Temu prawu odpowiada w materiale sprężysto-plastycznym równanie (2.1). W poprzednich rozdziałach dokonano weryfikacji proponowanych metod identyfikacyjnych; do interpretacji wyników eksperymentów numerycznych stosowano model materiału (2.1). Stwierdzono, że jeśli prawo wzmocnienia plastycznego badanego materiału jest bardziej złożone maleje dokładność identyfikacji.

Równanie (2.1) jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnego prawa wzmocnienia

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{k} \right)^{1/m}, \quad (2.70)$$

gdzie:  $\sigma_0$  - jest początkową granicą plastyczności.

Dla identyfikacji materiałów opisanych prawem (2.70) przy pomocy jednej z opisanych tu metod potrzebne jest rozwiązanie analityczne (analogicznie do rozwiązania samopodobnego) problemu wciskania kuli w materiał sztywno-plastyczny spełniający równanie

$$\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon_p^m \quad (2.71)$$

to znaczy znalezienie funkcji  $S$  uzależniającej siłę zagłębiającą kulę od trzech parametrów materiałowych i zagłębienia plastycznego  $h_p$

$$P = S(k, m, \sigma_0, \frac{h_p}{D}). \quad (2.72)$$

Rozwiązanie takie nie jest znane autorowi. W niniejszym rozdziale zostanie zaproponowana taka funkcja i zastosowana do identyfikacji parametrów  $\sigma_0$ ,  $k$  i  $m$ . Dla określenia tej funkcji skorzystamy z rozwiązania samopodobnego. Krzywa w postaci (2.71) jest szczególnym przypadkiem sumy krzywych potęgowych

$$\sigma = k_1 \varepsilon_p^{m_1} + k \varepsilon_p^m \quad (2.73)$$

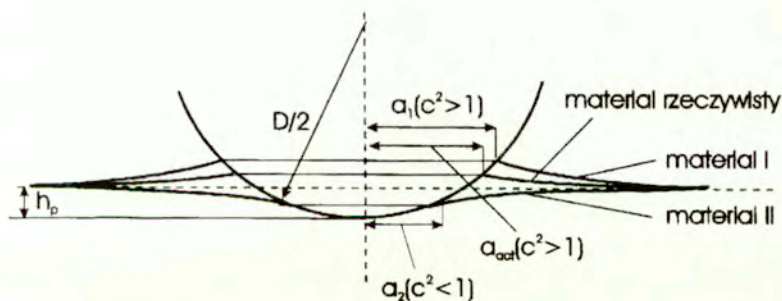
przy założeniu, że  $m_1 \approx 0$ ,  $k_1 = \sigma_0$ .

Pierwszy składnik sumy (2.73) przedstawia materiał sztywno-idealnie plastyczny, którego granica plastyczności jest równa  $\sigma_0$ . Drugi składnik jest

odpowiedzialny za wzmocnienie materiału. Materiał opisany pierwszym składnikiem nazywamy dalej umownie materiałem I natomiast materiał opisany drugim składnikiem-materiałem II. Warto zauważyć, że obydwa składniki sumy (2.71) spełniają prawo potęgowe i do każdego osobno można stosować rozwiązanie samopodobne. Jednakże, w testach wciskania wykonanych niezależnie dla materiałów I i II występują zupełnie różne geometrie odcisku. Wynika to z faktu, że wykładniki  $mI$  i  $m$  mają różne wartości. Od wartości wykładnika  $m$  zależy wartość  $c^2(m)$ , która jest miarą wysokość wypłytki, ( $c^2 > 1$  -wypłytki,  $c^2 < 1$  -zapadnięcie materiału). Dla ustalonego zagłębienia kuli  $h$ , promień kontaktu  $a$ , zatem i pole kontaktu zależy od wysokości wypłytki, rys.2.60, zgodnie z wzorem

$$a^2 = c^2 hD \quad (2.74)$$

Wartości  $mI$  i  $m$  można oszacować biorąc pod uwagę fakt, że model (2.71) stosuje się tylko do tych materiałów, których krzywej rozciągania nie można aproksymować przy pomocy prostszego równania, to jest  $\sigma = k\varepsilon_p^m$ . Dla takich materiałów parametr  $mI$  przyjmujemy zawsze jako bliski 0, natomiast parametr  $m$  mieści się praktycznie w zakresie (0.4÷0.8). Zatem w materiale I występuje zawsze wypłytki, natomiast w materiale II zapadnięcie materiału.



Rys. 2.60 Geometrie odcisku dla różnych wartości wzmocnienia plastycznego.

Dla określenia postaci funkcji  $S$  wykorzystamy zależności między krzywymi  $\sigma-\varepsilon_p$  i  $P-h_p$  dla materiału spełniającego prawo potęgowe.

Zakładamy, że siła zagłębiająca kulkę w badany materiał jest sumą siły wynikającej z kontaktu z materiałem I i z kontaktu z materiałem II:

$$P_T(h_p) = P_1(h_p) + P_2(h_p). \quad (2.75)$$

W przypadku niezależnego wciskania dwóch kulek w dwa materiały I i II, przy założeniu jednakowego zagłębienia kulek, oraz korzystając z (2.48) sumaryczną siłę możemy zapisać jako:

$$P_T(h_p) = P_1(h_p) + P_2(h_p) = \pi\alpha D^2 [\sigma_o \beta^o c_1^2 \left(\frac{h_p}{D}\right) + k\beta^m c^{2+m} \left(\frac{h_p}{D}\right)^{1+m/2}], \quad (2.76)$$

gdzie:  $c_1^2 = c^2 (m_1 = 0) = 1.25$ .

Zakładamy, że w przypadku gdy równanie (2.71) odnosi się do ośrodka będącego „mieszaniną” materiałów I i II krzywa  $P_T(h_p)$  może być zapisana również w postaci sumy (2.76), jednak składniki tej sumy powinny być wzięte z odpowiednimi wagami.

Dla oszacowania tych wag wykonano szereg eksperymentów numerycznych. W prawie (2.71) przyjmowano pewne ustalone wartości parametrów  $\sigma_o = \sigma_{og}$ ,  $m = m_g$ ,  $k = k_g$  i wyznaczano cykliczną krzywą penetracji,  $P(h_p)$ , a następnie, korzystając z metody odejmowania funkcji obciążenia i odciążenia, rozdz. 2.3, krzywą  $P_T(h_p)$ .

Następnie założono, że znana jest granica plastyczności  $\sigma_o = \sigma_{og}$  i wyznaczono stałe  $m$  i  $k$  korzystając z równania identyfikacyjnego w postaci

$$P_2(h_p) = \pi\alpha k \beta^m c^{2+m} \left(\frac{h_p}{D}\right)^{m/2+1}, \quad (2.77)$$

gdzie:

$$P_2(h_p) = P_T(h_p) - 1.25\pi\alpha D^2 \sigma_{og} \left(\frac{h_p}{D}\right). \quad (2.78)$$

Równania (2.77) i (2.78) odpowiadają założeniu, że zmierzona doświadczalnie krzywa  $P_T(h_p)$  jest sumą sił powstających przy niezależnym wciskaniu dwóch kul w materiały I i II. Wyznaczone wartości  $m = m_{id}$  i  $k = k_{id}$  porównywano z złożonymi w eksperymencie numerycznym  $m_g$  i  $k_g$ . Okazało się, że otrzymane w ten sposób wartości  $m = m_{id}$  i  $k = k_{id}$  różnią się znacznie od przyjętych  $m_g$  i  $k_g$ . Różnicę tę można wyjaśnić następująco. Jeśli materiały traktujemy jako niezależne, to przy jednakowym zagłębieniu kuli w obydwa materiały, dla materiału I  $c^2(m=0) = 1.25 = c_{max}^2$  i pole kontaktu  $F_1$ , jest nieco większe, niż materiału identyfikowanego  $F_{act}$ , rys. 2.60. Natomiast dla materiału II  $c^2(m=0.4 \div 0.8) < 1$ , i pole kontaktu  $F_2$ , jest dużo mniejsze niż pole

kontaktem  $F_{act}$ . Zatem dla znalezienia wyrażenia na siłę  $P_T$  odpowiadającą wciskaniu kuli w „mieszanie” materiałów efekt ten musi być uwzględniony w sumie (2.76) poprzez wprowadzenie odpowiednich wag. Przyjęto korektę polegającą na zmianie udziału sił  $P_1(h_p)$ ,  $P_2(h_p)$  w całkowitej sile  $P_T(h_p)$ , tak aby odpowiadały tej samej powierzchni kontaktu obydwu materiałów równej  $F_{act}$ .

