

Dynamique des composites élastiques périodiques

J. L. AURIAULT et G. BONNET (GRENOBLE)

ON ÉTUDIE le comportement macroscopique équivalent de composites élastiques sous sollicitation dynamique, en présence ou non de fortes discontinuités des propriétés élastiques des constituants. On suppose que la structure fine (microscopique) est périodique. Pour obtenir les paramètres effectifs on utilise la méthode de l'homogénéisation.

Zbadano makroskopowe zachowanie się kompozytów sprężystych poddanych działaniu obciążeń dynamicznych. Uwzględniono przypadek silnych nieciągłości własności sprężystych składników kompozytu. Przyjęto, że struktura mikroskopowa jest periodyczna. Dla otrzymania wielkości efektywnych zastosowano metodę homogenizacji.

Исследовано макроскопическое поведение упругого композита под динамической нагрузкой. Учен случай сильных разрывов упругих свойств компонентов композита. Принято, что микроскопическая структура является периодической. Для получения эффективных параметров применен метод гомогенизации.

1. Introduction

NOUS PROPOSONS ici d'étudier le comportement macroscopique équivalent de composites élastiques sous sollicitation dynamique, à partir de la microstructure $c-a-d$ de la description à l'échelle des hétérogénéités. La méthode utilisée — l'homogénéisation — est une méthode asymptotique d'échelles multiples. Les deux échelles, macroscopique et microscopique, sont des échelles caractérisant les variables spatiales: x est la variable spatiale macroscopique et $y = x/\varepsilon$ la variable spatiale microscopique. Le paramètre ε , petit et positif, caractérise le rapport des deux échelles. Le comportement macroscopique équivalent est le comportement asymptotique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous étudierons des composites dont la structure fine (microscopique) est périodique. Dans ce cas la méthode d'homogénéisation [1, 2] conduit à une déduction rigoureuse de la description macroscopique à partir de la description microscopique. En particulier les paramètres effectifs ou coefficients homogénéisés sont calculables et les grandeurs à l'échelle microscopique sont déterminées à partir des grandeurs à l'échelle macroscopique.

Quand le seul petit paramètre ε reliant les échelles intervient la méthode conduit à une description macroscopique classique. On se reportera à [3-4-5] ou à [6] pour le cas d'un poreux élastique pour l'étude en statique, respectivement à [7-8] et [9] pour l'étude sous sollicitation dynamique. L'introduction de plusieurs petits paramètres, liée à des situations physiques particulières conduit à des descriptions macroscopiques non classiques comme par exemple en [10] et [11] où est présentée la statique des composites élastiques soumis à des forces de volume élevées ou possédant des caractéristiques élastiques fortement discontinues.

L'étude présentée ici concerne les composites élastiques sous sollicitations dynamiques en présence ou non de fortes discontinuités des propriétés élastiques des constituants.

Dans la deuxième partie, nous rappelons la méthode qui est illustrée par le cas classique. La troisième partie aborde l'étude des fortes discontinuités du tenseur élastique, mettant en évidence des fréquences d'arrêt. Une application des résultats précédents est ensuite abordée dans la quatrième partie, dans le cas simple d'un milieu stratifié où une solution analytique est possible. Enfin la cinquième partie traite d'inclusions incompressibles et très déviables. Ce cas met en évidence le rôle primordial de la connexité des inclusions dans la structure de la description macroscopique.

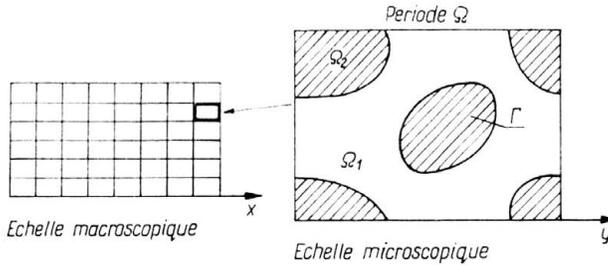


FIG. 1.

Pour plus de simplicité nous nous limitons à l'étude des composites binaires. On trouvera sur la figure 1 une schématisation de la période Ω dans le cas particulier d'un problème à deux dimensions. Les deux composants occupent respectivement les domaines Ω_1 et Ω_2 , de frontière commune Γ . La structure sera supposée strictement périodique: par exemple les coefficients élastiques \mathbf{a} sont fonctions de \mathbf{y} seul, Ω — périodiques. La quasi-périodicité (\mathbf{a} fonctions de \mathbf{y} et \mathbf{x} , Ω — périodiques en \mathbf{y}), s'introduit sans difficulté, \mathbf{x} jouant alors le rôle de paramètre au cours des calculs. Enfin nous n'aborderons pas le problème de la détermination des conditions aux frontières macroscopiques.

2. Cas classique

Le cas classique est celui où les coefficients élastiques et les masses volumiques des deux matériaux sont du même ordre de grandeur. Les équations locales monochromatiques pour un tel matériau s'écrivent:

$$(2.1) \quad \nabla \sigma = -\rho \omega^2 \mathbf{u},$$

$$(2.2) \quad \sigma = \mathbf{a} \mathbf{e}(\mathbf{u})$$

où le tenseur élastique $\mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{a}_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \mathbf{a}_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$ et $\rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \rho_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$ sont fonctions périodiques

de \mathbf{y} ; et \mathbf{e} est la déformation: $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$.

Les conditions aux limites correspondantes sont:

$$(2.3) \quad [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}]_r = 0,$$

$$(2.4) \quad [\mathbf{u}]_r = 0$$

où $[\phi]_r$ est la discontinuité de ϕ sur Γ et \mathbf{N} une normale unitaire à Γ . De plus le tenseur \mathbf{a} vérifie les symétries $a_{ijkl} = a_{ijlk} = a_{klij}$ et la condition d'ellipticité $a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \geq \gamma e_{ij}e_{ij}$, $\gamma > 0$.

