

Calcul de l'écoulement instationnaire transsonique autour d'un profil oscillant par une méthode à pas fractionnaires

P. LAVAL (CHATILLON)

LE PROBLÈME de l'écoulement transsonique instationnaire autour d'un profil symétrique oscillant, placé dans une tuyère, est traité numériquement en résolvant les équations instationnaires exactes écrites sous forme conservative. La méthode de calcul proposée est une extension de la méthode à pas fractionnaires mise au point précédemment pour le calcul de l'écoulement transsonique stationnaire autour d'un profil entre parois. Le profil est animé, à un instant donné, d'un mouvement oscillatoire harmonique autour d'un axe fixe. On suppose que les déplacements sont suffisamment petits pour que l'on puisse appliquer la condition de glissement sur le profil dans sa position moyenne et se donner des conditions de symétrie ou d'antisymétrie par rapport à l'axe de la tuyère, ce qui permet de ne calculer que la moitié du champ de l'écoulement. On calcule successivement trois écoulements autour du profil : l'écoulement stationnaire non isentropique, l'écoulement instationnaire transitoire afin de ne pas imposer à un instant donné une variation brutale de la vitesse normale et l'écoulement instationnaire proprement dit.

Les résultats présentés, qui concernent des calculs d'écoulements supercritiques avec choc sur un profil biconvexe animé de mouvements de rotation de faibles amplitudes, montrent que le mouvement des forces instationnaires est relativement proche d'un mouvement harmonique, bien que le mouvement du choc ne soit pas sinusoidal, et que le régime permanent est pratiquement atteint au bout de deux périodes.

Problem nieustalonego przepływu naddźwiękowego wokół drgającego symetrycznego profilu lotniczego w dyszy rozwiązano całkując numerycznie ściśle równania nieustalonego przepływu zapisane w postaci dywergentnej. Proponowany sposób rozwiązania jest rozszerzeniem metody kroku ułamkowego stosowanej uprzednio do obliczeń naddźwiękowych przepływów wokół profilu dyszy. W pewnej chwili początkowej profil poddano ruchowi harmonicznemu drgającemu wokół ustalonej osi. Przyjmuje się, że przemieszczenia są dostatecznie małe, aby można było stosować warunek styczności na profilu w jego położeniu środkowym oraz aby mogły być wykorzystane warunki symetrii i antysymetrii względem osi dyszy. Założenia te pozwalają na liczenie tylko połowy pola. Policzone kolejno następujące trzy przepływy: najpierw ustalony nieizentropowy przepływ, następnie nieustalony przepływ przejściowy, w którym uniknięto nieciągłości prędkości normalnej na profilu w chwili początkowej i trzecii — właściwy przepływ nieustalony. Przedstawione tu wyniki dla przepływów superkrytycznych z falą uderzeniową na dwuwypukłym profilu drgającym z małymi amplitudami wykazują, że nieustalone ruchy sił aerodynamicznych są bliskie ruchom czysto sinusoidalnym mimo że ruch fali uderzeniowej nie jest sinusoidalny oraz że rozwiązanie stacjonarne otrzymuje się praktycznie już po dwóch cyklach.

Задача неустановившегося сверхзвукового течения около колеблющегося симметричного авиационного профиля в сопле решена интегрируя численно точные уравнения неустановившегося течения, записанные в дивергентном виде. Предложенный способ решения является расширением метода дробных шагов применяемого раньше к расчетам сверхзвуковых течений около профиля в сопле. В некоторый начальный момент профиль подвергается гармоническому колебательному движению около данной оси. Принимается, что перемещения достаточно малы, чтобы можно было применять условие касательности на профиле в его срединном положении, а также, чтобы могли быть использованы условия симметрии и антисимметрии по отношению к оси сопла. Эти предположения позволяют вычислять только половину площади. Вычислены последовательно следующие три течения: сначала установившееся неизэнтропическое течение, затем неустановившееся переходное течение, в котором избегнут разрыв нормальной скорости на профиле в начальный момент и третье течение — действительное неустановившееся течение. Представленные здесь результаты для сверхкритических

течений с ударной волной на двувьпуклом, колеблющемся с малыми амплитудами, профиле показывают, что неустановившиеся движения аэродинамических сил близки чисто синусоидальным движениям, несмотря на факт, что движение ударной волны не является синусоидальным, а также, что стационарное решение получается практически уже после двух циклов.