W rzeczywistym materiale promień kontaktu  $a_{act}$  spełnia warunek

$$a_2 < a_{act} < a_1, \quad (2.79)$$

gdzie  $a_1$ ,  $a_2$  promienie kontaktu materiałów I i II, rys 2.60.

Biorąc pod uwagę (2.74) możemy napisać następujące zależności między polem kontaktu kuli z materiałem I (ozn.  $F_1$ ), materiałem II (ozn.  $F_2$ ), oraz z materiałem rzeczywistym (ozn.  $F_{act}$ ):

$$\frac{F_{act}}{F_1} = \frac{a_{act}^2}{a_1^2} = \frac{c_{act}^2}{c_1^2}, \quad \frac{F_{act}}{F_2} = \frac{a_{act}^2}{a_2^2} = \frac{c_{act}^2}{c_2^2}. \quad (2.80)$$

Wzór (2.75) należy zastąpić wzorem

$$P_T(h_p) = \frac{F_{act}}{F_1} P_1(h_p) + \frac{F_{act}}{F_2} P_2(h_p), \quad (2.81)$$

gdzie  $F_{act}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  - pola kontaktu materiału badanego (rzeczywistego), oraz materiałów I i II z kulka.

Uwzględniając (2.80) i (2.81) zakładamy, że wzór (2.76) możemy zapisać jako

$$P_T(h_p) = \pi \alpha D^2 \left[ \sigma_o \beta^o \frac{c_{act}^2}{c_1^2} c_1^2 \left( \frac{h_p}{D} \right) + k' \frac{c_{act}^2}{c_2^2} \beta^{m'} c_2^{2+m'} \left( \frac{h_p}{D} \right)^{1+m'/2} \right], \quad (2.82)$$

gdzie:

$$m' = w_m m, \quad k' = w_k k. \quad (2.82a)$$

Wartości współczynników  $w_m$  i  $w_k$  należy wykalibrować korzystając z eksperymentów numerycznych

W równaniu (2.82) nieznaną jest wartość  $c_{act}^2$ , można ją obliczyć korzystając z wzoru  $c_{act} = a^2/h_p D$ , ale wtedy konieczny jest pomiar nie tylko zagłębienia, ale również promienia odcisku. Wartość  $c_{act}^2$  można też oszacować zakładając, że badany materiał spełnia prawo potęgowe i stosując jedną z metod identyfikacji opisanych w poprzednim podrozdziale. Dla materiału spełniającego prawo potęgowe  $c^2$  jest stałe. W materiale sprężysto-plastycznym spełniającym prawo (2.1) warunek ten jest spełniony, jeśli w

(2.74) wstawimy  $h=h_p$ . W przypadku materiału spełniającego prawo (2.71) stwierdzono na podstawie eksperymentów numerycznych, że  $c_{act}^2$  monotonicznie maleje ze wzrostem zagłębienia. Zmiany te nie są duże, stąd w dalszych rozważaniach przyjęto, że  $c_{act}^2$  nie zależy od  $h_p$  i jest wyznaczane jako średnia dla kilku zagłębień.

Biorąc pod uwagę (2.82), funkcja  $S(k', m', \sigma_o, \frac{h_p}{D})$  może być zapisana jako

$$S(k', m', \sigma_o, \frac{h_p}{D}) = Q(m', k') (\frac{h_p}{D})^{m'/2+1} + T(\sigma_o) \frac{h_p}{D}, \quad (2.83)$$

gdzie 
$$Q(m', k') = \pi \alpha D^2 k' \frac{c_{act}^2}{c_2^2} \beta^{m'} c_2^{2+m'}, \quad (2.84)$$

$$T(\sigma_o) = \pi \alpha D^2 \sigma_o \beta^o \frac{c_{act}^2}{c_1^2} c_1^2.$$

Jednak dysponujemy jedynie wyznaczoną doświadczalnie (metodą odejmowania) pochodną  $\frac{dh_p}{dP}(P)$  i nie możemy skorzystać z (2.83) jako z równania identyfikacyjnego, gdyż funkcja  $S$  nie może być w prosty sposób odwrócona. Dla znalezienia parametrów  $Q, T$  i  $m'$  korzystamy z następującego układu równań (otrzymanego z równania (2.83) i jego pochodnej)

$$Qh_i^{l'} + Th_i = P_i,$$

$$Qlh_i^{l'-1} + T = \frac{l}{h_i}, \quad (2.85)$$

gdzie:  $l=m'/2+1$ ,  $h_i^{l'} = \frac{1}{D} (\frac{dh_p}{dP})_i$  - wartości pochodnej  $h_p(P)$  w punktach  $P_i$ .

Ze względu na to, że z pomiaru otrzymujemy punkty  $P_i, h_i^{l'}$ , z układu (2.85) należy wyeliminować  $h_i$ . Mnożąc pierwsze równanie przez  $l$ , a drugie przez  $h_i$ , a następnie odejmując je stronami otrzymujemy:

$$Q \left( \frac{P_i l}{T(l-1) + \frac{l}{h_i}} \right)^l + \frac{TP_i l}{T(l-1) + \frac{l}{h_i}} = P_i, \quad (2.86)$$

co po uproszczeniu daje

$$Q \left[ \frac{P_i}{T(l-1) + \frac{1}{h_i'}} \right]^{l-1} l^l + (T - \frac{1}{h_i'}) = 0 \quad (2.87)$$

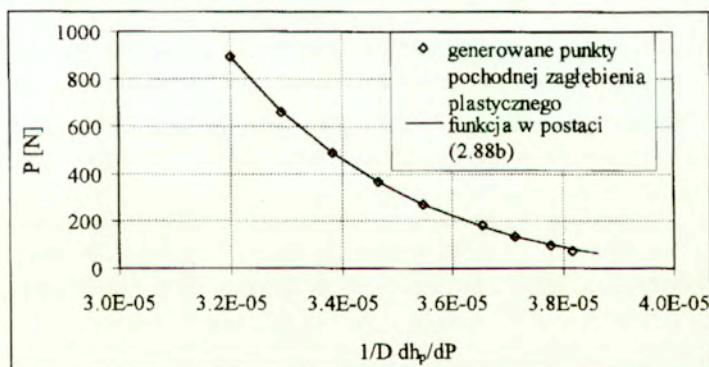
Zapisując to równanie dla kilku wartości  $P_i$ ,  $h_i'$  otrzymujemy układ równań nieliniowych, z którego można wyznaczyć wartości nieznanych parametrów  $k, m, \sigma_0$ . Nieliniowe równania identyfikacyjne w postaci (2.87) są trudne do rozwiązania. Rozwiązanie jest prostsze, jeśli równanie (2.87) zapiszemy jako funkcję  $P(h')$ . Funkcja ta ma postać:

$$P_i = Q \frac{2}{m'} \left( \frac{1}{h_i'} - T \right)^{2/m'} \left( T \frac{m'}{2} + \frac{1}{h_i'} \right) \left( \frac{m'}{2} + 1 \right)^{-\frac{2}{m'-1}} \quad (2.88a)$$

Lub po wstawieniu wartości  $Q$  według (2.82)

$$P_i = \frac{1}{(\pi \alpha D^2 k' c_{act}^2)^{2/m'} \beta^2 c_2^2} \left( \frac{1}{h_i'} - T \right)^{2/m'} \left( T \frac{m'}{2} + \frac{1}{h_i'} \right) \left( \frac{m'}{2} + 1 \right)^{-\frac{2}{m'-1}} \quad (2.88b)$$

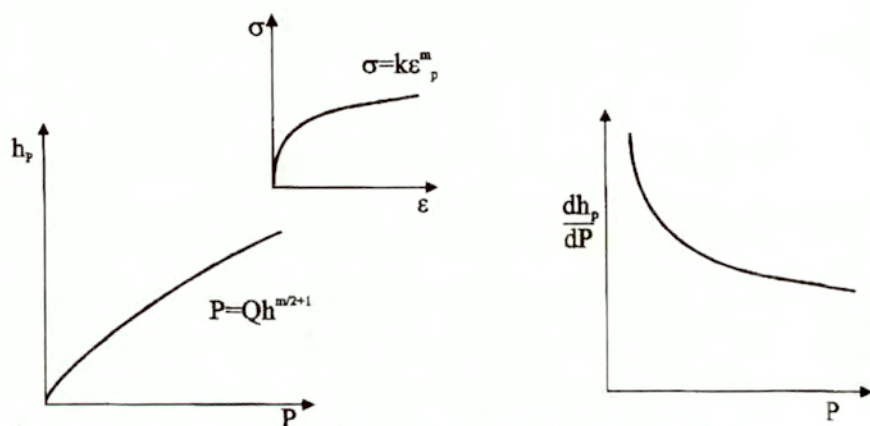
Identyfikacja sprowadza się do znalezienia najlepszego dopasowania krzywej w postaci (2.88) do wygenerowanych doświadczalnie punktów pomiarowych  $P_i, \frac{dh_p}{dP_i}$ . Przykład takiego dopasowania dla krzywej rozciągania I z Tabeli 6 przedstawiono na rys.2.61. Stąd otrzymuje się parametry  $Q, l, T$ , z których następnie wyznacza się  $k, m, \sigma_0$ .



