

Czesław Szymański

p. 269

ŚCISKANIE PASMA Z MATERIAŁU
SPRĘŻYSTO-IDEALNIE PLASTYCZNEGO
COULOMBA

1/1984

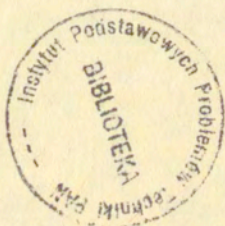


WARSZAWA 1984

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 2 września 1983 r.

56949



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 4,5. Ark.druk. 7,5
Oddano do drukarni w styczniu 1984 r.
Nr zamówienia 48/84.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 6

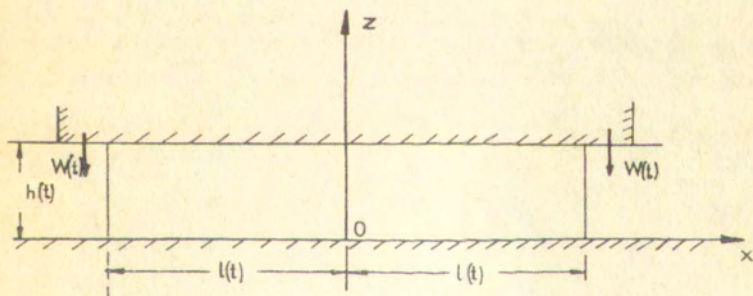
<http://rcin.org.pl>

Czesław Szynański
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

SCISKANIE PASMA Z MATERIAŁU
SPRĘŻYSTO-IDEALNIE PLASTYCZNEGO COULOMBA

1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest analiza mechanicznego zachowania się materiału pasma między sztywnymi płytami pod działaniem wymuszonego równoległego przemieszczenia pionowego $W(t)$ górnej płyty ściskającej, rys. 1.



Rys. 1

Założono, że materiał pasma jest jednorodny i izotropowy, a jego zachowanie się mechaniczne w procesie ściskania określone jest modelem ciała sprężysto-idealnie plastycznego, z warunkiem plastyczności Coulomba. W pracy ograniczono się do analizy uproszczonego mechanizmu dwuwymiarowej deformacji materiału pasma zależnej od jednej zmiennej przestrzennej x i jednego parametru W/t , określającego ewolucję procesu. Przedstawiono w pracy kompletne rozwiązanie, określające ewolucję przestrzennych rozkładów naprężenia i przemieszczenia oraz ewolucję siły osiowej pasma w zależności od parametru W/t . W rozwiązaniu określono i przeanalizowano kolejne fazy procesu ściskania pasma z różnymi układami stref deformacji - strefy sprężystej i sprężysto-plastycznej w jednoosiowym stanie odkształcenia /edometrycznej/ oraz stref sprężystych i sprężysto-plastycznych w płaskich stanach odkształcenia. Przeanalizowano progresję i zmiany układu stref i położenia granic między-strefowych. Rozwiązanie skonstruowano przy założeniu małych odkształceń.

Zagadnienie ściskania pasma między sztywnymi płytami, przy różnych programach obciążeń i stosowaniu różnych modeli ośrodka ciągłego do opisu właściwości mechanicznych materiału pasma w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, było przedmiotem szeregu analiz i rozwiązań w praktycznych zagadnieniach inżynierskich. Wymienimy tu przykładowo rozwiązania oparte na modelu ciała liniowo-sprężystego Hooke'a, podane w pracach: W. Nowackiego [1] i I.N. Sneddena [2]. W obu tych pracach wyprowadzono wzory ogólne na rozkłady naprężeń w paśmie poddanym działaniu ciśnień normalnych na obu powierzchniach brzegowych pasma - górnej i dolnej. Rozpatrzone tylko stany na-

prężen odpowiadające założonym w postaci ogólnej ciśnieniom brzegowym, nie badano procesów ściskania pasma związanych z ewolucją warunków brzegowych.

Rozwiązania zagadnienia ściskania pasma z materiału sztywno-idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Treski pomiędzy płytami szorstkimi i gładkimi przedstawione były w pracach L. Prandtla [3], W.W. Sokołowskiego [4], R. Hilla [5,6], J. Mandela i J. Salançona [7], W. Szczepińskiego [8], I.F. Collinsa [9], E.A. Marshalla [10]. Również w pracach L.M. Kazanowa [11] oraz O. Hoffmana i G. Sachsa [12] przedstawiono wyniki rozwiązań dla pasma z materiału sztywno idealnie-plastycznego Treski.

Rozwiązanie zagadnienia ściskania pasma, przybliżone i dokładniejsze /metodą charakterystyk/, dla materiału sztywno-idealnie plastycznego Coulomba podają prace R. Izwickiego i Z. Mroza [13], A.M. Iłsztejna i I.M. Libermana [14] oraz J. Zawady i J. Supela [15]. Ostatnio ukazała się praca Z. Mroza i B. Zedrogi [16] przedstawiająca rozwiązanie /przybliżone/ dla pasma z materiału sprężysto-plastycznego Coulomba z osłabieniem. W pracy tej prześledzono cały proces ewolucji rozkładów naprężeń i przemieszczeń w paśmie; począwszy od fazy początkowej ze sprężystymi deformacjami materiału przebadano następnie zaawansowaną fazę procesu z układem sąsiadujących ze sobą stref sprężystej i sprężysto-plastycznej deformacji aż do etapu końcowego procesu, gdy wyczerpuje się nośność pasma i naprężenia spadają do zera.

W obecnej pracy przeanalizowano również cały proces ściskania pasma, zakładając model ciała sprężysto-idealnie pla-

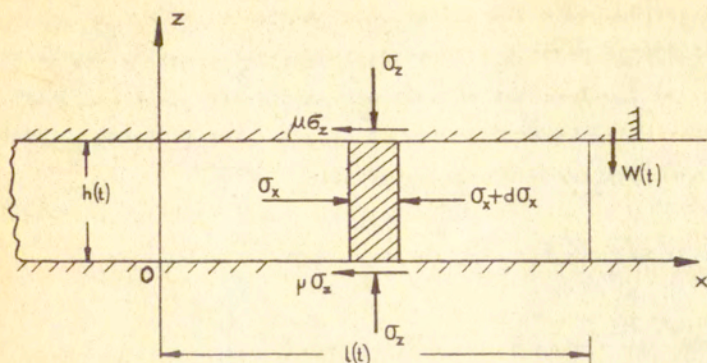
stycznego Coulomba dla materiału w paśmie oraz stosując do opisu deformacji pasma uproszczoną kinematykę, podobnie jak w pracy [16], polegającą na założeniu superpozycji warstwowych przemieszczeń cząstek pasma w kierunkach równoległym i prostopadłym do powierzchni brzegowych płyt.

2. Założenia

Wychodząc z uwag podanych w p.1 pracy, sprecyzujemy obecnie założenia stanowiące podstawę do rozwiązania zagadnienia.

2.1. Założenia wyjściowe

Pasma o szerokości początkowej $2l_0$ i wysokości początkowej H i długości dużo większej od $2l_0$ i H poddane jest działaniu ściskającemu płyt sztywnych, wywołanemu sztywnym przemieszczeniem górnej płyty. Materiał pasma opisujemy modelem ciała sprężysto-idealnie plastycznego, którego właściwości mechaniczne podajemy niżej w założeniu 2.2. Zakładamy kinematyczny program obciążenia pasma, przyjmując jako parametr określający ewolucję procesu przemieszczenie W/t górnej płyty ściskającej w kierunku prostopadłym do brzegów ściskanego pasma, zaś dolną płytę podpierającą przyjmujemy za nieruchomą, rys.2.



Rys. 2

Zakładamy szorstkie powierzchnie płyt i przyjmujemy działanie sił tarcia Coulomba na powierzchniach kontaktu płyt z pasmem. Biorąc pod uwagę wzajemną relację wymiarów pasma, możemy traktować jego deformację jako dwuosiową deformację płaską, zależną od dwu zmiennych przestrzennych x , z i zmiennej czasowej t /parametru W/t /. W obecnej pracy ograniczamy się do analizy układów przestrzennie jednowymiarowych, stosując założenia odpowiednio upraszczające mechanizm deformacji pasma, co będzie przedstawione w p. 2.4. Przy formułowaniu dalszych założeń i wykonywaniu operacji analitycznych przyjmujemy umowę, że naprężenia ściskające i odkształcenia skrcające są dodatnie, co jest zgodne z praktyką stosowaną w geomechanice.

2.2. Model mechaniczny materiału pasma

Zachowanie się mechaniczne materiału pasma w procesie opisywany modelem ciała sprężysto-idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Coulomba o stałej kohezji c i stałym kącie tarcia wewnętrznego φ . Związki konstytutywne przyjętego modelu mają następującą postać:

- w obszarach sprężystej deformacji stosują się związki liniowej teorii sprężystości Hooke'a.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

/2.1/

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

gdzie ν - współczynnik Poissona, E - moduł Younga,

- w obszarach sprężysto-plastycznej deformacji stosujemy założenie, że prędkość odkształcenia całkowitego $\dot{\varepsilon}_{ij}$ jest sumą prędkości odkształcenia sprężystego $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ i prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, a każda z tych składowych określona jest niżej podanymi wzorami:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \left(\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \right),$$

/2.2/

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial g(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}},$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

We wzorach /2.2/, $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$ jest pochodną tensora naprężenia w mierze Zaremby-Jaumanna, określoną wzorami:

$$/2.3/ \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \right) - \omega_{i\alpha} \sigma_{\alpha j} + \sigma_{i\alpha} \omega_{\alpha j}, \quad (i, j, \alpha = 1, 2, 3),$$

zaś współrzędne tensora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$, składowe spinu ω_{ij} i prędkości przemieszczeń \dot{u}_k - wzorami:

$$/2.4/ \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right), \\ \omega_{ij} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right), \\ \dot{u}_i &= \frac{d}{dt} u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

$g(\underline{\sigma})$ - jest potencjałem plastycznym, który przyjmujemy w postaci analogicznej do warunku plastyczności Coulomba, ale o innych stałych materiałowych / φ' i c' /. Potencjał ten w przestrzeni naprężeń głównych wyrażamy wzorem w postaci:

$$/2.5/ \quad g(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi' - a = 0,$$

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1, \quad \varphi' = \text{const}, \quad a = \text{const},$$

gdzie parametr φ jest ograniczony warunkiem:

$$/2.6/ \quad 0 \leq \varphi' \leq \varphi,$$

wynikającym z postulatu dodatniości mocy energii dysypowanej, zaś φ jest parametrem w warunku plastyczności Coulomba /2.7/. Warunek plastyczności Coulomba przyjmujemy w postaci kryterium Coulomba ze stałą kohezją c i stałym kątem tarcia

wewnętrzny φ , wyrażając ten warunek w przestrzeni naprężeń głównych wzorem:

$$\dot{f}(\underline{\sigma}) \equiv \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0,$$

/2.7/ $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, $\varphi = \text{const}$, $c = \text{const}$.

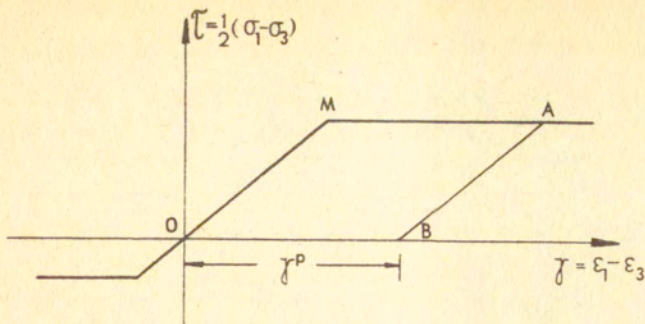
Współczynnik funkcyjny $\dot{\Lambda}$ we wzorze /2.2/2 jest pewną wielkością zależną od niezmienników tensora naprężenia i jest określony relacjami:

$$\dot{\Lambda} > 0 \quad \text{dla} \quad \dot{f}(\underline{\sigma}) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{f}(\underline{\sigma}) = 0$$

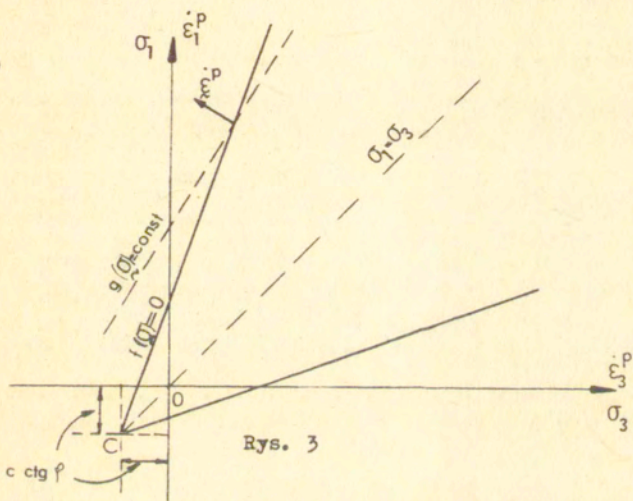
/2.8/ $\dot{\Lambda} = 0 \quad \text{dla} \quad \dot{f}(\underline{\sigma}) < 0 \quad \text{lub} \quad \dot{f}(\underline{\sigma}) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{f}(\underline{\sigma}) < 0,$

gdzie $\dot{f}(\underline{\sigma})$ jest pochodną materialną funkcji $f(\underline{\sigma})$.

Charakterystykę mechaniczną materiału pasma ilustrujemy na rys. 3 a, b dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia.



b)



Rys. 3

2.3. Równania równowagi dla naprężeń i ich pochodnych czasowych

W przypadku rozpatrywania procesów niestacjonarnych, ale przebiegających w sposób kwazistatyczny, współrzędne $\sigma_{ij}(x_k, t)$ tensora naprężenia winny spełniać równania różniczkowe równowagi dla naprężeń i ich pochodnych według wzorów:

$$/2.9/ \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} / \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} / = 0$$

oraz

$$/2.10/ \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}, \quad /1, j, k = 1, 2, 3/ ,$$

gdzie

$$/2.11/ \quad \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}, \quad \dot{u}_k = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

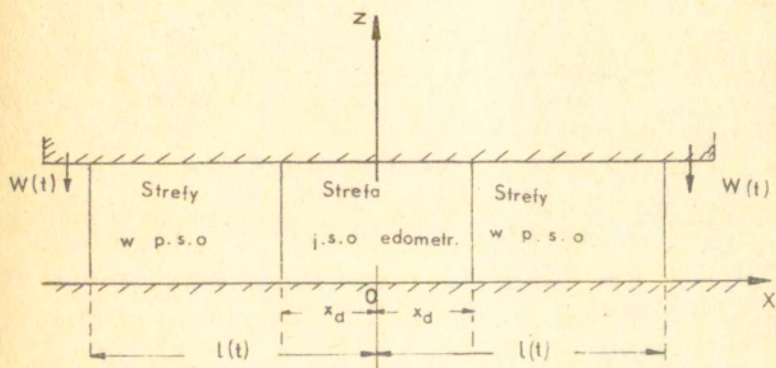
Równania te odniesione są do bieżącej konfiguracji ośrodka, tj. są one słuszne przy Eulerowskim opisie deformacji materiału. W równaniach tych pominięto siły masowe /objętościowe/.

Przy przyjętych założeniach upraszczających podanych niżej w p. 2.4, równanie te bądź są spełnione tożsamościowo /w strefach jednoosiowych jednorodnych stanów odkształcenia/, bądź też zastępujemy je jednym równaniem przybliżonym /2.21/, stosującym się w obszarach dwuosiowej deformacji płaskiej.

2.4. Uproszczony mechanizm deformacji pasma

W obecnej pracy nie będziemy analizować i rozwiązywać zagadnienia przy założeniu ogólnego przypadku przestrzennie dwuwymiarowej deformacji płaskiej, ale ograniczymy się - podobnie jak w pracy [16] - do analizy układów deformacji przestrzennie jednowymiarowych, złożonych ze strefy płaskiego dwuosiowego i strefy jednoosiowego stanu odkształcenia, zakładając ponadto jednorodne rozkłady tych odkształceń po wysokości pasma w ciągu całego procesu. Dopuszczamy możliwość występowania jed-

noosiowych stanów odkształcenia w wąskiej strefie w otoczeniu osi symetrii pasma /dla $-x_d \leq x \leq x_d$ / oraz stref w dwuosiowych płaskich stanach odkształcenia w pozostałych obszarach pasma /dla $x_d \leq |x| \leq l(t)$ / rys. 4, z jednorodnymi rozkładami obu rodzajów odkształceń po wysokości pasma.



RYS. 4

Obierając układ odniesienia deformacji Ox_yz jak na rys. 4 /oś y prostopadle do płaszczyzny rysunku/ możemy wyrazić kinematykę cząstek i deformację wzajemną, wynikającą z powyższych założeń i założenia symetrii obciążeń, następującymi wzorami:

- w strefie jednoosiowego stanu odkształcenia /zwanej dalej strefą edometryczną/

$$/2.12/ \quad u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = -\frac{W(t)}{h(t)} z,$$

$$\epsilon_x = 0, \quad \epsilon_y = 0, \quad \epsilon_z = -\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{W(t)}{h(t)},$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0,$$

$$/2.12/ \quad \text{dla} \quad -x_d(t) \leq x \leq x_d(t), \quad 0 \leq z \leq h(t)$$

oraz w strefach z płaskimi dwuosiowymi stanami odkształcenia /również przy założeniu jednorodności odkształceń po wysokości pasma/

$$u_x = \pm u(x, t), \quad u_y = 0, \quad u_z = -\frac{W(t)}{h(t)} z,$$

$$\varepsilon_x = \mp \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = -\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{W(t)}{h(t)},$$

/2.13/

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0,$$

$$\text{dla} \quad -l(t) \leq x \leq -x_d(t), \quad x_d(t) \leq x \leq l(t), \quad 0 \leq z \leq h(t),$$

gdzie uwzględniono umowę, że odkształcenia kurczące są dodatnie oraz przyjęto oznaczenia:

$W/t/$ - sztywne przemieszczenia górnej płyty w chwili t ,

/2.14/ $h/t/$ - bieżąca wysokość pasma,

$l/t/$ - bieżąca szerokość pasma,

przy tym wielkości te związane są z wartościami początkowymi następującymi zależnościami:

$$/2.15/ \quad h/0/ = H - W/0/, \quad h/0/ = H, \quad W/0/ = 0,$$

$$l/0/ = l_0 + u_1/0/, \quad l/0/ = l_0, \quad u_1/0/ = 0,$$

gdzie $U_1/t/$ jest przemieszczeniem swobodnego brzegu pasma

$$/2.16/ \quad U_1/t/ = U/x, t/ \Big|_{x=l/t/}$$

Ze wzorów /2.12/ i /2.13/ i /2.4/ wynika, że odkształcenia

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z \text{ i prędkości odkształcenia } \dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y = 0, \quad \dot{\varepsilon}_z$$

są wielkościami głównymi, zależnymi tylko od jednej zmiennej przestrzennej x i czasowej t /lub od parametru ewolucji $W(t)/$ w obszarach z płaskimi stanami odkształcenia, rys. 4, oraz wielkościami głównymi, zależnymi tylko od t /z jedną niezerową wielkością główną $\dot{\epsilon}_z$ lub $\dot{\epsilon}_z$ / w strefie edometrycznej, rys. 4. Wprowadzając te wielkości odkształcenia i prędkości odkształcenia do równań konstytutywnych /2.1/ i /2.2/ możemy wykazać, że również wielkości składowych tensora naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ są wielkościami głównymi o tej samej zależności funkcyjnej od zmiennych x i t , a mianowicie w obszarach płaskiej deformacji, rys.4,

$$\begin{aligned} & \sigma_x = \sigma_x(x,t), \quad \sigma_y = \sigma_y(x,t), \quad \sigma_z = \sigma_z(x,t), \\ /2.17/ \quad & \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \\ & \text{dla } x_d(t) \leq |x| \leq l(t) \end{aligned}$$

oraz w strefie edometrycznej deformacji, rys. 4,

$$\begin{aligned} & \sigma_x = \sigma_x(t), \quad \sigma_y = \sigma_y(t), \quad \sigma_z = \sigma_z(t), \\ /2.18/ \quad & \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \\ & \text{dla } |x| \leq x_d(t). \end{aligned}$$

Ponadto z założonej kinematyki cząstek pasma /2.12/_{1,2,3} i /2.13/_{1,2,3} wynika, że pochodne tensora naprężenia w mierze Zaremby-Jaumanna /2.3/ redukują się do pochodnych materialnych, tj. zachodzą wzory:

$$/2.19/ \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{ij}(x,t) = \dot{\sigma}_{ij}(x,t) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \quad (i,j,k=1,2,3)$$

gdyż zgodnie ze wzorami /2.4/₂ oraz /2.12/_{1,2,3} i /2.13/_{1,2,3} współrzędne spinu $\omega_{ij}/x,t/$ są równe zeru. Wyróżnienia pochod-

nych naprężenia, napisane w postaci ogólnej /2,3/, upraszczają się znacznie przy założonej kinematyce cząstek pasma. Nie będziemy ich wypisywać w tej uproszczonej postaci, gdyż nie będziemy z nich korzystać w dalszej analizie.

Zauważmy, że przyjęta uproszczona kinematyka pasma, określona wzorami /2.12/_{1,2,3} i /2.13/_{1,2,3} odpowiada założeniu, że deformacja materiału pasma może być traktowana jako superpozycja płaskich warstwowych przemieszczeń cząstek w kierunkach prostopadłym i równoległym do powierzchni płyt lub tylko jako płaskie warstwowe przemieszczanie w kierunku prostopadłym do obu płyt /w strefach edometrycznych/. Wynikające z tej kinematyki i z równań konstytutywnych /2.1/ i /2.2/ jednowymiarowe /przestrzennie/ rozkłady naprężeń $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, t)$, określone wzorami /2.17/ i jednorodne /przestrzennie/ rozkłady naprężeń $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}(t)$, podane we wzorach /2.18/, są równoważne uśrednionym po grubości pasma wielkościom naprężeń $\bar{\sigma}_{ij}(x, z, t)$ w obszarach dwuosiowej deformacji płaskiej i naprężeń $\bar{\sigma}_{ij}(z, t)$ w obszarach jednoosiowej deformacji. Wielkości naprężeń $\bar{\sigma}_x(t)$, $\bar{\sigma}_y(t)$ i $\bar{\sigma}_z(t)$ we wzorach /2.18/ spełniają tożsamościowo równania równowagi /2.9/, natomiast naprężenia /główne/ $\bar{\sigma}_x(x, t)$, $\bar{\sigma}_y(x, t)$ i $\bar{\sigma}_z(x, t)$ wyrażone w postaci /2.17/ i stosujące się w strefach z płaskimi stanami odkształcenia, nie spełniają ściśle równań /2.9/. Dlatego też w obszarach dwuosiowej deformacji płaskiej zażądany spełnienia przybliżonego równania równowagi. Z bilansu równowagi sił dla elementu ograniczonego przekrojami $x = \text{const}$ i $x + dx = \text{const}$ i powierzchniami przegowymi płyt $z = 0$ i $z = h(t)$, otrzymujemy zgodnie z rys. 2

$$/2.20/ \quad h(t) \frac{\partial \bar{\sigma}_x(x, t)}{\partial x} + 2\mu \bar{\sigma}_z(x, t) = 0.$$

skąd

$$/2.21/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\mu}{h(t)} \sigma_z = 0, \quad \mu = \text{const.}$$

Pozostałe dwa równania równowagi elementu, odpowiadające równowadze rzutów sił w kierunkach y i z są spełnione tożsamościowo przez wielkości określone wzorami /2.17/.

Z podanego wyżej równania równowagi korzystać będziemy w dalszej części pracy przy wyprowadzeniu rozwiązujących równań podstawowych dla obszarów dwuosiowej deformacji sprężystej i sprężysto-plastycznej.

2.5. Warunki brzegowe i początkowe procesu

Obecnie sformułujemy warunki brzegowe i początkowe dla założonej struktury funkcyjnej wielkości kinematycznych i naprężeniowych, wyrażonej wzorami /2.12/ i /2.13/ oraz /2.17/ i /2.18/. Przyjmujemy następujące warunki brzegowe dla naprężeń, słuszne dla całego procesu ściskania pasma, rys.2,

$$/2.22/ \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_x(x,t) = 0 \quad \text{dla } x = \pm l(t), \\ \tau_{zx} = \mu \sigma_z \quad \text{przy } u_x > 0 \\ \tau_{zx} < \mu \sigma_z \quad \text{przy } u_x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dla } z=0 \text{ i } z=h(t) \\ \text{oraz } \mu = \text{const.} \end{array}$$

gdzie $l(t)$ jest szerokością każdej z połówek pasma, μ jest stałym współczynnikiem tarcia materiału pasma o sztywne płyty ścisające.

Z założonej kinematyki pasma według wzorów /2.12/ i /2.13/ wynikają następujące warunki brzegowe dla przemieszczenia pionowego u_z

$$/2.23/ \quad \left. \begin{array}{l} u_z(z,t) = 0 \quad \text{dla } z = 0, \\ u_z(z,t) = -W(t) \quad \text{dla } z = h(t) \end{array} \right\}$$

Ponadto z uwagi na symetrię obciążeń brzegowych /2.22/₁ względem geometrycznej płaszczyzny symetrii pasma $x = 0$, rys.2, wynikają dodatkowe warunki

$$/2.24/ \quad u / -x, t / = -u / x, t / \quad u / 0, t / = 0$$

dla przemieszczeń poziomych $u_x = u / x, t /$. Drugi z warunków /2.24/ może być uważany jako warunek brzegowy dla każdej z półówek pasma.

Jako warunki początkowe dla naprężeń i przemieszczeń w procesie ściskania pasma przyjmujemy następujące zależności:

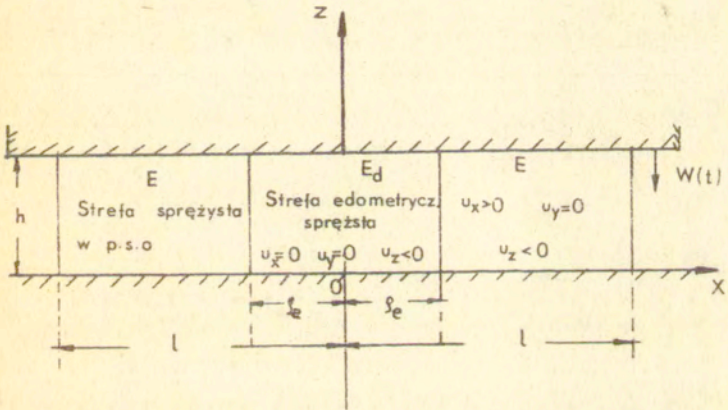
$$/2.25/ \quad \begin{aligned} \epsilon_x(x,t) = 0, \quad \epsilon_y(x,t) = 0, \quad \epsilon_z(x,t) = 0, \quad \tau_{zx}(x,t) = 0 \\ u_x(x,t) = u(x,t) = 0, \quad (u_y \equiv 0), \quad u_z = -\frac{W(t)}{h(t)} z = 0, \\ \text{dla } t=0, \quad -l_0 \leq x \leq l_0, \quad 0 \leq z \leq H \end{aligned}$$

tj. zakładamy stan beznaprężeniowy i bez odkształceń w chwili początkowej procesu.

2.6. Układy stref i fazy procesu deformacji pasma

Wprowadzenie do analizy zagadnienia modelu ciała sprężysto-plastycznego, poprzez równania /2.1/ - /2.8/ oraz stref z jednoosiowym i płaskim dwuosiowym stanami odkształcenia, poprzez założenia /2.12/ i /2.13/, prowadzi w konsekwencji do konieczności rozpatrywania różnych układów stref deformacji złożonych: ze stref edometrycznej sprężystej E_d lub edometrycznej sprężysto-plastycznej E_{dp} deformacji jednoosiowej oraz stref sprężystych E i sprężysto-plastycznych EP w płaskich stanach odkształcenia. W każdej z tych czterech rodzajów stref deformacji inna będzie struktura równań konstytutywnych i wynikających z nich równań rozwiązujących. Inna będzie struktura rozwiązań

zależnie od kombinacji tych stref tworzących odpowiednie układy w procesie. Jednak decydującym jest wybór początkowego układu stref przy starcie procesu ściskania pasma. Dalsze zmiany układów stref uzależnione są od początkowego układu i rozmieszczenia stref w pasmie. Założymy, że istnieje początkowa faza procesu z układem trzech stref deformacji różnego typu, rys.5: w środkowej części pasma w otoczeniu osi symetrii pasma Oz wystąpi strefa E_d jednoosiowego sprężystego stanu odkształcenia /edometryczna strefa sprężysta/ i dwie sąsiadujące z nią strefy sprężyste E w płaskich stanach odkształcenia.

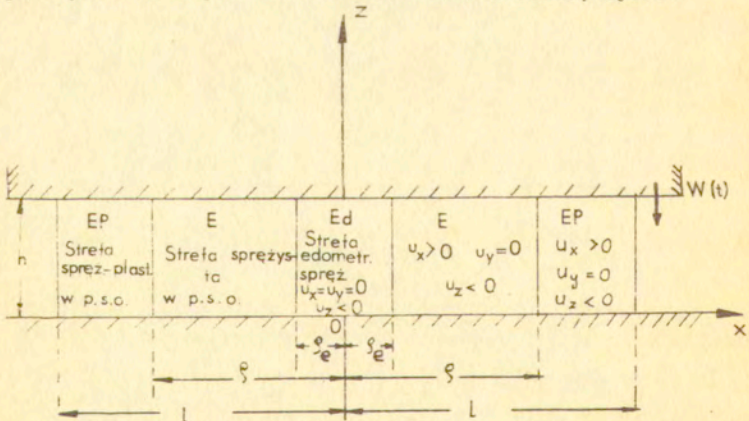


Rys.5 /Faza I/

Założenie tego układu 3-oh stref deformacji w fazie początkowej, którą oznaczymy jako fazę I, nakłada ograniczenie na wymiary początkowe pasma H/l_0 i bieżące $l(t)/h(t)$, co będzie ustalone w p.4 pracy. Zgodnie z założoną kinematyką pasma

przyjmujemy, że granice między strefami E_d i E są płaszczyznami $x = \pm \xi_c / t$ położonymi w równych odległościach od płaszczyzny symetrii pasma $x=0$. Analogicznie zakładamy, że boczne brzo- gi swobodne pasma są płaszczyznami $x = \pm l/t$, zmieniającymi swoje położenie, ale zachowującymi równoległość do płaszczyzny symetrii $x = 0$ pasma.