La méthode d'homogénéisation consiste à chercher le déplacement sous la forme du développement asymptotique suivant:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$$

où les $\mathbf{u}^{(i)}$ sont Ω -périodiques en \mathbf{y} (cette dernière hypothèse implique que la longueur d'onde est très supérieure à la taille de la période: $|a|/\rho\omega^2 l^2 \gg 1$). Portant ce développement dans le système (2.1)–(2.4), l'ordre le plus bas en ε c-à-d (2.1) à ε^{-2} (2.2) à ε^{-1} (2.3) à ε^{-1} et (2.4) à ε^0 , conduit au premier problème aux limites en variable \mathbf{y} sur Ω :

$$(2.5) \quad \nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(0)})) = 0,$$

$$(2.6) \quad [\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(0)}) \cdot \mathbf{N}]_r = 0,$$

$$(2.7) \quad [\mathbf{u}^{(0)}]_r = 0, \quad \mathbf{u}^{(0)}, \Omega \text{ — périodique.}$$

L'indice \mathbf{y} (respectivement \mathbf{x}) sous un opérateur indique que celui-ci est à formuler en variable \mathbf{y} (respectivement \mathbf{x}). Il est utile d'introduire une formulation variationnelle correspondante. Soit E l'espace des vecteurs \mathbf{w} , Ω — périodiques de valeur moyenne nulle sur Ω :

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} \mathbf{w} d\Omega = 0.$$

et le produit scalaire:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_E = \int_{\Omega_s} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{w}) d\Omega.$$

Multipliant (2.5) par $\mathbf{w} \in E$ et intégrant sur Ω , il vient avec (2.6)

$$0 = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial y_j} w_i d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^{(0)}) N_j w_i dS - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^{(0)}) \frac{\partial w_i}{\partial y_j} d\Omega.$$

L'intégrale sur $\partial\Omega$ s'annule par périodicité et la symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$ conduit à:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial y_j} = \sigma_{ij} e_{ij}(\mathbf{w}).$$

La formulation variationnelle s'écrit alors:

$$(2.9) \quad \forall \mathbf{w} \in E, \quad \int_{\Omega} \mathbf{a} \mathbf{e}(\mathbf{u}^{(0)}) \mathbf{e}(\mathbf{w}) d\Omega = 0.$$

La condition (2.8) est étrangère au problème, juste introduite pour permettre l'existence d'une norme associée au produit scalaire: la solution de (2.9) est celle du système (2.5)–(2.7) à une fonction additive arbitraire près de \mathbf{x} .

La solution de (2.9) étant $\mathbf{u}^{(0)} = 0$, celle de (2.5)–(2.7) s'écrit: $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})$.

À l'ordre suivant nous obtenons le deuxième problème aux limites en y pour $\mathbf{u}^{(1)}$:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \nabla_y [\mathbf{a}(\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}))] &= 0, \\ [\mathbf{a}(\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}))\mathbf{N}]_r &= 0, \\ [\mathbf{u}^{(1)}]_r &= 0, \quad \mathbf{u}^{(1)} \Omega - \text{périodique.} \end{aligned}$$

La formulation variationnelle correspondante s'obtient comme plus haut et s'écrit:

$$(2.11) \quad \forall \mathbf{w} \in E, \quad \int_{\Omega} \mathbf{a} \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{e}_y(\mathbf{w}) d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{a} \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) \mathbf{e}_y(\mathbf{w}) d\Omega.$$

Elle assure l'existence et l'unicité de solution recherchée, à une fonction de \mathbf{x} arbitraire près et la linéarité du problème permet de représenter $\mathbf{u}^{(1)}$ sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) + \tilde{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{x}), \\ u_i^{(1)} &= \xi_{ikl} e_{x_{kl}}(\mathbf{u}^{(0)}) + \tilde{u}_i^{(1)}(x), \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\xi}$, tenseur du troisième ordre, a ses composantes ξ_{ikl} déterminées par les solutions particulières de (2.11) correspondant à $e_{x_{pq}} = \delta_{pk} \delta_{ql}$.

L'ordre suivant détermine $\mathbf{u}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \nabla_y (\mathbf{a}(\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{(2)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(1)}))) + \nabla_x (\mathbf{a}(\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}))) &= -\rho \omega^2 \mathbf{u}^{(0)}, \\ [\mathbf{a}(\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{(2)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(1)}))\mathbf{N}]_r &= 0, \\ [\mathbf{u}^{(2)}]_r &= 0, \quad \mathbf{u}^{(2)} \Omega - \text{périodique.} \end{aligned}$$

Contrairement aux deux problèmes aux limites précédents celui-ci n'admet pas nécessairement de solution. La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution est que l'intégrale sur Ω du 1er membre soit égale à l'intégrale sur Ω du second membre. Introduisant $\langle \cdot \rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \cdot d\Omega$, il vient, compte tenu de la périodicité:

$$\nabla_x \langle \mathbf{a}(\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) \rangle = -\langle \rho \rangle \omega^2 \mathbf{u}^{(0)}.$$

Soit

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \nabla_x \langle \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \rangle &= -\langle \rho \rangle \omega^2 \mathbf{u}^{(0)}, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \rangle &= \mathbf{c} \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}), \end{aligned}$$

où

$$c_{ijkh} = \langle a_{ijlm} e_{y_{lm}}(\boldsymbol{\xi}_{kh}) + a_{ijkh} \rangle.$$

L'équation de compatibilité (2.12) représente la description macroscopique du composite. On montre en utilisant les symétries de la relation (2.11) et les propriétés de \mathbf{a} que \mathbf{c} est un tenseur élastique. Ainsi le matériau macroscopique équivalent est un continu élastique dont les paramètres effectifs se déduisent par opération de moyenne de la solution du deuxième problème aux limites. Inversement la donnée des grandeurs macroscopiques, par exemple la déformation $\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})$ conduit à la description locale. Les déformation et contrainte locales s'écrivent:

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= e_{x_{ij}}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{y_{ij}}(\boldsymbol{\xi}_{lm} e_{x_{lm}}(\mathbf{u}^{(0)})), \\ \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (a_{ijlm} e_{y_{lm}}(\boldsymbol{\xi}_{kh}) + a_{ijkh}) e_{x_{kh}}(\mathbf{u}^{(0)}). \end{aligned}$$

Le système (2.12) a une structure classique, identique à celle de (2.1). Le résultat obtenu est valable tant que la longueur d'onde reste très supérieure à la dimension de la période.

Remarquons enfin que la contrainte macroscopique est définie par une opération de moyenne de volumes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \rangle.$$

Le principe d'Euler et Cauchy n'est toutefois pas violé puisque (2.10) exprimant que $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ est de divergence nulle, on peut montrer [6, 9] que $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \rangle$ est aussi une moyenne de surface.

3. Fortes discontinuités du tenseur élastique

Nous considérons ici un composite binaire où les masses volumiques sont constantes (indépendantes de \mathbf{y}) et la rigidité du milieu 2 est très petite comparée à celle du milieu 1, toutes autres caractéristiques restant inchangées par ailleurs. Le cas d'intérêt est celui où:

$$|\mathbf{a}_2|/|\mathbf{a}_1| = o(\varepsilon^2),$$

si bien que posant $\mathbf{a}_2 = \varepsilon^2 \mathbf{a}'_2$, $|\mathbf{a}'_2| = o(|\mathbf{a}_1|)$, les équations locales normalisées s'écrivent maintenant:

$$(3.1) \quad \nabla(\mathbf{a}_1 \mathbf{e}(\mathbf{u}_1)) = -\rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_1, \quad \text{dans } \Omega_1,$$

$$(3.2) \quad \nabla(\varepsilon^2 \mathbf{a}'_2 \mathbf{e}(\mathbf{u}_2)) = -\rho_2 \omega^2 \mathbf{u}_2, \quad \text{dans } \Omega_2,$$

avec les conditions aux limites classiques sur Γ :

$$(3.3) \quad \mathbf{a}_1 \mathbf{e}(\mathbf{u}_1) \mathbf{N} = \varepsilon^2 \mathbf{a}'_2 \mathbf{e}(\mathbf{u}_2) \mathbf{N},$$

$$(3.4) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2.$$

Introduisant dans ce système, pour \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 des développements en puissance de ε du type de celui du paragraphe précédent, nous obtenons successivement les problèmes aux limites locaux qui suivent.