Rys.2.61 Funkcja aproksymująca punkty  $P_i - \frac{dh_p}{dP_i}$

Dla lepszego zrozumienia wykresów pochodnej  $dh_p/dP$  generowanych proponowaną metodą dla materiałów sprężysto-plastycznych opisanych równaniami (2.1) i (2.70), zostaną przedstawione schematycznie wykresy  $dh_p/dP$  dla materiału sztywno plastycznego spełniającego prawo (2.71). Są to wykresy teoretyczne, sporządzono je przy założeniu, że dla takiego materiału krzywa penetracji może być przedstawiona w postaci (2.83).

W szczególnym przypadku, gdy  $\sigma_0=0$  (rozwiązanie samopodobne)  $dh_p/dP$  jest funkcją monotonicznie malejącą, zgodnie z (2.50) dla  $P \rightarrow 0$   $dh_p/dP \rightarrow \infty$ , natomiast  $dP/dh_p \rightarrow 0$ , rys. 2.62a.



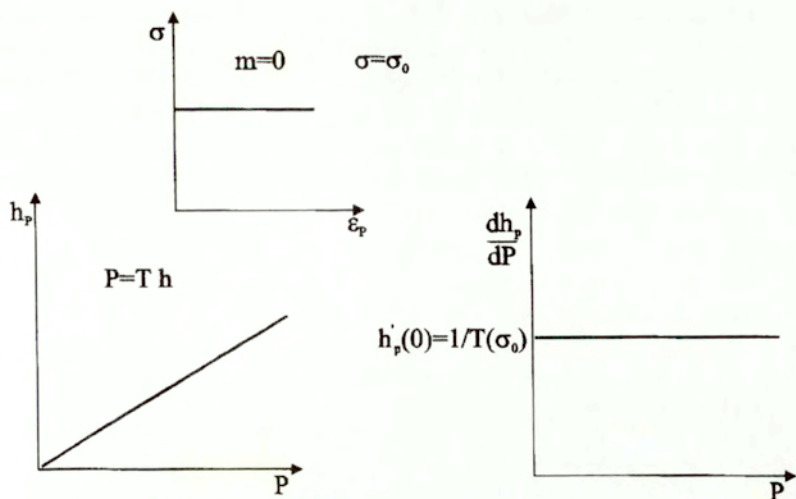
Rys. 2.62a. Krzywa penetracji i  $dh_p/dP$  dla materiału spełniającego prawo potęgowe (rozwiązanie samopodobne).

W przypadku gdy  $m=0$  materiał jest sztywno-idealnie plastyczny (rozwiązanie samopodobne),  $dh_p/dP$  jest stała równa  $1/T$ , a krzywa penetracji jest funkcją liniową, (rys.2.62b).

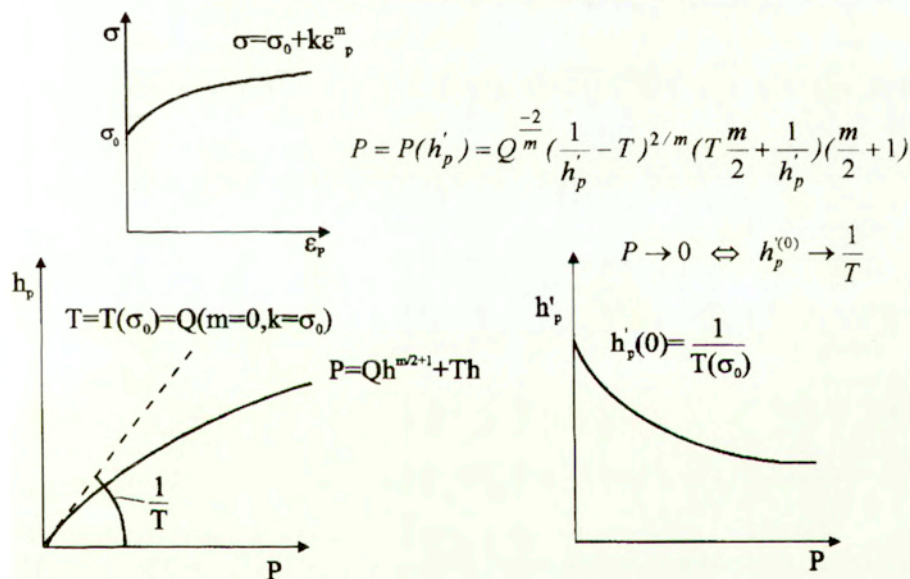
Gdy wszystkie parametry w równaniu (2.71) są różne od 0, proponowane równanie (2.83) krzywej penetracji nie może być w prosty sposób odwrócone, stąd  $dh_p/dP$  jest obliczana jako odwrotność  $dP/dh_p$ . Pochodna  $dh_p/dP$  jest funkcją monotonicznie malejącą, dla  $P \rightarrow 0$ ,  $dh_p/dP \rightarrow 1/T$ , rys.2.62c.

Wykresy na rys.2.62, stanowią punkt odniesienia dla interpretacji wykresów  $dh_p/dP$  obliczonych dla materiału sprężysto-plastycznego poprzez odejmowanie  $dh_p/dP$  i  $dh_p/dP$  otrzymanych w eksperymencie numerycznym.



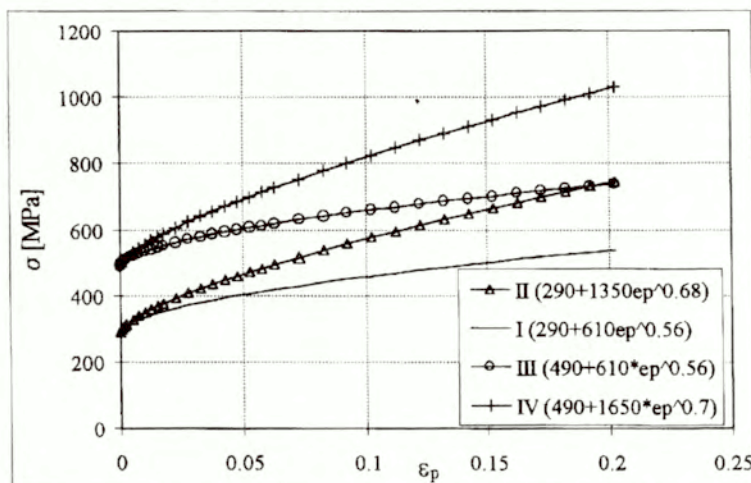


Rys. 2.62b. Krzywa penetracji i  $dh_p/dP$  dla materiału sztywno-idealnie plastycznego (rozwiązanie samopodobne).



Rys. 2.62c. Proponowane krzywa penetracji i  $dh_p/dP$  dla materiału sztywno plastycznego spełniającego prawo (2.71).

Dla sprawdzenia słuszności tych hipotez wykonano eksperymenty numeryczne. Polegały one na symulacji numerycznej procesu odciążenia-obciążenia kuli a następnie na wyznaczeniu pochodnych  $dh_p/dP$  poprzez odejmowanie pochodnych krzywych odciążenia i obciążenia zgodnie z procedurą opisaną w poprzednim rozdziale. Eksperymenty wykonano dla czterech materiałów, których krzywe rozciągania w postaci (2.71) podano na rys. 2.63, a ich parametry w Tabeli 6.