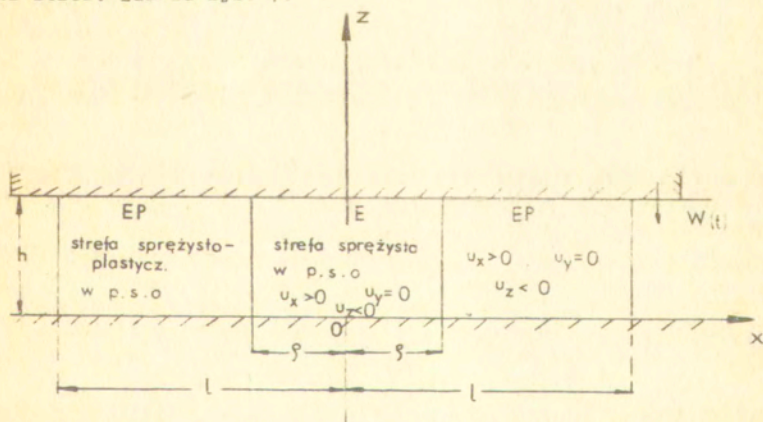
W miarę ewolucji procesu ściskania pasma, wywołanej zmianą przemieszczenia W/t górnej płyty ściskającej, zmieniają się położenia granic stref I fazy, powstaje inny układ stref, zawierający strefy sprężysto-plastycznej deformacji EP w otoczeniu swobodnych brzegów pasma $x = \pm l/t$, rys.6 - rozwija się następna, II faza procesu, w której rozwiązanie wyraża się in- ną strukturą analityczną. Można stwierdzić, że w tej fazie procesu pojawi się układ 5-ciu stref deformacji: strefa środ- kowa E_d w sprężystym stanie edometrycznym, dwie przylegające do niej strefy sprężyste E i dwie skrajne strefy sprężysto- plastyczne EP w płaskich stanach odkształcenia, rys.6.



Rys.6 /Faza II/

W dalszych etapach procesu znikają kolejno strefy najpierw edometryczna E_d , potem sprężyste płaskie E, a przy określonych bezwzględnych wartościach parametrów materiałowych φ i ν , a mianowicie, gdy $\sin \varphi < 1-2\nu$, może się wytworzyć przejściowo w otoczeniu osi symetrii pasma strefa sprężysto-plastycznego stanu edometrycznego E_{dp} sąsiadująca z otaczającymi ją strefami sprężysto-plastycznymi EP w płaskim stanie odkształcenia. Można mianowicie wykazać, że poza fazami I i II procesu, z układami stref deformacji, jak na rys. 5 i 6, wytworzą się w dalszych etapach procesu ściskania układy stref deformacji, jak na rys. 7 lub 8 i 9, charakteryzujące III i IV fazę procesu. W III-iej fazie procesu rozwija się alternatywnie różny układ stref zależnie od relacji parametrów materiałowych φ i ν , zaś IV-a faza procesu - jest układem złożonym z jednej strefy stanu sprężysto-plastycznego EP w całym paśmie.

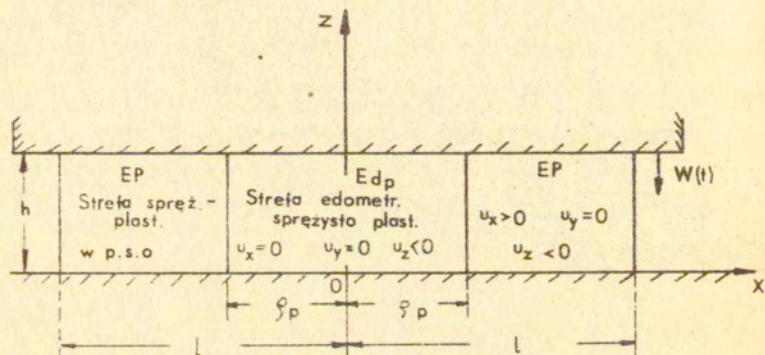
Jeśli $\sin \varphi \geq 1-2\nu$, to III-cia faza procesu odpowiada układowi stref, jak na rys. 7.



Rys. 7 /Faza III $\sin \varphi \geq 1-2\nu$ /

W fazie tej wystąpi układ trzech stref w płaskim stanie odkształcenia: strefa sprężysta płaska E w otoczeniu osi symetrii w obszarze $-y(t) \leq x \leq y(t)$ i dwie strefy sprężysto-plastyczne EP, zajmujące obszary pasma $-l(t) \leq x \leq -y(t)$ oraz $y(t) \leq x \leq l(t)$.

Jeśli $\sin \varphi < 1-2\nu$, to III faza procesu odpowiada układowi stref, jak na rys. 8

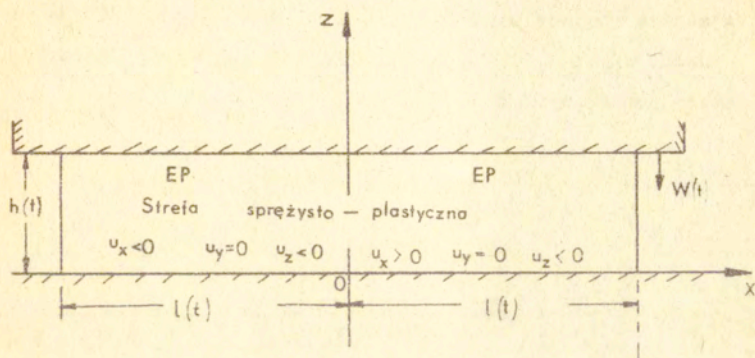


Rys. 8 /Faza III dla $\sin \varphi < 1-2\nu$ /

Faza III-a w tym przypadku odpowiada układowi trzech stref deformacji w obszarze pasma: w środkowej części wystąpi strefa E_{dp} sprężysto-plastycznej deformacji edometrycznej /jednoosiowy stan odkształcenia/, a w jej sąsiedztwie resztę obszaru pasma zajmują dwie strefy EP sprężysto-plastycznego płaskiego stanu odkształcenia.

W końcowym etapie procesu cały materiał pasma przejdzie w stan plastyczny, a więc wytworzy się układ z jedną strefą stanu

sprężysto-plastycznego EP, niezależnie od relacji wzajemnej parametrów φ i ν . Ten końcowy etap oznaczamy jako fazę IV, rys. 9.



Rys. 9 /Faza IV/

2.7. Warunki zgodności deformacji na granicach stref

Warunki równowagi elementu i jego nierozdzielności na granicach stref deformacji, we wszystkich fazach procesu przedstawionych na rys. 5-9, wymagają spełnienia następujących równości dla naprężeń σ_x i τ_{zx} oraz przemieszczenia U_x

$$[\sigma_x(x,t)] = 0, \quad [\tau_{zx}(x,t)] = 0, \quad [u_x(x,y)] \equiv [u(x,t)] = 0$$

/2.26/ dla $x = \varrho_e(t), \varrho(t), \varrho_p(t)$,

gdzie $[f/x,t]$ oznacza skokową zmianę funkcji $f/x,t/$ przy przejściu przez położenia granic $x = \varrho_e/t/$, $x = \varrho/t/$ i $x = \varrho_p/t/$ w chwili t (dla etapu $W = W/t/$).

Przedstawione wyżej w p. 2.1 - 2.7 założenia wyjściowe i niektóre wnioski wykorzystamy niżej w konstrukcji rozwiązań w

poszczególnych fazach procesu ściskania pasma. W parametrach zależnych tylko od t , jak i funkcjach zależnych od x i t będziemy niekiedy opuszczać argumenty x i t , pisząc wprost np. W , ξ , ξ_p , $\bar{\sigma}_x$ i u , zamiast symboli W/t , ξ/t , ξ_p/t , $\bar{\sigma}_x/x,t$ i $U/x,t$, jeśli to nie będzie budzić wątpliwości o charakterze funkcyjnym tych wielkości.

3. Wyprowadzenie zależności podstawowych

Uwzględniając w ogólnych równaniach konstytutywowych /2.1/ - /2.8/ przyjęte upraszczające założenia kinematyczne /2.12/ i /2.13/ oraz związane z nimi uproszczenia dotyczące rozkładu naprężeń w pasmie według wzorów /2.17/ - /2.19/, dochodzimy do ilościowej redukcji poszukiwanych wielkości niewiadomych i ilości równań je określających. Otrzymane w wyniku uwzględnienia tych uproszczeń równania i zależności algebraiczne łącznie z przybliżonym równaniem równowagi /2.21/ pozwalają /po wykonaniu odpowiednich operacji całkowania równań/ na otrzymanie poszukiwanych wielkości przemieszczeń i naprężeń w postaci skończonych wyrażeń analitycznych. W wyrażeniach tych wystąpią dowolne funkcje całkowania C_1/t , zależne od t lub od parametru ewolucji W/t . Ponieważ równania konstytutywne mają różną strukturę analityczną w poszczególnych strefach deformacji, omawianych wyżej w p. 2.4, przeto odpowiednie zależności i rozwiązania ogólne w poszczególnych strefach deformacji wyprowadzimy kolejno i oddzielnie dla każdej z 4-ech rodzajów stref. Będą to więc zależności podstawowe wyprowadzone dla stref edometrycznych sprężystych E_d i sprężysto-plastycznych

E_{dp} oraz stref sprężystych E i sprężysto-plastycznych EP w płaskich dwuosiowych stanach odkształcenia.

3.1. Strefa edometryczna sprężysta E_d

Stosując wzory /2.12/ do równań konstytutywnych /2.1/ otrzymujemy rozwiązanie w strefie edometrycznej sprężystej E_d w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{ed} = \sigma_y^{ed} = \frac{E' \nu'}{1-\nu'^2} \frac{W(t)}{h(t)}, \quad \sigma_z^{ed} = \frac{E'}{1-\nu'^2} \frac{W(t)}{h(t)} \\ /3.1/ \quad \tau_{xy}^{ed} = 0, \quad \tau_{yz}^{ed} = 0, \quad \sigma_{zx}^{ed} = 0, \quad u_x^{ed} = 0, \quad u_y^{ed} = 0, \quad u_z^{ed} = -\frac{W(t)}{h(t)} z \\ \text{dla } -\rho_e(t) \leq x \leq \rho_e(t), \quad z \leq 0 \leq h(t), \quad 0 \leq W(t) \leq W_2(t), \end{aligned}$$

gdzie

$$/3.2/ \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad /0 < \nu < \frac{1}{2}/$$

Naprężenia /3.1/ spełniają tożsamościowo równania równowagi /2.9/ i /2.10/. Nie znamy tylko zasięgu strefy edometrycznej E_d , tj. granic $x = \pm \rho_e(t)$ ze strefami sprężystymi E, rys.5, 6. Wyznamy te granice z warunków ciągłości naprężeń i przemieszczenia /2.26/. Nie znamy również granicy $W = W_2(t)$ odpowiadającej zakresowi trwania procesu, przy którym istnieje strefa E_d . Wyznamy to z warunku dodatniości granicy $\rho_e(t) \geq 0$. Określeniem tych granic zajmiemy się niżej w p.4.

3.2. Rozwiązanie ogólne w strefie sprężystej E /płaskiego stanu odkształcenia/

W strefie sprężystej E stosują się wzory /2.13/ dla przemieszczeń i odkształceń. Wykorzystując te wzory w równaniach

konstytutywnych /2.1/ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) = - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ /3.3/ \quad \varepsilon_z &= \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) = \frac{w(t)}{h(t)} \\ \sigma_y &= \nu (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x + \sigma_z) \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} = 0, \end{aligned}$$

gdzie E' i ν' określone są wzorami /3.2/. Wzory /3.3/ wskazują, że odkształcenia ε_x , $\varepsilon_y = 0$ i ε_z oraz naprężenia σ_x , σ_y i σ_z są odkształceniami i naprężeniami głównymi, zależnymi tylko od zmiennych x i t , co było już stwierdzone wzorami /2.17/. Znikanie naprężeń stycznych τ_{xy} , τ_{yz} i τ_{zx} we wzorach /3.3/ jest sprzeczne z warunkiem brzegowym /2.22/2, tj. z warunkiem $\tau_{zx} = \mu \sigma_z$ przy $u_x > 0$ dla $z = 0$ i $z = h/t$. Ale przy małych μ warunek ten można uważać jako w przybliżeniu słuszny. Ponieważ założone pola przemieszczeń i odkształceń według wzorów /2.13/ i wynikające stąd zależności /3.3/ traktować możemy jako aproksymacje rzeczywistych zależności, przeto możemy również zapostulować spełnienie przybliżonego równania równowagi, podanego wyżej wzorem /2.21/, tj. równania

$$/3.4/ \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{2\mu}{h(t)} \sigma_z = 0$$

Ale z zależności /3.3/2 otrzymujemy:

$$/3.5/ \quad \sigma_z = E' \frac{w(t)}{h(t)} + \nu' \sigma_x$$

Z obu wzorów /3.4/ i /3.5/ po scałkowaniu otrzymujemy nastę-

pujące rozwiązanie ogólne dla naprężeń $\sigma_x(x,t)$ i $\sigma_z(x,t)$

w strefie sprężystej E

$$/3.6/ \quad \begin{aligned} \sigma_x^e &= C_1^e(t) e^{-\frac{2\mu\nu'}{h}x} - \frac{E'}{\nu'} \frac{W(t)}{h(t)} \\ \sigma_z^e &= \nu' C_1^e(t) e^{-\frac{2\mu\nu'}{h}x} \end{aligned}$$

gdzie $C_1^e(t)$ jest dowolną funkcją całkowania, którą określimy niżej z warunku brzegowego /2.22/₁ lub z odpowiedniego warunku ciągłości /2.26/₁.

Podstawiając /3.6/ do /3.3/₁ i całkując otrzymane wyrażenie na pochodną $\partial u/\partial x$, otrzymamy wzór na przemieszczenie $u_x^e = u^e(x,t)$ w strefie sprężystej deformacji płaskiej

$$/3.7/ \quad u_x^e = u^e(x,t) = \frac{1-\nu'^2}{2\mu\nu'} \frac{h(t)}{E'} C_1^e(t) e^{-\frac{2\mu\nu'}{h(t)}x} + \frac{W(t)}{\nu' h(t)} x + C_2^e(t)$$

gdzie $C_2^e(t)$, podobnie jak $C_1^e(t)$, jest dowolną funkcją całkowania, którą określimy niżej z warunku brzegowego /2.24/₂ lub z warunku ciągłości przemieszczeń /2.26/₃, zależnie od fazy procesu /fazy I, II lub III/.

Tak więc na podstawie /3.6/, /3.7/, /3.3/₃ oraz /2.13/_{1,2,3} możemy napisać ogólną postać rozwiązania w strefie E sprężystej deformacji płaskiej:

$$/3.8/ \quad \begin{aligned} \sigma_x^e &= C_1^e(t) e^{-\frac{2\mu\nu'}{h}x} - \frac{E'}{\nu'} \frac{W}{h} \\ \sigma_z^e &= \nu' C_1^e(t) e^{-\frac{2\mu\nu'}{h}x}, \quad \sigma_y^e = \nu'(\sigma_x^e + \sigma_z^e) = \frac{\nu'}{1+\nu'}(\sigma_x^e + \sigma_z^e) \\ u_x^e &\equiv u^e(x,t) = \frac{1-\nu'^2}{2\mu\nu'} \frac{h}{E'} C_1^e(t) e^{-\frac{2\mu\nu'}{h}x} + \frac{W}{\nu' h} x + C_2^e(t) \\ u_y^e &= 0, \quad u_z^e = -\frac{W(t)}{h(t)} z \end{aligned}$$

Funkcje $C_1^0/t/$ i $C_2^0/t/$ oraz położenia granic strefy $/x = \xi_0/t/, x = \xi/t/$ i $x = l/t/$ określimy z warunków brzegowych /2.22/₁ i /2.24/₂ lub warunków ciągłości /2.26/, zależnie od fazy procesu. Zajmiemy się tym w p.4.

3.3. Rozwiązanie ogólne w strefie EP sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej

Zakładając pole przemieszczeń w strefie EP, podobnie jak w strefie E w postaci /2.13/ otrzymujemy następujące wzory dla odkształceń, prędkości przemieszczeń i prędkości odkształce-

nis

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\dot{W}(t)}{h(t)},$$

/3.9/ $\varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0,$

/3.10/ $\dot{u}_x = \dot{u}(x,t) = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 - \frac{\partial u}{\partial x}}, \quad \dot{u}_y = 0, \quad \dot{u}_z = -\frac{\dot{W}(t)}{h(t)} z$

oraz

$$\dot{\varepsilon}_x = -\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{1 - \frac{\partial u}{\partial x}} \right), \quad \dot{\varepsilon}_y = 0, \quad \dot{\varepsilon}_z = -\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = \frac{\dot{W}(t)}{h(t)}$$

/3.11/ $\dot{\gamma}_{xy} = 0, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{zx} = 0.$

Ze wzorów /3.10/ wynika również, że współrzędne spinu są zerami

/3.12/ $\omega_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv 0, \quad \text{dla } i,j = x,y,z$

co zostało już zaznaczone wyżej w p. 2.4.

Stąd też wynika, że prędkości naprężeń w mierze Zaremby-Jaumanna, określone wzorami /2.3/, redukują się do pochodnych materialnych /2.11/

$$/3.13/ \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \dot{u}_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \equiv \dot{\sigma}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

co było już wyżej uwzględnione wzorami /2.19/.

Z założonej kinematyki pasma w/g wzorów /2.13/ wynikają wzory /3.11/ i /3.13/. Ponieważ zgodnie z tymi wzorami składowe

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ oraz $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y$ i $\dot{\varepsilon}_z$ są wielkościami głównymi tensorów odkształcenia i prędkości odkształcenia i zależą tylko od x i t , przeto możemy również przyjąć, że naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ i ich pochodne materialne $\dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_y, \dot{\sigma}_z$ są wielkościami głównymi obu tensorów naprężenia i zależą od zmiennych x i t , jak to już przyjęto we wzorach /2.17/.

Założymy ponadto, zgodnie z sensem fizyczno-mechanicznym procesu ściskania pasma, że w każdej fazie tego procesu zachodzą relacje

$$/3.14/ \quad \sigma_z(x, t) \geq \sigma_y(x, t) \geq \sigma_x(x, t)$$

Na podstawie /2.17/ i /3.14/ możemy wyrazić potencjał plastyczny /2.5/ oraz warunek plastyczności /2.7/ wzorami:

$$/3.15/ \quad g(\underline{\sigma}) \equiv \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi' - a = \text{const}$$

1

$$/3.16/ \quad f(\underline{\sigma}) \equiv \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0$$

Wprowadzając wielkości odkształceń i naprężeń, związane zależnościami /3.11/, /3.13/, /3.15/ i /3.16/ do równań konstytutyw-

nych /2.2/ otrzymujemy następujące zależności:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_x - \nu (\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z)] - \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \varphi') = - \frac{\partial \dot{u}(x,t)}{\partial x}, \\ /3.17/ \quad \dot{\epsilon}_y &= 0 = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_y - \nu (\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x)], \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_z - \nu (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)] + \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \varphi') = \frac{\dot{W}(t)}{h(t)}, \end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu /3.17/2 możemy te związki zastąpić zależnościami:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{1}{E'} (\dot{\sigma}_x - \nu' \dot{\sigma}_z) - \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \varphi') = - \frac{\partial \dot{u}(x,t)}{\partial x}, \\ /3.18/ \quad \dot{\epsilon}_z &= \frac{1}{E'} (\dot{\sigma}_z - \nu' \dot{\sigma}_x) + \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \varphi') = \frac{\dot{W}(t)}{h(t)}, \\ \dot{\sigma}_y &= \nu (\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x) \equiv \frac{\nu'}{1 + \nu'} (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_z), \end{aligned}$$

gdzie

$$/3.19/ \quad \frac{1}{E'} = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad \dot{\Lambda} \geq 0.$$

W obecnej pracy zakładamy małe odkształcenia i pomijamy części konwekcyjne w wyrażeniach /3.10/ i /3.13/ dla pochodnych materialnych przemieszczeń i naprężeń, przeto możemy napisać związki konstytutywne /3.18/ w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &\approx - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{E'} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} - \nu' \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} (1 + \sin \varphi'), \\ /3.20/ \quad \dot{\epsilon}_z &= \frac{\dot{W}(t)}{h(t)} = \frac{1}{E'} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} - \nu' \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} (1 - \sin \varphi'), \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \right) \equiv \frac{\nu'}{1 + \nu'} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Związki te można scałkować względem t i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \epsilon_{x0} &= \frac{1}{E'} [(\sigma_x - \nu' \sigma_z) - (\sigma_{x0} - \nu' \sigma_{z0})] - \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) (1 + \sin \varphi'), \\ /3.21/ \quad \epsilon_z - \epsilon_{z0} &= \frac{1}{E'} [(\sigma_z - \nu' \sigma_x) - (\sigma_{z0} - \nu' \sigma_{x0})] + \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) (1 - \sin \varphi'), \\ \sigma_y - \sigma_{y0} &= \nu [(\sigma_z + \sigma_x) - (\sigma_{z0} + \sigma_{x0})], \end{aligned}$$

gdzie ε_{x0} , ε_{z0} , σ_{x0} , σ_{y0} , σ_{z0} i Λ_0 odpowiadają wartościom funkcji ε_x , ε_z , σ_x , σ_z , σ_y i Λ w pewnej chwili /początkowej/ $t = t_0$.

Przyjmując, że związki te są słuszne dla każdej poszczególniej cząsteczki pasma znajdującej się w granicznym stanie naprężenia Coulomba /3.16/ oraz obierając jako chwilę początkową t_0 dla każdej z cząsteczek moment jej przejścia ze stanu sprężystego w stan sprężysto-plastyczny, możemy przyjąć następujące zależności w chwili $t = t_0$:

$$\varepsilon_{x0} = \varepsilon_{x0}^e = \frac{1}{E'} (\sigma_{x0} - \nu' \sigma_{z0}) ,$$

$$/3.22/ \quad \varepsilon_{z0} = \varepsilon_{z0}^e = \frac{1}{E'} (\sigma_{z0} - \nu' \sigma_{x0}) , \quad \sigma_{y0} = \nu (\sigma_{z0} + \sigma_{x0}) ,$$

$$\Lambda_0 = 0 .$$

Podstawiając te wartości do /3.21/ otrzymamy następującą postać związków konstytutywnych w postaci całkowej

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) - \frac{1}{2} \Lambda (1 + \sin \varphi') = - \frac{\sigma_x(x,t)}{h(t)}$$

$$/3.23/ \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) + \frac{1}{2} \Lambda (1 - \sin \varphi') = \frac{W(t)}{h(t)}$$

$$\sigma_y = \nu (\sigma_z + \sigma_x) = \frac{\nu'}{1 + \nu'} (\sigma_z + \sigma_x)$$

gdzie

$$/3.24/ \quad \Lambda > 0 \quad \text{gdy} \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{ i } \quad f(\sigma) = 0$$

$$\Lambda = 0 \quad \text{gdy} \quad f(\sigma) < 0 \quad \text{ lub } \quad f(\sigma) = 0 \quad \text{ i } \quad f(\sigma) < 0$$

W obszarach sprężysto-plastycznej deformacji piaskowej 3P, naprężenia σ_x i σ_z mogą być określone /dla warunków brzegowych danych w naprężeniach/ niezależnie od związków konstytutywnych /3.23/, a mianowicie z równania równowagi /przybliżonego/ /3.4/ i warunku plastyczności /3.16/, tj. z równań:

$$/3.25/ \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{2\mu}{h(t)} \bar{\sigma}_z = 0,$$

$$/3.26/ \quad f(\varphi) = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_x) - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0.$$

Z układu 5-ciu równań /3.23/, /3.25/ i /3.26/, z których dwa są równaniami różniczkowymi, a trzy zależnościami algebraicznymi, można określić 5 niewiadomych funkcji

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_x(x, t), \quad \bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_z(x, t), \quad \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y(x, t), \quad u = u(x, t), \quad \Lambda = \Lambda(x, t),$$

przeprowadzając odpowiednie operacje całkowania 2 równań różniczkowych i wykorzystując 3 równania algebraiczne.

Rozwiązanie ogólne równań /3.25/ i /3.26/ określa naprężenia $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_z$ w postaci

$$/3.27/ \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_x^{ep} &= C_1^p(t) e^{-\frac{2\mu k x}{h}} - \frac{2c}{\sqrt{k}} \\ \bar{\sigma}_z^{ep} &= C_2^p(t) e^{-\frac{2\mu k x}{h}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$/3.28/ \quad k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} > 1,$$

zaś $C_1^p(t)$ jest dowolną funkcją całkowania, którą należy określić z odpowiedniego warunku brzegowego. Podstawiając /3.27/ do /3.23/ możemy z nich wyznaczyć wielkości $u(x, t)$, $\Lambda(x, t)$ i $\bar{\sigma}_y(x, t)$. Funkcji $\Lambda(x, t)$ nie będziemy bezpośrednio określać, a wyrugujemy ją z obu równań /3.23/_{1,2}, otrzymując równanie różniczkowe dla $u(x, t)$ w postaci:

$$/3.29/ \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{W(t)}{h(t)} - \frac{1}{E} \left[(\bar{\sigma}_x - \nu \bar{\sigma}_z) + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} (\bar{\sigma}_z - \nu \bar{\sigma}_x) \right]$$

Podstawiając /3.27/ do /3.29/ i całkując, otrzymujemy następującą postać rozwiązania ogólnego dla funkcji $U^{EP}/x,t/$

$$/3.30/ \quad u^{ep} = \frac{C_1^P(t) h(t)}{2\mu k E'} \left[(1+kk') - \nu'(k+k') \right] e^{-\frac{2\mu kx}{h}} + \\ + \left[\frac{2c(1-\nu'k)}{E'\sqrt{k}} + \frac{W}{h} k' \right] x + C_2^P(t),$$

gdzie

$$/3.31/ \quad k' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} > 1, \quad k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} > 1$$

zaś $C_2^P/t/$, podobnie jak $C_1^P/t/$, jest dowolną funkcją całkowania w obszarach sprężysto-plastycznej deformacji. Funkcję $C_2^P/t/$ określimy z odpowiednich warunków brzegowych na granicach strefy EP ze strefami sprężystymi E, czyli z odpowiednich warunków ciągłości przemieszczenia $u/x,t/$ na granicy stref EP i E. Ostatecznie na podstawie wzorów /3.27/, /3.30/ i /2.13/3 otrzymujemy następującą postać rozwiązania w strefach sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP

$$/3.32/ \quad \sigma_x^{ep} = C_1^P(t) e^{-\frac{2\mu kx}{h}} - \frac{2c}{\sqrt{k}}, \\ \sigma_z^{ep} = C_1^P(t) k e^{-\frac{2\mu kx}{h}}, \\ u^{ep} = \frac{C_1^P(t) h}{2\mu k E'} \left[(1+kk') - \nu'(k+k') \right] e^{-\frac{2\mu kx}{h}} + \\ + \left[\frac{2c(1-\nu'k)}{E'\sqrt{k}} + \frac{W}{h} k' \right] x + C_2^P(t), \\ u_z^{ep} = -\frac{W(t)}{h(t)} z, \quad \text{dla } (x,z) \in EP$$

Trzecie z poszukiwanych naprężeń głównych określamy wzorem

/3.23/3, tj.

$$/3.33/ \quad \sigma_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x^{ep} + \sigma_z^{ep}).$$

Naprężenia σ_x^{ep} i σ_z^{ep} , określone ogólnymi wzorami /3.32/_{1,2}, spełniają warunek plastyczności /3.16/. Warunek ten po wprowadzeniu parametru K zamiast $\sin \varphi$ według wzoru /3.28/ możemy przekształcić do postaci

$$/3.34/ \quad f_1(\underline{\sigma}) = \sigma_z - k \sigma_x - 2c \sqrt{k} = 0,$$

którą będziemy posługiwać się w dalszej części pracy.

3.4. Rozwiązanie w strefie sprężysto-plastycznej deformacji edometrycznej

Założenie jednoosiowych stanów odkształcenia z deformacją określoną wzorami /2.12/ prowadzi na podstawie wzorów /2.1/ - /2.7/ do następujących zależności konstytutywnych:

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_x - \nu (\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z)] - \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \varphi') = 0,$$

$$/3.35/ \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_y - \nu (\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x)] = 0,$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_z - \nu (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)] + \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \varphi') = \frac{\dot{w}(t)}{h(t)}$$

i do warunku plastyczności

$$/3.36/ \quad f(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_x) - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi - c \cos \varphi = 0,$$

gdzie uwzględniono również założenie

$$/3.37/ \quad \sigma_z(x,t) \geq \sigma_y(x,t) \geq \sigma_x(x,t).$$

Na podstawie /3.35/₂ możemy układ równań /3.35/ napisać w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E'} (\dot{\sigma}_x - \nu' \dot{\sigma}_z) - \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 + \sin \varphi') = 0, \\ /3.38/ \quad \dot{\varepsilon}_z &= \frac{1}{E'} (\dot{\sigma}_z - \nu' \dot{\sigma}_x) + \frac{1}{2} \dot{\Lambda} (1 - \sin \varphi') = \frac{\dot{W}}{h(t)}, \\ \dot{\sigma}_y &= \nu (\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x) \equiv \frac{\nu'}{1 + \nu'} (\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x), \end{aligned}$$

gdzie E' , ν' i $\dot{\Lambda}$ są określone wzorami /3.19/. Przy pominięciu członów konwekcyjnych w wyrażeniach pochodnych materialnych $\dot{\sigma}_x$, $\dot{\sigma}_y$, $\dot{\sigma}_z$ i $\dot{\Lambda}$, tj. przy założeniu

$$/3.39/ \quad \dot{\sigma}_x \approx \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}, \quad \dot{\sigma}_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial t}, \quad \dot{\sigma}_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial t}, \quad \dot{\Lambda} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

możemy scałkować równania /3.38/ względem zmiennej t i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_{x_0} &\equiv 0 = \frac{1}{E'} [(\sigma_x - \nu' \sigma_z) - (\sigma_{x_0} - \nu' \sigma_{z_0})] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) (1 + \sin \varphi'), \\ /3.40/ \quad \varepsilon_z - \varepsilon_{z_0} &= \frac{W(t)}{h} - \frac{W(t_0)}{h_0} = \frac{1}{E'} [(\sigma_z - \nu' \sigma_x) - (\sigma_{z_0} - \nu' \sigma_{x_0})] + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Lambda - \Lambda_0) (1 - \sin \varphi'), \\ \sigma_y - \sigma_{y_0} &= \frac{\nu'}{1 + \nu'} [(\sigma_z + \sigma_x) - (\sigma_{z_0} + \sigma_{x_0})], \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon_{x_0} \equiv 0$, ε_{z_0} , σ_{x_0} , σ_{y_0} , σ_{z_0} i Λ_0 odpowiadają wartościom ε_x , ε_z , σ_x , σ_y , σ_z i Λ dla pewnej chwili początkowej $t = t_0$, którą możemy utożsamić z początkiem przejścia poszczególnej cząsteczki pasma w graniczny

stan plastyczny Coulomba, określony równaniem /3.36/.