Introduction

LE PROBLÈME de l'écoulement instationnaire autour d'un profil oscillant peut être traité correctement par la théorie linéarisée classique si cet écoulement est purement subsonique ou supersonique. Mais cette théorie, basée sur une linéarisation par rapport à un écoulement uniforme dans l'hypothèse de perturbations harmoniques en fonction du temps, n'est plus valable lorsque l'écoulement autour du profil devient supercritique et a fortiori lorsqu'apparaît une onde de choc attachée au profil.

Une étude complète de ce problème transsonique instationnaire, prenant en compte les effets non linéaires, ne peut être effectuée que par une méthode numérique et nécessite tout d'abord la connaissance de l'écoulement stationnaire exact autour du profil.

De telles études numériques n'ont donc pu être abordées que récemment et sont évidemment encore peu nombreuses [1-5]. Dans les travaux de BEAM et WARMING [1] et de MAGNUS et YOSHIHARA [4], l'écoulement instationnaire autour du profil est obtenu par intégration des équations bidimensionnelles exactes qui sont discrétisées à l'aide de schémas explicites (du troisième ordre [1] ou du second ordre [4]). Dans la référence [4], l'écoulement instationnaire autour d'un profil portant en oscillation harmonique (autour d'un axe fixe) est calculé pendant une période alors que dans la référence [1], où l'on étudie l'écoulement sur une plaque plane mise instantanément en mouvement et sur un profil en rotation, on utilise la méthode de "réponse" à une mise en mouvement instantanée, les coefficients aérodynamiques cherchés étant obtenus par transformation de Fourier des coefficients de "réponse".

Dans le travail [2] BALLHAUS et LOMAX ont résolu l'équation non linéaire du potentiel de perturbations, complète ou dans l'approximation de basses fréquences. Cette équation est discrétisée à l'aide d'un schéma semi implicite et les calculs sont effectués sur un profil mis instantanément en mouvement ou se déformant en fonction du temps.

La méthode d'EHLERS [3], dans laquelle les équations sont linéarisées autour d'un écoulement de base uniforme dont la vitesse est voisine de celle du son et où l'hypothèse de perturbations harmoniques en fonction du temps permet d'éliminer celui-ci des équations, est évidemment plus approchée que les méthodes précédentes et ne permet pas apparemment de traiter des écoulements avec ondes de choc. Des quatre méthodes pré-citées, celle de MAGNUS et YOSHIHARA [4] semble être la plus précise du fait que c'est la seule dans laquelle on calcule effectivement l'écoulement instationnaire en fonction du temps à partir des équations exactes (mais elle conduit par contre à des temps de calcul très importants dans le cas des faibles fréquences).

Il faut préciser que ces méthodes sont relatives à des calculs d'écoulements en atmosphère illimitée et que les mouvements considérés ont des amplitudes faibles et plus particulièrement des faibles fréquences. De tels mouvements sont spécialement rencontrés dans les problèmes de profils d'ailes ou de pales d'hélicoptères.

Le présent travail a pour but le calcul de l'écoulement transsonique sur un profil placé dans une tuyère et animé de faibles mouvements de rotation sinusoidaux en fonction du temps. Le problème que nous traitons ainsi simule celui de l'écoulement dans une grille d'aubes en oscillation harmonique en fonction du temps et avec un déphasage de 180 degrés d'une aube à la suivante et constitue donc une première approche du problème plus général et plus complexe de l'écoulement compressible instationnaire dans une grille d'aubes avec un déphasage donné d'une aube à la suivante, problème, qui à notre connaissance, n'a pas encore été abordé numériquement.

La méthode de calcul proposée est une extension de la méthode instationnaire à pas fractionnaires mise au point précédemment [6] [7] pour le calcul d'un écoulement transsonique stationnaire. Cette méthode était inspirée de la méthode de MAC CORMACK [8] [9] et PAULLAY [9].