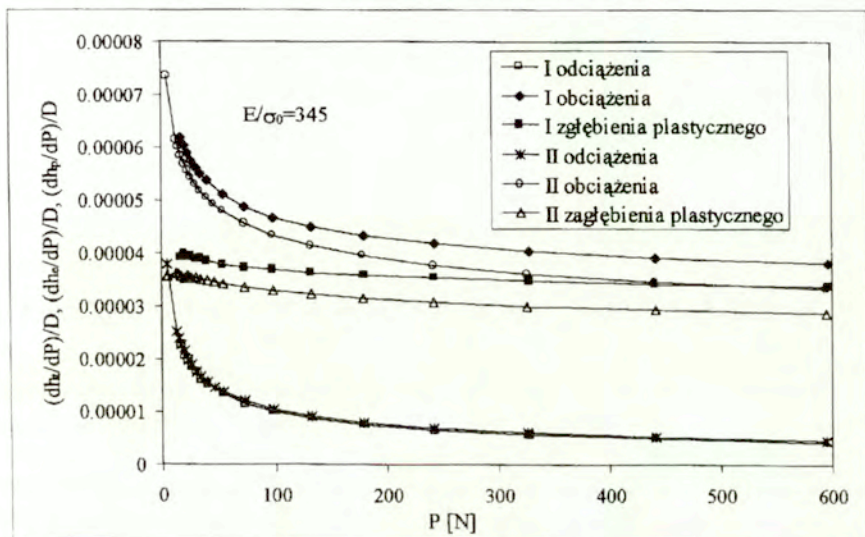
Rys.2.63 Krzywe  $\sigma$ - $\epsilon_p$  identyfikowanych materiałów

Tabela 6

Numer krzywej $\sigma$ - $\epsilon_p$	I	II	III	IV
równanie $\sigma$ - $\epsilon_p$	$290+610\epsilon_p^{0,56}$	$290+1350\epsilon_p^{0,68}$	$490+610\epsilon_p^{0,56}$	$490+1650\epsilon_p^{0,7}$
$C_{act}^2$	1.2	1.2	1.3	1.25

Materiały I i II charakteryzują się jednakową granicą plastyczności  $\sigma_0=290$  MPa i różnymi parametrami wzmocnienia plastycznego. Materiały III i IV mają również jednakową granicę plastyczności  $\sigma_0=490$  MPa i różne parametry wzmocnienia, przy czym wzmocnienie plastyczne (parametry  $m$  i  $k$ ) krzywych I i III są jednakowe. W przypadku materiałów I i II generalnie

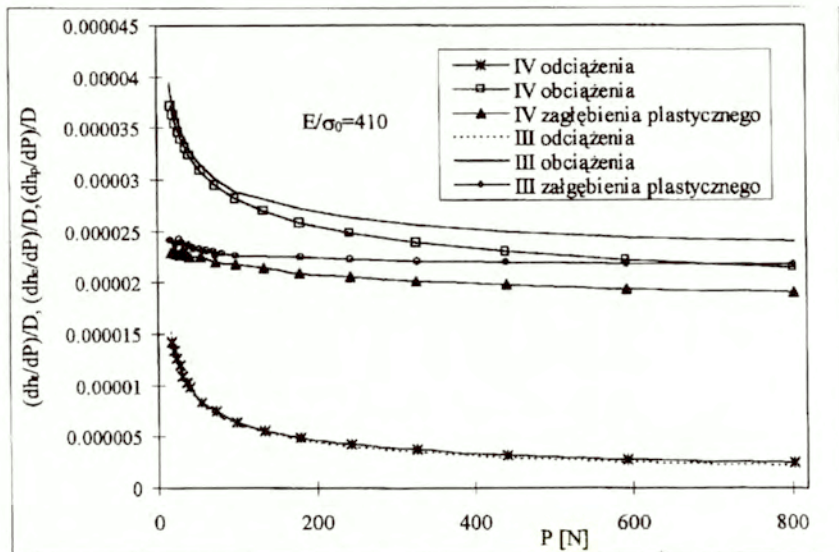
przyjęto  $E/\sigma_0=345$  natomiast dla materiałów III i IV przyjęto  $E/\sigma_0=410$ . Dla sprawdzenia wpływu ilorazu  $E/\sigma_0$  na wykresy  $dh_p/dP$ , dla niektórych zakresów obciążenia wykonano również obliczenia dla  $E/\sigma_0=260$  i  $E/\sigma_0=520$ . Na przedstawionych niżej wykresach iloraz  $E/\sigma_0$  oznaczono jako  $u$ . Analiza pochodnych  $dh_p/dP$  generowanych proponowaną tu metodą umożliwi oszacowanie dokładności metody i określenie wpływu zakresu stosowanych obciążeń i ilorazu  $E/\sigma_0$  na dokładność identyfikacji. Wykresy  $dh_p/dP$  otrzymane z rozwiązań numerycznych przedstawiono na rys. (2.64-2.67). Na rys. 2.64 przedstawiono wykresy pochodnych krzywych odciażenia obciążenia i krzywych zagłębienia plastycznego w funkcji siły odpowiadające materiałom I i II z tab.1, a na rys.2.65 materiałom III i IV.



Rys. 2.64 Wykresy pochodnych krzywych obciążenia, odciażenia i zagłębienia plastycznego  $dh_p/dP$  dla materiałów I i II

Można zauważyć, że pochodne zagłębienia plastycznego maleją monotonicznie w szerokim zakresie sił, jednak dla  $P$  bliskiego 0 osiągają lokalne maksimum. Położenie tego maksimum zależy od ilorazu  $E/\sigma_0$  i na przykład dla materiału III, IV dla  $E/\sigma_0=260$ , rys.2.66, występuje ono dla większych sił i jest bardziej łagodne niż dla materiału III i IV gdy  $E/\sigma_0=410$ , rys. 2.65, lub materiałów I, II gdy  $E/\sigma_0=345$ , rys. 2.64. Maksimum to jest położone najbliżej osi pionowej gdy  $E/\sigma_0=520$  rys. 2.67. Gdy  $E/\sigma_0 \rightarrow \infty$

materiał sprężysto-plastyczny przyjmuje charakterystykę materiału sztywno-plastycznego i maksimum występuje dla  $P=0$ .



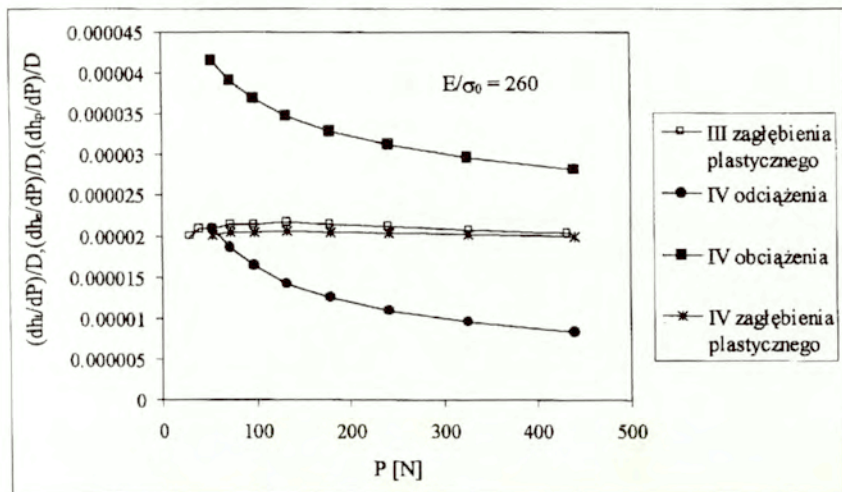
Rys. 2.65 Wykresy pochodnych krzywych obciążenia, odciążenia i zagłębienia plastycznego  $dh_v/dP$  dla materiału III i IV

Pochodne zagłębienia plastycznego materiałów I i II dla  $P \rightarrow 0$  zbliżają się do podobnych wartości, to jest do wspomnianego wcześniej lokalnego maksimum, rys. 2.64.

Podobny efekt można zaobserwować w przypadku materiałów III i IV rys. 2.65, przy czym jest on wyraźniejszy niż dla I i II (pochodne mat. II i IV są bliższe sobie). Wynika to z faktu, że dla materiałów III i IV iloraz  $E/\sigma_0$  jest większy. Efekty te potwierdzają słuszność przyjętych założeń, że część liniowa (współczynnik  $T$ ) równania (2.83) silnie zależy od  $\sigma_0$ , a w niewielkim stopniu zależy od  $m$  i  $k$ , gdyż każda para krzywych to jest I i II, rys. 2.64, oraz III i IV, rys. 2.65, mają jednakowe  $\sigma_0$  i różne  $m$  i  $k$ .

Maksymalne wartości  $h'_{pmax}$  otrzymane na wykresach rys.2.64, 2.65 dla materiału sprężysto-plastycznego są jednak mniejsze niż obliczone teoretyczne jako  $1/T(\sigma_0)$ , a więc wskazują na większą niż w rzeczywistości granicę plastyczności materiału. Wynika to z faktu, że w materiale sprężysto-plastycznym, inicjacja odkształceń plastycznych następuje w pewnej konfiguracji odkształconej, występują odkształcenia sprężyste i pewna

niewielka niecka, natomiast w teoretycznym materiale sztywno-plastycznym (2.71) inicjacja odkształceń plastycznych następuje w konfiguracji nieodkształconej (kontakt kuli i półprzestrzeni). Przy ustalonym  $\sigma_0$ , w kontakcie kuli z niecką uplastycznienie następuje przy większej sile niż w kontakcie kuli z półprzestrzenią.