Możemy więc założyć następujące warunki w chwili $t = t_0$

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_0} &= \epsilon_{x_0}^e \equiv 0 = \frac{1}{E'} (\bar{\sigma}_{x_0} - \nu' \bar{\sigma}_{z_0}), \\ /3.41/ \quad \epsilon_{z_0} &= \frac{W(t_0)}{h_0} = \frac{1}{E'} (\bar{\sigma}_z^0 - \nu' \bar{\sigma}_{x_0}), \\ \bar{\sigma}_{y_0} &= \frac{\nu'}{1+\nu'} (\bar{\sigma}_{z_0} + \bar{\sigma}_{x_0}), \quad \Lambda_0 = 0 \end{aligned}$$

oraz na tej podstawie napisać całkową postać związków konstytutywnych /3.40/ w postaci:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E'} (\bar{\sigma}_x - \nu' \bar{\sigma}_z) - \frac{1}{2} \Lambda (1 + \sin \varphi') = 0, \\ /3.42/ \quad \epsilon_z &= \frac{1}{E'} (\bar{\sigma}_z - \nu' \bar{\sigma}_x) + \frac{1}{2} \Lambda (1 - \sin \varphi') = \frac{W(t)}{h(t)}, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{\nu'}{1+\nu'} (\bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_x), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} /3.43/ \quad \Lambda > 0 & \quad \text{gdys} \quad f(\bar{\sigma}) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{f}(\bar{\sigma}) = 0, \\ \Lambda = 0 & \quad \text{gdys} \quad f(\bar{\sigma}) < 0 \quad \text{lub} \quad f(\bar{\sigma}) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{f}(\bar{\sigma}) < 0, \end{aligned}$$

zaś funkcja $f(\bar{\sigma})$ określana jest wzorem /3.36/.

Z układu czterech równań /3.42/ i /3.36/, które są równaniami algebraicznymi można określić 4 niewiadome funkcje $\bar{\sigma}_x/W$, $\bar{\sigma}_y/W$ i $\bar{\sigma}_z/W$ i Λ/W jako funkcje algebraiczne parametru ewolucji $W = W/t$.

Rugując Λ z dwu pierwszych równań /3.42/ i dołączając do otrzymanego równania warunek plastyczności /3.36/ otrzymujemy układ ówu równań dla funkcji $\bar{\sigma}_x$ i $\bar{\sigma}_z$.

Rozwiązanie tego układu będzie miało postać:

$$\begin{aligned} /3.44/ \quad \bar{\sigma}_x^{edp} &= \frac{E' W k' - 2 h c \sqrt{k'} (k' - \nu')}{h [(1 + k k') - \nu' (k + k')]}, \\ \bar{\sigma}_z^{edp} &= \frac{E' W k k' + 2 h c \sqrt{k'} (1 - \nu' k')}{h [(1 + k k') - \nu' (k + k')]}, \end{aligned}$$

$$\sigma_y^{edp} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x^{edp} + \sigma_z^{edp}),$$

$$/3.44/c.d. \quad 0 \leq x \leq \rho_p(t) \quad W_2' \leq W(t) \leq W_3'$$

gdzie dołączono trzeci ze związków /3.42/ i wprowadzono oznaczenia:

$$/3.45/ \quad K = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} > 1, \quad K' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

Zauważmy, że rozwiązania /3.44/, stosujące się w obszarach jednoosiowych stanów odkształcenia, spełniają tożsamościowo ściśle równania równowagi /2.9/, ale nie spełniają przybliżonego równania równowagi /2.21/. Równanie to będzie spełnione w przybliżeniu z tym lepszą aproksymacją, im mniejszy jest współczynnik tarcia μ .

Analizując kolejno fazy procesu I i II, jak na rys. 5 i 6, można wykazać, że układ stref deformacji, jak na rys. 6, odpowiadający fazie III procesu, może wystąpić, gdy spełnione są następujące warunki:

$$/3.46/ \quad \frac{l_0}{H} \geq \frac{1}{2\mu\nu'} \ln \frac{1}{1-\nu'^2}$$

$$\sin \varphi < 1-2\nu' \quad (\text{czyli } k < \frac{1}{\nu'})$$

określające stosunek początkowych wymiarów pasma l_0 i H i wzajemną relację parametrów materiałowych φ i ν' /lub K i ν' / oraz gdy wartości parametru ewolucji W/t spełniają nierówność

$$/3.47/ \quad W_2' \leq W(t) \leq W_3'$$

gdzie W'_2 odpowiada, początkowi fazy III, a więc pojawianiu się edometrycznej strefy plastycznej E_{dp} , zaś W'_3 określa etap zniknięcia strefy E_{dp} i przejścia pasma w jedną strefę płaskiego stanu plastycznego Coulomba, jak na rys. 9.

4. Rozwiązanie szczególne spełniające warunki brzegowe, początkowe i zgodności

Wykorzystując ogólne wzory analityczne, wyprowadzone w p. 3 dla poszczególnych obszarów deformacji różnego typu, wyprowadzimy obecnie szczegółowe rozwiązania dla poszczególnych faz procesu ściskania pasma. W tym celu analizujemy ewolucję kolejnych układów stref, określających kolejne fazy procesu ściskania pasma oraz wykorzystujemy założone warunki brzegowe /2.22/, początkowe /2.25/ i zgodności /2.26/ na międzystrefowych granicach. Warunki te pozwolą określić dowolne funkcje $C_1/t/$ w strefach sprężystej E i sprężysto-plastycznej EP deformacji płaskiej, położenia stref $x = \varphi_e/t/$, $x = \varphi/t/$ i $x = \varphi_p/t/$ oraz zakresy amplitudy parametru ewolucji $W/t/$, w których powstają, trwają i kończą się poszczególne fazy procesu. Jako początkową fazę procesu wybieramy fazę określoną układem stref, jak na rys. 5. Następnie przedstawimy kolejne rozwiązania dla faz II, III i IV procesu, odpowiadających układowi stref deformacji w pasmie, jak na rys. 6, 7 lub 8 i 9.

Ze względu na symetrię geometryczną i obciążeniową pasma wystarczy analizować i podać rozwiązania dla jednej połówki pasma na przykład dla połówki określonej nierównością $0 \leq x \leq l/t/$. Ograniczymy analizę do tej połówki pasma.

4.1. Faza I - początkowa

Zakładamy, że w fazie początkowej procesu rozwija się układ stref deformacji, jak na rys. 5 - a mianowicie strefa sprężysta edometryczna E_d w środku pasma i dwie otaczające ją strefy sprężyste E w płaskim dwuosłowym stanie odkształcenia. Ze względu na symetrię geometryczną pasma i symetrię obciążeń wymuszających, wyprowadzenie wzorów rozwiązania szczególnego w tej fazie wymaga: określenia tylko dwu funkcji dowolnych $C_1^e/t/$ i $C_2^e/t/$, występujących w rozwiązaniu ogólnym /3.8/ dla strefy sprężystej E , położenia granicy $X = \varrho_e/t/$ między obu strefami, położenia powierzchni brzegowej $l/t/ = l_0 + U_1/t/$ oraz wartości parametru $W/t/ = W_1$, przy której następuje zmiana układu stref i przejście w następną fazę II procesu.

Do określenia tych niewiadomych wielkości mamy następujące warunki:

$$/4.1./ \quad \sigma_x^e \Big|_{x=l(t)} = 0$$

$$/4.2./ \quad \sigma_x^e \Big|_{x=\varrho_e(t)} = \sigma_x^{ed} \Big|_{x=\varrho_e(t)}, \quad u^e \Big|_{x=\varrho_e(t)} = u_x^{ed} = 0,$$

$$/4.3./ \quad l(t) = l_0 + u^e \Big|_{x=l(t)},$$

a ponadto warunek

$$/4.4./ \quad f_1(\sigma) \Big|_{x=l(t)} = (\sigma_z^e - k \sigma_x^e - 2c \sqrt{k}) \Big|_{x=l(t)} = 0,$$

który określa etap końcowy $W = W_1$ fazy I-jej.

Ostatni warunek określa koniec fazy I w chwili, gdy pojawi się pierwsze uplastycznienie pasma, które, jak można udowodnić, zachodzi na powierzchniach brzegowych $x = \pm l/t/$.

Podstawiając kolejno wyrażenia z rozwiązania ogólnego /3.8/ i /3.1/ do /4.1/, /4.2/ i /4.4/, otrzymujemy:

$$/4.5/ \quad C_1^e(t) = \frac{E'W}{v'h} e^{\frac{2\mu v'l}{h}},$$

$$/4.6/ \quad e^{\frac{2\mu v'l}{h}(1-\varrho_e)^t} = \frac{1}{1-v'^2} \quad \text{lub} \quad \varrho_e = 1 - \frac{h}{2\mu v'l} \ln \frac{1}{1-v'^2}$$

$$/4.7/ \quad C_2^e(t) = -\frac{W}{2\mu v'^2} - \frac{W}{h v'} \varrho_e,$$

$$/4.8/ \quad u_L^e = u^e|_{x=l(t)} = \frac{W}{2\mu v'^2} \left(\ln \frac{1}{1-v'^2} - v'^2 \right),$$

$$/4.9/ \quad W_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E'} h_1, \quad W_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E' + 2c\sqrt{k}} H.$$

Ze wzoru /4.6/2 wynika, że $\varrho_e/t > 0$, czyli że strefa edometryczna istnieje, gdy:

$$/4.10/ \quad \frac{l}{h} > \frac{1}{2\mu v'} \ln \frac{1}{1-v'^2},$$

zaś ze wzoru /4.3/, /4.6/2 i /4.8/ oraz zależności $h/t = H - W/t$, otrzymujemy równoważny do /4.10/ warunek na wymiary początkowe pasma

$$/4.11/ \quad \frac{l_0}{H} \geq \frac{1}{2\mu v'} \ln \frac{1}{1-v'^2}.$$

Podstawiając /4.5/ i /4.7/ do /3.8/ i uwzględniając zależności /4.6/, /4.8/ i /4.9/ oraz rozwiązanie /3.1/ w strefie edometrycznej, otrzymujemy następującą postać rozwiązania w fazie I:

- dla strefy edometrycznej B_d

$$/4.12/ \quad \sigma_x^{ed} = \sigma_y^{ed} = \frac{v'E'}{1-v'^2} \frac{W}{h}, \quad \sigma_z^{ed} = \frac{E'}{1-v'^2} \frac{W}{h},$$

$$u_x^{ed} = 0, \quad u_y^{ed} = 0, \quad u_z^{ed} = -\frac{W}{h}z,$$

/4.12/

$$\text{dla } 0 \leq x \leq \rho_e(t), \quad 0 \leq z \leq h(t), \quad 0 \leq W(t) \leq W_1,$$

gdzie

$$/4.13/ \quad \rho_e = l - \frac{h}{2\mu v'} \ln \frac{1}{1-v'^2},$$

$$/4.14/ \quad W_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E'} h_1 \quad \text{lub} \quad W_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E'+2c\sqrt{k}} H,$$

zaś w strefie sprężystej K półpasma:

$$\sigma_x^e = \frac{E'}{v'} \frac{W}{h} \left[e^{\frac{2\mu v'(l-x)}{h}} - 1 \right], \quad \sigma_z^e = E' \frac{W}{h} e^{\frac{2\mu v'(l-x)}{h}},$$

$$\sigma_y^e = \frac{v'}{1+v'} (\sigma_x^e + \sigma_z^e),$$

/4.15/

$$u_x^e \equiv u^e = \frac{W}{2\mu v'^2} \left[(1-v'^2) e^{\frac{2\mu v'(l-x)}{h}} - \frac{2\mu v'(l-x)}{h} + \ln \frac{1}{1-v'^2} - 1 \right],$$

$$u_y^e = 0, \quad u_z^e = -\frac{W}{h}z,$$

$$\text{dla } \rho_e(t) \leq x \leq l(t), \quad 0 \leq z \leq h(t), \quad 0 \leq W(t) \leq W_1,$$

gdzie ρ_e i W_1 określone są wzorami /4.13/ i /4.14/, zaś $l/t/$

$$/4.16/ \quad l(t) = l_0 + \frac{W}{2\mu v'^2} \left(\ln \frac{1}{1-v'^2} - v'^2 \right)$$

zgodnie ze wzorami /4.3/ i /4.8/.

4.2. Faza II procesu

Przy spełnieniu nierówności /4.10/ lub /4.11/ i dla wartości parametru $W/t/ \geq W_1$, gdzie W_1 określone jest wzorami /4.1A/, rozwija się układ stref, jak na rys. 6, a więc w środkowej części nadal występuje strefa edometryczna E_d otoczona z obu stron strefami sprężystymi E, a te ostatnie stykają się ze strefami sprężysto-plastycznymi EP, które rozciągają się aż do swobodnych brzegów $x = \pm l/t/$ pasma.

Ten układ stref, determinujący II fazę procesu, zachowuje się aż do pewnego etapu procesu, gdy parametr $W/t/$ osiągnie wartości $W = W_2$, albo $W = W_2'$ określające chwilę znikania strefy edometrycznej E_d albo jej przejścia w stan plastyczny, co jest uzależnione od wzajemnej relacji parametrów materiałowych φ i ν , według niżej podanych nierówności:

$$/4.17/ \quad \sin \varphi \geq 1-2\nu \quad \text{albo} \quad \sin \varphi < 1-2\nu$$

Do uzyskania końcowych wzorów rozwiązania w tej fazie procesu należy określić cztery funkcje $C_1^e/t/$, $C_2^e/t/$, $C_1^p/t/$ i $C_2^p/t/$, występujące we wzorach rozwiązania ogólnego /3.8/ dla strefy sprężystej i /3.32/ dla strefy sprężysto-plastycznej deformacji, dalej - dwa położenia granic międzystrefowych $\xi_e/t/$ i $\xi/t/$ /por. rys. 6/, w jednej z połówek pasma oraz wielkości parametru W_2 lub W_2' określające etap przejścia z fazy II w następną fazę III, co, jak można wykazać, odpowiada etapowi zniknięcia strefy edometrycznej sprężystej E_d lub jej przejścia w edometryczny sprężysto-plastyczny stan odkształcenia w środkowej części pasma.

Do określenia wielkości niewiadomych $C_1^0/t/$, $C_2^0/t/$, $C_1^P/t/$, $C_2^P/t/$, $\rho/t/$ i $\rho_e/t/$ dysponujemy warunkiem brzegowym /2.22/ i warunkami zgodności /2.26/ na granicach stref $x = \rho_e/t/$ i $x = \rho/t/$, rys. 6, oraz warunkiem plastyczności /3.34/ na granicy $x = \rho/t/$. Dla fazy II, jak na rys. 6, warunki te precyzujemy w postaci

$$\begin{aligned}
 & \sigma_x^{ep} \Big|_{x=l(t)} = 0, \\
 /4.18/ \quad & \sigma_x^{ep} \Big|_{x=\rho(t)} = \sigma_x^e \Big|_{x=\rho(t)}, \quad u^{ep} \Big|_{x=\rho(t)} = u^e \Big|_{x=\rho(t)} \\
 & f_1(\sigma) \Big|_{x=\rho(t)} = (\sigma_z^e - k \sigma_x^e - 2c\sqrt{k}) \Big|_{x=\rho(t)} = 0, \\
 & \sigma_x^e \Big|_{x=\rho_e(t)} = \sigma_x^{ed} \Big|_{x=\rho_e(t)}, \quad u^e \Big|_{x=\rho_e} = u_x^{ed} = 0
 \end{aligned}$$

Wartości W_2 względnie W_2' określające etap zakończenia fazy II procesu wyznaczmy z równań:

$$\begin{aligned}
 /4.19/ \quad & \rho_e = \rho_e(W) = 0 \\
 & \text{gd}y \sin \varphi \geq 1-2 \nu \quad \text{czyli} \quad K = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \geq \frac{1}{\nu'}
 \end{aligned}$$

albo

$$\begin{aligned}
 /4.20/ \quad & f_1(\sigma) = f_1^{ed}(\sigma) = (\sigma_z^{ed} - k \sigma_x^{ed} - 2c\sqrt{k}) = 0 \\
 & \text{gd}y \sin \varphi < 1-2 \nu \quad \text{czyli} \quad K < \frac{1}{\nu'}
 \end{aligned}$$

Równanie /4.19/, jak można stwierdzić, posiada rozwiązanie tylko dla pewnych określonych wymiarów pasma spełniających nierówność

$$/4.21/ \quad \frac{l(t)}{h(t)} \geq \frac{1}{2\mu\nu'} \ln \frac{1}{1-\nu'^2}$$

natomiast równanie /4.20/ przy relacji $K < \frac{1}{v'}$ zawsze posiada rozwiązanie $W = W_2'$.

Podstawiając kolejno wyrażenia /3.32/, /3.8/ i /3.1/ do warunków /4.18/, określamy z nich wielkości niewiadome $C_1^e/t/$, $C_2^e/t/$, $C_1^p/t/$, $C_2^p/t/$, $\varphi/t/$ i $\varphi_e/t/$ przez rozwiązania odpowiednich równań; po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy:

$$C_1^e(t) = \frac{2c\sqrt{k}}{v'} e^{\frac{2\mu k(l-\varphi)}{h}} e^{\frac{2\mu v' \varphi}{h}},$$

$$C_2^e(t) = -\frac{W}{2\mu v'^2} \left(1 + \frac{2\mu v'}{h} \varphi_e\right),$$

$$/4.22/ \quad C_1^p(t) = \frac{2c\sqrt{k}}{k} e^{\frac{2\mu k l}{h}},$$

$$C_2^p(t) = \frac{W}{2\mu v'^2} \left[e^{-\frac{2\mu v'(\varphi - \varphi_e)}{h}} + \frac{2\mu v'}{h} (\varphi - \varphi_e) - 1 \right] -$$

$$-\frac{A}{2\mu k^2} \frac{h}{E'} 2c\sqrt{k} e^{\frac{2\mu k(l-\varphi)}{h}} - \left[k' \frac{W}{h} + \frac{2c\sqrt{k}}{E'k} (1-v'k') \right] \varphi$$

$$/4.23/ \quad e^{\frac{2\mu k(l-\varphi)}{h}} = F_1(W),$$

$$e^{\frac{2\mu v'(\varphi - \varphi_e)}{h}} = F_2(W),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$/4.24/ \quad A = \frac{1+KK'}{1-KK'} - v' / K+K' /, \quad K = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi}, \quad K' = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi'}$$

$$F_1(W) \equiv \frac{E'Wk - 2v'hc\sqrt{k}}{2hc\sqrt{k}(k-v')}$$

/4.25/

$$F_2(W) \equiv \frac{E'W(k-v')}{(1-v'^2)(E'Wk - 2v'hc\sqrt{k})}$$

Ze wzorów /4.23/ otrzymujemy:

$$\rho = l - \frac{h}{2\mu k} \ln F_1(W)$$

/4.26/

$$\rho_e = l - \frac{h}{2\mu k} \ln F_1(W) - \frac{h}{2\mu v} \ln F_2(W)$$

które określają położenia granic stref w zależności od W/t .

Podstawiając /4.22/ do wzoru /3.8/ i /3.32/ oraz uwzględniając zależności /4.23/ i dołączając rozwiązanie /3.1/ dla sprężystej strefy edometrycznej, otrzymujemy następującą postać rozwiązania w fazie II procesu:

- w strefie edometrycznej - sprężystej S_d

$$\sigma_x^{ed} = \sigma_y^{ed} = \frac{\nu' E'}{1 - \nu'^2} \frac{W}{h} \quad \sigma_z^{ed} = \frac{E}{1 - \nu'^2} \frac{W}{h}$$

/4.27/

$$u_x^{ed} = u_y^{ed} = 0 \quad u_z^{ed} = - \frac{W}{h}$$

$$\text{dla } 0 \leq x \leq \rho_e \quad 0 \leq z \leq h(E)$$

$$\text{I } W_1 \leq W \leq W_2 \quad \text{gdy } k > \frac{1}{\nu'} \quad \text{lub } W_0 < W < W_2 \quad \text{gdy } k < \frac{1}{\nu'}$$

- w strefie sprężystej płaskiej E

$$\sigma_x^e = \frac{2c\sqrt{k}}{\nu'} [F_1(W)]^{(1 - \frac{\nu'}{k})} e^{\frac{2\mu\nu'(l-x)}{h}} - \frac{E\nu'}{\nu' h}$$

$$\sigma_z^e = 2c\sqrt{k} [F_1(W)]^{(1 - \frac{\nu'}{k})} e^{\frac{2\mu\nu'(l-x)}{h}}$$

/4.28/

$$\sigma_y^e = \frac{\nu'}{1 + \nu'} (\sigma_x^e + \sigma_z^e)$$

$$u_x^e \equiv u^e = \frac{W}{2\mu\nu'^2} \left\{ \frac{2(1 - \nu'^2)c\sqrt{k}}{E'} \frac{h}{W} [F_1(W)]^{(1 - \frac{\nu'}{k})} e^{\frac{2\mu\nu'(l-x)}{h}} - \frac{2\mu\nu'(l-x)}{h} + \frac{\nu'}{k} \ln F_1(W) + \ln F_2(W) - 1 \right\}$$

$$u_y^e \equiv 0, \quad u_z^e = -\frac{W}{h} z,$$

dla $\varphi_e \leq x \leq \varphi$, $0 \leq z \leq h(t)$ oraz

/4.28/

$$W_1 \leq W(t) \leq W_2, \quad \text{gdzy } k \geq \frac{1}{\nu'}, \quad \text{lub}$$

$$W_1 \leq W(t) \leq W_2', \quad \text{gdzy } k < \frac{1}{\nu'}.$$

oraz w strefie sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP:

$$\bar{\sigma}_x^{ep} = \frac{2c\sqrt{k}}{k} \left[e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}} - 1 \right],$$

$$\bar{\sigma}_z^{ep} = 2c\sqrt{k} e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}}, \quad \bar{\sigma}_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\bar{\sigma}_x^{ep} + \bar{\sigma}_z^{ep}),$$

$$u_x^{ep} \equiv u^{ep} = \frac{W}{2\mu k^2} \left\{ \frac{2Ac\sqrt{k}}{E'} \frac{h}{W} \left[e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}} - F_1(W) \right] + \right. \\ \left. + \left[k k' + \frac{2c\sqrt{k}}{E'} \frac{h}{W} (1-\nu' k') \right] \left[\ln F_1(W) - \frac{2\mu k}{h} (l-x) \right] \right\} +$$

/4.29/

$$+ \frac{W}{2\mu\nu'^2} \left[\frac{1}{F_2(W)} + \ln F_2(W) - 1 \right],$$

$$u_y^{ep} \equiv 0, \quad u_z^{ep} = -\frac{W}{h} z$$

dla $\varphi \leq x \leq l(t)$, $0 \leq z \leq h(t)$, oraz

$$W_1 \leq W \leq W_2, \quad \text{gdzy } k \geq \frac{1}{\nu'} \quad \text{lub}$$

$$W_1 \leq W \leq W_2', \quad \text{gdzy } k < \frac{1}{\nu'}.$$

We wzorach /4.27/ - /4.29/ granice stref $\varphi_e = \varphi_e/t/$ i $\varphi = \varphi/t/$ określone są wzorami /4.26/, granice etapów W_1 i W_2 lub W'_2 określone są wzorami względnie równaniami:

$$/4.30/ \quad W_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E'} h_1 \quad \text{czyli} \quad W_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E' 2c\sqrt{k}} H$$

W_2 jako pierwiastek równania /4.19/, które na podstawie /4.26/ przyjmie postać:

$$/4.31/ \quad \varphi_e(W) \equiv i(t) - \frac{h(t)}{2\mu k} \ln F_1(W) - \frac{h(t)}{2\mu v'} \ln F_2(W) = 0$$

$$\text{gd}y \quad k \geq \frac{1}{v'}$$

gdzie

$$/4.32/ \quad i(t) = i_0 + u^{ep} \Big|_{x=i(t)} = i_0 + u_i^{ep}$$

zas W'_2 określone jest równaniem /4.20/, z którego na podstawie /4.27/ otrzymujemy

$$/4.33/ \quad W'_2 = \frac{2c\sqrt{k}(1-v'^2)}{E'(1-v'k)} h'_2, \quad h'_2 = H - W'_2$$

czyli

$$/4.34/ \quad W'_2 = \frac{2c\sqrt{k}(1-v'^2)}{E'(1-v'k) + 2c\sqrt{k}(1-v'^2)} H \quad \text{dla} \quad k < \frac{1}{v'}$$

Stałe K , K' i A we wzorach /4.28/ i /4.29/ określone są wzorami /4.24/, zas funkcje $F_1/W/$ i $F_2/W/$, występujące we wzorach /4.26/, /4.28/, /4.29/ i /4.31/, określone są wzorami /4.25/.

4.3. Faza III procesu

W tej fazie procesu rozwija się alternatywnie układ stref deformacji, albo tak, jak na rys. 7, reprezentującym przypadek, gdy $\sin \varphi > 1-2\nu$ /czyli $K > \frac{1}{\nu'}$ /, albo też tak, jak na rys. 8, który odnosi się do przypadku, gdy zachodzi nierówność $\sin \varphi < 1-2\nu$ /czyli $K < \frac{1}{\nu'}$ /. Dla każdego z tych alternatywnych przypadków otrzymuje się inną strukturę rozwiązań dla fazy III, dlatego też oddzielnie podamy wyniki rozwiązań dla każdego z tych wyłączających się wzajemnie przypadków.

4.3.1. Faza III, przypadek $K > \frac{1}{\nu'}$

Zskładając relację parametrów materiałowych φ i ν lub K i ν w postaci

$$/4.35/ \quad \sin \varphi \geq 1-2\nu, \text{ czyli } K \equiv \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \geq \frac{1}{\nu'} \equiv \frac{1 - \nu}{\nu}$$

można wykazać, że dla wartości parametru $W \geq W_2$, gdzie W_2 jest pierwiastkiem równania

$$/4.36/ \quad \rho_e(W) = l(t) - \frac{h}{2\mu k} \ln F_1(W) - \frac{h}{2\mu \nu'} \ln F_2(W) = 0,$$

rozwinie się układ stref deformacji, jak na rys. 7. W środkowej części występuje strefa sprężysta płaska E, zaś w jej sąsiedztwie aż do powierzchni brzegowych swobodnych $x = \pm l/t$ rozciągają się strefy sprężysto-plastyczne EP.

Do określenia rozkładów naprężeń i przemieszczeń w tej fazie procesu wykorzystamy wzory /3.8/ i /3.32/ rozwiązań ogólnych w strefach sprężystej płaskiej E i sprężysto-plastycznej EP

deformacji płaskiej. Zgodnie z tymi wzorami należy określić 4 dowolne funkcje $C_1^e/t/$, $C_2^e/t/$, $C_1^p/t/$ i $C_2^p/t/$, a ponadto określić granicę międzystrefową $x = \varrho / t/$ i końcowy etap fazy III, który nastąpi w chwili zniknięcia strefy sprężystej E i przejścia materiału pasma w stan plastyczny. Funkcje $C_1^e/t/$, $C_2^e/t/$, $C_1^p/t/$ i $C_2^p/t/$ oraz położenie granicy $\varrho = \varrho / t/$ w toku deformacji pasma określimy z warunków brzegowych /2.22/₁ i /2.24/₂ i warunków ciągłości /2.26/_{1,3} na granicy $x = \varrho / t/$. Warunki te dla przyjętego układu stref, jak na rys. 7, przyjmują postać:

$$\sigma_x^{ep} \Big|_{x=l(t)} = 0, \quad u^e \Big|_{x=0} = 0,$$

/4.37/

$$\sigma_x^{ep} \Big|_{x=\varrho(t)} = \sigma_x^e \Big|_{x=\varrho(t)}, \quad u^{ep} \Big|_{x=\varrho(t)} = u^e \Big|_{x=\varrho(t)}$$

Do powyższego dochodzi również warunek na rozwiązanie sprężyste na granicy obu stref E i EP

$$/4.38/ \quad f(\sigma^e) \Big|_{x=\varrho} = (\sigma_x^e - k \sigma_x^e - 2c\sqrt{k}) \Big|_{x=\varrho} = 0.$$

Podstawiając do /4.37/ i /4.38/ rozwiązania ogólne /3.8/ i /3.32/ dla stref sprężystej i sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej otrzymamy równania dla poszukiwanych wielkości niewiadomych. Rozwiązując te równania względem poszukiwanych wielkości niewiadomych otrzymujemy:

$$C_1^e(t) = \frac{2c\sqrt{k}}{\nu'} e^{\frac{2\mu k(t-\varrho)}{h}} e^{\frac{2\mu\nu'\varrho}{h}}$$

/4.39/

$$C_2^e(t) = - \frac{(1-\nu'^2)}{2\mu\nu'^2(k-\nu')} \frac{(E'wk - 2\nu'hc\sqrt{k})}{E'} e^{\frac{2\mu\nu'\varrho}{h}}$$

$$C_1^P(t) = \frac{2c\sqrt{k}}{k} e^{\frac{2\mu kt}{h}},$$

$$C_2^P(t) = \frac{2c\sqrt{k}}{2\mu v'^2 k^2} \frac{h}{E'} \left[(1-v'^2)k^2 - A v'^2 \right] e^{\frac{2\mu k(t-\varrho)}{h}} -$$

$$/4.39/ \quad - \frac{(1-v'^2)}{2\mu v'^2 (k-v')} \frac{(E'Wk - 2v'hc\sqrt{k})}{E'} e^{\frac{2\mu v'}{h}\varrho} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{v'} - k' \right) \frac{W}{h} - \frac{2c\sqrt{k}}{E'k} (1-v'k') \right] \varrho$$

oraz

$$/4.40/ \quad \varrho(t) = l(t) - \frac{h}{2\mu k} \ln F_1(W),$$

gdzie $F_1/W/$ określone jest wzorem /4.25/.