Les équations (3.1) à ε^{-2} et (3.3) à ε^{-1} donnent:

$$\nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}_1 \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1^{(0)})) = 0,$$

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1^{(0)}) \mathbf{N} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \mathbf{u}_1^{(0)}, \Omega \text{ — périodique.}$$

La formulation faible s'obtient de façon semblable au procédé du paragraphe précédent, en remplaçant toutefois l'espace E défini sur Ω par l'espace E_1 de mêmes caractéristiques défini sur Ω_1 :

$$\forall \mathbf{w} \in E_1, \quad \int_{\Omega_1} \mathbf{a}_1 \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1^{(0)}) \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}) d\Omega = 0.$$

La solution est triviale:

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}).$$

Les équations (3.1) à ε^{-1} et (3.3) à ε^0 définissent $\mathbf{u}_1^{(1)}$:

$$\nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}_1 (\mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(0)}))) = 0,$$

$$\mathbf{a}_1 (\mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(0)})) \mathbf{N} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \mathbf{u}_1^{(1)}, \Omega \text{ — périodique.}$$

La formulation variationnelle correspondante s'écrit:

$$\forall \mathbf{w} \in E_1, \quad \int_{\Omega_1} \mathbf{a}_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) \mathbf{e}_y(\mathbf{w}) d\Omega = 0,$$

formulation qui admet une solution unique. Ainsi:

$$\mathbf{u}_1^{(1)} = \xi_1 \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) + \tilde{\mathbf{u}}_1^{(1)}(\mathbf{x}),$$

où les ξ_{1ijk} sont des solutions particulières du problème correspondant à

$$e_{x_{im}}(\mathbf{u}^{(0)}) = \delta_{ij} \delta_{mk}.$$

Les équations (3.2) et (3.4) à ε^0 donnent $\mathbf{u}_2^{(0)}$:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \nabla_y(\mathbf{a}'_2 \mathbf{e}_y(\mathbf{u}_2^{(0)})) &= -\rho_2 \omega^2 \mathbf{u}_2^{(0)}, \\ \mathbf{u}_2^{(0)} &= \mathbf{u}^{(0)}(x) \text{ sur } \Gamma, \quad \mathbf{u}_2^{(0)}, \Omega \text{ — périodique.} \end{aligned}$$

Pratiquons la translation:

$$\mathbf{u}_2^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(x) + \mathbf{v}.$$

Le déplacement relatif \mathbf{v} est solution de:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \nabla_y(\mathbf{a}'_2 \mathbf{e}_y(\mathbf{v})) &= -\rho_2 \omega^2 (\mathbf{u}^{(0)}(x) + \mathbf{v}), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Soit E_2 l'espace des vecteurs \mathbf{v} Ω — périodiques, nuls sur Γ avec le produit scalaire:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_2} e_{ij}(\mathbf{v}) e_{ij}(\mathbf{w}) d\Omega.$$

Le spectre de l'opérateur du premier membre de (3.5) dans E_2 , donné par:

$$\nabla_y(\mathbf{a}'_2 \mathbf{e}_y(\mathbf{v})) = -\lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

est discret réel et positif [2]. Les valeurs propres sont λ_i telles que:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Dans ces conditions il est clair que la solution de (3.6) existe pour les valeurs de ω différentes de $\omega_i = (\lambda_i/\rho_2)^{1/2}$, $i = 1, 2, \dots$. Si $\omega = \omega_i$ la solution existe si et seulement si la fonction propre correspondante \mathbf{v}_i est orthogonale à $\rho_2 \omega^2 \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x})$ c-à-d si $\langle \mathbf{v}_i \rangle_{\Omega_2} = 0$. Dans le cas contraire la solution \mathbf{v} n'est pas bornée au voisinage de ω_i et change de signe au passage de cette valeur si λ_i est une valeur propre simple.

La linéarité nous permet d'écrire la solution sous la forme:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_2^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\omega) \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}).$$

L'équation (3.1) à l'ordre ε^0 s'écrit:

$$\nabla_y(\mathbf{a}_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(2)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}_1^{(1)}))) + \nabla_x(\mathbf{a}_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}))) = -\rho_1 \omega^2 \mathbf{u}^{(0)}.$$

Intégrée sur Ω_1 et jointe à l'équation (3.5) intégrée sur Ω_2 , elle conduit, avec (3.3) à l'ordre ε , à l'équation de compatibilité donnant la description macroscopique:

$$\nabla_x(\mathbf{c} \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) = -(\langle \rho_1 \rangle + \langle \mathbf{g}(\omega) \rangle \rho_2) \omega^2 \mathbf{u}^{(0)},$$

où le tenseur élastique effectif \mathbf{c} est celui du matériau poreux constitué par le milieu 1 seul :

$$c_{ijkl} = \langle a_{1ijlm} e_{y_{lm}} (\xi_{1kh}) + a_{1ijkl} \rangle.$$

Le comportement macroscopique est celui d'un corps élastique monophasique de masse volumique ρ à caractère tensoriel et dépendante de la pulsation ω :

$$\rho = \langle \rho_1 \rangle + \langle \mathbf{g}(\omega) \rangle \rho_2.$$

Comme nous l'avons vu plus haut $\mathbf{g}(\omega)$ n'est en général pas borné en $\omega = \omega_i$ et ses composantes y changent de signe. Il existe donc des plages où $\rho_{ij} > 0$ contiguës à des plages où $\rho_{ij} < 0$, mettant en évidence des fréquences pour lesquelles il n'y a plus de propagation. Rappelons toutefois que l'étude présentée implique des longueurs d'ondes très supérieures à la longueur de la période, ce qui invalide la solution dans les domaines de grandes valeurs de ρ . De plus les déplacements du milieu 2 sont alors très grands, en contradiction avec la rhéologie des composants. Le rôle de filtre des composites élastiques périodiques a déjà été mis en évidence par différents auteurs, théoriquement [18, 19] et expérimentalement [20]. Toutefois il s'agit alors de vibrations dont la longueur d'onde est voisine de la période. Ainsi le phénomène mis en jeu est la diffraction alors qu'ici il s'agit d'effets inertiels.