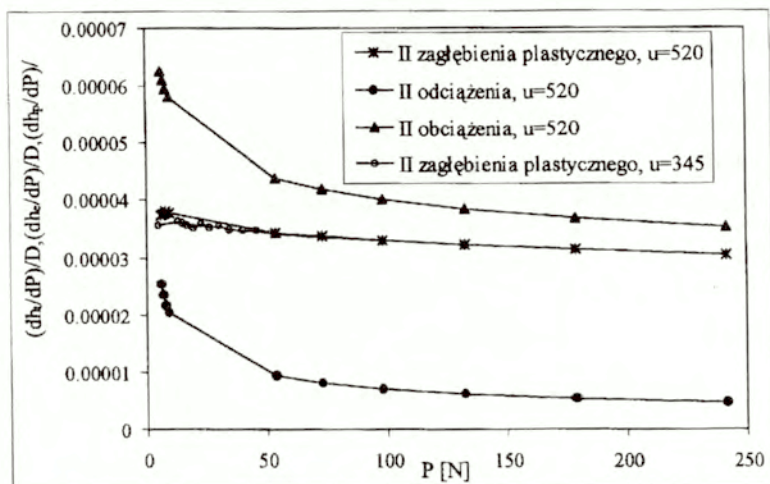


Rys. 2.66. Wpływ ilorazu  $E/\sigma_0$  na generowane wartości  $dh_p/dP$  dla materiału III i IV

W przypadku materiału III i IV gdzie  $E/\sigma_0$  jest większe niż dla materiałów I i II można zaobserwować, rys 2.65, że również  $h'_{pmax}$  jest bliższa wartości teoretycznej  $1/T(\sigma_0)$  niż dla materiałów I i II, rys. 2.64. W rozdziale 2.5.5 stwierdzono, że dla materiału spełniającego równanie konstytutywne (2.1) moduł Younga nie wpływa na generowane wartości funkcji  $dh_p/dP$ . Korzystając z wykresów na rys. 2.64-2.67 dla materiału III i IV możemy stwierdzić, że również wtedy gdy spełnione jest prawo (2.70), moduł Younga nie wpływa na obliczoną wartość  $dh_p/dP$ , o ile siła jest większa od pewnej wartości granicznej  $P_y$ . Wartość  $P_y$  maleje, jeżeli zwiększa się iloraz  $E/\sigma_0$  rys. 2.66, 2.67. Dla zbyt małych wartości  $E/\sigma_0$  nie jest możliwe dokładne obliczenie  $dh_p/dP$  w żadnym zakresie sił, rys. 2.66, gdzie wygenerowane  $dh_p/dP$  jest niemal stałe, a więc takie jak dla materiału bez wzmocnienia plastycznego.

Z drugiej strony można stwierdzić, że jeśli  $E/\sigma_0$  jest wystarczająco duże to znaczy przyjmuje wartości takie jak w praktycznie spotykanych materiałach, wartość  $P_y$  jest mała i odpowiada ona zagłębieniu  $a/D < 0.01$ .

Z kolei maksymalna wartość siły nie może wychodzić poza zakres dla którego obowiązuje rozwiązanie samopodobne ( $a/D < 0.2$ ).



Rys.2.67. Wpływ ilorazu  $E/\sigma_0$  na generowane wartości  $dh_p/dP$  dla materiału I i II,  $u \equiv E/\sigma_0$ .

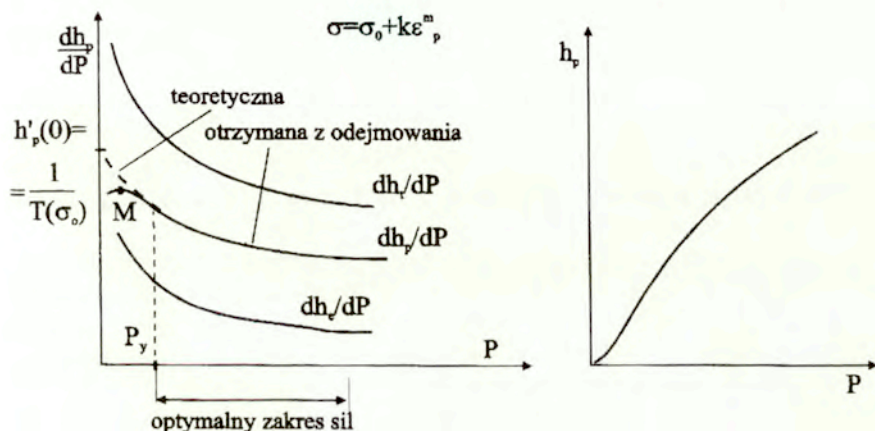
Podsumowanie obserwacji dokonanych na podstawie wykresów rys. 2.64-2.67 przedstawiono na rys. 2.68 gdzie pokazano schematyczny przebieg krzywej  $dh_p/dP$  generowanej w procedurze odejmowania pochodnych dla materiału sprężysto-plastycznego. Na wykresie zaznaczono maksimum lokalne (punkt M), oraz graniczną wartość siły  $P_y$ , poniżej której generowana wartość  $dh_p/dP$  zależy silnie od modułu Younga i może różnić się od wartości przyjętej jako dokładna dla fikcyjnego materiału sztywno-plastycznego (równanie 2.88). Dla  $P < P_y$  krzywa  $dh_p/dP$  generowaną proponowaną metodą nie powinna być wykorzystywana do identyfikacji. Zaznaczono optymalny zakres sił, które należy stosować w eksperymencie; jest to zakres, w którym teoretyczna krzywa  $dh_p/dP$  zaproponowana w postaci (2.88) dla materiału sztywno-plastycznego pokrywa się z krzywą generowaną dla materiału sprężysto-plastycznego. W tym zakresie sił generowana krzywa  $dh_p/dP$  nie zależy od modułu Younga badanego materiału. Zauważmy, że lokalne maksimum otrzymanej krzywej  $dh_p/dP$  wskazuje, że na odpowiadającej jej

krzywej  $h_p(P)$  pojawia się punkt przegięcia blisko  $P=0$ , który nie występuje w fikcyjnym materiale sztywno-plastycznym.

Z przedstawionych tu obserwacji wynika, że założona postać (2.83) równania krzywej penetracji dla materiału sztywno-plastycznego spełniającego prawo (2.71) jest prawidłowa. Problem jest we właściwym wykalibrowaniu współczynników  $w_m$  i  $w_k$ . Korzystając z wielu symulacji numerycznych procesu wciskania kuli w różne materiały wartości tych współczynników określono jako

$$w_m=0.6, \quad w_k=1/(1+1.3m') \quad (2.89)$$

Korzystając z tych wartości można uzyskać dość dobre rezultaty identyfikacji dla szerokiej gamy krzywych rozciągania, jednak nie mogą być one stosowane w ogólnym przypadku. Dokładniejsze wykalibrowanie tych współczynników i modyfikacja równania (2.83) jest przedmiotem dalszych prac autora.



Rys. 2.68. Krzywe  $dh_p/dP$  i  $h_p(P)$  generowane proponowaną metodą dla materiału sprężysto-plastycznego.

Równanie identyfikacyjne (2.88b) powinno być zatem stosowane w sposób bardzo ostrożny. W przypadku materiału o trudnych do oszacowania parametrach powinno się dodatkowo stosować metodę opisaną w rozdz. 2.5, równanie (2.50), szczególnie w przypadku materiału o niewielkim wzmocnieniu plastycznym i porównywać wyniki z identyfikacją według (2.88). Krzywe rozciągania materiałów z początkową granicą plastyczności i małym wzmocnieniem plastycznym mogą być dobrze aproksymowane prawem potęgowym i wystarczy wtedy korzystać z prostszego równania

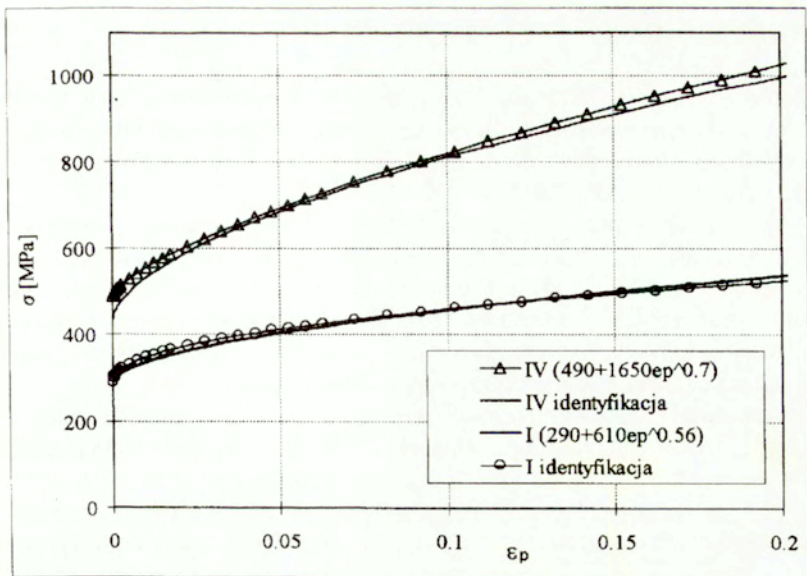
identyfikacyjnego (2.50). Generalnie wyniki identyfikacji otrzymane przy pomocy równań (2.88b) i (2.50) powinny się nawzajem uzupełniać. Aproksymacja punktów pomiarowych przy pomocy funkcji (2.88t) jest bardziej wrażliwa na błędy obliczania pochodnych, niż równanie (2.50) i niekiedy może prowadzić do bardzo niedokładnych wyników.