Należy jeszcze określić etap końcowy fazy III. Etap ten osiągnie się, gdy zniknie faza sprężysta i cały materiał osiąga stan plastyczny. Innymi słowy, należy znaleźć wartości $W/t/$, dla której $\varrho /t/ = 0$, tj. rozwiązać równanie

$$/4.41/ \quad \varrho(t) \equiv l(t) - \frac{h}{2\mu k} \ln F_1(W) = 0.$$

Gdy pominąć zmiany konfiguracji powierzchni brzegowych pasma, przyjmując $l/t/ \approx l_0$, $h/t/ \approx H$, to równanie to posiada rozwiązanie w postaci:

$$/4.42/ \quad W_3 \approx H \frac{2c\sqrt{k} \left[v' + (k-v') e^{\frac{2\mu k l_0}{H}} \right]}{E'k}.$$

Jeżeli przemieszczenia W_3 są małe, to można stosować wzór

/4.42/ dający dobre przybliżenie.

Gdyby uwzględnić zmianę geometrii pasma należałoby rozpatry-

wać dokładniejsze równanie:

$$/4.43/ \quad \left(\dot{z}_0 + u^{ep} \Big|_{x=h(t)} \right) - \frac{(H-W)}{2\mu k} \ln F_1(W) = 0$$

które jest równaniem przestępnym względem W/t .

Podstawiając /4.39/ do /3.8/ i /3.32/ i uwzględniając /4.41/, możemy napisać wzory określające ewolucję stanów naprężenia i przemieszczeń w fazie III procesu przy relacji parametrów φ i ν /lub k i ν' / określonych nierównościami /4.35/ i geometrii pasma spełniającej nierówność /4.21//.

W strefie sprężystej E

$$\sigma_x^e = \frac{2c\sqrt{k}}{\nu'} [F_1(W)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} e^{\frac{2\mu\nu'(l-x)}{h}} - \frac{E'W}{\nu'h}$$

$$\sigma_z^e = 2c\sqrt{k} [F_1(W)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} e^{\frac{2\mu\nu'(l-x)}{h}}, \quad \sigma_y^e = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x^e + \sigma_z^e)$$

/4.44/

$$u_x^e \equiv u^e = \frac{W}{2\mu\nu'^2} \left\{ \frac{2(1-\nu'^2)c\sqrt{k}}{E'} \frac{h}{W} [F_1(W)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} \right. \\ \left. * \left[e^{\frac{2\mu\nu'(l-x)}{h}} - e^{\frac{2\mu\nu'l}{h}} \right] + \frac{2\mu\nu'}{h} x \right\}$$

$$u_y^e = 0, \quad u_z^e = -\frac{W}{h} z,$$

$$\text{dla } 0 \leq x \leq \varphi, \quad 0 \leq z \leq h(t), \quad W_2 \leq W \leq W_3,$$

oraz w strefie sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP -

$$\epsilon_x^{ep} = \frac{2c\sqrt{k}}{k} \left[e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}} - 1 \right],$$

$$\epsilon_z^{ep} = 2c\sqrt{k} e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}}, \quad \sigma_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x^{ep} + \sigma_z^{ep}),$$

/4.45/

$$u_x^{ep} \equiv u = \frac{W}{2\mu k^2} \left\{ \frac{2Ac\sqrt{k}}{E'} \frac{h}{W} \left[e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}} - F_1(W) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[k k' + \frac{2hc\sqrt{k}}{E'W} (1-\nu'k') \right] \left[\ln F_1(W) - \frac{2\mu k}{h} (l-x) \right] \right\} +$$

$$+ \frac{W}{2\mu\nu'^2} \left\{ \frac{2(1-\nu'^2)c\sqrt{k}}{E'} \frac{h}{W} \left[F_1(W) - e^{\frac{2\mu\nu' l}{h}} (F_1(W))^{(1-\frac{\nu'}{k})} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2\mu\nu'}{h} l - \frac{\nu'}{k} \ln F_1(W) \right] \right\},$$

$$u_y^{ep} \equiv 0, \quad u_z^{ep} = -\frac{W}{h} z$$

$$\text{dla } \xi \leq x \leq l(t), \quad 0 \leq z \leq h(t), \quad W_2 \leq W \leq W_3.$$

We wzorach /4.44/ i /4.45/ granica ξ /t/ określona jest wzorem /4.40/, W_2 i W_3 są pierwiastkami równań /4.36/ i /4.41/, zaś l /t/ określone jest wzorem :

$$/4.46/ \quad l(t) = l_0 + u^{ep}$$

gdzie na podstawie /4.45/

$$/4.47/ \quad u_l^{ep} \equiv u^{ep} \Big|_{x=l(t)} = \frac{W}{2\mu k^2} \left\{ \frac{2Ac\sqrt{k}}{E'} \frac{h}{W} \left[1 - F_1(W) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[k k' + \frac{2hc\sqrt{k}}{E'W} (1-\nu'k') \right] \ln F_1(W) \right\} +$$

$$+ \frac{W}{2\mu v^2} \left\{ \frac{2(1-\nu^2) eV k}{E'} \frac{h}{W} \left[F_1(W) - e^{\frac{2\mu v' l}{h}} (F_1(W))^{(1-\frac{\nu'}{k})} \right] + \right.$$

/4.47/

$$\left. + \left[\frac{2\mu v' l}{h} - \frac{\nu'}{k} \ln F_1(W) \right] \right\} .$$

Z zależności /4.46/ i /4.47/ można określić przez rozwiązanie numeryczne granicę $l/t/$ brzegu swobodnego jako funkcji parametru ewolucji $W/t/$. Jeśli jednak pominąć zmianę konfiguracji powierzchni brzegowych pasma przyjmując $l/t/ \approx l_0$ i $h/t/ \approx H$, to bardzo silnie skracamy i upraszczamy procedurę rozwiązania liczbowego rozpatrywanego zagadnienia. Stałe A , k i k' we wzorach /4.44/ i /4.45/ określone są wzorami /4.24/, a funkcje $F_1/W/$ i $F_2/W/$ - wzorami /4.25/.

4.3.2. Faza III przypadek $k < \frac{1}{\nu'}$

Zakładając, że parametry materiałowe pasma φ i ν lub k i ν' spełniają nierówności:

$$/4.48/ \sin \varphi < 1 - 2\nu, \text{ czyli } k \equiv \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} < \frac{1 - \nu}{\nu} = \frac{1}{\nu'}$$

można wykazać, że gdy parametr ewolucji $W/t/$ przekroczy wartość W'_2 określoną wzorami /4.33/ lub /4.34/, to nastąpi przejście z układu stref fazy II, rys. 6, do układu stref, jak na rys. 8, który określa fazę III procesu przy relacji /4.48/. W tym przypadku w fazie III-iej procesu układ stref deformacji składa się ze strefy sprężysto-plastycznej edometrycznej E_{dp} w środku pasma i dwu otaczających ją stref sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP , jak to przedstawiono na rys. 8.

Dla określenia rozkładów naprężeń i przemieszczeń w tej fazie procesu wykorzystujemy ogólne postaci rozwiązań podane wzorami /3.32/ dla strefy sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej BF oraz /3.44/ dla sprężysto-plastycznej strefy edometrycznej B_{dp} . Występujące w tych wzorach wielkości niewiadome $C_1^P/t/$, $C_2^P/t/$ i położenie granicy $x = \xi_p^P/t/$ między obiema strefami określimy z warunku brzegowego /2.22/₁ i warunków zgodności /2.26/_{1,3}. Warunki te dla układu stref, jak na rys. 8, precyzujemy w postaci:

$$/4.49/ \quad \left. \sigma_x^{ep} \right|_{x=l(t)} = 0 \quad \left. \sigma_x^{ep} \right|_{x=\xi_p} = \left. \sigma_x^{edp} \right|_{x=\xi_p}$$

$$u^{ep} \Big|_{x=\xi_p} = u_x^{edp} \Big|_{x=\xi_p} = 0$$

a ponadto uwzględniamy następującą zależność pomiędzy początkowym l_0 i bieżącym $l/t/$ położeniem powierzchni swobodnej pasma:

$$/4.50/ \quad l(t) = l_0 + u^{ep} \Big|_{x=l(t)}$$

Podstawiając /3.32/ i /3.44/ do /4.49/ otrzymamy zależności między poszukiwanymi wielkościami $C_1^P/t/$, $C_2^P/t/$ i $\xi_p^P/t/$, z których wynikają następujące wzory:

$$/4.51/ \quad C_1^P(t) = \frac{2c\sqrt{k}}{k} e^{\frac{2\mu k l}{h}}$$

$$C_2^P(t) = -\frac{2A h c \sqrt{k}}{2\mu k^2 E'} e^{\frac{2\mu k(l-\xi_p)}{h}} - \left[\frac{W}{h} k' + \frac{2c\sqrt{k}(1-\nu'k')}{E'k} \right] \xi_p$$

$$e^{\frac{2\mu k(l-\xi_p)}{h}} = F_3(W)$$

gdzie

$$/4.52/ \quad A = \sqrt{1+K^2} - \nu' / K+K', \quad K = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad K' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

$$/4.53/ \quad F_3(W) = \frac{E'Wk'\sqrt{k} + 2hc(1-\nu'k')}{2hcA} = \frac{E'Wk'k + 2hc\sqrt{k}(1-\nu'k')}{2hc\sqrt{k}A}$$

Z trzeciego ze wzorów /4.51/ otrzymujemy:

$$/4.54/ \quad \rho_P = l(t) - \frac{h}{2\mu k} \ln F_3(W)$$

Można sprawdzić, że $0 < \rho_P/t < 1/t$, gdy $W > W'_2$, gdzie W'_2 określone jest wzorami /4.33/ lub /4.34/, co dowodzi istnienia plastycznej strefy edometrycznej w tej fazie /III/ procesu. Ze wzoru /4.54/ otrzymujemy warunek na kurozenie się i znikanie plastycznej strefy edometrycznej. W istocie z równania:

$$/4.55/ \quad \rho_P = l - \frac{h}{2\mu k} \ln F_3(W) = 0$$

otrzymujemy

$$/4.56/ \quad W'_3 = \frac{2hc \left[A e^{\frac{2\mu k l}{h}} - (1-\nu'k') \right]}{E'k'\sqrt{k}}$$

Jeśli pomijamy zmianę konfiguracji powierzchni brzegowych pasma, przyjmując $l/t \approx l_0$ i $W/t \approx H$, to wzór ten określa w postaci analitycznej wielkość W'_3 , określającą etap końcowy fazy III. Jeśli uwzględniamy zmianę geometrii pasma, wtedy w równaniu /4.55/ należy uwzględnić zmianę l/t według /4.50/ oraz zmianę h/t według zależności $h/t = H - W/t$, co prowadzi do równań przestępnych na określenie W'_3 jako pierwiastka równa-

nia /4.55/.

Podamy obecnie wzory końcowe na rozkłady naprężeń i przemieszczenia dla rozpatrywanej fazy /III/ procesu, gdy spełniona jest relacja /4.48/. Podstawiając /4.51/ do /3.32/ otrzymujemy wzory rozwiązania w sprężysto-plastycznej strefie deformacji płaskiej, spełniające warunki /4.49/. Wzory /3.44/ określają rozwiązanie w strefie sprężysto-plastycznej deformacji edometrycznej. Wzór /4.54/ określa bieżące położenie granicy $x = \xi_p / t$ między obu rodzajami stref, zaś wzory /4.33/ lub /4.34/ oraz /4.56/ określają etap początkowy W_2 i końcowy W_3 ewolucji naprężeń i przemieszczeń w fazie III. Zestawimy otrzymane wyniki rozwiązania dla poszczególnych stref półpasma $0 \leq x \leq l/t$ w fazie III.

W edometrycznej strefie plastycznej E_{dp} -

$$\sigma_x^{edp} = \frac{E' W k' - 2 h c \sqrt{k} (k' - \nu')}{h A}$$

/4.57/

$$\sigma_z^{edp} = \frac{E' W k' k + 2 h c \sqrt{k} (1 - \nu' k')}{h A}$$

$$\sigma_y^{edp} = \frac{\nu'}{1 + \nu'} (\sigma_x^{edp} + \sigma_z^{edp}),$$

$$u_x^{edp} = 0, \quad u_y^{edp} = 0, \quad u_z^{edp} = - \frac{W(t)}{h(t)} z,$$

$$\text{dla } 0 \leq x \leq \xi_p, \quad 0 \leq z \leq h(t), \quad W_2' \leq W \leq W_3'$$

gdzie
/4.58/ $\varrho_p = l - \frac{h}{2\mu k} \ln F_3(W)$.

/4.59/
$$F_3(W) = \frac{E' W k' k + 2hc\sqrt{k} (1-\nu'k')}{2hc\sqrt{k} A}$$

/4.60/ $\Delta = \sqrt{1+K^2} - \nu'/K + K^2$, $K = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$, $K^2 = \frac{1 + \sin \varphi^2}{1 - \sin \varphi^2}$,

/4.61/
$$W_2' = \frac{2hc\sqrt{k} (1-\nu'^2)}{E' (1-\nu'k)}$$
,
$$W_3' = \frac{2hc\sqrt{k} [A e^{\frac{2\mu k l}{h}} - (1-\nu'k')]}{E' k k'}$$

W strefie sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP -

$$\sigma_x^{ep} = \frac{2c\sqrt{k}}{k} \left[e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}} - 1 \right],$$

$$\sigma_z^{ep} = 2c\sqrt{k} e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}}, \quad \sigma_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x^{ep} + \sigma_z^{ep}),$$

/4.62/
$$u_x^{ep} = \frac{2A hc\sqrt{k}}{2\mu k^2 E'} \left[e^{\frac{2\mu k(l-x)}{h}} - e^{\frac{2\mu k(l-\varrho_p)}{h}} \right] +$$

$$+ \left[\frac{W}{h} k' + \frac{2c\sqrt{k}(1-\nu'k')}{E' k} \right] (x - \varrho_p)$$

$$u_y^{ep} = 0, \quad u_z^{ep} = -\frac{W}{h} z,$$

dla $\varrho_p \leq x \leq l$, $0 \leq z \leq h$, $W_2' \leq W \leq W_3'$,

gdzie ϱ_p , W'_2 i W'_3 określone są wzorami /4.58/ - /4.61/,
zaś $l = l/t/$ z warunków

$$l(t) = l_0 + u_l^{ep},$$

$$\begin{aligned} /4.63/ \quad u_l^{ep} \equiv u^{ep} \Big|_{x=l(t)} &= \frac{2Ahc\sqrt{k}}{2\mu k^2 E'} \left[1 - F_3(W) \right] + \\ &+ \left[\frac{W}{h} k' + \frac{2c\sqrt{k}(1-\nu'k')}{E'k} \right] \frac{h}{2\mu k} \ln F_3(W). \end{aligned}$$

Wzory /4.57/ i /4.62/ stosują się, gdy zachodzą relacje
/4.10/ i /4.11/ oraz /4.48/.

4.4. Faza IV procesu ściskania pasma

W tej fazie procesu mamy jedną strefę sprężysto-plastycznego płaskiego stanu odkształcenia, jak to ilustruje rys. 9. Faza ta jest osiągnięta w obu przypadkach relacji stałych materiałowych ϱ i ν , a więc niezależnie od ich wzajemnej relacji /4.35/ czy też /4.48/. Rozwiązanie szczegółowe dla tej fazy procesu ma tę samą postać w obu przypadkach, różnica polega jedynie na tym, że inne są wartości parametru ewolucji W_3 i W'_3 określające początek fazy IV.

W fazie tej stosuje się warunek brzegowy /2.22/ i warunek /2.24/₂, wynikający z założenia symetrii problemu względem geometrycznej osi symetrii OZ /płaszczyzny symetrii OYZ/ pasmą. Warunek /2.24/₂ można traktować więc jako warunek brzegowy dla każdej z połówek pasma. Uwzględniając, że w tej

fazie procesu wystąpi w całym paśmie pojedyncza strefa plastyczna EP, rys. 9, możemy oba warunki brzegowe napisać w postaci:

$$/4.64/ \quad \sigma_x^{ep} \Big|_{x=l(t)} = 0, \quad u^{ep} \Big|_{x=0} = 0$$

Warunki te pozwalają określić niewiadome funkcje $C_1^P/t/$ i $C_2^P/t/$ występujące we wzorach ogólnych /3.32/ dla rozwiązania w strefie sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP.

Podstawiając /3.32/ do warunków /4.64/, otrzymujemy dwa równania dla określenia funkcji $C_1^P/t/$ i $C_2^P/t/$. Rozwiązanie tych równań daje następujące wyrażenia dla tych funkcji:

$$/4.65/ \quad C_1^P(t) = \frac{2c\sqrt{k}}{k} e^{\frac{2\mu k l}{h}},$$

$$C_2^P(t) = -\frac{2A h c \sqrt{k}}{2\mu k^2} e^{\frac{2\mu k l}{h}}.$$

Podstawiając te wyrażenia do /3.32/, otrzymujemy ostatecznie wzory na rozwiązanie dla fazy IV procesu:

$$/4.66/ \quad \sigma_x^{ep} = \frac{2c\sqrt{k}}{k} \left[e^{\frac{2\mu k (l-x)}{h}} - 1 \right],$$

$$\sigma_z^{ep} = 2c\sqrt{k} e^{\frac{2\mu k (l-x)}{h}}, \quad \sigma_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\sigma_x^{ep} + \sigma_z^{ep}),$$

$$u_x^{ep} = -\frac{2A h c \sqrt{k}}{2\mu k^2 E'} e^{\frac{2\mu k l}{h}} \left(1 - e^{-\frac{2\mu k x}{h}} \right) +$$

$$+ \left[\frac{W}{h} k' + \frac{2c\sqrt{k}(1-\nu'k')}{E'k} \right] x,$$

$$u_y^{ep} \equiv 0, \quad u_z^{ep} = -\frac{W}{h} z$$

dla $0 \leq x \leq l(t)$, $0 \leq z \leq h(t)$ oraz

dla $W \geq W_3$ gdy $k \geq \frac{1}{v'}$

lub $W \geq W'_3$ gdy $k < \frac{1}{v'}$.

Wartości W_3 i W'_3 określone są, jako pierwiastki równań /4.41/ i /4.55/, przybliżonymi wzorami /4.42/ i /4.56/, które dają przy małych $W/t/$ wystarczającą dokładność. Ponieważ w tej fazie procesu występuje niehamowane płynięcie plastyczne pasma wskutek zniknięcia stref sprężystych, to wzory /4.66/ można stosować tylko dla początkowych etapów fazy IV, czyli przy małych różniących się wartościach parametru $W/t/$ od W_3 i W'_3 . Od wartości $W/t/$ zależą chwilowe rozkłady przestrzenne ζ_x , ζ_z , $U_x \equiv U$ i U_z w sposób bezpośredni /jawny/ i pośredni poprzez $l(t)/h(t)/$. Można by i powinno się uwzględnić zmiany powierzchni brzegowych pasma w IV fazie procesu według wzorów:

$$/4.67/ \quad h/t/ = H - W/t/, \quad l/t/ = l_0 + U_1^{ep},$$

gdzie na podstawie /4.66/ mamy

$$/4.68/ \quad u_l^{ep} = u_x^{ep} \Big|_{x=l(t)} = -\frac{2A hc \sqrt{k}}{2\mu k^2 E'} \left(e^{\frac{2\mu k l}{h}} - 1 \right) + \left[\frac{W}{h} k' + \frac{2c \sqrt{k} (1 - v' k')}{E' k} \right] \epsilon.$$

Uwzględnienie tych zmian geometrii pasma bardzo komplikuje procedurę obliczeniową. Zresztą w tej fazie procesu nie można w zasadzie założyć małych odkształceń i pomijać człony konwekcyjne w wyrażeniach dla pochodnych materialnych poszukiwa-

nych funkcji, jak to było zrobione przy przekształceniach związków konstytutywnych z postaci /3.18/ do /3.20/ i podobnie dla /3.38/, a w konsekwencji nie można posługiwać się całkową formą tych związków w postaci /3.23/ względnie /3.42/. Dla IV fazy procesu należałoby w zasadzie stosować prędkościową postać związków konstytutywnych, a po rozwiązaniu zagadnienia w prędkościach przejść do skończonych wielkości funkcji przez odpowiednie operacje całkowania.

5. Siła nośna pasma

W miarę ewolucji procesu skania pasma zmienia się wielkość siły przenoszanej przez pasmo. Dla określenia wielkości tej siły należy scałkować rozkłady naprężeń σ_z względem x w przedziale odpowiadającym bieżącej szerokości pasma. Ze względu na symetrię obciążeń i konfiguracji geometrycznej pasma względem osi OZ /płaszczyzny OYZ/ wielkość siły nośnej Q określamy wzorem:

$$/5.1/ \quad Q = 2 \int_0^{l(t)} \sigma_z dx$$

Całkowanie należy przeprowadzać oddzielnie dla każdej fazy, sumując odpowiednie całki w poszczególnych obszarach deformacji różnego typu, w których $\sigma_z = \sigma_z(x, t)$ wyrażone jest różnymi wzorami analitycznymi. Oznaczać będziemy siłę nośną pasma w fazach I, II, III i IV przez symbole Q^I , Q^{II} , Q^{III} i Q^{IV} .

Stosując kolejno wyprowadzone w p. 4 wzory na rozkłady naprężenia σ_z w poszczególnych strefach każdej z faz procesu,

s mianowicie wzory /4.12/2, /4.15/2 dla fazy I, /4.27/2, /4.28/2 i /4.29/2 dla II fazy, wzory /4.44/2 i /4.45/2 albo alternatywnie /4.57/2 i /4.62/2 dla III fazy i wzory /4.66/2 dla IV fazy, otrzymamy następujące wzory dla sił nośnych pasma:

- w fazie I

$$\begin{aligned}
 Q^I &= Q^{ed} + Q^e = 2 \left(\int_{\rho_e}^{\rho_e} \sigma_z^{ed} dx + \int_{\rho_e}^l \sigma_z^e dx \right) = \\
 &= 2 \left\{ \frac{E'}{1-\nu'^2} \frac{W}{h} \rho_e + E' \frac{W}{h} \frac{h}{2\mu\nu'} \left[e^{\frac{2\mu\nu'(l-\rho_e)}{h}} - 1 \right] \right\} = \\
 /5.2/ \quad &= 2 \frac{E'}{1-\nu'^2} \frac{W}{h} \left[(l - \frac{h}{2\mu\nu'}) \ln \frac{1}{1-\nu'^2} + \frac{\nu'}{2\mu} h \right],
 \end{aligned}$$

dla $0 \leq W \leq W_1$,

gdzie wykorzystano zależność /4.13/, z której wynika

$$/5.3/ \quad e^{\frac{2\mu\nu'(l-\rho_e)}{h}} = \frac{1}{1-\nu'^2},$$

zaś W_1 określone jest wzorami /4.14/,

- w fazie II /po uwzględnieniu /4.23/

$$\begin{aligned}
 Q^{II} &= Q^{ed} + Q^e + Q^{ep} = 2 \left(\int_0^{\rho_e} \sigma_z^{ed} dx + \int_{\rho_e}^{\rho_e} \sigma_z^e dx + \int_{\rho}^{l(t)} \sigma_z^{ep} dx \right) = \\
 &= \frac{2E'W}{1-\nu'^2} \left\{ \left[\frac{l}{h} - \frac{1}{2\mu k} \ln F_1(W) - \frac{1}{2\mu\nu'} \ln F_2(W) \right] + \frac{\nu'}{2\mu} \right\} = \\
 /5.4/ \quad &= \frac{2E'W}{1-\nu'^2} \left(\frac{\rho_e}{h} + \frac{\nu'}{2\mu} \right)
 \end{aligned}$$

dla $W_1 \leq W \leq W_2$ gdy $k \geq \frac{1}{\nu'}$,

lub $W_1 \leq W \leq W_2'$ gdy $k < \frac{1}{\nu'}$,

gdzie W_1 , W_2 i W_2' określone są odpowiednio wzorem /4.14/, równaniem /4.31/ i wzorem /4.33/, zaś ρ_e , $F_1(W)$ i $F_2(W)$ - wzo-

rami /4.26/ i /4.25/.

- W fazie III mamy dwa alternatywne wzory w zależności czy $k \geq \frac{1}{v'}$, lub $k < \frac{1}{v'}$.

$$/5.5/ \quad Q^{\text{III}} = Q^e + Q^{\text{ep}} = 2 \left(\int_0^{\rho} \sigma_z^e dx + \int_{\rho}^{l(t)} \sigma_z^{\text{ep}} dx \right) \quad \text{dla } k \geq \frac{1}{v'}$$

lub

$$/5.6/ \quad Q^{\text{III}} = Q^{\text{edp}} + Q^{\text{ep}} = 2 \left(\int_0^{\rho_P} \sigma_z^{\text{edp}} dx + \int_{\rho_P}^{l(t)} \sigma_z^{\text{ep}} dx \right) \quad \text{dla } k < \frac{1}{v'}$$

Stosując wzory /4.44/2 i /4.45/2 do /5.5/ otrzymamy:

$$/5.7/ \quad Q^{\text{III}} = Q_{(1)}^{\text{III}} = \frac{E'W}{\mu v'} \left\{ e^{\frac{2\mu v' l}{h}} \left(\frac{2hc\sqrt{k}}{E'W} \right) [F_1(W)]^{(1-\frac{v'}{k})} - 1 \right\}$$

$$\text{dla } W_2 \leq W \leq W_3 \quad \text{i } k \geq \frac{1}{v'}$$

gdzie W_2 i W_3 określone są równaniami /4.31/ i /4.41/, a przy wyprowadzeniu wzorów /5.7/ wykorzystano zależność /4.40/ lub jej równoważną zależność /4.23/1, czyli

$$/5.8/ \quad e^{\frac{2\mu k(l-\rho)}{h}} = F_1(W) \equiv \frac{E'Wk - 2v'hc\sqrt{k}}{2hc\sqrt{k}(k-v')}$$

Natomiast w przypadku $k < \frac{1}{v'}$ stosujemy wzór /5.6/, do którego należy podstawić za σ_z^{edp} i σ_z^{ep} wyrażenia /4.57/2 i /4.62/2; otrzymujemy:

$$/5.9/ \quad Q^{\text{III}} = Q_{(2)}^{\text{III}} = \frac{2 [E'Wkk' + 2hc\sqrt{k}(1-v'k')]}{hA} \rho_P + \frac{2hc\sqrt{k}}{\mu k} \left[e^{\frac{2\mu k(l-\rho_P)}{h}} - 1 \right] = 4c\sqrt{k} \left\{ F_3(W) \rho_P + \frac{h}{2\mu k} [F_3(W) - 1] \right\}$$

$$/5.9/ \quad \text{dla } W_2' \leq W \leq W_3' \quad \text{i} \quad k < \frac{1}{v'},$$

gdzie ρ_p , F_3/W , W_2' i W_3' określone są wzorami /4.58/ -
- /4.61/.

- W fazie IV otrzymujemy na podstawie wzorów /4.66/2

$$Q^{IV} = 2 \int_0^l \epsilon_z e^{\rho x} dx = \frac{2hc\sqrt{k}}{\mu k} \left(e^{\frac{2\mu k l}{h}} - 1 \right)$$

$$/5.10/ \quad \text{dla } W_3 \leq W(t) < h(t) \quad \text{gdy } k \geq \frac{1}{v'}$$

$$\text{lub } W_3' \leq W(t) < h(t) \quad \text{gdy } k < \frac{1}{v'}$$

gdzie W_3 i W_3' określone są jako pierwiastki równań /4.41/ i
/4.55/ - w przybliżeniu wzorami /4.42/ i /4.56/ - zaś h/t i
 l/t wzorami /4.67/ i /4.68/.