Sous sollicitation transitoire commençant au temps $t = 0$, le comportement du composite est décrit par le système intégral et aux dérivées partielles suivant, avec les réserves énoncées ci-dessus :

$$\nabla_x (\mathbf{c} \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) = \langle \rho_1 \rangle \ddot{\mathbf{u}}^{(0)} + \rho_2 \int_0^t \chi(t-\tau) \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}(\tau) d\tau,$$

où la tenseur mémoire χ est l'inverse de Fourier de $\langle \mathbf{g}(\omega) \rangle$.

Enfin, quand $\omega \mapsto 0$, $\mathbf{v} \mapsto 0$ et $\langle \mathbf{g}(\omega) \rangle \rightarrow n\delta$. La masse volumique effective est $\rho = \langle \rho \rangle$ et la description macroscopique devient classique.

4. Milieu binaire stratifié

Pour illustrer les résultats des parties 2 et 3, considérons le cas particulier d'un milieu stratifié composé de deux milieux 1 et 2 homogènes et isotropes, d'épaisseurs respectives $(1-n)h/\epsilon$ et nh/ϵ en variable y . n est la concentration volumique du milieu 2. Une période est représentée sur la fig. 2

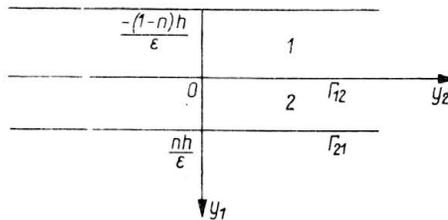


FIG. 2.

Ici la période est quelconque dans les directions y_2 et y_3 ; par conséquent \mathbf{u} est fonction, pour ce qui est de la variable \mathbf{y} , de y_1 seul. D'autre part le milieu présente une symétrie de révolution autour de la direction y_1 et les directions y_2 et y_3 sont équivalentes.

4.1. Cas classique

Les équations locales pour un tel matériau s'écrivent:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \mathbf{u}) &= -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \\ [\mathbf{u}]_R &= 0, \quad [(\lambda(\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \mathbf{e}) \mathbf{N}]_R = 0, \end{aligned}$$

où les constantes de Lamé λ et μ et la masse volumique ρ prennent respectivement les valeurs λ_1, μ_1, ρ_1 et λ_2, μ_2, ρ_2 dans les milieux 1 et 2.

Le deuxième problème aux limites s'écrit, compte tenu du fait que $\mathbf{u}^{(1)}$ est fonction de y_1 seul:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1^{(1)}}{dy_1^2} &= 0, \quad \frac{d^2 u_2^{(1)}}{dy_1^2} = 0, \quad \frac{d^2 u_3^{(1)}}{dy_1^2} = 0, \\ [\mathbf{u}^{(1)}]_R &= 0, \quad \mathbf{u}^{(1)} h / \varepsilon \text{ — périodique.} \\ \left[(\lambda + 2\mu) \frac{du_1^{(1)}}{dy_1} + \lambda \theta_x + 2\mu e_{x11} \right]_R &= 0, \\ \left[\mu \frac{du_2^{(1)}}{dy_1} + 2\mu e_{x12} \right]_R &= 0, \\ \left[\mu \frac{du_3^{(1)}}{dy_1} + 2\mu e_{x13} \right]_R &= 0 \end{aligned}$$

où nous avons posé:

$$\theta_x = e_{x11}.$$

Dans ce cas particulier, le problème aux limites se découple en trois équations différentielles indépendantes. Le déplacement $\mathbf{u}^{(1)}$ s'écrit suivant les notations du paragraphe 2 sous la forme:

$$u_i^{(1)} = \xi_{ijk} e_{x_k} + \tilde{u}_i^{(1)},$$

où les seuls ξ_{ijk} différents de zéro sont:

$$\xi_{111} = \begin{cases} (\lambda_2 + 2\mu_2 - \lambda_1 - 2\mu_1) P^{-1} y_1 n & \text{dans 1,} \\ (\lambda_2 + 2\mu_2 - \lambda_1 - 2\mu_1) P^{-1} y_1 (n-1) & \text{dans 2,} \end{cases}$$

avec $P = n(\lambda_1 + 2\mu_1) + (1-n)(\lambda_2 + 2\mu_2)$

$$\xi_{122} = \xi_{133} = \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1) P^{-1} y_1 n & \text{dans 1,} \\ (\lambda_2 - \lambda_1) P^{-1} y_1 (n-1) & \text{dans 2,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \xi_{212} = \xi_{221} &= \begin{cases} (\mu_2 - \mu_1) Q^{-1} y_1 n & \text{dans 1,} \\ (\mu_2 - \mu_1) Q^{-1} y_1 (n-1) & \text{dans 2,} \end{cases} \\ \xi_{313} = \xi_{331} &= \begin{cases} (\mu_2 - \mu_1) Q^{-1} y_1 n & \text{dans 1,} \\ (\mu_2 - \mu_1) Q^{-1} y_1 (n-1) & \text{dans 2,} \end{cases} \end{aligned}$$

avec:

$$Q = n\mu_1 + (1-n)\mu_2.$$

Ecrivons la loi de comportement macroscopique sous la forme $\mathbf{T} = \mathbf{CE}$ où

$$\mathbf{T} = (\langle \sigma_{11}^{(0)} \rangle, \langle \sigma_{22}^{(0)} \rangle, \langle \sigma_{33}^{(0)} \rangle, \langle \sigma_{23}^{(0)} \rangle, \langle \sigma_{31}^{(0)} \rangle, \langle \sigma_{12}^{(0)} \rangle),$$

$$\mathbf{E} = (e_{x_{11}}, e_{x_{22}}, e_{x_{33}}, 2e_{x_{23}}, 2e_{x_{31}}, 2e_{x_{12}}),$$

et $C_{ij} = C_{ji}$ du fait des symétries de \mathbf{a} .