Stosując te równania można uzyskać dobre wyniki identyfikacji pod warunkiem, że punkty  $P_i$  i  $dh_p/dP$  są położone w pewnym zakresie sił, który z góry nie jest znany dla badanego materiału. Określenie tego zakresu wymaga kilkukrotnego powtórzenia testu wciskania kuli w różnych zakresach (m. in. należy znaleźć punkt M) tak, aby w procesie iteracyjnym znaleźć właściwy zakres stosowanych obciążeń. Proces ten nie jest zbyt długi, gdyż dla wielu występujących w praktyce materiałów iloraz  $E/\sigma_0$  jest wystarczająco duży, większy niż przyjęty w przedstawionych tu eksperymentach numerycznych, na przykład dla stali jest on na ogół większy niż 600. Z doświadczeń autora wynika, że dobre rezultaty identyfikacji można otrzymać dla  $E/\sigma_0 \geq 300$ . Wynik identyfikacji krzywych I i IV przedstawiono na rys. 2.69. Można stwierdzić, że uzyskano zadowalającą zgodność krzywych.

Jeśli  $E/\sigma_0$  jest dostatecznie duże, to parametr  $T$ , a zatem i granica plastyczności, nie musi być wyznaczany z równania (2.88) lecz można go wyznaczyć jako punkt przecięcia (wyznaczony drogą ekstrapolacji) wykresu  $dh_p/dP(P)$  z osią pionową, np. wykresy na rys. 2.65, 2.67. Jest to dodatkowa kontrola wyników otrzymanych przy pomocy równania (2.88).

Korzystając z równania (2.88) granicę plastyczności można określić z dokładnością do pewnego przedziału. Z eksperymentów numerycznych przeprowadzonych przez autora wynika, że średnia wielkość tego przedziału czyli błąd metody nie przekracza różnicy między krzywymi zidentyfikowaną i rzeczywistą dla materiału IV, rys 2.69.





Rys. 2.69 Identyfikacja krzywych I i IV przy pomocy proponowanej metody.

## WNIOSKI KOŃCOWE

W przedstawionej rozprawie w części I i II opracowano dwa tematy związane z badaniami nad technologiczną warstwą wierzchnią: modelowanie procesu ewolucji stanu (naprężenia i rozwoju uszkodzeń) elementów z warstwą oraz identyfikacja własności warstwy.

Do modelowania ewolucji stanu zastosowano pojęście makromechaniczne, w którym wykorzystuje się hipotezę wytrzymałości lokalnej. Składa się ono z dwóch etapów: wyznaczanie ewolucji lokalnych stanów naprężenia i odkształcenia w obszarze warstwy wierzchniej, a następnie wykorzystanie ich do przewidywania trwałości zmęczeniowej (stanu uszkodzeń) przy pomocy znanych kryteriów zmęczeniowych.

Opracowano model elementu z warstwą, który zastosowano do wyznaczenia złożonych stanów naprężeń i ich ewolucji przy obciążeniach cyklicznych. Pokazano, że nawet w przypadku próbki o prostym kształcie (walcowym) z ukonstytuowaną warstwą wierzchnią poddanej prostemu obciążeniu (jednoosiowe rozciąganie) występują złożone stany naprężenia w obszarze warstwy. Wyznaczono ich ewolucję w procesie obciążeń cyklicznych. Otrzymano wynik zgodny z rezultatami doświadczalnymi, co stanowi weryfikację stosowanego modelu.

W wyniku obróbki technologicznej następuje modyfikacja szeregu parametrów warstwy wierzchniej. Zmiana każdego z nich powoduje zmianę stanu naprężenia w warstwie i zmianę trwałości zmęczeniowej całego elementu. Na przykładzie próbek z karbem zbadano wpływ parametrów warstwy na pętle histerezy i trajektorie naprężeń głównych, oraz stany reszkowe w dnie karbu. Stwierdzono między innymi, że sterując wartościami naprężeń początkowych można uzyskać w dnie karbu stan ustalony naprężeń, w którym jedna składowa główna jest zawsze ujemna (ściskająca), co może być korzystne z punktu widzenia trwałości zmęczeniowej. W zależności od układu tych naprężeń zniszczenie w dnie karbu może być inicjowane w różnych płaszczyznach.

Opracowany model zmęczenia umożliwia przewidywanie jak modyfikacja poszczególnych parametrów warstwy wpływa na zmianę krzywej zmęczeniowej całego elementu. Na przykład badając wpływ naprężeń własnych w próbce z karbem stwierdzono, że zmieniając wyłącznie naprężenia własne możemy uzyskać wzrost trwałości zmęczeniowej próbki. Jest on jednak mniejszy niż zaobserwowany doświadczalnie wzrost uzyskany w wyniku ukonstytuowania warstwy kulowanej. Zatem poprawy trwałości zmęczeniowej spowodowanej procesem kulowania nie można wyjaśnić zmianą jednego tylko parametru warstwy to jest naprężeń własnych. Oprócz wniosków

szczegółowych dotyczących konkretnych elementów z karbem i obróbek technologicznych, istotnym osiągnięciem tej części rozprawy jest opracowanie zweryfikowanych narzędzi do modelowania stanu naprężeń i procesu zmęczenia elementów z warstwą wierzchnią. Wykazano, że opracowane modele umożliwiają ocenę jakościową stanu uszkodzeń wywołanych obciążeniem cyklicznym w elemencie warstwą, a po wykalibrowaniu parametrów modeli – także ocenę ilościową.

W drugiej części pracy przedstawiono kilka metod wykorzystania testu wciskania kuli do identyfikacji krzywych rozciągania materiału w układzie  $\sigma$ - $\varepsilon_p$ . Na przykładzie materiałów jednorodnych zbadano dokładność identyfikacji, jaką można uzyskać przy pomocy opracowanych metod i porównano je z metodami identyfikacji znanymi z literatury. Oszacowano zakres stosowalności metod i podano praktyczne zalecenia dotyczące ich wykorzystania. Najlepsze wyniki identyfikacji można uzyskać stosując metody opisane w rozdziałach 2.3, 2.5, 2.6, bazujące na odejmowaniu krzywych penetracji lub ich pochodnych. Stosowanie metody odejmowania pochodnych wymaga jednak korzystania z urządzeń pomiarowych o dużej dokładności. Stwierdzono również, że opracowane metody lepiej nadają się do identyfikacji cienkich warstw niż te znane z literatury. Korzystając z opracowanych metod i dysponując węgelnikiem kulistym o małym promieniu jak np. końcówka węgelnika Rockwella, możemy identyfikować warstwy o grubości nie mniejszej niż ok. 150-180  $\mu\text{m}$ . Krzywe rozciągania zidentyfikowane w pracy dla warstw stopowanych i nagniatanych są jakościowo zgodne z wynikami badań mikrotwardości warstw.

Wyniki niniejszej pracy mogą być szeroko wykorzystywane w praktyce inżynierskiej. Umożliwiają diagnostykę cienkich warstw, oraz wykorzystanie efektów tej diagnostyki w inżynierskich obliczeniach wytrzymałościowych. Ułatwia to dobór warstwy najbardziej optymalnej dla określonego elementu konstrukcyjnego i zadanego obciążenia. Z drugiej strony, w przypadku badań gotowego elementu konstrukcyjnego z ukształtowaną już warstwą wierzchnią metody przedstawione w pracy mogą służyć do diagnostyki istniejącej warstwy i przewidywania trwałości elementu w procesie eksploatacji, bez konieczności wykonywania kosztownych badań doświadczalnych całego elementu.

Warto zwrócić uwagę na praktyczną przydatność opracowanego przyrządu do pomiaru krzywej siła-zagłębienie kuli. Może on być wykorzystany do identyfikacji cienkich warstw o grubości nie mniejszej niż 150  $\mu\text{m}$ .