Przy pominięciu zmiany konfiguracji powierzchni brzegowych
 $z = h/t$ i $x = \pm l/t$, tj. gdy $h/t \approx H$, $l/t \approx l_0$, otrzymujemy,
że $Q^{IV} = \text{const.}$

Dla obliczeń wygodnie będzie wprowadzić względne walekości q
sił nośnych pasma, określając je wzorami:

$$/5.11/ \quad q = \frac{Q(W)}{Q_1}, \quad Q_1 = Q^I(W) \Big|_{W=W_1},$$

gdzie Q_1 na podstawie /5.2/ i /4.9/ wyraża się w postaci:

$$/5.12/ \quad Q_1 = \frac{2E'}{1-v'^2} \frac{W_1}{h_1} \left(\rho_e^{(1)} + \frac{v'}{2\mu} h_1 \right) = \frac{4c\sqrt{k}}{1-v'^2} \left(\rho_e^{(1)} + \frac{v'}{2\mu} h_1 \right),$$

zaś $\rho_e^{(1)}$ i h_1 na podstawie /4.6/2 i /2.15/ określone są wyrażeniami:

$$/5.13/ \quad \rho_e^{(1)} = l_1 - \frac{h_1}{2\mu v'} \ln \frac{1}{1-v'^2}, \quad h_1 = H - W_1(t)$$

zaś W_1 i l_1 na podstawie /4.14/ i /4.16/ - wzorami

$$/5.14/ \quad W_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E'} h_1 = \frac{2c\sqrt{k}}{E' + 2c\sqrt{k}} H, \quad l_1 = l_0 + \frac{W_1}{2\mu v'^2} \left(\ln \frac{1}{1-v'^2} - v'^2 \right)$$

Ponieważ w fazie I procesu przemieszczenia $W/t/$ i $u_x|_{x=l(t)}$ = $= U_1$ powierzchni brzegowych pasma są małe w porównaniu z H i l_0 , przeto możemy pominąć zmiany położenia /konfiguracji/ tych powierzchni brzegowych i przyjąć:

$$/5.15/ \quad l_1 \approx l_0 \approx l(t), \quad h_1 \approx H \approx h(t) \quad \text{dla } W(t) \leq W_1$$

oraz

$$/5.16/ \quad \rho_e^{(4)} \approx l_0 - \frac{H}{2\mu v'} \ln \frac{1}{1-v'^2}, \quad h_1 \approx H$$

i jako wielkość Q_1 ze wzoru /5.12/ - wielkość

$$/5.17/ \quad Q_1 \approx \frac{2c\sqrt{k}}{1-v'^2} \left[\left(l_0 - \frac{H}{2\mu v'} \ln \frac{1}{1-v'^2} \right) + \frac{v'}{2\mu} H \right]$$

Na podstawie wzorów /5.2/, /5.4/, /5.7/, /5.9/ i /5.10/ określających wielkości siły nośnej pasma w poszczególnych fazach oraz wzoru /5.12/, możemy określić względne wielkości siły nośnej pasma w poszczególnych fazach:

- w fazie I

$$/5.18/ \quad q^I = \frac{Q^I}{Q_1} = \frac{E'}{2c\sqrt{k}} \frac{W}{h} \frac{(\rho_e + \frac{v'}{2\mu} h)}{(\rho_e^{(4)} + \frac{v'}{2\mu} h_1)} \approx \frac{E'}{2c\sqrt{k}} \frac{W}{H},$$

$$\text{dla } 0 \leq \frac{W}{h} \leq \frac{W_1}{h_1} = \frac{2c\sqrt{k}}{E'}$$

gdzie W_1 określone jest wzorami /4.14/, zaś ρ_e i $\rho_e^{(4)}$ wzorami /4.13/ i /5.13/;

- w fazie II

$$15.19/ \quad q_v^{\text{II}} = \frac{Q^{\text{II}}}{Q_1} = \frac{E'}{2c\sqrt{k}} \frac{W}{h} \frac{(\rho_e + \frac{\nu'}{2\mu} h)}{(\rho_e^{(1)} + \frac{\nu'}{2\mu} h_1)}$$

$$\text{dla } \frac{W_1}{h} \leq \frac{W}{h} \leq \frac{W_2}{h} \quad \text{gd } k \geq \frac{1}{\nu'}$$

$$\text{lub } \frac{W_1}{h} \leq \frac{W}{h} \leq \frac{W_2'}{h} \quad \text{gd } k < \frac{1}{\nu'}$$

gdzie W_1 , W_2 i W_2' określone są wzorami /4.14/, równaniem /4.31/ i wzorem /4.33/, zaś ρ_e wzorami /4.25/ i /4.25'/, a $\rho_e^{(1)}$ wzorami /5.13/ lub /5.16/;

- w fazie III przy $k \geq \frac{1}{\nu'}$

$$15.20/ \quad q_{(1)}^{\text{III}} = \frac{Q_{(1)}^{\text{III}}}{Q_1} = \frac{(1-\nu'^2) \left\{ e^{\frac{2\nu\nu'z}{h}} [F_1(W)]^{\frac{(1-\nu')}{k}} - \frac{E'W}{2hc\sqrt{k}} \right\}}{2\mu\nu' \left[\frac{\rho_e^{(1)}}{h} + \frac{\nu'}{2\mu} \frac{h_1}{h} \right]}$$

$$\text{dla } \frac{W_2}{h} = \frac{W}{h} \leq \frac{W_3}{h} \quad \text{ i } k \geq \frac{1}{\nu'}$$

gdzie W_2 i W_3 określone są równaniami /4.31/ i /4.41/, zaś F_1 wzorami /4.25/ i /4.25'/;

- w fazie III przy $k < \frac{1}{\nu'}$

$$15.21/ \quad q_{(2)}^{\text{III}} = \frac{Q_{(2)}^{\text{III}}}{Q_1} = \frac{(1-\nu'^2) \left\{ F_3(W) \rho_p + \frac{h}{2\mu k} [F_3(W)-1] \right\}}{[\rho_e^{(1)} + \frac{\nu'}{2\mu} h_1]}$$

$$\text{dla } \frac{W_2'}{h} \leq \frac{W}{h} \leq \frac{W_3'}{h} \quad \text{ i } k < \frac{1}{\nu'}$$

gdzie ρ_p , F_3/W , W_2' i W_3' określone są wzorami /4.58/ -

- /4.61/, zaś $\rho_e^{/1/}$ i h_1 wzorami - /5.13/ lub /5.16/;

- w fazie IV

$$q_r^{IV} = \frac{Q^{IV}}{Q_1} = \frac{1 - \nu'^2}{2\mu k} \frac{\left(e^{\frac{2\mu k l}{h}} - 1 \right)}{\left(\frac{\rho_e^{(4)}}{h} + \frac{\nu'}{2\mu} \frac{h_1}{h} \right)}$$

/5.22/

$$\text{dla } \frac{W_3}{h} \leq \frac{W(t)}{h(t)} < 1, \text{ gdy } k \geq \frac{1}{\nu'},$$

$$\text{lub } \frac{W'_3}{h} \leq \frac{W(t)}{h} < 1, \text{ gdy } k < \frac{1}{\nu'},$$

gdzie W_3 i W'_3 są pierwiastkami równań /4.41/ i /4.55/ i mogą być obliczone z przybliżonych wzorów /4.42/ i /4.56/; zaś $\rho_e^{/1/}$ i h_1 określone są wzorami /5.13/ lub /5.16/.

6. Interpretacja graficzna wyników rozwiązań w płaszczyźnie naprężeń σ_x, σ_z .

Założenie kinematyki pasma według wzorów /2.12/ i /2.13/ i przyjęcie równań konstytutywnych w postaci /2.1/ i /2.2/ doprowadziło do uproszczonych zależności /3.1/ w strefach sprężystej deformacji edometrycznej, związków konstytutywnych /3.3/ w strefach sprężystej deformacji płaskiej i warunku plastyczności /3.16/ w strefach sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej, zależności /3.42/ w strefach sprężysto-plastycznej deformacji edometrycznej, w których również obowiązuje warunek plastyczności /3.16/. Z zależności tych można wyprowadzić bezpośrednio związki między składowymi naprężeniami σ_x, σ_z i parametrem ewolucji W/t bez rozwiązania równań podstawowych, co było wykonane w p. 3 i 4. pracy. W istocie z równań /3.1/_{1,2}, /3.3/₂ i warunku /3.16/ oraz /3.42/_{1,2} i /3.16/ wynikają zależności:

w strefie edometrycznej sprężystej E_d

$$/6.1/ \quad \sigma_z - \frac{1}{\nu'} \sigma_x = 0,$$

w strefie sprężystej deformacji płaskiej E

$$/6.2/ \quad \sigma_z - \nu' \sigma_x - \frac{E'W}{h} = 0,$$

w strefie plastycznej deformacji płaskiej EP

$$/6.3/ \quad \sigma_z - k \sigma_x - 2c \sqrt{k} = 0, \quad k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

oraz w strefie sprężysto-plastycznej deformacji edometrycznej E_{dp} /przypadek $k < \frac{1}{\nu'}$ /

$$/6.4/ \quad \sigma_z - \frac{(1 - k'\nu')}{k' - \nu'} \sigma_x - \frac{k'}{k' - \nu'} \frac{E'W}{h} = 0, \quad k' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

$$\sigma_z - k \sigma_x - 2c \sqrt{k} = 0, \quad k < \frac{1}{\nu'}$$

Ponadto, zgodnie z /3.1/1, /3.3/3 i /3.42/3 mamy zależności:

$$\sigma_x^{ed} = \sigma_y^{ed}, \quad \sigma_y^e = \nu (\sigma_x^e + \sigma_z^e),$$

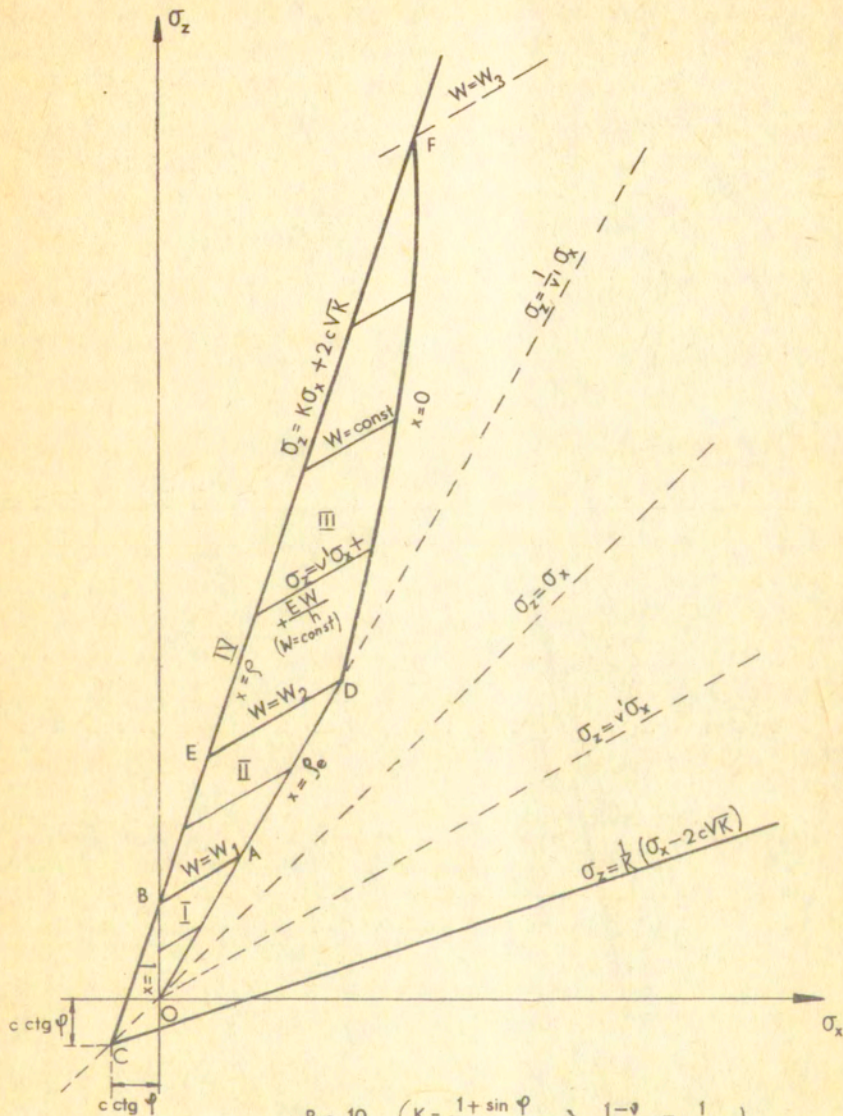
$$/6.5/ \quad \sigma_y^{ep} = \nu (\sigma_x^{ep} + \sigma_z^{ep}), \quad \sigma_y^{edp} = \nu (\sigma_x^{edp} + \sigma_z^{edp}),$$

gdzie na podstawie /3.19/2 możemy zastąpić ν przez:

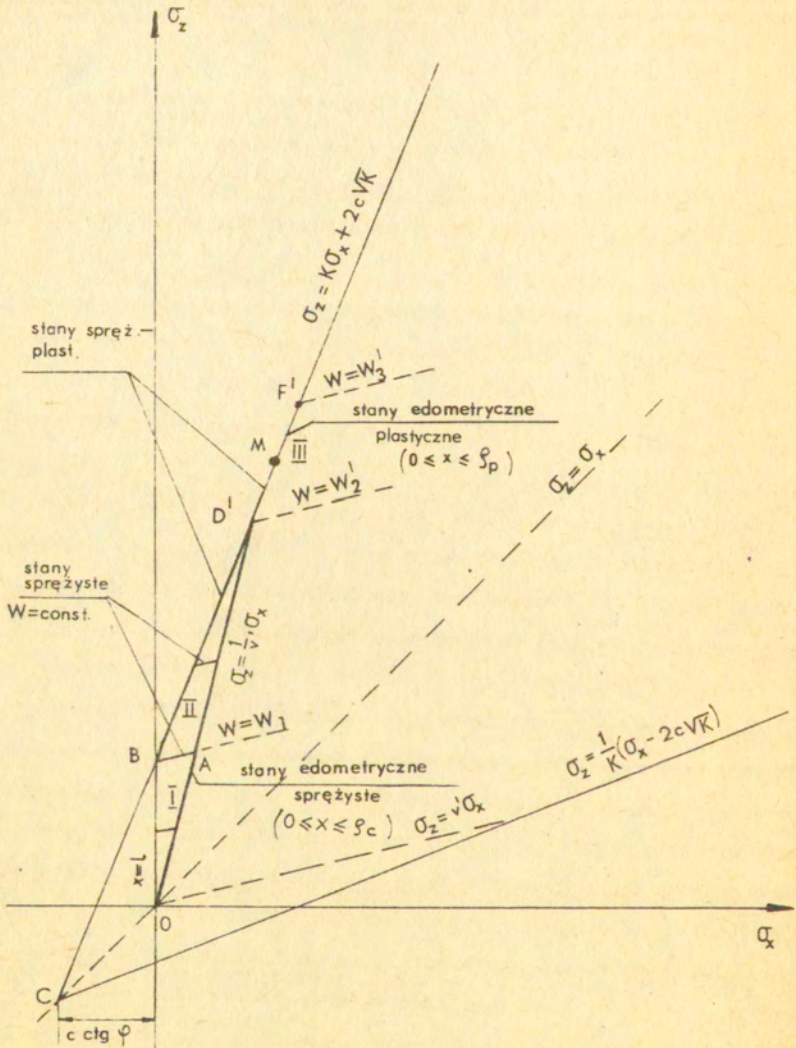
$$/6.6/ \quad \nu = \frac{\nu'}{1 + \nu'}$$

Podamy obecnie interpretację graficzną zależności /6.1/ - /6.4/ na płaszczyźnie naprężeń $O \sigma_x \sigma_z$, rys. 10 i 11.

Równanie /6.1/ określa prostą o nachyleniu $\operatorname{tg} \alpha_{ed} = \frac{1}{\nu'}$ do osi σ_x , przechodzącą przez początek O układu współrzędnych $O \sigma_x \sigma_z$. Równanie /6.2/ przedstawia na tej płaszczyźnie naprężeń rodzinę prostych równoległych o nachyleniu



Rys. 10 $\left(K \equiv \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \Rightarrow \frac{1 - \nu}{\nu} \equiv \frac{1}{\nu'} \right)$



Rys. 11 $\left(K = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} < \frac{1-v}{v} \equiv \frac{1}{v'} \right)$
<http://rcin.org.pl>

$\operatorname{tg} \alpha_0 = \nu'$ i z punktami przecięcia osi rzędnych $O \sigma_z$, przesuwającymi się wraz ze zmianą $W/t/$. Równanie /6.3/ określa jedną z prostych granicznych Coulomba o nachyleniu do osi $O \sigma_x$

$\operatorname{tg} \alpha_{ep} = k \equiv \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ i przecinającą os $O \sigma_z$ w odległości $2c \sqrt{k}$ od początku O układu $O \sigma_x \sigma_z$.

Układ równań /6.4/ reprezentuje odpowiednio uszeregowane punkty prostej granicznej Coulomba /6.3/ w zależności od parametru $W/t/$. Omówimy obecnie reprezentacje rozwiązań poszczególnych faz procesu ściskania pasma na płaszczyźnie naprężeń $O \sigma_x \sigma_z$.

Rys. 10 przedstawia reprezentację stanów naprężenia w 4-ch fazach procesu, odpowiadających rozwiązaniom spełniającym warunek $k \geq \frac{1}{\nu'}$ /czyli $\sin \varphi \geq 1-2\nu'$ /, zaś rysunek 11 reprezentuje stany naprężenia σ_x, σ_z odpowiadające rozwiązaniom spełniającym warunek $k < \frac{1}{\nu'}$ /czyli $\sin \varphi < 1-2\nu'$ /.

Stany naprężenia odpowiadające początkowej I fazie procesu reprezentowane są na obu rysunkach 10 i 11 przez punkty obszaru /domkniętego/ OAB. Obszar ten jest identyczny dla obu przypadków wzajemnej relacji parametrów materiałowych k i ν' . Odcinek OA reprezentuje sprężyste stany edometryczne, odcinek AB - stan sprężysty płaski w chwili pierwszego uplastycznienia brzegu pasma $x = 1$ przy wartości parametru ewolucji $W = W_1$, zaś odcinek OB reprezentuje stany naprężenia na powierzchni brzegowej $x = 1$. Odcinki prostych równoległych do AB leżące w obszarze OAB reprezentują sprężyste stany płaskie w pośrednich etapach procesu określonych parametrami ewolucji $W/t/ = \text{const} < W_1$. Reprezentacja stanów naprężenia w fazie I odpowiada układowi stref z rys. 5 i rozwiązaniom analitycznym /4.12/ i /4.15/.

Faza II procesu reprezentowana jest na płaszczyźnie naprężeń σ_x σ_z przez punkty obszaru BADE na rys. 10 /przypadek $k \geq \frac{1}{\nu'}$ / i przez punkty obszaru trójkątnego AD'B na rys. 11 /przypadek $k < \frac{1}{\nu'}$ /. Punkty odcinków AD na rys. 10 i AD' na rys. 11 reprezentują edometryczne stany sprężyste. Odcinki AB na obu rysunkach reprezentują sprężyste stany płaskie na początku fazy II odpowiadającym wartości $W = W_1$ parametru ewolucji, zaś odcinek DE na rys. 10 i punkt D' na rys. 11, reprezentują stany sprężyste w końcowym etapie $W = W_2$ względnie $W = W'_2$ fazy II. Odcinek BE na rys. 10 i BD' na rys. 11 reprezentują strefę stanów sprężysto-plastycznych fazy II. Odcinki prostych równoległych do AB, położonych w obszarach ABED i BAD' na obu rysunkach, reprezentują stany naprężenia w strefach sprężystej deformacji piaskowej w poszczególnych etapach fazy II, określonych wartościami parametru ewolucji z przedziałów $W/t/\epsilon /W_1, W_2/$ lub $W/t/\epsilon /W_1, W'_2/$. Dla wartości $W = W_2$, rys. 10, znika strefa edometryczna sprężysta E_d , a dla $W = W'_2$, rys. 11, znika strefa sprężysta S, a strefa edometryczna sprężysta E_d osiąga stan edometryczny plastyczny. Omówiona wyżej reprezentacja graficzna fazy II procesu odpowiada układowi stref z rys. 6 oraz rozwiązaniom analitycznym podanym we wzorach /4.27/ - /4.29/.

W fazie III procesu ściskania pasma występuje wyraźna różnica jakościowa pomiędzy rozwiązaniami analitycznymi i ich reprezentacjami graficznymi na płaszczyźnie naprężeń σ_x σ_z , zależnie od wzajemnej relacji parametrów materiałowych k i ν' /lub φ i ν /, tj. czy $k \geq \frac{1}{\nu'}$, czy też $k < \frac{1}{\nu'}$.

W przypadku $k \geq \frac{1}{\nu'}$, rys. 10, stany naprężenia w fazie III reprezentowane są przez punkty obszaru /domkniętego/ EDF i odcinka EB. Punkty odcinka krzywoliniowego DF na tym rysunku określają ewolucję stanów sprężystych w płaszczyźnie symetrii pasma $x = 0$, punkty odcinka DE i odcinków doń równoległych reprezentują sprężyste stany płaskie /strefy E/ w poszczególnych etapach fazy III, zaś punkty odcinka FB odwzorowują stany sprężysto-plastyczne /strefy EP/. Reprezentacja stanów naprężenia w fazie III, podana na rys. 10, jest odwzorowaniem rozwiązania analitycznego dla naprężeń, określonego wzorami /4.44/_{1,2} i /4.45/_{1,2}, na płaszczyźnie $\sigma_x \sigma_z$ i odpowiadającego układowi stref deformacji, jak na rys. 7 oraz zakresowi zmienności parametru $W/t \in [W_2, W_3]$, gdzie W_2 i W_3 określone są równaniami /4.36/ i /4.41/.

W przypadku relacji $k < \frac{1}{\nu'}$, rys. 11, stany naprężenia w fazie III procesu reprezentowane są przez punkty odcinków D'P' i P'B wzajemnie na siebie nachodzących. Przykładowo p. M na rys. 11 reprezentuje stan naprężenia w edometrycznej strefie plastycznej, zaś odcinek MB stan naprężenia w strefie sprężysto-plastycznej deformacji EP dla określonego etapu $W = W/t$ fazy III procesu. Reprezentacja ta odpowiada rozwiązaniu analitycznemu dla naprężeń, określonemu wzorami /4.57/_{1,2} i /4.62/_{1,2} i zakresowi zmienności parametru $W/t \in [W'_2, W'_3]$, gdzie W'_2 i W'_3 określone są wzorami /4.61/. Na płaszczyźnie fizycznej pasma reprezentacja ta odpowiada układowi stref, jak na rys. 8. Dla wartości $W = W_3$ w przypadku $k \geq \frac{1}{\nu'}$, /rys. 10/ i $W = W'_3$ w przypadku $k < \frac{1}{\nu'}$, /rys. 11/ całe pasmo przechodzi w stan plastyczny i następuje IV faza procesu.

W fazie IV procesu ściskania pasma stany naprężenia przedstawione są punktami odcinków BF na rys. 10 i BF' na rys. 11. Stany te przy założonym modelu mechanicznym materiału pasma nie ulegają zmianie wraz z dalszą zmianą parametru ewolucji $W/t/$ w procesie. Punkty F i F' odpowiadają sprężysto-plastycznemu stanom na osi symetrii pasma $x = 0$, zaś punkt B - powierzchni brzegowej $x = l/t/$. Układ stref deformacji w tej fazie podany jest na rys. 9, a rozwiązanie analityczne określone jest wzorem /4.66/12.

7. Bezwymiarowa postać rozwiązania

W celu objęcia procedurą numeryczną ogólniejszej klasy zagadnień brzegowych w procesach ściskania pasma przekształcimy do postaci bezwymiarowej wyprowadzone w p. 4 wzory rozwiązania analitycznego dla poszczególnych faz procesu.

Wprowadzamy bezwymiarowe wielkości, określające położenia elementów, granice stref, wymiary geometryczne pasma oraz wielkości przemieszczeń i ciśnień w paśmie, następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{x}{l} & \eta &= \frac{y}{t} & \zeta &= \frac{z}{l} \\
 r_x &= \frac{\rho_x}{l} & r &= \frac{\rho}{l} & \alpha &= \frac{l}{h} \\
 \omega &= \frac{w}{h} & u &= \frac{u_x}{h} & v &= \frac{u_y}{h}, \quad w = \frac{u_z}{h} = -\omega \alpha \zeta, \\
 \Delta_x &= \frac{\sigma_x}{c} & \Delta_y &= \frac{\sigma_y}{c} & \Delta_z &= \frac{\sigma_z}{c}
 \end{aligned}$$

a ponadto następujące oznaczenia stałych materiałowych w postaci bezwymiarowej.

$$E'' = \frac{E'}{c} = \frac{E}{c(1-v^2)}, \quad v' = \frac{v}{1-v}, \quad (0 < v < \frac{1}{2}),$$

/7.2/

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right), \quad k' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} = \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right).$$

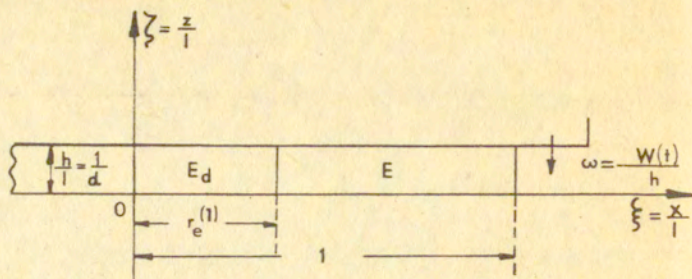
$$A = (1 + k k') - v' (k + k')$$

Wprowadzając powyższe wielkości bezwymiarowe do wzorów rozwiązań analitycznych /4.12/ - /4.16/ dla fazy I, /4.23/, /4.25/ - /4.34/ dla fazy II, /4.40/ - /4.45/ albo /4.53/ - /4.62/ dla fazy III i /4.66/ - /4.68/ dla fazy IV procesu, otrzymujemy po odpowiednich przekształceniach kompletny zespół wzorów, stanowiących podstawę do obliczeń w wielkościach bezwymiarowych. Do tak otrzymanych wzorów rozwiązania w postaci bezwymiarowej dołączamy ponadto wzory na bezwymiarowe wielkości siły nośnej pasma uzyskane ze wzorów /5.18/ - /5.22/ przez wprowadzenie do nich odpowiednich wielkości bezwymiarowych spośród /7.1/ i /7.2/.

Niżej zestawimy wzory rozwiązań analitycznych w wielkościach bezwymiarowych, stosujące się dla półpasma $0 \leq X \leq 1/t/$ $\sqrt{0 \leq \xi \leq 1/}$. Dla półpasma określonego nierównościami $-1/t/ \leq x \leq 0$ wzory te będą miały analogiczną strukturę ze względu na symetrię obciążenia względem geometrycznej płaszczyzny symetrii pasma $X = 0$.

7.1. Faza I /początkowa/ z układem stref, jak na rys. 12

/rys. 5/



Rys. 12

Rozwiązanie stosuje się dla wymiarów pasma spełniających warunki:

$$/7.3/ \quad \alpha = \frac{l}{h} \geq \frac{1}{2\mu\nu'} \ln \frac{1}{1-\nu'^2}$$

oraz dla zakresu zmienności parametru ewolucji $\omega/t/ = \frac{W/t/}{h/t/}$ spełniającego nierówność:

$$/7.4/ \quad 0 \leq \omega(t) \leq \omega_1,$$

gdzie

$$/7.5/ \quad \omega_1 = \left[\frac{W(t)}{h(t)} \right]_1 = \frac{2\sqrt{k}}{E''}$$

W poszczególnych strefach układu, rys. 12, określającego fazę I procesu, rozwiązanie ma następującą postać /po przekształceniu wzorów /4.12/ - /4.15/ i uwzględnieniu /7.1/ i /7.2//:

- w sprężystej strefie edometrycznej E_d

$$/7.6/ \quad \Delta_x^{ed} = \frac{\nu'}{1-\nu'^2} E'' \omega = \Delta_y^{ed}, \quad \Delta_z^{ed} = \frac{1}{1-\nu'^2} E'' \omega,$$

$$u^{ed} = v^{ed} = 0, \quad w^{ed} = -\omega \alpha \zeta,$$

77.6/ c.d. dla $0 \leq \xi \leq r_e^{(1)}$, $0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\alpha}$, $0 \leq \omega(t) \leq \omega_1$,

- w strefie sprężystej deformacji płaskiej E

$$\sigma_x^e = \frac{E''}{\nu} \omega \left[e^{2\mu\nu'\alpha(1-\xi)} - 1 \right]$$

17.7/ $\sigma_z^e = E'' \omega e^{2\mu\nu'\alpha(1-\xi)}$ $\sigma_y^e = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_x^e + \sigma_z^e)$,

$$u^e = \frac{\omega}{2\mu\nu'^2} \left[(1-\nu'^2) e^{2\mu\nu'\alpha(1-\xi)} - 2\mu\nu'\alpha(1-\xi) + \ln \frac{1}{1-\nu'^2} - 1 \right]$$

$$\dot{v}^e = 0, \quad w^e = \frac{u_z}{h} = -\omega\alpha\zeta$$

dla $r_e^{(1)} \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\alpha}$, $0 \leq \omega \leq \omega_1$,

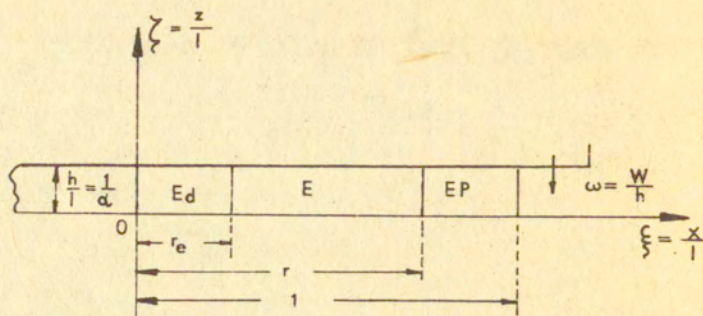
gdzie

17.8/ $r_e^{(1)} = 1 - \frac{1}{2\mu\nu'\alpha} \ln \frac{1}{1-\nu'^2}$, $\alpha = \frac{l}{h}$, $\omega_1 = \frac{2\sqrt{k}}{\Xi''}$,

pozostałe zaś wielkości bezwymiarowe określone są zgodnie ze wzorami /7.1/ i /7.2/.