On résout numériquement les équations instationnaires conservatives exactes, la méthode instationnaire à pas fractionnaires consistant à diviser l'écoulement en plusieurs régions de maillages différents et à décomposer dans chacune de ces régions les équations bidimensionnelles instationnaires en équations monodimensionnelles qui sont résolues numériquement à l'aide du schéma explicite décentré de MAC CORMACK [10]. Cette méthode permet ainsi de réaliser un meilleur ajustement des domaines de dépendance physique et numérique que celui des méthodes bidimensionnelles (dans lesquelles on discrétise directement les équations bidimensionnelles) et est, par conséquent, plus rapide que celles-ci. On est ramené, dans la région du profil par exemple, à appliquer une suite commutative de trois opérateurs monodimensionnels pour passer du temps t au temps $t + \Delta t$. Si chacun de ces opérateurs est appliqué à une équation monodimensionnelle pseudo-instationnaire, le produit de ces trois opérateurs est consistant avec les équations bidimensionnelles exactes, l'erreur de discrétisation étant du second ordre. La méthode est donc bien adaptée, en principe, au traitement d'un problème instationnaire.

On calcule ainsi successivement trois écoulements autour du profil: l'écoulement stationnaire non isentropique, l'écoulement instationnaire transitoire (pendant lequel on fait varier la vitesse normale continument de la valeur zéro à celle correspondant au mouvement harmonique afin de ne pas imposer à un instant donné une variation brutale de celle-ci) et l'écoulement instationnaire proprement dit.

La méthode présentée est, dans son principe du moins, semblable à celle de MAGNUS et YOSHIHARA [4] si ce n'est que ces derniers discrétisent directement les équations bidimensionnelles alors que nous décomposons celles-ci en équations monodimensionnelles comme cela vient d'être précisé et qu'ils étudient des écoulements en atmosphère illimitée.

1. Principe de la méthode

On étudie l'écoulement transsonique instationnaire autour d'un profil symétrique oscillant, placé dans une tuyère ou dans un canal à section constante, en résolvant numériquement les équations instationnaires exactes conservatives:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0$$

où:

le vecteur \mathbf{U} a pour composantes:

$$U_1 = \rho; \quad U_2 = \rho V \cos \theta; \quad U_3 = \rho V \sin \theta; \quad U_4 = E;$$

θ est l'angle de la direction de la vitesse avec l'axe des x et E est l'énergie totale qui, dans le cas considéré d'un gaz parfait régulier ($\gamma = \text{const}$), a pour expression $E = p/(\gamma - 1) + 1/2 \rho V^2$;

x et y sont les variables longitudinale et transversale dans le système d'axes fixe lié à la tuyère;

les composantes des vecteurs \mathbf{F} et \mathbf{G} s'expriment en fonction des composantes du vecteur \mathbf{U} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} U_2 \\ p + U_2^2/U_1 \\ U_2 U_3/U_1 \\ (U_4 + p) U_2/U_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} U_3 \\ U_2 U_3/U_1 \\ p + U_3^2/U_1 \\ (U_4 + p) U_3/U_1 \end{bmatrix},$$

$$p = (\gamma - 1) \left\{ U_4 - 1/2 \frac{U_2^2 + U_3^2}{U_1} \right\}.$$

On considère que le profil est animé, à partir d'un instant donné t_1 , d'un mouvement oscillatoire harmonique (autour d'un axe fixe) défini par l'angle de rotation $\varphi(t) = \alpha \sin \omega(t - t_1)$ dont l'amplitude est supposée suffisamment faible pour que l'on puisse:

a) appliquer la condition de glissement sur le profil dans sa position moyenne à incidence nulle:

le vecteur vitesse étant défini en tout point M du profil par (figure 1):

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_r + \Omega(t) \wedge \mathbf{OM},$$

où V_r et V_e représentent respectivement la vitesse relative et la vitesse d'entraînement et

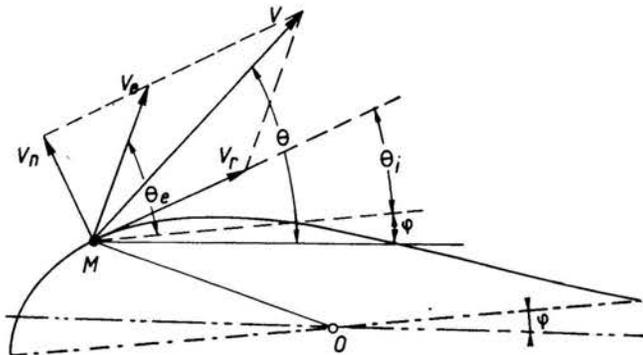


FIG. 1. Condition de glissement sur le profil.