Le matériau équivalent est orthotrope de révolution et ses propriétés élastiques sont représentées par la matrice symétrique:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{pmatrix}, \quad C_{ij} = C_{ji},$$

avec:

$$C_{11} = \langle \lambda + 2\mu \rangle + (\lambda_2 + 2\mu_2 - \lambda_1 - 2\mu_1)^2 P^{-1} n(n-1),$$

$$C_{12} = \langle \lambda \rangle + (\lambda_2 + \lambda_1)(\lambda_2 + 2\mu_2 - \lambda_1 - 2\mu_1) P^{-1} n(n-1),$$

$$C_{22} = \langle \lambda + 2\mu \rangle + (\lambda_2 - \lambda_1)^2 P^{-1} n(n-1),$$

$$C_{23} = \langle \lambda \rangle + (\lambda_2 - \lambda_1)^2 P^{-1} n(n-1),$$

$$C_{44} = \langle \mu \rangle,$$

$$C_{55} = \langle \mu \rangle + (\mu_2 - \mu_1)^2 Q^{-1} n(n-1).$$

4.2. Fortes discontinuités

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où:

$$\lambda_2 = \varepsilon^2 \lambda'_2, \quad \mu_2 = \varepsilon^2 \mu'_2, \quad \lambda' \text{ et } \mu' \text{ } o(1).$$

Les propriétés élastiques du matériau équivalent s'obtiennent aisément par passage à la limite $\lambda_2 \mapsto 0$, $\mu_2 \mapsto 0$ dans les expressions du paragraphe précédent. Ainsi au premier ordre:

$$C_{11} = C_{12} = C_{55} = 0,$$

$$C_{22} = (1-n) (\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_1^2 / (\lambda_1 + 2\mu_1)),$$

$$C_{23} = (1-n) (\lambda_1 - \lambda_1^2 / (\lambda_1 + 2\mu_1)),$$

$$C_{44} = (1-n) \mu_1.$$

En fait la description obtenue n'est valable que pour des sollicitations dynamiques dans le plan (y_2, y_3) . Pour une sollicitation différente, le processus d'homogénéisation utilisé ici ne peut plus être appliqué: les propriétés élastiques du matériau équivalent sont $o(\mathbf{a}_2)$ dans la direction y_1 , comme pour le matériau 2. La longueur d'onde d'une vibration est alors $o(h)$, du même ordre de grandeur que la période spatiale et l'hypothèse de périodicité de \mathbf{u} n'est plus valable (rappelons que l'équation renormalisée (3.2) revient à considérer ρ et ω $o(1)$).

Nous ne considérons donc que des déplacement perpendiculaires à la direction y_1 . Le matériau étant à symétrie de révolution autour de la direction y_1 , nous prendrons sans nuire à la généralité $u^{(0)}(x)$ suivant la direction y_2 . Le système (3.5) donnant $u_2^{(0)}$ s'écrit ici:

$$\begin{aligned} (\lambda'_2 + 2\mu'_2) \frac{d^2 u_{21}^{(0)}}{dy_1^2} &= -\omega^2 \rho_2 u_{21}^{(0)}, & u_{21}^{(0)}|_r &= 0, \\ \mu'_2 \frac{d^2 u_{22}^{(0)}}{dy_1^2} &= -\omega^2 \rho_2 u_{22}^{(0)}, & u_{22}^{(0)}|_r &= u_2^{(0)}, \\ \mu'_2 \frac{d^2 u_{23}^{(0)}}{dy_1^2} &= -\omega^2 \rho_2 u_{23}^{(0)}, & u_{23}^{(0)}|_r &= 0. \end{aligned}$$

Comme dans le cas classique, nous obtenons trois équations différentielles indépendantes. La solution en est:

$$\begin{aligned} u_{21}^{(0)} &= u_{23}^{(0)} = 0, \\ u_{22}^{(0)} &= u_2^{(0)} (\cos \alpha' y_1 + (1 - \cos \alpha h) \sin \alpha' y_1 / \sin \alpha h), \\ \alpha h &\neq (2i - 1)\pi, \quad i = 1, 2, \dots, \\ \alpha' &= \omega(\rho_2 / \mu'_2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \alpha = \omega(\rho_2 / \mu_2)^{1/2}. \end{aligned}$$

En prenant la moyenne sur la période il vient ensuite:

$$\langle u_{22}^{(0)} \rangle = \frac{2u_2^{(0)}}{\alpha h} \frac{1 - \cos \alpha h}{\sin \alpha h}, \quad \alpha h \neq (2i - 1)\pi,$$

et la masse volumétrique pour les directions 2 et 3 qui sont directions principales s'écrit:

$$\rho_{22} = \rho_{33} = (1 - n)\rho_1 + \frac{2\rho_2}{\alpha h} \frac{1 - \cos \alpha h}{\sin \alpha h}.$$

Les pulsations de coupure ω_i sont données par $\alpha h = (2i - 1)\pi$, $i = 1, 2 \dots$ soit:

$$\omega_i = \frac{(2i - 1)\pi}{nh} \left(\frac{\mu_2}{\rho_2} \right)^{1/2}.$$

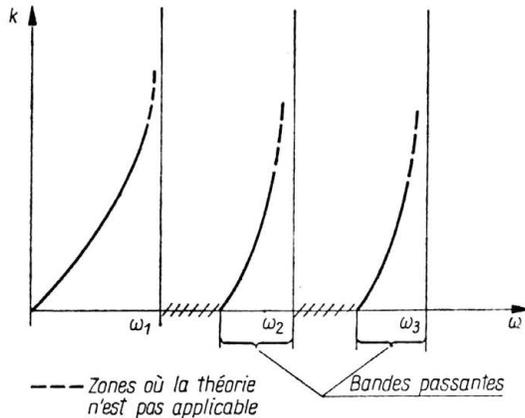


FIG. 3. Milieu composite bilaminé: nombre d'ondes fonction de la pulsation.

Les valeurs $\rho_2 \omega_i^2$ correspondantes sont les valeurs propres de l'opérateur $\mu' \frac{d^2}{dy_1^2}$, avec les conditions aux limites homogènes en $y_1 = 0$ et $y_1 = nh/\varepsilon$, valeurs propres pour lesquelles les fonctions propres correspondantes ne sont pas de moyenne nulle.

Ici

$$\langle g(\omega) \rangle = \frac{2}{\alpha h} \frac{1 - \cos \alpha nh}{\sin \alpha nh} - 1 = \frac{2}{\alpha h} \operatorname{tg} \frac{\alpha nh}{2},$$

$\langle g(\omega) \rangle \mapsto n$ quand $\omega \mapsto 0$.

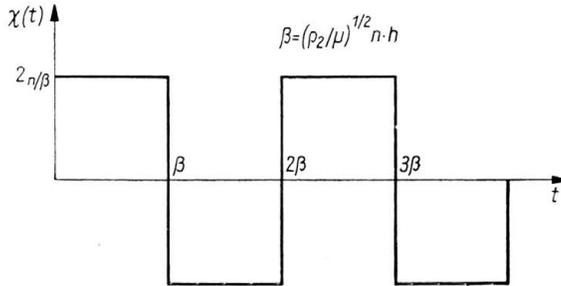


FIG. 4. Milieu composite bilaminé: fonction mémoire.

Nous avons porté sur la figure 3 l'allure du nombre d'onde k en fonction de la pulsation ω .

Enfin la figure 4 représente la fonction mémoire $\chi(t)$ correspondante.