7.2. Faza II z układem stref deformacji, jak na rys. 13

/rys. 6/:



Rys. 13

Rozwiązanie z układem stref, jak na rys. 13, określającym fazę II procesu, stosuje się dla zakresu zmienności parametru $\omega/t/ = \frac{W/t/}{h/t/}$ spełniającego warunki:

$$\omega_1 \leq \omega(t) \leq \omega_2 \quad \text{gd}y \quad k \geq \frac{1}{v'}$$

/7.9/ lub

$$\omega_1 \leq \omega(t) \leq \omega_2' \quad \text{gd}y \quad k < \frac{1}{v'}$$

gdzie ω_1 jest określone wzorem /7.5/, ω_2 jest pierwiastkiem równania

$$/7.10/ \quad r_e = 1 - \frac{1}{2\mu k \alpha} \ln F_1(\omega) - \frac{1}{2\mu v' \alpha} \ln F_2(\omega) = 0,$$

gdzie zgodnie z /4.25/ i /7.1/ przyjęto oznaczenie

$$/7.11/ \quad F_1(\omega) = \frac{E'' k \omega - 2v' \sqrt{k}}{2\sqrt{k} (k - v')} = e^{2\mu k \alpha (1-r)}$$

$$/7.11/c.d. \quad F_2(\omega) = \frac{E''\omega(k-\nu')}{(1-\nu'^2)(E''k\omega - 2\nu'\sqrt{k})} = e^{2\mu\nu\alpha(r-r_2)}$$

zaś ω_2 określone jest wzorem

$$/7.12/ \quad \omega_2' = \frac{2(1-\nu'^2)\sqrt{k}}{E''(1-\nu'k)}$$

W poszczególnych strefach układu, rys. 13, określającego fazę II, otrzymujemy następujące wzory rozwiązania w wielkościach bezwymiarowych, po przekształceniu zależności /4.25/ - /4.34/:

- w strefie sprężystej deformacji edometrycznej E_d

$$\Delta_x^{ed} = \Delta_y^{ed} = \frac{\nu'}{1-\nu'^2} E''\omega, \quad \Delta_z^{ed} = \frac{1}{1-\nu'^2} E''\omega,$$

$$u^{ed} = v^{ed} = 0, \quad w^{ed} = -\omega \alpha \zeta,$$

/7.13/

$$\text{dla } 0 \leq \xi \leq r_2, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{i } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad \text{gdy } k \geq \frac{1}{\nu'}$$

$$\text{lub } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2' \quad \text{gdy } k < \frac{1}{\nu'};$$

- w strefie sprężystej deformacji piaskowej B:

$$\Delta_x^e = \frac{2\sqrt{k}}{\nu'} [F_1(\omega)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} e^{2\mu\nu\alpha(1-\xi)} - \frac{E'\omega}{\nu'},$$

$$\Delta_z^e = 2\sqrt{k} [F_1(\omega)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} e^{2\mu\nu\alpha(1-\xi)}$$

/7.14/

$$\Delta_y^e = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\Delta_x^e + \Delta_z^e) = \nu (\Delta_x^e + \Delta_z^e),$$

$$u^e = \frac{\omega}{2\mu\nu^2} \left\{ \frac{2(1-\nu^2)\sqrt{k}}{E''\omega} [F_1(\omega)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} e^{2\mu\nu\alpha(1-\xi)} - 2\mu\nu\alpha(1-\xi) + \frac{\nu'}{k} \ln F_1(\omega) + \ln F_2(\omega) - 1 \right\},$$

$$v^e = 0, \quad w^e = -\omega\alpha\xi,$$

17.14/

$$\text{dla } r_e \leq \xi \leq r, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{oraz dla } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \text{ gdy } k \geq \frac{1}{\nu'}$$

$$\text{lub } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2' \text{ gdy } k < \frac{1}{\nu'};$$

- w strefie sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP:

$$\Delta_x^{ep} = \frac{2\sqrt{k}}{k} [e^{2\mu k\alpha(1-\xi)} - 1], \quad \Delta_z^{ep} = 2\sqrt{k} e^{2\mu k\alpha(1-\xi)},$$

$$\Delta_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}) \equiv \nu (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}),$$

$$u^{ep} = \frac{\omega}{2\mu k^2} \left\{ \frac{2A\sqrt{k}}{E''\omega} [e^{2\mu k\alpha(1-\xi)} - F_1(\omega)] + \right.$$

17.15/

$$\left. + [kk' + \frac{2\sqrt{k}}{E''\omega} (1-\nu'k)] [\ln F_1(\omega) - 2\mu k\alpha(1-\xi)] \right\} +$$

$$+ \frac{\omega}{2\mu\nu^2} \left[\frac{1}{F_2(\omega)} + \ln F_2(\omega) - 1 \right],$$

$$v^{ep} = 0, \quad w^{ep} = -\omega\alpha\xi,$$

$$\text{dla } r \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{i dla } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \text{ gdy } k \geq \frac{1}{\nu'}$$

$$\text{lub } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2' \text{ gdy } k < \frac{1}{\nu'}.$$

Występujące we wzorach /7.13/ - /7.15/ wielkości zależne od ω , a mianowicie r i r_e i funkcja $F_1/\omega/$ i $F_2/\omega/$ oraz wielkości stałe ω_1 , ω_2 i ω'_2 określone są następująco:

$$/7.16/ \quad \begin{cases} r_e = 1 - \frac{1}{2\mu k \alpha} \ln F_1(\omega) - \frac{1}{2\mu \nu' \alpha} \ln F_2(\omega), \\ r = 1 - \frac{1}{2\mu k \alpha} \ln F_1(\omega), \end{cases}$$

$$/7.17/ \quad \begin{cases} F_1(\omega) = \frac{E'' k \omega - 2\nu' \sqrt{k}}{2\sqrt{k}(k-\nu')}, \\ F_2(\omega) = \frac{E''(k-\nu')\omega}{(1-\nu'^2)(E'' k \omega - 2\nu' \sqrt{k})}, \end{cases}$$

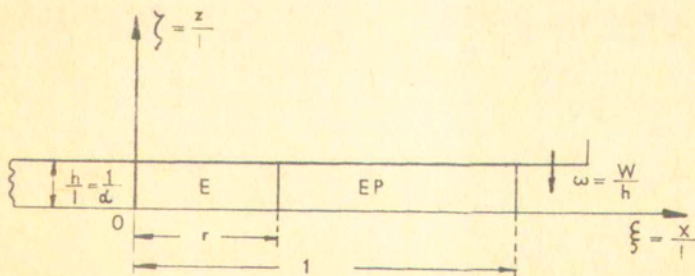
$$/7.18/ \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{k}}{E''}, \quad \omega'_2 = \frac{2(1-\nu'^2)\sqrt{k}}{E''(1-\nu'k)},$$

zaś ω_2 jest pierwiastkiem równania

$$/7.19/ \quad r_e = 1 - \frac{1}{2\mu k \alpha} \ln F_1(\omega) - \frac{1}{2\mu \nu' \alpha} \ln F_2(\omega) = 0.$$

Stale materiałowe E'' , ν' , k , k' i A określone są wzorami /7.2/.

7.3.1. Faza III, przypadek $k \geq \frac{1}{\nu'}$, określona układem stref, jak na rys. 14 /rys. 7/



Rys.14

Rozwiązanie odpowiadające układowi stref, jak na rys. 14 i określające fazę III procesu stosuje się, gdy pomiędzy parametrami materiałowymi k i ν' zachodzi relacja:

$$/7.20/ \quad k \geq \frac{1}{\nu'} \quad , \quad (\sin \varphi \geq 1 - 2\nu')$$

zaś parametr ewolucji ω/t zmienia się w przedziale określonym nierównościami:

$$/7.21/ \quad \omega_2 \leq \omega(t) \leq \omega_3 \quad ,$$

gdzie ω_2 określone jest równaniem /7.10/ lub /7.19/, zaś ω_3 jest pierwiastkiem równania

$$/7.22/ \quad r \equiv 1 - \frac{1}{2\mu k \alpha} \ln F_1(\omega) = 0 \quad ,$$

z którego otrzymujemy

$$/7.23/ \quad \omega_3 = \frac{2\sqrt{k} [\nu' + (k - \nu') e^{2\mu k \alpha}]}{E'' k} \quad .$$

W poszczególnych strefach układu, rys. 14, określającego fazę III procesu /dla $k \geq \frac{1}{\nu'}$ /, otrzymujemy na podstawie /4.44/ i /4.45/ oraz /7.1/ i /7.2/ następującą postać rozwiązania w wielkościach bezwymiarowych:

- w strefie sprężystej deformacji płaskiej B

$$/7.24/ \quad \begin{aligned} \alpha_x^e &= \frac{2\sqrt{k}}{\nu'} [F_1(\omega)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} e^{2\mu\nu'\alpha(1-\xi)} - \frac{E''\omega}{\nu'} \quad , \\ \alpha_z^e &= 2\sqrt{k} [F_1(\omega)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} e^{2\mu\nu'\alpha(1-\xi)} \quad , \end{aligned}$$

$$\Delta_y^e = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\Delta_x^e + \Delta_z^e) \equiv \nu (\Delta_x^e + \Delta_z^e)$$

17.24/

$$u^e = \frac{\omega}{2\mu\nu'^2} \left\{ \frac{2(1-\nu'^2)\sqrt{k}}{E''\omega} [F_1(\omega)]^{-\left(1-\frac{\nu'}{k}\right)} \left[e^{2\nu\nu'\alpha(1-\xi)} - e^{2\nu\nu'\alpha} \right] + 2\mu\nu'\alpha\xi \right\}$$

$$v^e = 0, \quad w^e = -\omega\alpha\xi,$$

$$\text{dla } 0 \leq \xi \leq r, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \omega_2 \leq \omega \leq \omega_3,$$

gdzie r określone jest wzorami 17.16/2 i 17.17/1, zaś ω_2 równaniem 17.19/, a ω_3 wzorem 17.23/;

w strefie sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP:

$$\Delta_x^{ep} = \frac{2\sqrt{k}}{k} \left[e^{2\mu k\alpha(1-\xi)} - 1 \right]$$

$$\Delta_z^{ep} = 2\sqrt{k} e^{2\mu k\alpha(1-\xi)},$$

$$\Delta_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}) \equiv \nu (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}),$$

17.25/

$$u^{ep} = \frac{\omega}{2\mu k^2} \left\{ \frac{2A\sqrt{k}}{E''\omega} \left[e^{2\mu k\alpha(1-\xi)} - F_1(\omega) \right] + \left[kk' + \frac{2\sqrt{k}}{E''\omega} (1-\nu'k') \right] \left[\ln F_1(\omega) - 2\mu k\alpha(1-\xi) \right] \right\} +$$

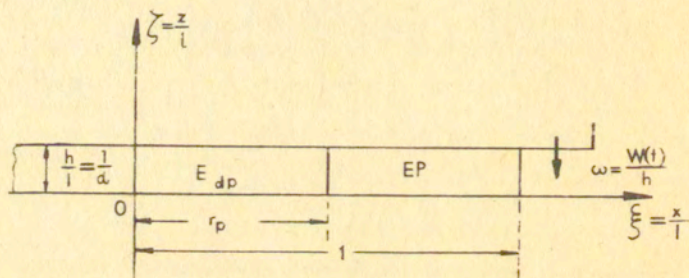
$$+ \frac{\omega}{2\mu\nu'^2} \left\{ \frac{2(1-\nu'^2)\sqrt{k}}{E''\omega} \left[F_1(\omega) - e^{2\nu\nu'\alpha} (F_1(\omega))^{\left(1-\frac{\nu'}{k}\right)} \right] + \left[2\mu\nu'\alpha - \frac{\nu'}{k} \ln F_1(\omega) \right] \right\},$$

$$v^{ep} = 0, \quad w^{ep} = -\omega\alpha\xi$$

$$\text{dla } r \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \omega_2 \leq \omega \leq \omega_3,$$

gdzie r określone jest wzorami /7.16/2 i /7.17/1, ω_2 - równaniem /7.19/, zaś ω_3 - wzorem /7.23/.

7.3.2. Faza III, przypadek $k < \frac{1}{v'}$, określona układem stref, jak na rys. 15 /rys. 8/



Rys. 15

Rozwiązanie odpowiadające układowi stref, jak na rys. 15 i określające fazę procesu III, stosuje się, gdy parametry materiałowe k i v' /lub φ i v / oraz bezwymiarowy parametr ewolucji ω/k spełniają warunki:

$$/7.26/ \quad k < \frac{1}{v'} \quad (\sin \varphi < 1 - 2v)$$

i

$$/7.27/ \quad \omega'_2 \leq \omega(t) \leq \omega'_3$$

gdzie ω'_2 określone jest wzorem /7.18/2, a ω'_3 jest pierwiastkiem równania

$$/7.28/ \quad r_p(\omega) \equiv 1 - \frac{1}{2\mu k \alpha} \ln F_3(\omega) = 0,$$

w którym

$$/7.29/ \quad F_3(\omega) = \frac{E'' k' k \omega + 2\sqrt{k} (1 - \nu' k')}{2A\sqrt{k}}, \quad A = (1 + k k') - \nu' (k + k')$$

oraz z którego wynika

$$/7.30/ \quad \omega_3' = \frac{2\sqrt{k} [A e^{2\mu k \alpha} - (1 - \nu' k')]}{E'' k k'}$$

Rozwiązanie w postaci bezwymiarowej w obu strefach półpasma w/g układu podanego na rys. 15 otrzymujemy ze wzorów /4.57/ i /4.62/ oraz /7.1/ i /7.2/.

W strefie edometrycznej deformacji sprężysto-plastycznej

E_{dp} :

$$\Delta_{x'}^{edp} = \frac{E'' k' \omega - 2\sqrt{k} (k - \nu')}{A}, \quad \Delta_z^{edp} = \frac{E'' k' k \omega + 2\sqrt{k} (1 - \nu' k')}{A}$$

$$/7.31/ \quad \Delta_y^{edp} = \frac{\nu'}{1 + \nu'} (\Delta_{x'}^{edp} + \Delta_z^{edp}) \equiv \nu (\Delta_{x'}^{edp} + \Delta_z^{edp}),$$

$$u^{edp} = 0, \quad v^{edp} = 0, \quad w^{edp} = -\omega \alpha \zeta,$$

$$\text{dla } 0 \leq \xi \leq r_p, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \omega_2' \leq \omega \leq \omega_3',$$

gdzie

$$/7.32/ \quad r_p = 1 - \frac{1}{2\mu k \alpha} \ln F_3(\omega),$$

zaś F_3/ω , ω_2' i ω_3' określone są wzorami /7.29/, /7.18/₂ i /7.30/.

W strefie sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej EP:

$$\Delta_x^{ep} = \frac{2\sqrt{k}}{k} \left[e^{2\mu k \alpha (1-\xi)} - 1 \right],$$

$$\Delta_z^{ep} = 2\sqrt{k} e^{2\mu k \alpha (1-\xi)},$$

$$\Delta_y^{ep} = \frac{\nu'}{1+\nu'} (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}) = \nu (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}),$$

17.33/

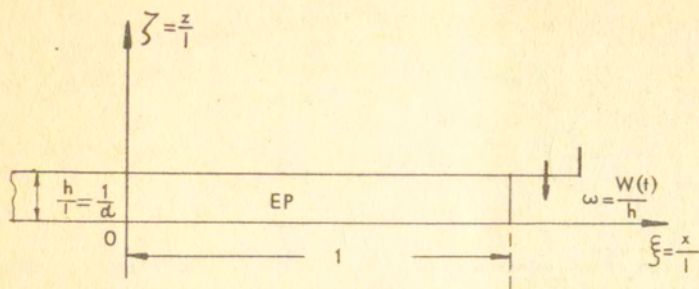
$$u^{ep} = \frac{1}{2\mu k^2} \left\{ \frac{2A\sqrt{k}}{E''} \left[e^{2\mu k \alpha (1-\xi)} - F_3(\omega) \right] + \right. \\ \left. + \left[k k \omega + \frac{2\sqrt{k}}{E''} (1-\nu'k') \right] \left[\ln F_3(\omega) - 2\mu k \alpha (1-\xi) \right] \right\}$$

$$v^{ep} = 0, \quad w^{ep} = -\omega \alpha \xi$$

$$\text{dla } r_p \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \omega'_2 \leq \omega \leq \omega'_3,$$

gdzie r_p , ω'_2 i ω'_3 określone są wzorami /7.32/, /7.18/2 i /7.30/, a F_3/ω wzorem /7.29/.

7.4. Faza IV określone układem stref, jak na rys. 16 /rys.9/



Rys. 16

Rozwiązanie w wielkościach bezwymiarowych dla IV fazy procesu otrzymujemy ze wzorów /4.66/ oraz /7.1/ i /7.2/. Rozwiązanie ma jednolitą postać niezależnie od relacji parametrów k i v' , ale inny jest zakres zmienności parametru ewolucji ω/t . Otrzymujemy następujące wzory:

$$\Delta_x^{ep} = \frac{2\sqrt{k}}{k} \left[e^{2\mu k \alpha (1-\xi)} - 1 \right],$$

$$\Delta_z^{ep} = 2\sqrt{k} e^{2\mu k \alpha (1-\xi)},$$

$$/7.34/ \quad \Delta_y^{ep} = \frac{v'}{1+v'} (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}) \equiv v (\Delta_x^{ep} + \Delta_z^{ep}),$$

$$u^{ep} = \left[k'\omega - \frac{2\sqrt{k}}{E''k} (k'v' - 1) \right] \alpha \xi - \frac{2A\sqrt{k}}{2\mu k^2 E''} e^{2\mu k \alpha} (1 - e^{-2\mu k \alpha \xi}),$$

$$v^{ep} = 0, \quad \omega^{ep} = -\omega \alpha \xi,$$

dla $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \zeta < \frac{1}{\alpha}$,

oraz dla $\omega_3 \leq \omega < 1$, gdy $k \geq \frac{1}{\nu}$.

/7.34/

lub $\omega_3' \leq \omega < 1$, gdy $k < \frac{1}{\nu}$,

gdzie ω_3 i ω_3' określone są wzorami /7.23/ i /7.30/.

O ile w rozwiązaniach faz I, II i III można pominąć zmianę konfiguracji powierzchni brzegowych $x = \pm l/t$ i $z = h/t$, to w fazie IV, gdy całe pasmo przechodzi w stan plastyczny, nie można już przyjąć takiej aproksymacji. W związku z tym parametr $\alpha \equiv \frac{l/t}{h/t} \neq \text{const}$ jest funkcją W/t . Na podstawie /4.67/ i /4.68/ oraz /7.1/ możemy wyrazić wielkość $\alpha = \frac{l/t}{h/t}$ w postaci

$$\alpha = \frac{l_0 + u_x^{ep} |_{x=ut}}{h} = \frac{l_0}{H-W} + u_l^{ep} =$$

/7.35/

$$= \alpha_0 (1 + \omega) - \frac{2A\sqrt{k}}{\mu k^2} (e^{2\mu k \alpha} - 1) + \left[\omega k' + \frac{2\sqrt{k}(1-\nu'k')}{E''k} \right] \alpha,$$

skąd można otrzymać odwrotną zależność $\omega = \omega(\alpha)$ w postaci

$$/7.36/ \quad \omega = \frac{1}{\alpha_0 + k' \alpha} \left\{ \left[1 - \frac{2\sqrt{k}(1-\nu'k')}{E''k} \right] \alpha + \frac{2A\sqrt{k}}{2\mu k^2} (e^{2\mu k \alpha} - 1) - \alpha_0 \right\},$$

gdzie α_0 jest początkową wartością α określoną stosunkiem

$$/7.37/ \quad \alpha_0 = \frac{l_0}{H}.$$

Ze wzorów /7.35/ wynika, że wielkość $\alpha = \alpha/\omega$ jako funkcję ω można otrzymać rozwiązując równanie /7.35/ względem α , co wymaga procedury numerycznej, gdyż równanie /7.35/ jest równaniem przestępnym względem α .

znaczyć należy, że uwzględniając zmiany skonczone /dostatecznie duże/ położenia powierzchni brzegowych pasma, wkraczący w zakres skończonych odkształceń i wyprowadzone równania podstawowe wynikające m.in. z założenia małych odkształceń nie mogą być stosowane. Wzory /7.34/ można stosować tylko w początkowych etapach fazy IV dla $\omega_3 \leq \omega < 1$.

7.5. Bezwymiarowe wielkości siły nośnej w poszczególnych fazach procesu

Bezwymiarowe wielkości siły nośnej $q = \frac{Q}{Q_1}$ pasma podane już były wzorami /5.18/ - /5.22/. Wystarczy w tych wzorach wprowadzić bezwymiarowe wielkości określone wzorami /7.1/ i /7.2/. Po podstawieniach i przekształceniach otrzymujemy kolejno:

- w fazie I

$$/7.38/ \quad q^I = \frac{E''}{2\sqrt{k}} \omega \frac{[\alpha r_e + \frac{\nu'}{2\mu}]}{[\alpha r_e^{(1)} + \frac{\nu'}{2\mu} \frac{h_1}{h}]} \approx \frac{E''}{2\sqrt{k}} \omega$$

$$\text{dla } 0 \leq \omega \leq \omega_1 ;$$

- w fazie II

$$/7.39/ \quad q^II = \frac{E'' \omega}{2\sqrt{k}} \frac{(\alpha r_e + \frac{\nu'}{2\mu})}{(\alpha r_e^{(1)} + \frac{\nu'}{2\mu})}$$

$$\text{dla } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad \text{gdzie } k \geq \frac{1}{\nu'}$$

$$\text{; } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad \text{gdzie } k < \frac{1}{\nu'}$$

- w fazie III mamy dwa alternatywne wzory zależnie od relacji $k \geq \frac{1}{\nu'}$ i $k < \frac{1}{\nu'}$:

$$17.40/ \left\{ \begin{aligned} q_{V(1)}^{\text{III}} &= \frac{(1-\nu'^2) \left\{ e^{-90} e^{2\mu\nu'\alpha} [F_1(\omega)]^{(1-\frac{\nu'}{k})} - \frac{E''\omega}{2\sqrt{k}} \right\}}{2\mu\nu'(\alpha r_e^{(1)} + \frac{\nu'}{2\mu})} \end{aligned} \right.$$

$$\text{dla } \omega_2 \leq \omega \leq \omega_3, \quad k \geq \frac{1}{\nu'}$$

oraz

$$17.41/ \left\{ \begin{aligned} q_{V(2)}^{\text{III}} &= \frac{(1-\nu'^2) \left\{ F_3(\omega) \alpha r_p + \frac{1}{2\mu k} [F_3(\omega) - 1] \right\}}{(\alpha r_e^{(1)} + \frac{\nu'}{2\mu})} \\ \text{dla } \omega_2' \leq \omega \leq \omega_3' &, \quad k < \frac{1}{\nu'} ; \end{aligned} \right.$$

- w fazie IV

$$17.42/ \left\{ \begin{aligned} q_V^{\text{IV}} &= \frac{1-\nu'}{2\mu k} \frac{(e^{2\mu k \alpha} - 1)}{(\alpha r_e^{(1)} + \frac{\nu'}{2\mu})} \\ \text{dla } \omega_3 \leq \omega < 1 & \quad \text{gdym } k \geq \frac{1}{\nu'} \\ \text{; } \omega_3' \leq \omega < 1 & \quad \text{gdym } k < \frac{1}{\nu'} . \end{aligned} \right.$$

We wzorach /7.38/ - /7.42/ pominięto zmianę konfiguracji powierzchni brzegowych, przyjmując

$$17.43/ \left\{ \begin{aligned} h &\approx h_1 \approx H = \text{const}, \quad l(t) = l_1 = l_0 = \text{const}, \\ \alpha &= \frac{h(t)}{l(t)} = \text{const}. \end{aligned} \right.$$

We wzorach tych stałe ω_1 , ω_2 , ω_2' , ω_3 i ω_3' określone są wzorami /7.18/, /7.19/, /7.23/ i /7.30/, zmienne $r_e = r_e/\omega$, $r = r/\omega$, F_1/ω i F_2/ω - wzorami /7.16/ i /7.17/, stała $r_e^{1/1}$ - wzorem /7.8/, stałe E'' , ν' , k i k' - wzorami /7.2/, zaś funkcje r_p/ω i F_3/ω określone są wzorami /7.32/ i /7.29/.

Inne wielkości bezwymiarowe, występujące we wzorach /7.38/ - /7.42/, określone są poszczególnymi wzorami spośród /7.1/ i /7.2/.

8. Ilustracja rozwiązania na przykładach liczbowych

W celu ilustracji ilościowej i jakościowej przedstawionego rozwiązania uproszczonego zagadnienia ściskania pasma wykonano obliczenia i sporządzono wykresy:

- przestrzennych rozkładów naprężeń bezwymiarowych

$\frac{\sigma_x}{c} = \lambda_x / \xi, \omega /$ i $\frac{\sigma_z}{c} = \lambda_z / \xi, \omega /$ oraz przemieszczeń bezwymiarowych $\frac{u_x}{h} = U / \xi, \omega /$, w zależności od bezwymiarowej wielkości położenia elementu $\xi = \frac{x}{l}$ i dla szeregu kolejnych wartości bezwymiarowego parametru ewolucji $\omega / t = \frac{W/t/}{h/t/}$;

- sił przenoszonych przez ściskane pasmo w postaci bezwymiarowej $q = \frac{Q}{Q_1}$ w zależności od parametru ewolucji $\omega = \frac{W/t/}{h/t/}$, który jednocześnie pokrywa się z odkształceniem ϵ_z w kierunku wysokości pasma;

- progresji granic międzystrefowych, granicy $\xi = r_0 = r_0$ między strefą sprężystą edometryczną E_d i sprężystą płaską E oraz granicy $\xi = r = r(\omega)$ między strefami sprężystą E i sprężysto-plastyczną EP w płaskich stanach odkształcenia;

- reprezentacji rozwiązania na płaszczyźnie naprężeń /głównych/ σ_x, σ_z .

Obliczenia wykonano dla następujących stałych materiałowych:

$$E = 1308 \text{ MPa} \approx 13336 \text{ Kg/cm}^2, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad \mu = 0,3$$

/8.1/

$$c = 0,5 \text{ MPa} \approx 5 \text{ Kg/cm}^2, \quad \varphi = 35^\circ, \quad \varphi' = 30,$$

skąd zgodnie ze wzorami /3.2/ i /7.2/ otrzymamy wartości E', ν', E'', k i k' .

$$E' = \frac{E}{1 - \nu'^2} = 1471 \text{ MPa} = 15000 \text{ Kg/cm}^2, \quad \nu' = 0,5$$

$$/8.2/ \quad E'' = \frac{E'}{C} = 3000, \quad k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = 3,6901724$$

$$k' = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} = 3.$$

Z przyjętych wartości stałych materiałowych φ i ν , podanych w /8.1/, wynika, że:

$$/8.3/ \quad \sin \varphi = \sin 35^\circ = 0,573576 > 1 - 2\nu = \frac{1}{3} = 0,33333/3/$$

oraz zgodnie z /8.2/

$$/8.4/ \quad k = 3,6901724 > \frac{1}{\nu'} = 2$$

Wobec tego w obecnej pracy ograniczono się do reprezentacji rozwiązania odpowiadającego relacjom parametrów φ i ν względnie k i ν spełniającym nierówności /8.3/ i /8.4/.

W obliczeniach pominięto zmiany konfiguracji powierzchni brzegowych pasma w procesie jego ściskania, przyjmując:

$$/8.5/ \quad \lambda/t/ = \frac{l/t/}{h/t/} \approx \frac{l_0}{H} = 1 \quad \text{i} \quad \lambda/t/\approx \frac{l_0}{H} = 2,5.$$

W obecnej pracy podajemy tylko reprezentację graficzną wykonanych obliczeń.

Na rysunkach 17-22 przedstawiono ewolucję przestrzennych rozkładów naprężeń bezwymiarowych $\Delta_x = \frac{\sigma_x}{C}$ i $\Delta_z = \frac{\sigma_z}{C}$ oraz bezwymiarowych przemieszczeń $U = \frac{x}{h}$ w poszczególnych fazach procesu ściskania pasma, w zależności od bezwymiaro-

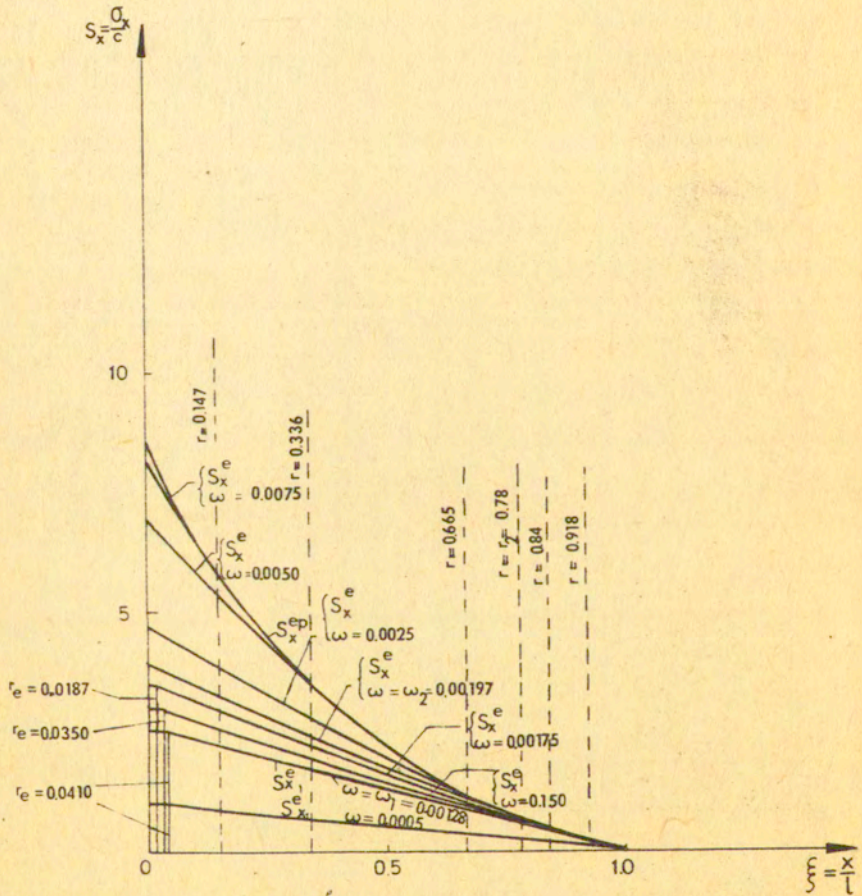
wego położenia $\xi = \frac{x}{l}$ elementu w paśmie i dla kilku kolejnych rosnących wartości parametru ewolucji $\omega = \frac{W}{h}$, który jednocześnie określa odkształcenie ε_z , oraz dla dwu rodzajów wymiarów pasma:

$$\alpha = \frac{1}{h} \approx \frac{l_0}{H} = 1 \quad \text{i} \quad \alpha = \frac{1}{h} \approx \frac{l_0}{H} = 2,5$$

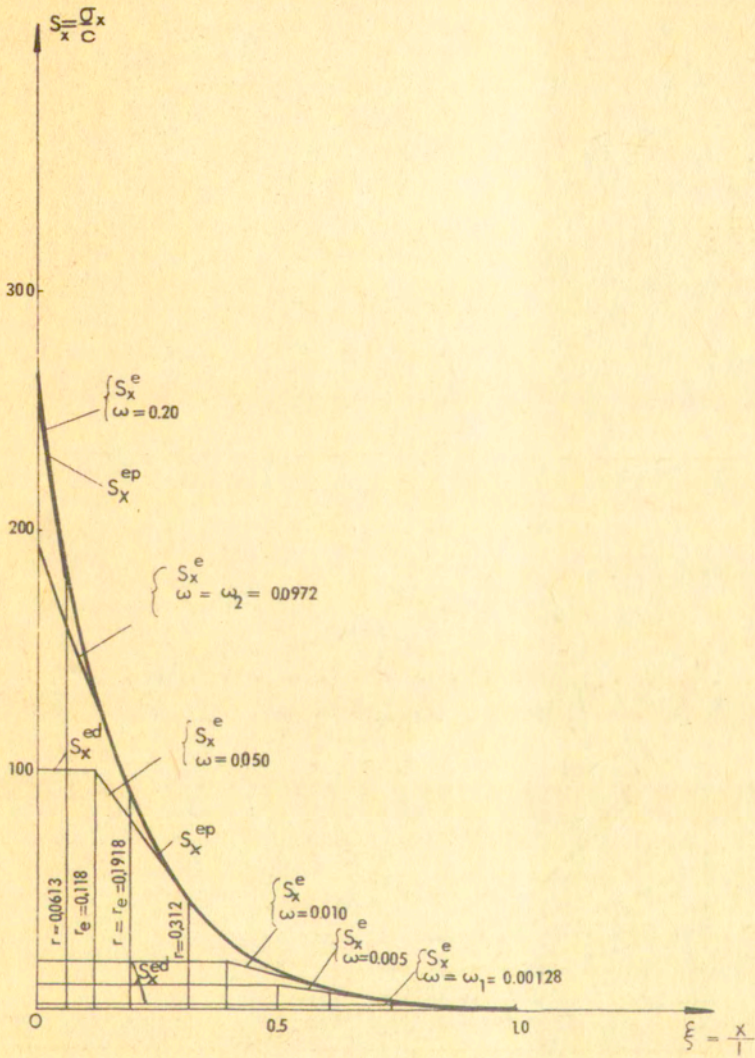
Na rys. 23 i 24 przedstawiono zależności bezwymiarowych wartości sił $q = \frac{Q}{Q_1}$ przenoszonych przez pasmo w zależności od bezwymiarowych wartości parametru ewolucji $\omega = \frac{W}{h} = \varepsilon_z$, dla $\alpha = 1$ na rys. 23 oraz dla $\alpha = 2,5$ na rys. 24.