$\Omega(t) = d\varphi/dt = \alpha\omega \cos\omega(t-t_1)$, on exprime que le vecteur \mathbf{V}_r est tangent au profil ou encore que les vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{V}_e ont la même projection V_N sur la normale au profil:

$$(1.2) \quad \mathbf{V}_N = \begin{cases} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V \sin(\theta - \varphi - \theta_i), \\ \mathbf{V}_e \cdot \mathbf{n} = \Omega(t)(\cos\theta_i(x-x_0) + \sin\theta_i \cdot y_i(x)), \end{cases}$$

où $y = y_i(x)$ représente l'équation du profil, $\theta_i(x)$ l'angle de la tangente au profil avec l'axe des x et x_0 l'abscisse du centre de rotation du profil.

L'angle du vecteur vitesse $\theta(x, y, t)$ est alors donné en fonction de la vitesse $\mathbf{V}(x, y, t)$ sur le profil par :

$$(1.3) \quad \theta = \theta_i(x) + \varphi(t) + \text{Arc sin} \frac{(\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{n})}{V}.$$

b) se donner des conditions de symétrie ou d'antisymétrie par rapport à l'axe de la tuyère, ce qui permet de ne calculer que la moitié du champ de l'écoulement et donc de réduire très sensiblement les temps de calcul et de moitié l'encombrement en mémoire.

Plus précisément, les solutions numériques du système (1.1) étant de la forme $\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{U}^o(x, y) + \hat{\mathbf{U}}(x, y, t)$ (où $\mathbf{U}^o(x, y)$ est la valeur stationnaire) et les composantes du vecteur $\hat{\mathbf{U}}(x, y, t)$ étant a priori faibles, on suppose que:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} U_i(x, -y, t) &= U_i^o(x, y) - \hat{U}_i(x, y, t), \quad \text{pour } i = 1, 2, 4, \\ U_3(x, -y, t) &= -U_3^o(x, y) + \hat{U}_3(x, y, t), \end{aligned}$$

(on montre [11] que ces propriétés de symétrie ou d'antisymétrie ne sont strictement valables que pour les solutions des équations linéarisées, plus exactement pour les perturbations du premier ordre obtenues en développant les solutions en fonction du petit paramètre α représentant l'amplitude du mouvement de rotation du profil).

On peut donc effectuer le simple changement de variable transversale, utilisé précédemment pour résoudre un problème symétrique stationnaire [6] [7]:

$$(1.5) \quad y \rightarrow Y = \frac{y - y_i(x)}{y_s(x) - y_i(x)},$$

(où $y = y_s(x)$ représente l'équation de la paroi supérieure) de façon à se ramener à un domaine rectangulaire, les frontières inférieure et supérieure étant représentées respectivement par $Y = 0$ et $Y = 1$ dans le plan transformé (figure 2), et considérer les équations instationnaires exactes conservatives dans le système de coordonnées $X = x, Y, t$:

$$(1.1') \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial Y} = 0.$$

Aucune confusion n'étant possible entre les vecteurs des systèmes (1.1) et (1.1'), nous écrirons dorénavant les vecteurs du système (1.1') sans barres.

Le vecteur \mathbf{U} a maintenant pour composantes

$$(1.6) \quad U_1 = \rho r, \quad U_2 = \rho V \cos\theta \cdot r, \quad U_3 = \rho V \sin\theta \cdot r, \quad U_4 = Er,$$

où $r(X) = y_s(X) - y_i(X)$.

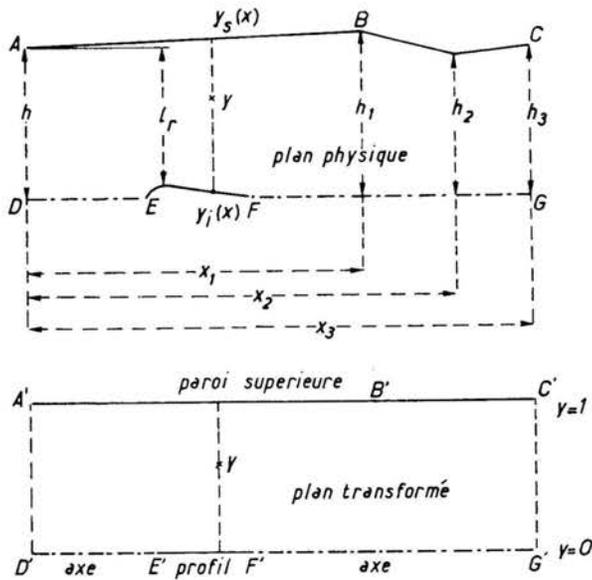


FIG. 2. Changement de variable transversale.