W zaproponowanych metodach stałe sprężyste ( $E^*$ ) i stałe opisujące plastyczność ( $k, m, \sigma_0$ ) identyfikowane są niezależne od siebie. Przy identyfikacji stałych  $k, m, \sigma_0$  według metod opisanych w rozdz. 2.3 –2.6

eliminowane są deformacje sprężyste całego układu pomiarowego. Stąd możliwe jest wykorzystanie przyrządu pomiarowego o stosunkowo prostej budowie – jest to ważną zaletą proponowanych metod.

Opracowane metody identyfikacji są przydatne nie tylko do diagnostyki cienkich warstw, mogą być one stosowane wszędzie tam, gdzie istnieje potrzeba identyfikacji lokalnych własności materiału np. w połączeniach spawanych.

Zarówno prace nad modelowaniem zmęczenia elementów z warstwą jak i identyfikacją warstwy powinny być kontynuowane. Prace nad modelowaniem zmęczenia elementów z warstwą powinny zmierzać w kierunku dalszej weryfikacji modelu na przykładach innych obróbek powierzchniowych. Parametry występujące w kryteriach zmęczeniowych należałoby wykalibrować dla różnych warstw. W przypadku niektórych obróbek konieczne może się okazać sformułowanie nowych kryteriów zmęczeniowych. Wymaga to jednak prowadzenia kosztownych badań doświadczalnych.

Dalszy rozwój metod identyfikacji powinien zmierzać w kierunku doskonalenia identyfikacji materiałów, których prawo konstytutywne opisane jest trójparametrowym równaniem  $\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon_p^m$ . Poprawę dokładności identyfikacji takich materiałów można uzyskać poprzez modyfikację (na bazie rozważań energetycznych) równania identyfikacyjnego (2.82), a zwłaszcza występujących w nim współczynników. Umożliwiłoby to bardziej precyzyjne wyznaczenie granicy plastyczności badanych materiałów. W dalszych pracach należałoby również zająć się problemem rozróżnienia wzmocnienia kinematycznego i izotropowego w badanym materiale i identyfikacji parametrów opisujących te wzmocnienia. Wzmocnienie kinematyczne może być identyfikowane z różnicy krzywych odciążenia i powtórnego obciążenia, rys. 2.34, 2.35. Próby takiej identyfikacji zostały już podjęte w literaturze i przez autora. Nadal nie rozwiązany pozostaje problem identyfikacji naprężeń własnych. Wprawdzie w pracach [38-39] stwierdzono, że naprężenia własne mają niewielki wpływ na krzywe penetracji dla elementu z warstwą, jednak nie jest to zgodne z obserwacjami autora, z których wynika, że krzywa penetracji i trwałe odcisk kuli mogą również dostarczyć informacji o naprężeniach własnych. W proponowanych metodach identyfikacji parametrów sprężysto-plastycznych wpływ naprężeń własnych z konieczności pominięto.

W dziedzinie inżynierii powierzchni opracowane tu metody badawcze mogą ułatwić korelację parametrów obróbki technologicznej z parametrami powstającej w jej wyniku warstwy wierzchniej mającymi istotny wpływ na poprawę trwałości zmęczeniowej.

## Bibliografia do części II

- [1] J.L.Loubet, J.M.Georges, O.Marchesini and G.Meille, "Vickers Indentation curves of Magnesium Oxide (MgO)", *J.Tribol.* 106, 43-51, 1984
- [2] R.F.Cook, G.M.Pharr, "Direct Observation and Analysis of Indentation Cracking in Glasses and Ceramics", *J.Am.Ceram. Soc.* 73, 787-817, 1990
- [3] M.Sakai, "Energy principle of the indentation induced inelastic surface deformation and hardness of brittle materials", *Acta metall. mater.* 41, 1751-1763, 1993
- [4] W.C.Oliver, R.Hutchings, J.B.Pethica, "Microindentation Techniques in Materials Science and Engineering", "ASTM STP 889", 90, ASTM 1986
- [5] J.P.Pethica, R.Hutchings, W.C.Oliver, "Hardness measurement at penetration depths as small as 20nm", *Phil. Mag. A* 48, 593-605, 1983
- [6] W.D.Nix, „Elastic and plastic properties of thin films on substrates: nanoindentation techniques", *Materials Science & Engineering*, A234-236, 37-44, 1997
- [7] C.J.Lu, D.Bogy, R.Kaneko, "Nanoindentation Hardness Tests Using a Point Contact Microscope", *Journal of Tribology*, Vol. 116, 175-180, 1994
- [8] A.E.Giannakopoulos, P.-L.Larsson, R.Vestergaard, "Analysis of Vickers indentation", Vol.31, 19, 2679-2708, 1994
- [9] K.Zeng, K.Soderland, A.E.Giannakopoulos, D.J.Rowcliffe, "Controlled indentation: a general approach to determine mechanical properties of brittle materials", *Acta matr.* Vol. 44, 3, 1127-1141, 1996
- [10] M.F.Doerner, W.D.Nix, "A method of interpreting the data from depth-sensing indentations measurements", *Journal of Materials Research* 4, 601, 1986
- [11] W.C.Oliver, G.M.Pharr, "An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments", *Journal of materials Research* 7, 1564-1583, 1992
- [12] R.F.Bishop, R.Hill, N.F.Mott, "The theory of indentation and hardness tests", *The Proceedings of the Physical Society* 57, 147, 1945
- [13] D.Tabor, "The Hardness of Metals", Clarendon Press, Oxford, 1951
- [14] K.L.Johnson, "The correlation of indentation experiments", *J.Mech. Phys. Solids*, Vol. 18, 115-126, 1970
- [15] S.Carlsson, P.L.Larsson, "On the determination of residual stress and strain fields by sharp indentation testing, Part I: Theoretical and numerical analysis", *Acta Materialia*, 49, 2179-2191, 2001

- [16] S.Carlsson, P.L.Larsson, "On the determination of residual stress and strain fields by sharp indentation testing, Part II: Experimental investigation", *Acta Materialia*, 49, 2193-2203, 2001
- [17] A.K.Bhattacharya, W.D.Nix, "Finite element analysis of cone indentation", *International Journal of Solids and Structures* 27, 1047-1058, 1991
- [18] S.Jayaraman, G.T.Hahn, W.C.Olivier, C.A.Rubin, P.C.Eastias, "Determination of monotonic stress-strain curve of hard materials from ultra-low-load indentation tests", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 35, 5-6, 365-381, 1998
- [19] E.Meyer, „Untersuchen ueber Haertepruefung und Haerte“, *Z. Ver. Deutsche Ing.* 52, 645-654, 1908
- [20] A.G.Tangena, G.A.M.Hurkx, "The determination of stress-strain curve of thin layers using indentation tests", *Journal Of Engineering Materials and Technology*, TR. of ASME, Vol.108, 230-232, 1986
- [21] W.H.Robinson, S.D.Truman, "Stress-strain curve for aluminium from a continuous indentation test", *Journal of Materials Sciences* Vol. 12 1961-1965, 1977
- [22] C.Hardy, C.N.Baronet, G.V.Tordion, "The elasto-plastic indentation of a half-space by a rigid sphere", *Int.J.Num. Mth. Engng* 3, 451-462, 1971
- [23] C.H.Lee, S.Masaki S.Kobayashi, "Analysis of ball indentation", *Int. J. Mech. Sci.* 14, 417-426, 1972
- [24] P.S.Follansbee; G.B.Sinclair, "Quasi-statistic normal indentation of an elasto-plastic half-space by a rigid sphere-I", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, 1, 81-91, 1984
- [25] G.B.Sinclair, P.S.Follansbee, K.L.Johnson, "Quasi-static normal indentation of an elasto0plastic half-space by a rigid sphere-II. Results", *Int. J. Solids Struct.* 21, 865-888, 1985
- [26] Y. Murakami, L.P.Yuan, "Finite element method (FEM) analysis of elastic-linear-hardening materials and comparison with measurements on commercial materials", *J. Test. Eval.* 20, 15-24, 1992
- [27] P.Montmitonnet, M.L.Edlinger, E.Felder, "Finite element analysis of elastoplastic indentation: part II-application to hard coatings", *Trans. ASME. J.Tribol.* 115, (10), 15-19, 1993
- [28] E.R.Kral, K. Komvopoulos, D.B.Bogy, "Elastic-plastic finite element analysis of repeated indentation of a half-space by a rigid sphere", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60 829-841, 1993
- [29] R.Hill, "Similarity analysis of creep indentation tests", *Proc. R. Soc Lond.* 436, 617-630, 1992