5. Inclusions incompressibles et tres déviables

La connexité des domaines occupés par les composants d'un milieu hétérogène joue parfois un rôle primordial dans le comportement du milieu macroscopiquement équivalent. C'est le cas pour la dynamique d'un composite binaire où l'un des matériaux, le matériau 2 dans la suite est incompressible et très déviable. Pour simplifier nous considérerons les deux composants pris séparément comme homogènes et isotropes, bien que les résultats obtenus ne puissent pas s'étendre sans précaution au cas général anisotrope. Nous supposons d'autre part que la faible déviableté du matériau 2 s'exprime par:

$$\mu_2 = \varepsilon^2 \mu'_2, \quad \mu'_2 = o(\mu_1),$$

si bien que les équations locales monochromatiques normalisées s'écrivent:

$$(5.1) \quad \mu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + (\lambda_1 + \mu_1) \nabla(\nabla \mathbf{u}_1) = -\omega^2 \rho_1 \mathbf{u}_1 \quad \text{dans } \Omega_1,$$

$$(5.2) \quad \varepsilon^2 \mu'_2 \Delta \mathbf{u}_2 + \nabla p = -\omega^2 \rho_2 \mathbf{u}_2,$$

$$(5.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

avec les conditions aux limites classiques sur Γ :

$$(5.4) \quad (\lambda_1(\nabla \mathbf{u}_1) \boldsymbol{\delta} + 2\mu_1 \mathbf{e}(\mathbf{u}_1)) \mathbf{N} = (p \boldsymbol{\delta} + 2\varepsilon^2 \mu'_2 \mathbf{e}(\mathbf{u}_2)) \cdot \mathbf{N},$$

$$(5.5) \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2.$$

L'homogénéisation est conduite comme ci-dessus, en introduisant dans le système (5.1–5.5) des développements asymptotiques en puissance entière de ε pour \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et p , en même temps que les variables \mathbf{x} et $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$.

L'équation (5.2) à l'ordre ε^{-1} donne:

$$\nabla_y p^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = p^{(0)}(\mathbf{x}).$$

Les équations (5.1) à l'ordre ε^{-2} , (5.4) à ε^{-1} sont identiques à celle du paragraphe 3 et conduisent à:

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}).$$

A l'ordre suivant, ces équations déterminent $\mathbf{u}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \nabla_y (\lambda_1 \delta (\nabla_y \mathbf{u}_2^{(1)} + \nabla_x \mathbf{u}^{(0)}) + 2\mu_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}))) &= 0, \\ \lambda_1 (\nabla_y \mathbf{u}_1^{(1)} + \nabla_x \mathbf{u}^{(0)}) \delta + 2\mu_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) \mathbf{N} &= p^{(0)} \delta \mathbf{N}, \end{aligned}$$

$\mathbf{u}^{(1)}$, Ω — périodique.

La formulation variationnelle correspondante, qui a une solution unique, s'écrit en utilisant l'espace E_1 :

$$\forall \mathbf{w} \in E_1, \quad \int_{\Omega_1} [\lambda_1 (\nabla_y \mathbf{u}_1^{(1)} + \nabla_x \mathbf{u}^{(0)}) \delta + 2\mu_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}))] \mathbf{e}_y(\mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Gamma} p^{(0)} \mathbf{N} \mathbf{w} ds.$$

La linéarité permet ensuite de représenter \mathbf{u}_1 sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{(1)} &= \xi_i \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) + \eta p^{(0)} + \tilde{\mathbf{u}}_1^{(1)}(\mathbf{x}), \\ u_{ii}^{(1)} &= \xi_i^{kl} e_{x_{kl}}(\mathbf{u}^{(0)}) + \eta_i p^{(0)} + \tilde{u}_{ii}^{(1)}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{u}}_1^{(1)}(\mathbf{x})$ est une fonction vectorielle arbitraire de \mathbf{x} .

Le premier ordre du déplacement dans le milieu 2 est donné par les équations (5.2) et (5.5) à l'ordre ε^0 et (5.3) à l'ordre ε^{-1} .

$$\begin{aligned} \mu_2' \Delta_y \mathbf{u}_2^{(0)} + \nabla_y p^{(1)} &= -\nabla_x p^{(0)} - \omega^2 \varrho_2 \mathbf{u}_2^{(0)}, \\ \nabla_y \mathbf{u}_2^{(0)} &= 0, \quad u_2^{(0)}|_{\Gamma} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_2^{(0)}, \Omega \text{ — périodique.} \end{aligned}$$

Soit, en pratiquant la translation:

$$\mathbf{u}_2^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}) + \mathbf{v},$$

$$(5.6) \quad \mu_2' \Delta_y \mathbf{v} + \nabla_y p^{(1)} = -\omega^2 \varrho_2 \mathbf{v} - \omega^2 \varrho_2 \mathbf{u}^{(0)} - \nabla_x p^{(0)},$$

$$(5.7) \quad \nabla_y \mathbf{v} = 0,$$

$$(5.8) \quad \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{v}, \Omega \text{ — périodique.}$$

Ce système, comme le système correspondant (3.6) du paragraphe 3, n'implique pas l'existence et l'unicité d'une solution. La connexité du domaine 2 joue ici un rôle décisif que nous décrivons plus loin.

Les équations (5.1) et (5.2) à l'ordre ε^0 et (5.4) à l'ordre ε s'écrivent:

$$\begin{aligned} \nabla_y (\lambda_1 \delta (\nabla_y \mathbf{u}_1^{(2)} + \nabla_x \mathbf{u}_1^{(1)})) + 2\mu_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(2)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}_1^{(1)})) \\ + \nabla_x (\lambda_1 \delta (\nabla_y \mathbf{u}_1^{(1)} + \nabla_x \mathbf{u}^{(0)}) + 2\mu_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(1)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}))) &= -\omega^2 \varrho_1 \mathbf{u}^{(0)}, \\ \mu_2' \Delta_y \mathbf{u}_2^{(0)} + \nabla_y p^{(1)} + \nabla_x p^{(0)} &= -\omega^2 \varrho_2 \mathbf{u}_2^{(0)}, \\ [\lambda_1 \delta (\nabla_y \mathbf{u}_1^{(2)} + \nabla_x \mathbf{u}_1^{(1)}) + 2\mu_1 (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1^{(2)}) + \mathbf{e}_x(\mathbf{u}_1^{(1)}))] \mathbf{N} &= [p^{(1)} \delta + 2\mu_2' \mathbf{e}_y(\mathbf{u}_2^{(0)})] \mathbf{N} \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