Zmiany położenia granic międzystrefowych, w wielkościach bezwymiarowych $r_0 = \frac{\rho_0}{1}$ i $r = \frac{\rho}{1}$, w zależności od zmiany bezwymiarowego parametru ewolucji $\omega = \frac{W}{h} = \varepsilon_z$, przedstawione na rys. 25 dla $\alpha = \frac{1}{h} = 1$ oraz na rys. 26 a, b dla $\alpha = \frac{1}{h} = 2,5$.

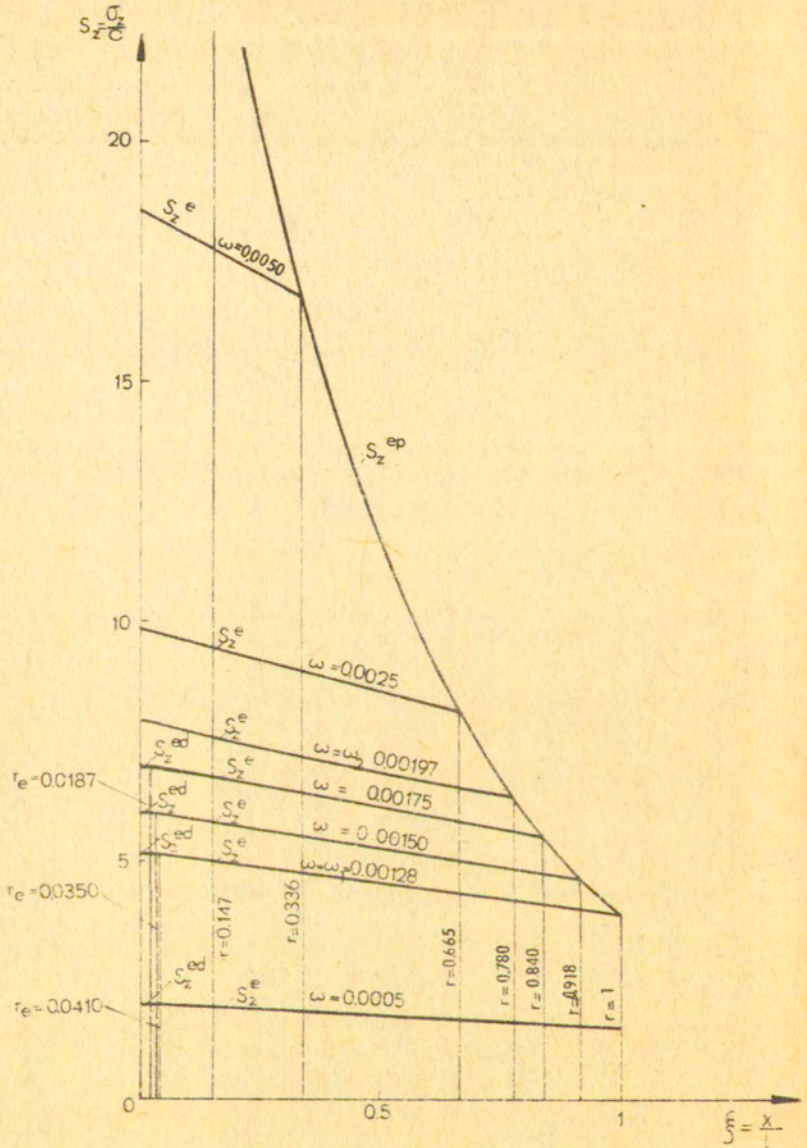
Wreszcie na rys. 27 i 28 przedstawiono odwzorowanie rozwiązania liczbowego na płaszczyźnie bezwymiarowych naprężeń głównych λ_x i λ_z osobne dla pasma o wymiarach $\alpha = \frac{1}{h} = 1$ i osobne dla pasma o wymiarach $\alpha = \frac{1}{h} = 2,5$.



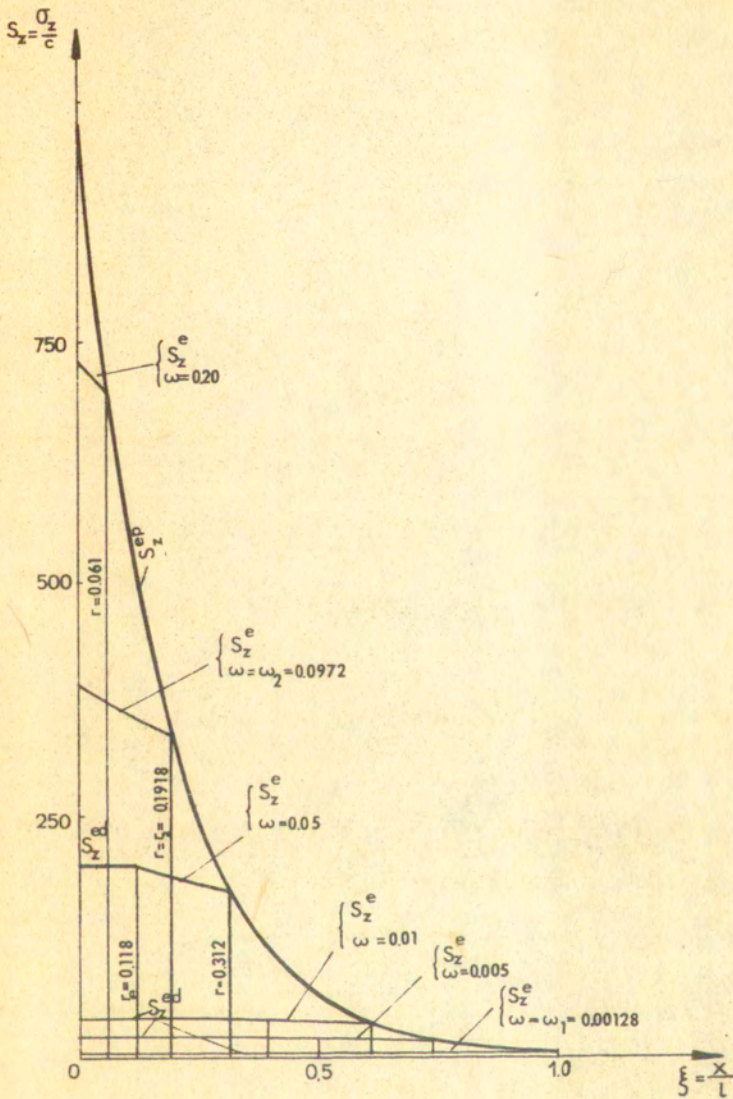
Rys.17 $S_x = S_x(\xi, \omega)$ dla $\omega = \frac{W}{h} = \text{const}$, dla $\alpha = \frac{l}{h} = 1$



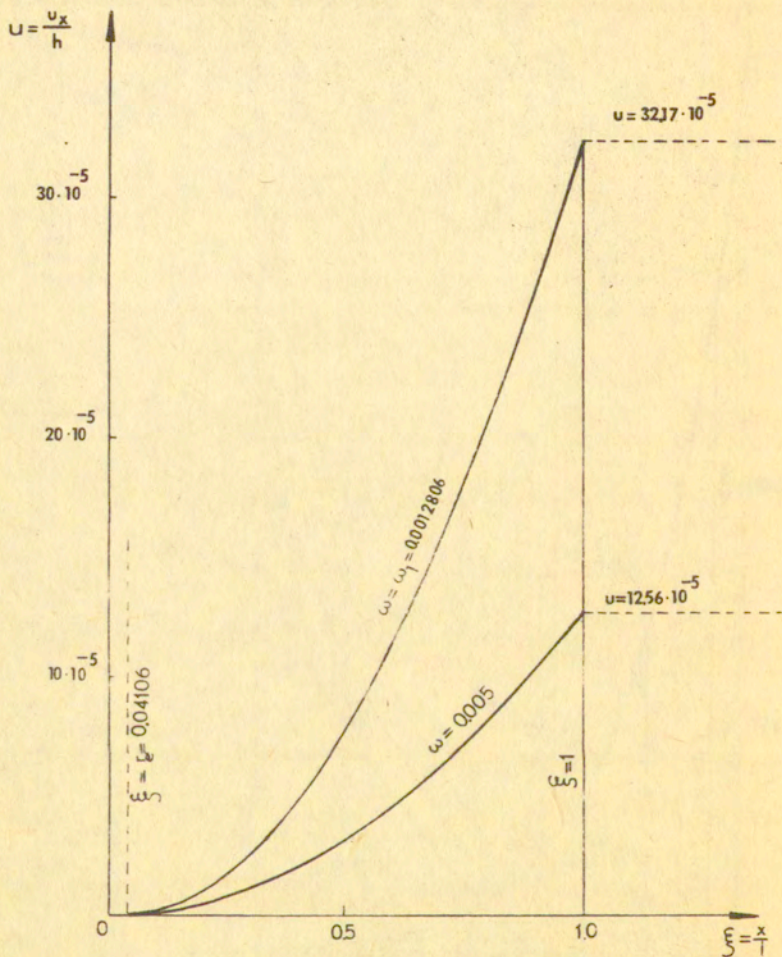
Nys. 18. $S_x = S_x(\xi, \omega)$ dla $\omega = \frac{v}{h} = \text{const}$,
 dla pascma $\alpha = \frac{1}{h} = 2.5$



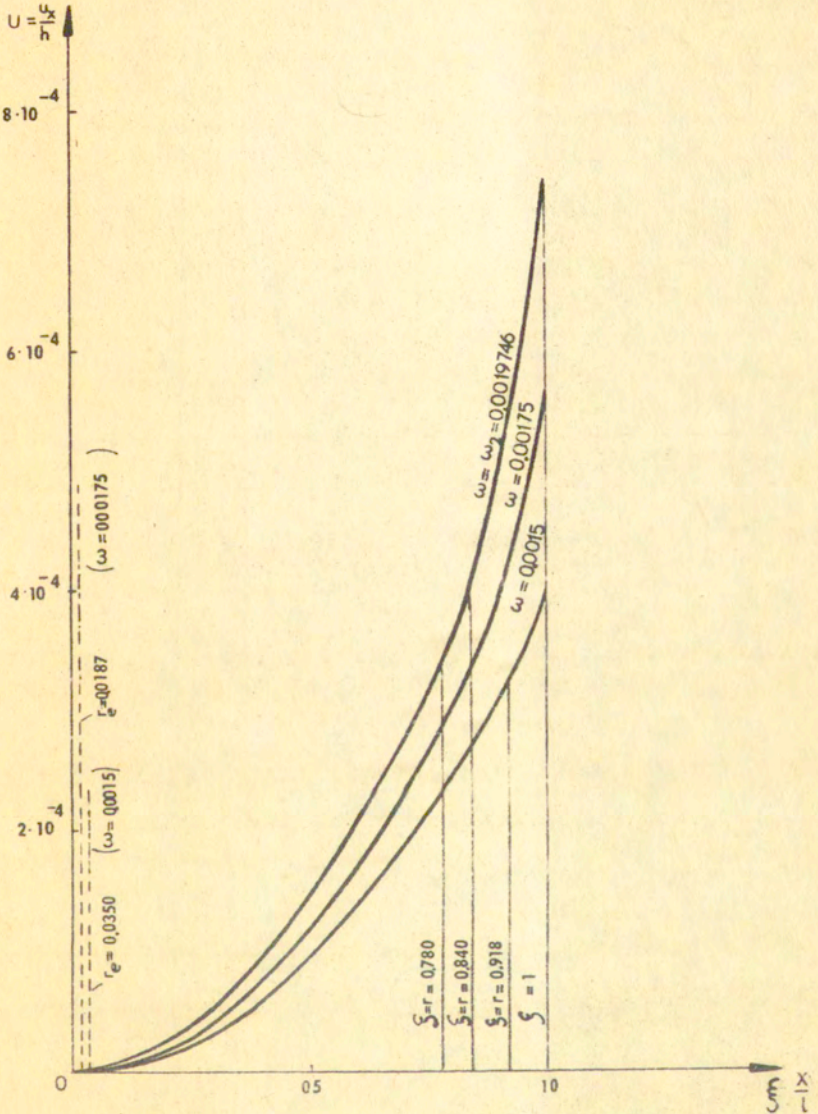
rys. 19 $S_z = S_z(\xi, \omega)$, dla $\omega = \frac{M}{h} = \text{const}$
 i dla $\alpha = \frac{1}{h} = 1$.



rys. 20 $S_z = S_z(\xi, \omega)$ dla $\omega = \frac{v}{h} = \text{const}$
 dla pasma $\alpha = \frac{1}{h} = 2.5$

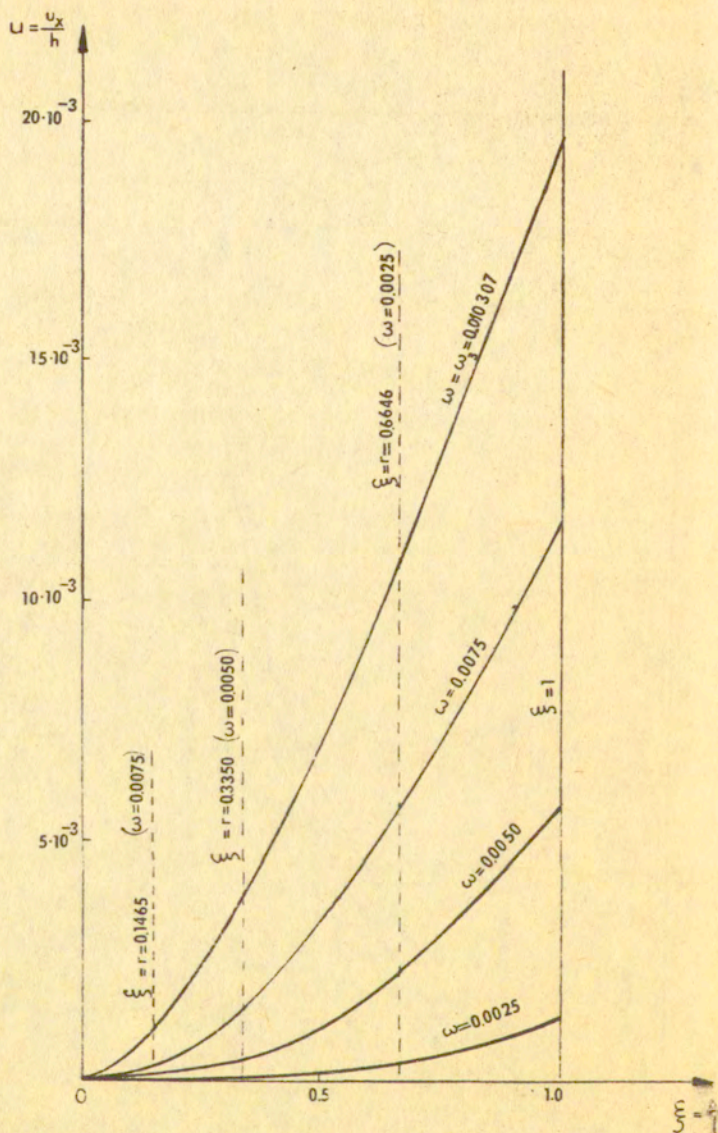


Rys. 21 a. Przeszyczenia $u = \frac{u_x}{h} = u(\xi, \omega)$
 dla $\alpha = \frac{1}{h} = 1$ / faza I $0 < \omega \leq \omega_1$

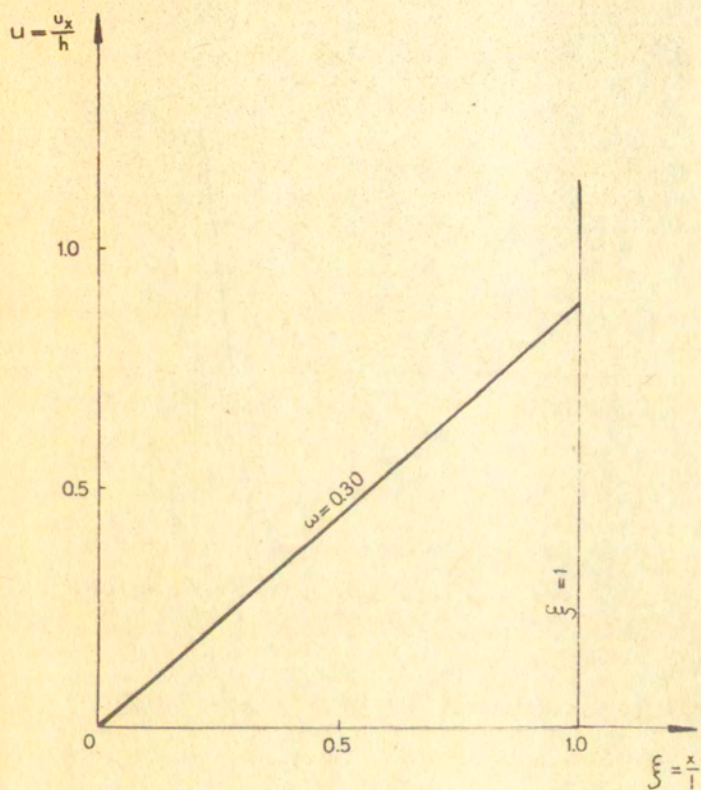


Rys. 21 b Przemieszczenia $u = \frac{u}{h} = U(\xi, \omega)$

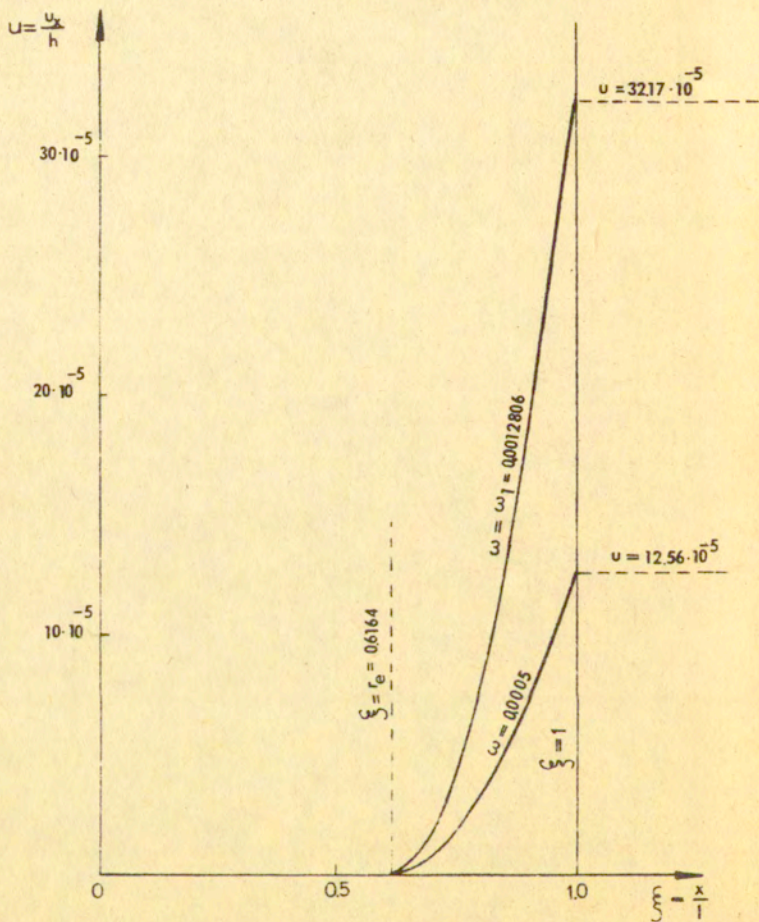
dla $\alpha = \frac{1}{h} = 1$ / faza II $\omega_1 < \omega \leq \omega_2$



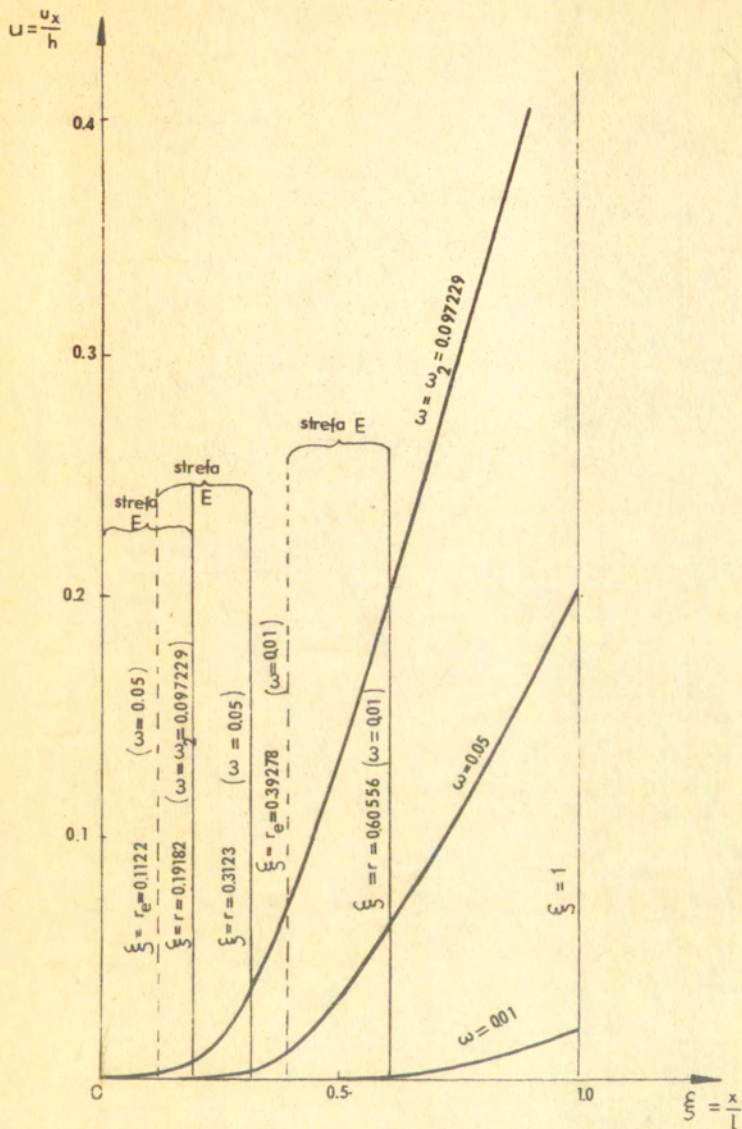
Rys. 21 c Przemieszczenia $U = \frac{u_x}{h} = u(\xi, \omega)$
 dla $\alpha = \frac{1}{h} = 1$ / faza III $\omega_2 < \omega \leq \omega_3$ /



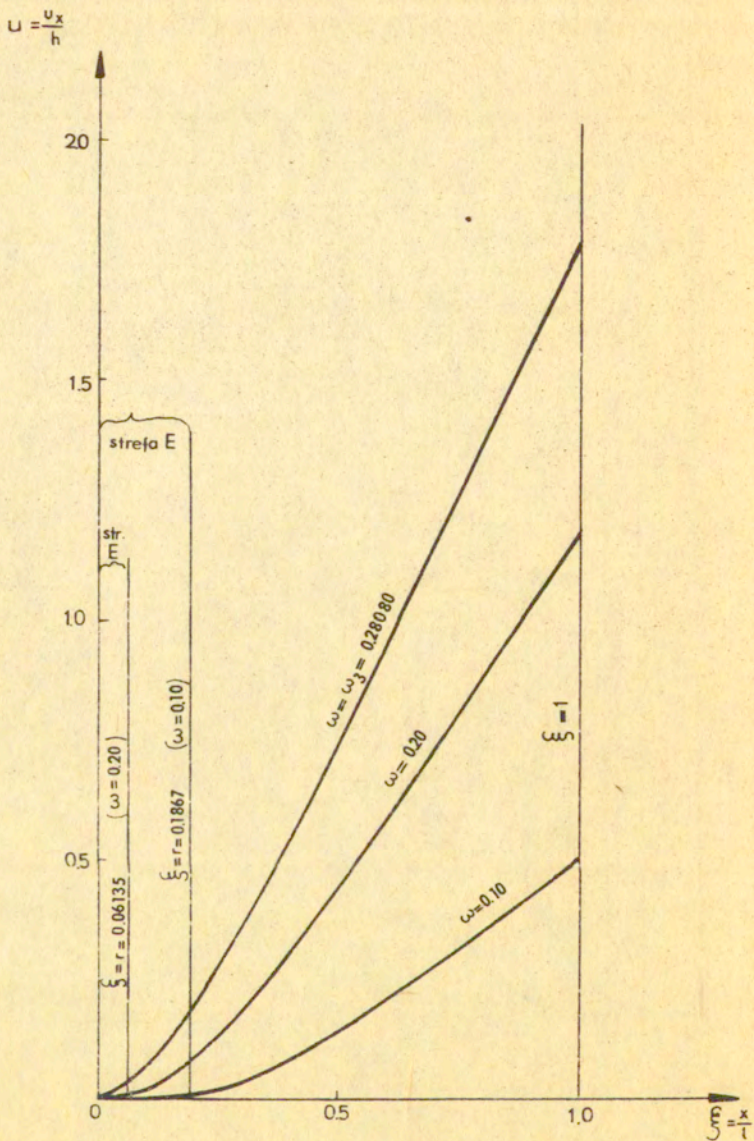
Rys. 21 d Przeszyczenia $u = \frac{u_x}{h} = u(\xi, \omega)$
dla $d = \frac{l}{h} = 1$ / faza IV $\omega_3 \leq \omega < 1$



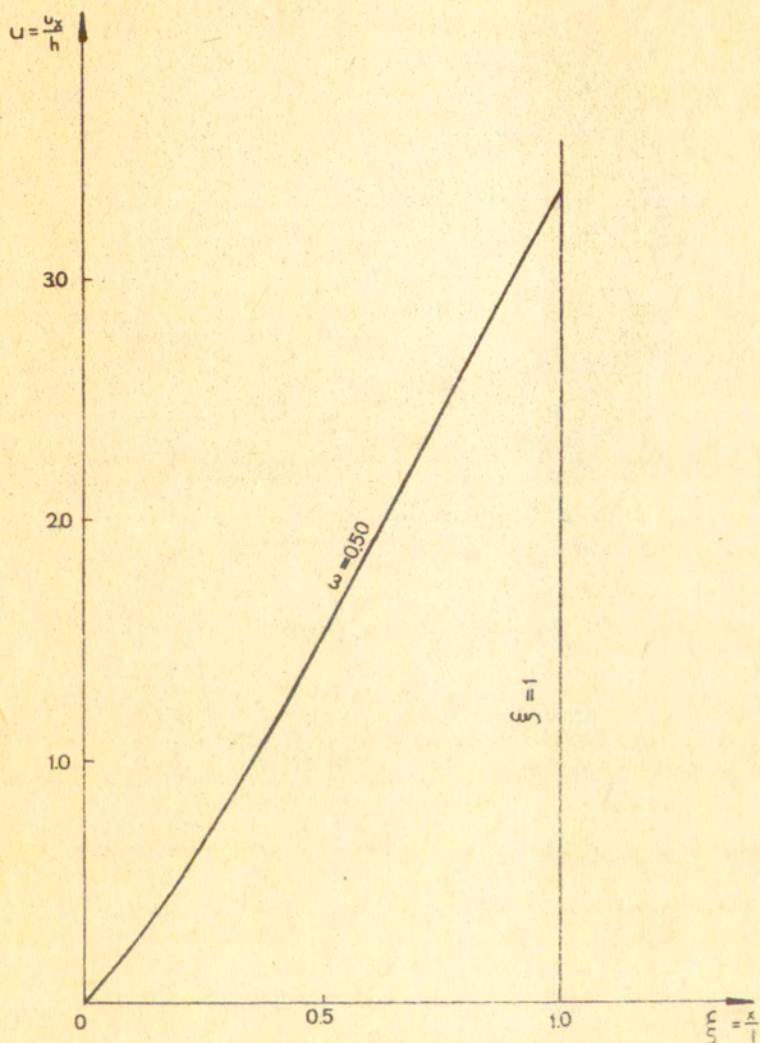
rys. 22 a Przemieszczenia $u = \frac{u_k}{h} = u(\xi, \omega)$
 dla $\alpha = \frac{1}{h} = 2.5$ / faza I $0 < \omega \leq \omega_1$