- [30] R.Hill, F.R.S.B.Storakers, A.B.Zdunek, "A theoretical study of the Brinell hardness test", Proc. R.Soc. Lond. A 423, 301-330, 1989
- [31] S. Biwa, B.Storakers, "An analysis of fully plastic Brinell indentation", J.Mech.Phys.Solids, Vol. 43, 8, 1303-1333, 1995
- [32] B.Storakers, S. Biwa, Per-L.Larsson, "Similarity analysis of inelastic contact", Int. J. Solids Structures, Vol. 34, 24, 3061-3083, 1997
- [33] T. A. Adler, O. N.Dogan, "Damage by indentation and single impact of hard particles on a high chromium white cast iron", Wear, 203-204, 1997
- [34] J.S.Field, M.V.Swain, "Determining the mechanical properties of small volumes of material from submicrometer spherical indentations", J.Mater. Res., Vol. 10, 1, 101-112, 1995
- [35] B.Taliat, T.Zacharia, F.Kosel, "New analytical procedure to determine stress-strain curve from spherical indentation data", Int. J. Solids Structures, 35, (33), 4411-4426, 1998
- [36] H.A.Francis, "Phenomenological analysis of plastic spherical indentation", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 98, 272-281, 1976
- [37] N.Huber, Ch.Tsakmakis, "A finite element analysis of the effect of hardening rules on the indentation test", Trans. ASME J. Eng. Mater. Technol, Vol. 120, 143-148, 1998
- [38] E.R.Kral, K.Komvopoulos, D.B.Bogy, "Finite Elements Analysis of Repeated Indentation of an Elastic-Plastic Layered Medium by a Rigid Sphere, Part I: Surface Results", Transactions of the ASME, Vol. 62, 20-28, 1995
- [39] E.R.Kral, K.Komvopoulos, D.B.Bogy, "Finite Element Analysis of Repeated Indentation of an Elastic-Plastic Layered Medium by a Rigid Sphere, Part II: Subsurface Results", Journal of Applied Mechanics, Vol. 62, 29-42, 1995
- [40] S. D.J.Mesarovic, N.A. Fleck, "Spherical indentation of elastic-plastic solids", Proc.R.Soc.Lond. A 455, 2707-2728, 1999
- [41] J.Radziejewska, "Wpływ stopowania laserowego na strukturę geometryczną i stan warstwy wierzchniej" Praca Doktorska, Instytut Mechaniki Precyzyjnej, Warszawa 1999
- [42] S. Kucharski, Z. Mróz, "Identification of hardening parameters of metals from spherical indentation test.", Trans. ASME J. Eng. Mater. Technol., Vol. 123, 245-250, 2001
- [43] S. Kucharski, Z. Mróz, "Identification of plastic hardening parameters of metals from spherical indentation tests", Mater. Sci. Eng. A, Vol. 318 (1-2), 65-76, 2001

- [44] S.Kucharski, J.Radziejewska, "Microindentation test for characterization of plastic properties of laser alloyed layers" przyjęte do druku w Journal of testing and evaluation 2002
- [45] S.Kucharski, "Identification of plastic material properties base on indentation measurement of a rigid spherical indenter", The Archive of Mechanical Engineering, Vol. XLVI, 4, 349-367, 1999



## **Identification of properties and state evolution of material surface layer subjected to monotonic and cyclic loading**

### **Summary**

In the first part of the thesis the problem of modeling of fatigue failure of structural components with technological surface layer is investigated. This problem is solved in two steps. In the first step the stress and strain fields are determined in the material element. For the determination of stress fields a model of element with surface layer was proposed. The model accounts for large gradient of material properties and initial residual stress in the vicinity of the surface. The rapid changes of the yield point and the stresses in the direction normal to the surface take place within the surface layer. In the model the region of surface layer is divided into thin homogeneous membranes in which plane stress state is assumed and initial residual stress may appear. At the interface of the surface layer and the core the equilibrium equation, and consistency conditions for strains and displacements are fulfilled. The elastic-plastic material model with combined kinematic and isotropic hardening the associated flow rule are applied. Two versions of the model of surface treated element were developed. The first version is based on analytical solution of a problem of elastic-plastic torsion of cylindrical element with surface layer in which initial residual stress exists. The second version is more general and is based on finite element method (FEM). The FEM program was developed in which the material model and special membrane elements were implemented.

The proposed models of element with surface layer are applied in numerical examples. For verification of the model, the evolution of stress state due to cyclic loading (tension-compression) of cylindrical element with the shot peened surface layer was calculated. The result of calculations was compared with experimental data given in the literature. A satisfactory agreement of experimental and numerical results was obtained.

The effect of the surface layer on fatigue life is observed particularly evident in notched components. The computer simulation of cyclic loading of notched components with surface layer was performed by the use of the developed software. The effect of surface layer parameters such as kinematic or isotropic hardening moduli, and the initial residual stress on form on stable hysteresis loops, stress evolution and final residual stress state at the notch root were studied. The trajectories of local principal stress, and local trajectories of center of the yield surface are also determined. The asymmetry of external loading of notched specimen was compared with the effect of asymmetry of local stress induced at the notch root.

Having specified the stress field, in the second step the multiaxial fatigue criteria were applied to determine the local fatigue curves corresponding local stress at different locations of the material element. The most critical portions of these curves constitute a fatigue curve of the whole element. This algorithm was applied for numerical determination of fatigue curve of the notched component ( $K_t = 3$ ) with hardened surface layer. In this analysis the use was made of the multiaxial fatigue criterion based on the strain energy density. A variation of the elastic and dissipated strain energy in the surface layer at the notch root and in the core in vicinity of the surface was plotted as a function of loading amplitude. The fatigue curve for this component was specified.

For the homogeneous notched specimen ( $K_t = 2.14$ ) the fatigue curve was determined experimentally. This curve and FEM analysis were used to calibrate the critical plane based fatigue criterion for steel 18G2A. Using this criterion and numerical experiments, the variation of fatigue curve of homogeneous notched specimen due to cyclic loading asymmetry and initial residual stress in the surface layer was studied.

The experimental fatigue curve was also determined for shot-peened notched specimen of 18G2A steel. In view of numerical experiments and the fatigue criterion calibrated previously one determined the parameters (strain hardening, residual stress) of the shot-peened layer. These parameters in turn were used to determine numerically the whole fatigue curve. The good agreement of theoretical and experimental fatigue curves is observed.

An application of the fatigue models presented in the first part of the thesis requires several material parameters to be identified. The material parameters of the surface layer cannot be determined in simple tension or torsion tests. The problem of identification of material constants is investigated in the second part of the thesis. Several methods have been proposed making use of spherical indentation test for characterization of plastic properties of metals. In the indentation test, a continuous measurement of indentation depth versus load is executed. In chapter 2.2.3 it is shown that using the relation load-penetration depth one can obtain the better accuracy of identification than using a relation load-radius of contact. The proposed identification methods are based on the self-similar solution (Hill, Storakers 1989) of the indentation into rigid-plastic material, which fulfills the power law  $\sigma = k\varepsilon_p^m$ . In the self-similar solution the exact relation between tension curve  $\sigma - \varepsilon_p$  and penetration curve  $P-h_p/D$  is given. However in actuality we deal with elastic-plastic materials. For such materials the direct measurement of plastic penetration curve  $P-h_p/D$  is not possible. To solve the problem, in the proposed approach, for a prescribed loading level a fictitious configuration of the elastic-plastic material is found in which elastic deformations are removed. This configuration should

fulfill the condition of closedness to the configuration that may occur at the same loading level in a rigid plastic material characterized by the some parameters  $k$  and  $m$  as the elastic plastic one. Having determined the curve  $P-h_p/D$  we shall use of the self-similar solution.

In the methods described in Chapters 2.1, 2.2 (part II) for determination of  $P-h_p/D$  curve three parameters measured in several loading-unloading tests are required: maximal force, maximal penetration depth and residual penetration depth. In the methods described in Chapters 2.3 – 2.6 the  $P-h_p/D$  curve is determined by means of operations performed on loading-partial unloading-reloading curves measured in the experiment.

For verification of the proposed methods, they were applied to specify constants  $k$ ,  $m$  for different materials. The verification was performed for homogeneous materials; since their stress-strain curve may also be determined in simple tension test.

In the second part of the thesis the method was also proposed which enable the identification of material whose constitutive law depends on three parameters, thus  $\sigma = \sigma_0 + k\varepsilon_p^m$  (Ludwig law). For such a material the approximate relation between penetration curve  $P-h_p/D$  and constants  $k$ ,  $\sigma_0$ ,  $m$  was found. Several examples of identification of materials that fulfill Ludwig law are presented.

The identification of the properties of thin layers such as laser alloyed layers and roller-burnished layers was also performed. In the identification procedure it was assumed that the maximal penetration depth does not exceed 1/12 of the layer thickness.

The method of identification of Young modulus was developed. In the method the use was made of derivatives of unloading curves corresponding to different values of load reversals.