La première intégrée sur Ω_1 , jointe à la seconde intégrée sur Ω_2 , et compte tenu de la troisième, conduit à l'équation de compatibilité:

$$(5.9) \quad \nabla_x(\mathbf{c}\mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) + \alpha \nabla_x p^{(0)} = -\omega^2 \langle \rho_1 \rangle \mathbf{u}^{(0)} - \omega^2 \rho_2 \langle \mathbf{u}_2^{(0)} \rangle$$

avec:

$$c_{ijkl} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_1} (\lambda_1 \delta_{ij} (\xi_{1p,p}^{kl} + \delta_{kl}) + 2\mu_1 (e_{y_{ij}}(\xi_1^{kl}) + \delta_{ik} \delta_{jl})) d\Omega,$$

$$\alpha_{ij} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega_1} (\lambda_1 \eta_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu_1 e_{y_{ij}}(\eta)) d\Omega + n,$$

où:

$$n = |\Omega_2|/|\Omega|.$$

Enfin l'équation (5.3) à l'ordre ε^0 s'écrit:

$$\nabla_x \mathbf{u}_2^{(0)} + \nabla_y \mathbf{u}_2^{(1)} = 0.$$

Intégrée sur Ω_2 , et compte tenu de (5.5) à l'ordre ε ,

$$(5.10) \quad \nabla_x \langle \mathbf{u}_2^{(0)} \rangle = -|\Omega|^{-1} \int_{\Omega_2} \nabla_y \mathbf{u}_2^{(1)} d\Omega = -|\Omega|^{-1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_2^{(1)} \mathbf{N} dS$$

$$= -|\Omega|^{-1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_1^{(1)} \cdot \mathbf{N} dS = \alpha_{ij}^* \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) + \beta p^{(0)},$$

avec:

$$\alpha_{ij}^* = -|\Omega|^{-1} \int_{\Gamma} \xi_{1k}^{ij} N_k dS,$$

$$\beta = -|\Omega|^{-1} \int_{\Gamma} \eta_i N_i dS,$$

et \mathbf{N} normale extérieure au milieu 2. Suivant la même démarche qu'en [6] ou [9] pour un poreux saturé de liquide, $\alpha^* = \alpha$.

Nous obtenons finalement:

$$(5.11) \quad \nabla_x \langle \mathbf{u}_2^{(0)} \rangle = \alpha \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) + \beta p^{(0)},$$

$$(5.11') \quad \langle \mathbf{u}_2^{(0)} \rangle - n \mathbf{u}^{(0)} = \langle \mathbf{v} \rangle.$$

Les équations (5.9), (5.11) et (5.11') décrivent — sous réserve de l'existence de \mathbf{v} — le comportement macroscopique dynamique du composite. Il s'agit, en général, d'une description à deux phases, chaque phase étant caractérisée par un déplacement distinct.

5.1. Inclusions non connexes

Nous pouvons considérer, sans nuire à la généralité, le domaine Ω_2 inclus dans la période Ω . Pour résoudre le problème aux limites (5.6)–(5.8) procédons comme au paragraphe 3: cherchons les fonctions propres, vectorielles et rotationnelles et les valeurs propres

associées à l'opérateur de Laplace pour la condition aux frontières (5.8). Ecrivons (5.6)–(5.8) sous la forme suivante qui définit l'opérateur \tilde{A} :

$$(5.12) \quad \tilde{A}\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} = -\omega^2 \varrho_2 \mathbf{v} - \omega^2 \varrho_2 \mathbf{u}^{(0)} - \nabla_x p^{(0)}.$$

Suivant [21, p. 44] introduisons l'espace des vecteurs rotationnels infiniment dérivables, de support compact sur Ω_2 et sa fermeture V dans la norme $L_2(\Omega_2)$. Manifestement $\boldsymbol{\psi} \in V$. Toujours suivant (5.3), l'opérateur est auto-adjoint et négatif sur l'ensemble des solutions de (5.12) où $\boldsymbol{\psi}$ est donné. Son spectre discret et positif: $\lambda_i > 0$ et les fonctions propres ϕ_i correspondantes sont orthogonales et complètes sur $L_2(\Omega_2)$.

Il est aisé de voir par ailleurs que toute fonction vectorielle irrotationnelle nulle sur Γ est de moyenne nulle sur Ω_2 . Partant de l'identité:

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial}{\partial y_i} (v_i y_j) d\Omega = \int_{\Omega_2} \frac{\partial v_i}{\partial y_i} y_j d\Omega + \int_{\Omega_2} v_j d\Omega,$$

il vient compte tenu de l'incompressibilité et de la condition d'adhérence:

$$(5.13) \quad \int_{\Omega_2} v_j d\Omega = \int_{\Gamma} v_i y_j N_i dS = 0.$$

Cherchant la solution de (5.6)–(5.8) sous la forme $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i$, il est aisé de constater que $\mathbf{v} = 0$ presque partout excepté pour les valeurs de ω données par $\omega = \lambda_i / \varrho_2$, $i = 1, 2, \dots$ pour lesquelles $\mathbf{v} = \alpha \phi_i$, α constante arbitraire.

Toutefois, quelque soit ω , $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ et le système (5.9)–(5.11') s'écrit:

$$\begin{aligned} \nabla_x (\mathbf{c} \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) + \alpha \nabla_x p^{(0)} &= -\omega^2 \langle \varrho \rangle \mathbf{u}^{(0)}, \\ \nabla_x (n \mathbf{u}^{(0)}) &= \alpha \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) + \beta p^{(0)}. \end{aligned}$$

Soit:

$$\nabla_x \{ \mathbf{c} \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)}) + \alpha \beta^{-1} (n(\nabla_x \mathbf{u}^{(0)}) - \alpha \mathbf{e}_x(\mathbf{u}^{(0)})) \boldsymbol{\delta} \} = -\omega^2 \langle \varrho \rangle \mathbf{u}^{(0)}.$$

Le comportement macroscopique équivalent est celui d'un matériau élastique monophasique classique.

5.2. Inclusions connexes

Ici encore l'opérateur \tilde{A} admet des valeurs propres λ_i discrètes positives et les fonctions propres associées ϕ_i sont orthogonales et complètes. La démonstration suit avec de très légères modifications celle du paragraphe 5.1.

Mais ici (5.13) s'écrit:

$$\int_{\Omega_2} v_j d\Omega = \int_{\delta \Omega_2} v_i y_j n_i ds = \int_{\delta \Omega_2 \cap \delta \Omega} v_i y_j n_i ds,$$

qui n'est pas nul en général. Nous retrouvons alors une situation analogue à celle du paragraphe 3: le champ est défini en dehors du spectre discret $\omega_i = (\lambda_i / \varrho_2)^{1/2}$, où il prend des valeurs non bornées en général. La solution du système (5.6)–(5.8) s'écrit alors:

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}(\omega) (\nabla_x p^{(0)} + \omega^2 \varrho_2 \mathbf{u}^{(0)}).$$

La description macroscopique est celle d'un matériau à deux phases avec une dépendance non classique au regard de la pulsation ω . L'équation (5.11') s'écrit maintenant :

$$\langle \mathbf{u}_2^{(0)} \rangle - n \mathbf{u}^{(0)} = \langle \mathbf{k}(\omega) \rangle (\nabla_x p^{(0)} + \omega^2 \varrho_2 \mathbf{u}^{(0)}).$$