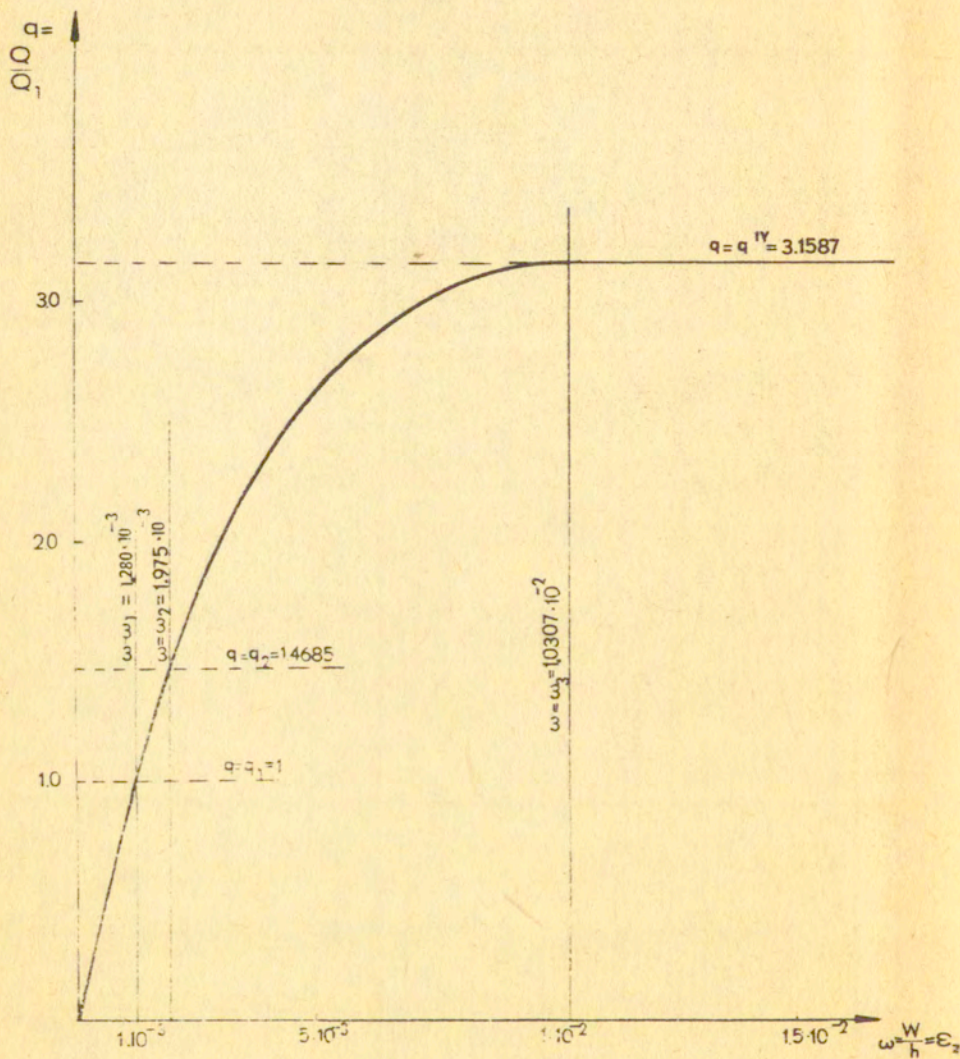
Rys. 22 b Przenieszczenia $u = \frac{u_x}{h} = u(\xi, \omega)$
 dla $\alpha = \frac{1}{h} = 2.5$ /faza II $\omega_1 < \omega \leq \omega_2$ /



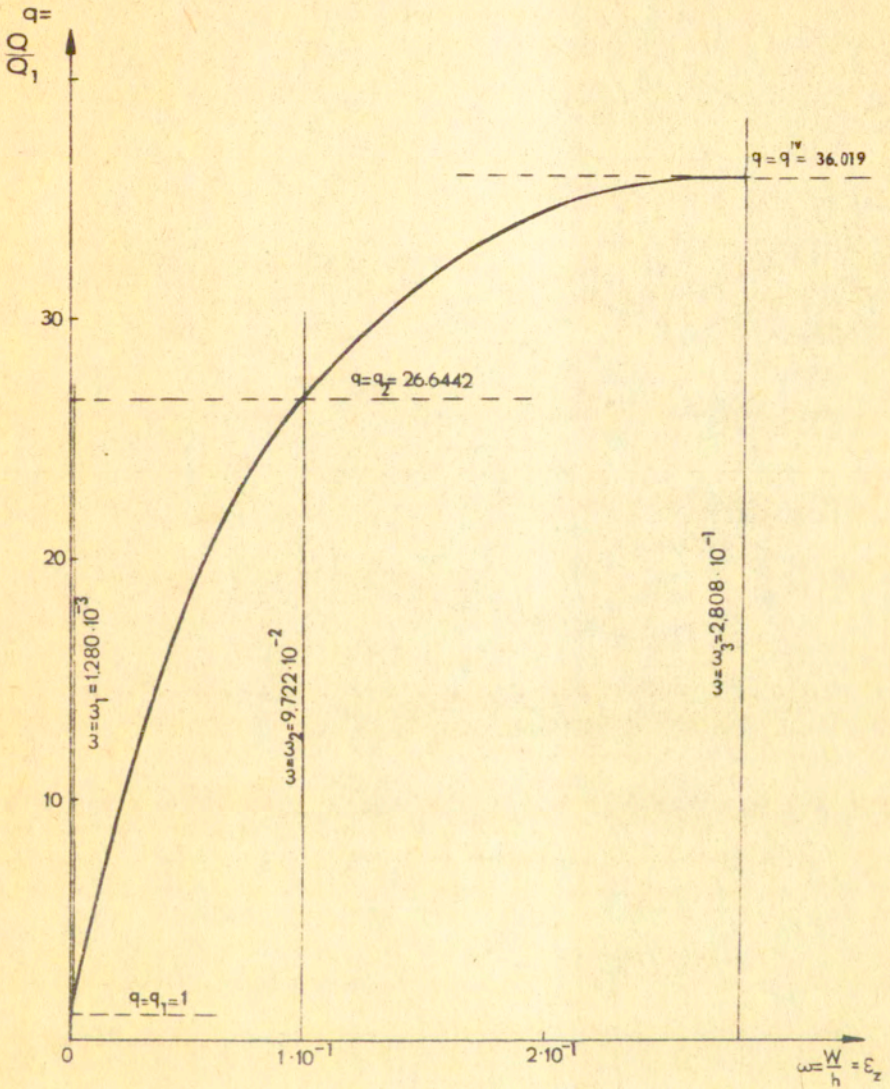
rys. 22 c Przemieszczenie $u = \frac{u_x}{h} = u(\xi, \omega)$
 dla $\alpha = \frac{l}{h} = 2.5$ /faza III $\omega_2 < \omega \leq \omega_3$ /



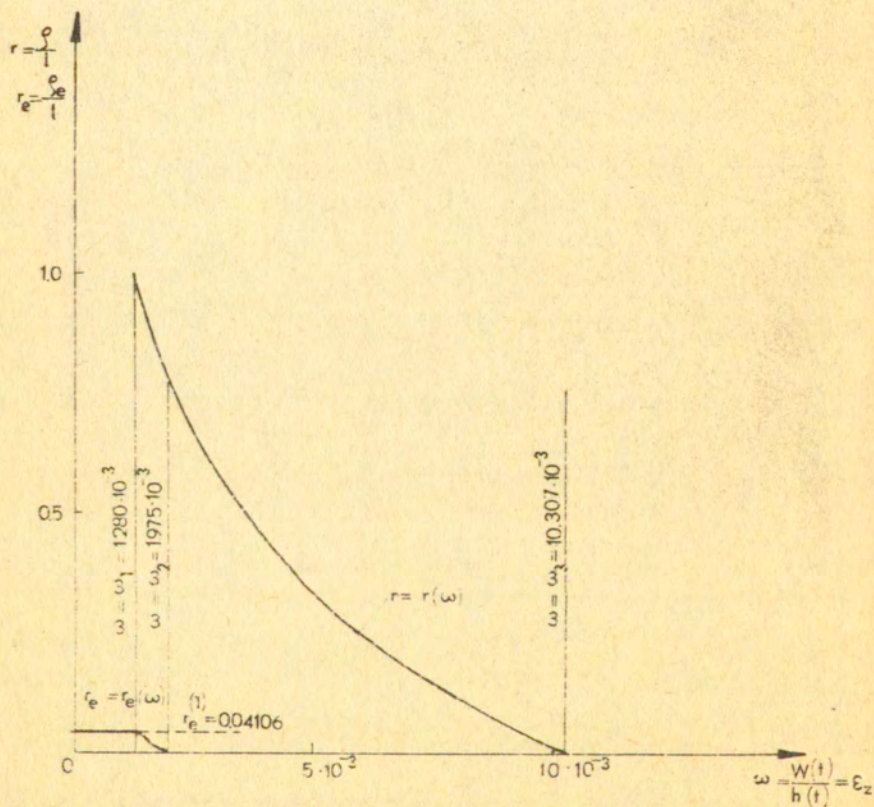
Rys.22 d. Przenieszczenie $u = \frac{u_x}{h} = u(\xi, \omega)$
dla $\alpha = \frac{1}{h} = 2.5$ /faza IV $\omega_3 \leq \omega < 1/$



Rys. 23 Położenie pasma $q = q(\omega)$ dla $d = \frac{1}{h} = 1$



Rys. 24. Nożność pasma $q = q(\omega)$ dla $\alpha = \frac{1}{h} = 2.5$



Rys. 25 Progresja granic stref $r_e = r_e(\omega)$ i $r = r(\omega)$ dla pasma $\alpha = \frac{l(t)}{h(t)} \approx \frac{l_0}{H} = 1$

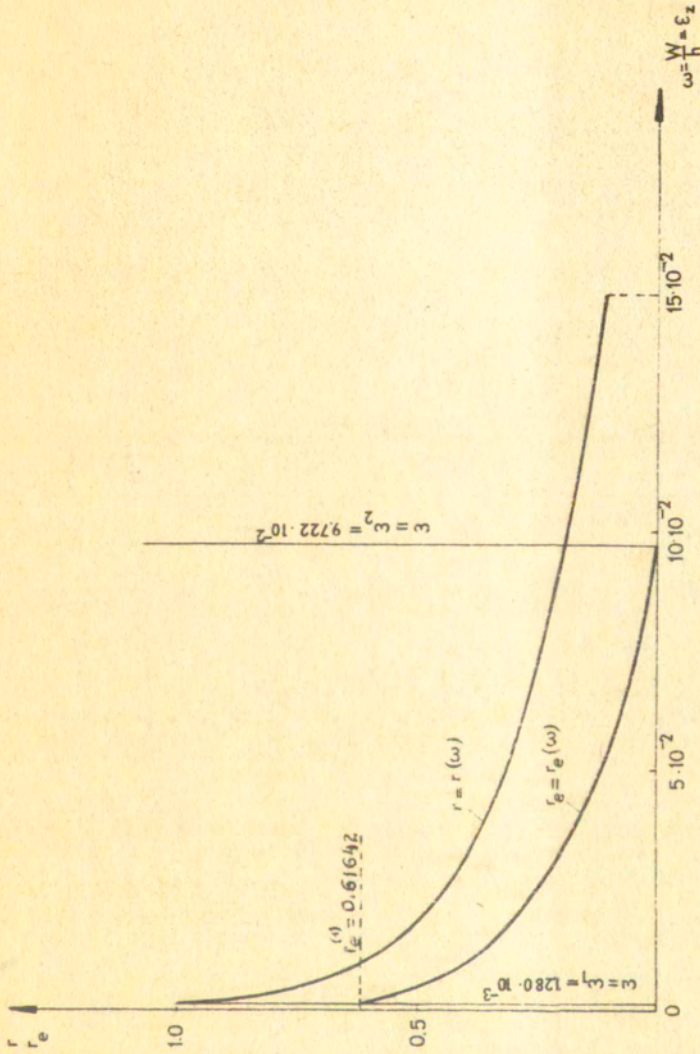


Fig. 26 a. Frekwencja granic nielinyjnych $r_e = r_e(\omega)$
 $r = r(\omega)$ dla pasma $d = \frac{1}{h} \approx \frac{10}{h} = 2.5$

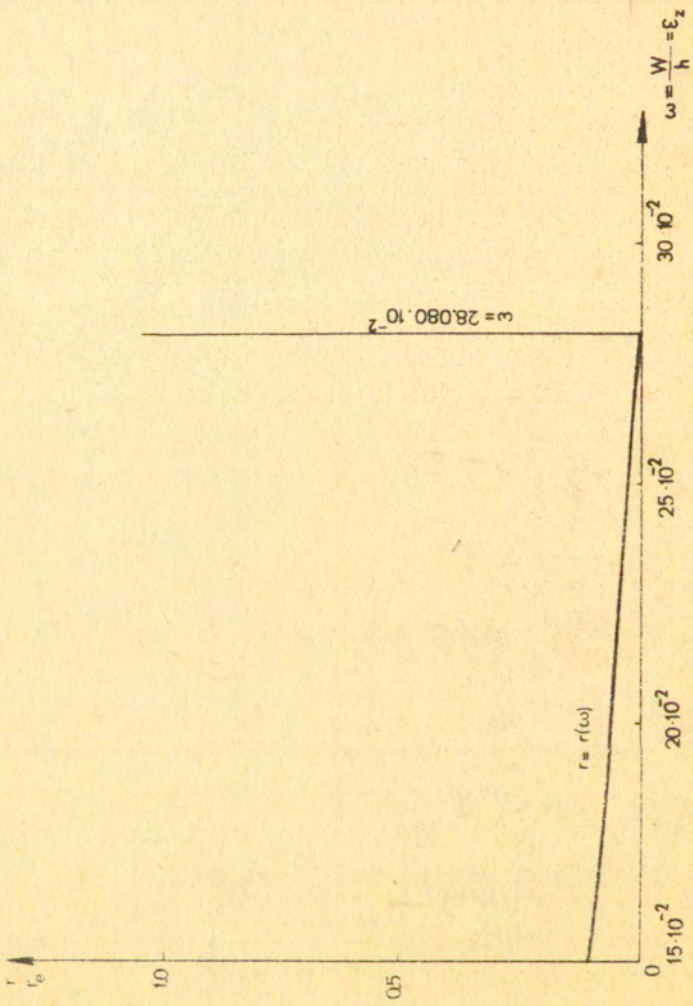
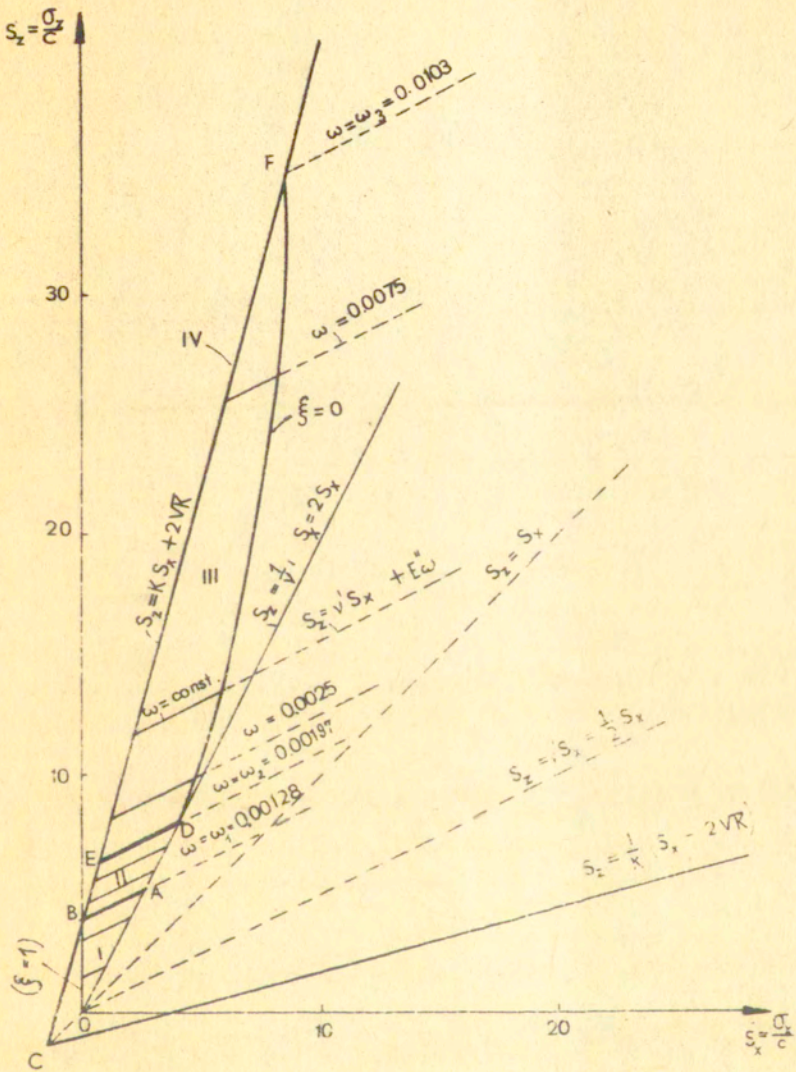
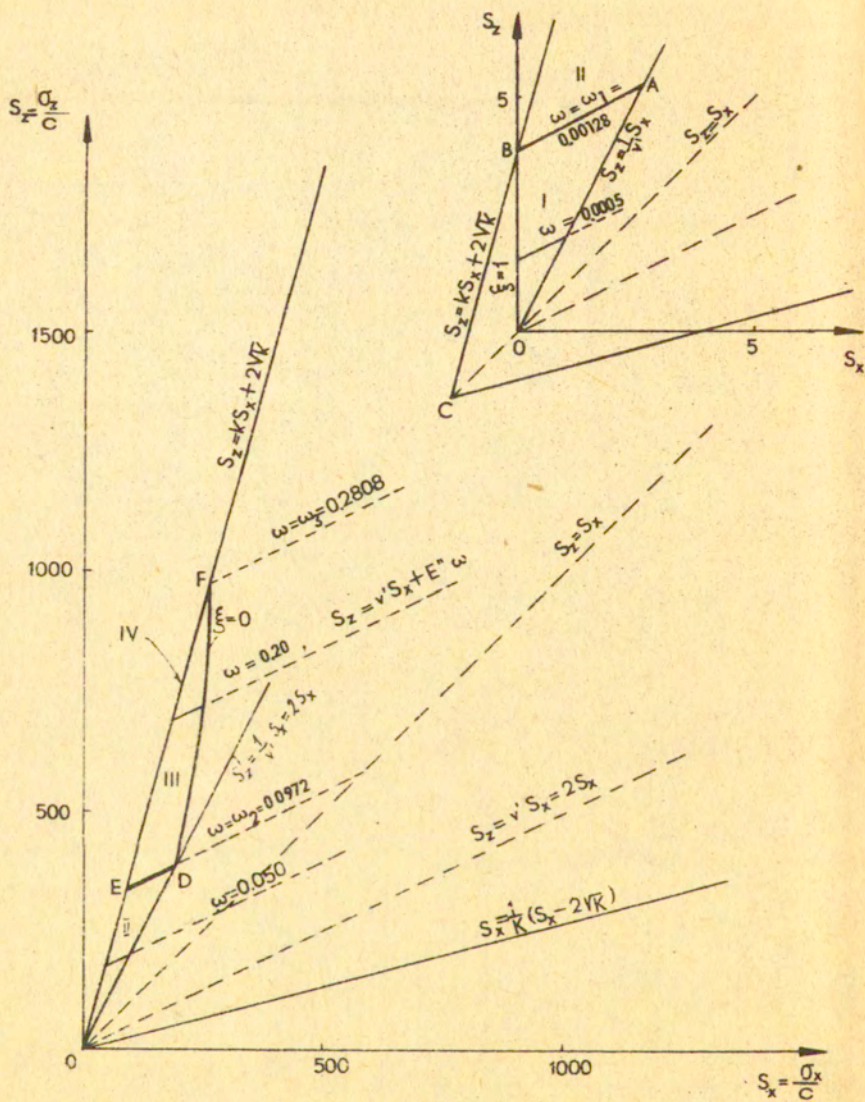


Fig. 26 b. Progresja gradie niydzantrefonych $r_e = r(\omega)$,
 $r = r(\omega)$ dla param $d = \frac{1}{h} \cdot c \frac{10}{\pi} = 2.5$



Rys. 27 Reprezentacja rozwiązania w płaszczyźnie naprężeń (S_x, S_z) dla pasma $\alpha = \frac{1}{h} = 1$



Rys. 25 Reprezentacja rozwiązania w płaszczyźnie naprężeń S_x , S_z dla pasma $\alpha = \frac{1}{h} = 2.5$

9. Uwagi końcowe

Upraszczone założenia dotyczące kinematyki cząstek oraz założenie małych odkształceń w procesie ściskania pasma pozwoliły scałkować różniczkowe związki konstytutywne typu prędkościowego, wprowadzone w obszarach deformacji plastycznej pasma, do postaci skończonych zależności między odkształceniami i naprężeniami, a więc do związków konstytutywnych stosowanych w deformacyjnych teoriach materiałów sprężysto-plastycznych. Otrzymane związki konstytutywne w postaci /3.23-3.24/ oraz /3.42-3.43/, łącznie z warunkiem plastyczności /3.26/ i przybliżonym równaniem równowagi /3.25/, doprowadziły do rozwiązań w postaci skończonych wyrażeń analitycznych, będących funkcjami jednej zmiennej przestrzennej x i parametru $W(t)$, określającego ewolucję procesu lub tylko funkcjami parametru $W(t)$ dla obszarów deformacji pasma z jednoosiowymi stanami odkształcenia. Wyjątkiem jest tu tylko przemieszczenie u_z , które jest z góry założoną funkcją poziomu z i parametru $W(t)$ w paśmie, jednakową dla wszystkich stref i faz deformacji w całym procesie ściskania pasma.

Założony układ stref deformacji sprężystych i sprężysto-plastycznych w dwuosiowych i jednoosiowych płaskich stanach odkształcenia i progresywna zmiana tego układu stref w procesie ściskania pasma stosuje się do pasem dostatecznie cienkich o wymiarach spełniających nierówność $\frac{t}{h} \gg \frac{1}{2\mu\nu} \ln \frac{1}{1-\nu}$.

Wyprowadzone w pracy wzory rozwiązania analitycznego umożliwiają prześledzenie ewolucji przestrzennych rozkładów naprężenia i przemieszczenia, zmiany siły nośnej pasma, progresji

granic i zmian układu stref deformacji w poszczególnych spośród czterech faz procesu ściskania pasma, począwszy od fazy sprężystej aż do końcowej fazy plastycznej, w której cały materiał pasma przechodzi w graniczny stan plastyczny Coulomba.

Wyniki rozwiązania i zmiany poszczególnych wielkości mechanicznych /w wartościach bezwymiarowych/ w kolejnych fazach procesu ściskania pasma zobrazowano na wykresach w rozdziale 8, otrzymanych dla jednego ustalonego zespołu wartości stałych materiałowych i dwu różnych, ale stałych w procesie, wymiarów pasma $\frac{l}{h} = \text{const.} = 1$ i $\frac{l}{h} = \text{const.} = 2,5$, por. rys. 17-28.

Z wykonanych obliczeń i przedstawionych wykresów wynika, że założenie małych odkształceń i pominięcie zmian konfiguracji powierzchni brzegowych jest uzasadnione tylko dla fazy I procesu, natomiast dla dalszych faz procesu ściskania pasma założenia te są dopuszczalne co najwyżej dla II i III fazy tj. przy częściowym uplastycznieniu pasma i tylko dla pasma dostatecznie krępego ($\frac{l}{h} \approx 1$). Dla fazy IV procesu, tj. fazy odpowiadającej całkowitemu uplastycznieniu pasma, założenie małych odkształceń i pominięcie zmian konfiguracji powierzchni brzegowych pasma jest nieusprawiedliwioną. Ścisłejsza i poprawna analiza problemu ściskania pasma z materiału sprężysto-idealnie plastycznego wymaga stosowania równań konstytutywnych typu prędkościowego, właściwych dla teorii płynięcia plastycznego. Założenie małych odkształceń i pominięcie zmian konfiguracji powierzchni brzegowych w paśmie i w konsekwencji posługiwanie się równaniami konstytutywnymi stosowanymi w deformacyjnych teoriach materiałów sprężysto-plastycznych może być uzasadnione dla pasma z materiałów sprężysto-plastycznych

z osłabieniem, przy którym nośność pasma spada w końcowym etapie procesu do zera, por. pracę [16] .

Przedstawione rozwiązanie uproszczone daje przybliżoną jakościową reprezentację ewolucji stanów mechanicznych materiału pasma w procesie jego ściskania. Rzeczywisty obraz ewolucji stanów mechanicznych materiału pasma, uzyskiwany z badań doświadczalnych może wykazać znaczne różnice w wartościach liczbowych jak również pewne różnice jakościowe w porównaniu z rezultatami wynikającymi z przedstawionego rozwiązania uproszczonego.

Literatura

1. W. NOWACKI, Teoria sprężystości, PWN, Warszawa 1970, str. 298-300.
2. I.N. SNEDDON, Fourier transform a, tłumaczenie rosyjskie, Preobrazowanija Furje, Izd. Inostrannoij Literatury, Moskwa, 1955, str. 463-467.
3. L. PRANDTL, Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht, Zeitschr. angew. Math. Mech., vol. 3, Nr 6, 1923, 401-406.
4. W.W. SOKOŁOWSKIJ, Teorija plastyczności, Gostechizdat, 1950, tłumaczenie polskie, Teoria plastyczności, PWN, Warszawa 1957, str. 319-324.
5. R. HILL, The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford 1950.
6. R. HILL, Matematyčeskaja teorija plastyczności, Gos. Izd. Tech.-Teor. Lit., Moskwa, 1956, 260-271.
7. J. MANDEL, J. SALANÇON, Force portante d'un sol sur une assise rigide, Géotechnique, vol. 22, 1972, 79-93.
8. W. SZCZEPIŃSKI, Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich, PWN, Warszawa 1974, 117-121.
9. I.F. COLLINS, The upper bound theorem for rigid/plastic solids generalised to include Coulomb friction, J. Mech. Phys. Solids, 17 /1969/, 323-338.
10. E.A. MARSHALL, The compression of a slab of ideal soil between rough plates, Acta Mechanica, 3/1967/, 82-92.
11. L.M. KACZANOW, Osnovy teoriji plastyczności, Izd. "Nauka", Moskwa 1969, 197-205.
12. O. HOFFMAN, G. SACHS, Introduction to the theory of plasticity for engineers, Mc Graw-Hill Book Company 1953, rosyjskie tłumaczenie, Wwiedienije w teoriju plastyczności dla inżynierów, Gos. N-T. Izd. Maszstroit. Lit., Moskwa 1957, 142-144, 244-248.
13. R. IZBICKI, Z. MRÓZ, Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał, PWN, Warszawa-Poznań 1976, 181-207.
14. A.M. ILSZTEJN, I.M. LIBERMAN, Metody rozczota celikow i potocznych kamer rudnych miastorożdzenij, Nauka, Moskwa 1964.

15. J. ZAWADA, J. SUPEL, Przybliżona metoda wyznaczenia parametrów wytrzymałościowych skał, Rozpr.Inż. 22/1974, 43-54.
16. Z. MRÓZ, B. ZADROGA, Analiza nośności ściskanego pasma z materiału sprężysto-plastycznego z osłabieniem, Prace IPPT, nr 8/1980.
17. A. DRESCHER, T. HUECKEL, Z. MRÓZ, Modele matematyczne deformacji materiałów skalnych ulegających tężeniu oraz podstawy ich identyfikacji doświadczalnej, Cz.III, Zakład Dośw. Tech.pan. przy IPPT - PAN Warszawa, 1979.

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	3
2. Założenia	6
2.1. Założenia wyjściowe	6
2.2. Model mechaniczny materiału pasma	8
2.3. Równania równowagi dla naprężeń i ich pochodnych czasowych	11
2.4. Uproszczony mechanizm deformacji pasma	12
2.5. Warunki brzegowe i początkowe procesu	17
2.6. Układy stref i fazy procesu deformacji pasma	18
2.7. Warunki zgodności deformacji na granicach stref	23
3. Wyprowadzenie zależności podstawowych	24
3.1. Strefa edometryczna sprężysta E_d	25
3.2. Rozwiązanie ogólne w strefie sprężystej E	25
3.3. Rozwiązanie ogólne w strefie EP sprężysto-plastycznej deformacji płaskiej	28
3.4. Rozwiązanie w strefie sprężysto-plastycznej deformacji edometrycznej	34
4. Rozwiązanie szczególne spełniające warunki brzegowe, początkowe i zgodności	38
4.1. Faza I - początkowa	39
4.2. Faza II procesu	42
4.3. Faza III procesu	48
4.3.1. Faza III, przypadek $k \geq \frac{1}{\nu'}$	48
4.3.2. Faza III, przypadek $k < \frac{1}{\nu'}$	53
4.4. Faza IV procesu ściskania pasma	58

5. Siła nośna pasma	61
6. Interpretacja graficzna wyników rozwiązań w płaszczy- źnie naprężeń σ_x, σ_z	67
7. Bezwymiarowa postać rozwiązania	74
7.1. Faza I /początkowa/	75
7.2. Faza II	77
7.3.1. Faza III, przypadek $k \geq \frac{1}{\nu'}$	81
7.3.2. Faza III, przypadek $k < \frac{1}{\nu'}$	84
7.4. Faza IV	86
7.5. Bezwymiarowe wielkości siły nośnej w poszczegól- nych fazach procesu	89
8. Ilustracja rozwiązania na przykładach liczbowych	91
9. Uwagi końcowe	113
10. Literatura	116