La situation est dans une certaine mesure semblable à celle des poreux saturés de liquide lorsque les pores sont connexes et met en évidence deux types d'ondes de compression. Elle est voisine de celle obtenue en [22] au moyen de la théorie des mixtures appliquée à un composite stratifié. Dans le cas particulier du milieu stratifié étudié au paragraphe 4, sollicité parallèlement aux strates, la fonction $\langle k(\omega) \rangle$ s'obtient immédiatement à partir de $\langle g(\omega) \rangle$:

$$\langle k(\omega) \rangle = (\langle g(\omega) \rangle - n) / \omega^2 \varrho_2 = \frac{n}{\omega^2 \varrho_2} \left(\frac{2}{\alpha n h} \operatorname{tg} \frac{\alpha n h}{2} - 1 \right),$$

$$\alpha = \omega \left(\frac{\varrho_2}{\mu_2} \right)^{1/2}, \quad \omega_i = (2i - 1) \frac{\pi}{n h} \left(\frac{\mu_2}{\varrho_2} \right)^{1/2},$$

6. Conclusion

Cette étude montre que l'application de la théorie de l'homogénéisation aux composites élastiques permet de prévoir des comportements macroscopiques complètement différents suivants la structure du composite et la nature de ses constituants.

Lorsque les deux composants ont des caractéristiques élastiques du même ordre de grandeur, le composite a un comportement élastique classique.

Un écart important entre les caractéristiques élastiques des deux composants conduit à un résultat non classique: le comportement obtenu est un comportement à mémoire qui rappelle les résultats obtenus dans d'autres domaines par la même méthode [12, 13, 14] et semblables à ceux de la dynamique des milieux saturés [9, 15, 16, 17] où les dynamiques partielles sont héréditaires. Toutefois l'analogie n'est pas totale puisque la méthode met en évidence l'existence de fréquences de coupure. Celles-ci sont d'ailleurs bien connues dans les milieux périodiques, pour des situations différentes de celles envisagées ici, $c - a - d$, quand la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que les hétérogénéités. Il s'agit alors de diffraction et les difficultés rencontrées dans la résolution des problèmes sont telles que seuls des cas très particuliers ont été abordés comme en [18, 19, 20].

Par contre, dans le cas qui a été présenté, la longueur d'onde calculée à partir du module élastique du matériau équivalent à basses fréquences est beaucoup plus importante que la dimension des hétérogénéités.

L'application de la théorie à un composite stratifié aboutit à une expression analytique de la loi de comportement et des fréquences de coupure.

Enfin, l'étude du cas où les inclusions sont incompressibles et très déviables montre le rôle crucial de la connexité des domaines occupés par les composants dans le comportement du milieu macroscopique équivalent.

Lorsque les inclusions ne sont pas connexes, le milieu macroscopique équivalent a un comportement élastique classique. Par contre, la présence d'inclusions connexes conduit à un comportement à deux phases semblable à celui des milieux poreux saturés.

Références

1. A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, 1978.
2. E. SANCHEZ-PALENCIA, *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer Verlag, Berlin 1980.
3. D. LEGUILLON and E. SANCHEZ-PALENCIA, *On the behaviour of a cracked elastic body with (or without) friction*, J. de Mécanique Théorique et Appliquée, **1**, 2, 195–209, 1982.
4. P. M. SUQUET, *Methodes d'homogénéisation en mécanique des solides*, Communication au Groupe Français de Rhéologie, 3 décembre 1980.
5. G. DUVAUT, *Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus, Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique-homogénéisation*. Theoretical and Applied Mechanics, North Holland Publishing Company, 119–132, 1976.
6. J. L. AURIAULT and E. SANCHEZ-PALENCIA, *Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable*, J. de Mécanique, **16**, 4, 575–603, 1977.
7. D. L. JOHNSON, *Elastodynamics of porous media*, in: Macroscopic Properties of Disordered Media, Lecture Notes in Physics, 154, 97–110, Springer Verlag, New York 1981.
8. R. OHAYON, *Homogénéisation par développements asymptotiques mixtes. Calcul des vibrations de milieux élastiques à structure périodique*, La Recherche Aérospatiale, **2**, 109–118, 1979.
9. J. L. AURIAULT, *Homogenization. Application to porous saturated media*, in: Two Phase Medium Mechanics, Summer School Gdansk 5–9 septembre 1983, Publication de l'Institut Polytechnique de Gdansk.
10. T. LEVY, *Milieu élastique soumis à des forces volumiques de répartition périodique fine*, J. Mécanique, **20**, 497–508, 1981.
11. D. CAILLERIE, *Homogénéisation d'un corps élastique renforcé par des fibres minces de grande rigidité et réparties périodiquement*, CRAS Paris, t. 292, série II, pp. 477–480, 9 février 1981.
12. G. DUVAUT, *Application des méthodes de l'homogénéisation*, Methodes Numériques dans les Sciences de l'Ingénieur, Congrès International, pp. 379–429, Paris 1978.
13. J. SANCHEZ-PALENCIA, E. SANCHEZ-PALENCIA, *Sur certains problèmes physiques d'homogénéisation donnant lieu à des phénomènes de relaxation*, CRAS Paris, t. 286 série A, pp. 903–906, 22 mai 1978.
14. E. SANCHEZ-PALENCIA, *Méthode d'homogénéisation pour l'étude de matériaux hétérogènes, Phénomènes de mémoire*, Rend. Mat. Univers. Politecn., Torino, **36**, 1977–1978.
15. T. LEVY, *Acoustic phenomena in elastic porous media*, Mech. Res. Comm., **4**, 4, 253–257, 1977.
16. T. LEVY, *Propagation of waves in a fluid-saturated porous elastic solid*, Int. J. Engng Sci., **17**, 1005–1014, 1979.
17. J. L. AURIAULT, *Dynamic behavior of a porous medium saturated by a Newtonian fluid*, Int. J. Engng. Sci., **18**, 775–785, 1980.
18. E. H. LEE and W. H. YANG, *On waves in composite materials with periodic structure*, SIAM J. Appl. Math., **25**, 3, 492–99, 1973.
19. T. J. DELPH, G. HERRMANN, R. K. KAUL, *Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body: antiplane strain*, J. Appl. Mech., **45**, 343–49, 1978.
20. H. J. SUTHERLAND and R. LINGLE, *Geometric dispersion of acoustic waves by a fibrous composite*, J. Composite Materials, **6**, 490–502, 1972.
21. O. A. LADYZHENSKAYA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York 1969.
22. A. BEDFORD and H. STERN, *Toward a diffusing continuum theory of composite materials*, J. Appl. Mech., 8–14, 1971.

INSTITUT DE MÉCANIQUE DE GRENOBLE

Received October 30, 1984.