Les composantes des vecteurs **F** et **G** sont données en fonction des composantes du vecteur **U** par les relations :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= U_2, & F_2 &= pr + \frac{U_2^2}{U_1}, & F_3 &= \frac{U_2 U_3}{U_1}, & F_4 &= (U_4 + pr) \frac{U_2}{U_1}, \\
 G_1 &= \frac{1}{r} \{ U_3 - U_2 (\operatorname{tg} \theta_i + r' Y) \}, & G_2 &= \frac{1}{r} \{ F_3 - F_2 (\operatorname{tg} \theta_i + r' Y) \}, \\
 G_3 &= \frac{1}{r} \left\{ pr + \frac{U_3^2}{U_1} - F_3 (\operatorname{tg} \theta_i + r' Y) \right\}, \\
 G_4 &= \frac{1}{r} \{ U_4 + pr \} \left\{ \frac{U_3}{U_1} - \frac{U_2}{U_1} (\operatorname{tg} \theta_i + r' Y) \right\},
 \end{aligned}
 \tag{1.6'}$$

où $r'(X) = \operatorname{tg} \theta_s(X) - \operatorname{tg} \theta_i(X)$, $\operatorname{tg} \theta_s(X)$ et $\operatorname{tg} \theta_i(X)$ représentent respectivement les pentes de la paroi supérieure et du profil et où

$$pr = (\gamma - 1) \left\{ U_4 - \frac{1}{2} (U_2^2 + U_3^2) / U_1 \right\}.$$

On se propose de résoudre numériquement ce problème à l'aide de la méthode à pas fractionnaires utilisée dans [6] et [7] et dont nous rappelons ici le principe.

On définit un maillage rectangulaire dans le plan transformé X, Y à l'aide des lignes coordonnées X_j ($j = 0, 1, 2, \dots, j_{\max}$) et Y_l ($l = 0, 1, 2, \dots, l_{\max}$).

Si l'on connaît la solution $U_{j,i}^n$ (au temps $t^n = n\Delta t$ en tous les points $X_j = j\Delta X$ et $Y_i = i\Delta Y$ du plan (X, Y) du système (1.1') et si l'on cherche à calculer $U_{j,i}^{n+1}$, la façon la plus simple de procéder par décomposition de (1.1') est la suivante(*) :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} t^n &\rightarrow t^{n+1/2} (U_{j,i}^n \rightarrow U_{j,i}^{n+1/2}), \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X} = 0; \\ t^{n+1/2} &\rightarrow t^{n+1} (U_{j,i}^{n+1/2} \rightarrow U_{j,i}^{n+1}), \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial Y} = 0. \end{aligned}$$

On peut discrétiser les systèmes monodimensionnels (1.7) et 1.7') à l'aide du schéma aux différences décentrée explicites du second ordre de MAC CORMACK [10] :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} t^n &\rightarrow t^{n+1/2} \\ (U_{j,i}^n \xrightarrow{\mathcal{L}_x(\frac{\Delta t}{2})} U_{j,i}^{n+1/2}) &\left\{ \begin{aligned} \overline{U_{j,i}^{n+1/2}} &= U_{j,i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta X} (F_{j,i}^n - F_{j-1,i}^n), \\ U_{j,i}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} \left[U_{j,i}^n + \overline{U_{j,i}^{n+1/2}} - \frac{\Delta t}{\Delta X} (\overline{F_{j+1,i}^{n+1/2}} - \overline{F_{j,i}^{n+1/2}}) \right]; \end{aligned} \right. \\ t^{n+1/2} &\rightarrow t^{n+1} \\ (U_{j,i}^{n+1/2} \xrightarrow{\mathcal{L}_y(\frac{\Delta t}{2})} U_{j,i}^{n+1}) &\left\{ \begin{aligned} \overline{U_{j,i}^{n+1}} &= U_{j,i}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta Y} (G_{j,i}^{n+1/2} - G_{j,i-1}^{n+1/2}), \\ U_{j,i}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[U_{j,i}^{n+1/2} + \overline{U_{j,i}^{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta Y} (\overline{G_{j,i+1}^{n+1}} - \overline{G_{j,i}^{n+1}}) \right]. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les caractéristiques des systèmes (1.7) et (1.7') sont définies respectivement par $dX/dt = 2\lambda_k$ et $dY/dt = 2\mu_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) avec :

$$\lambda_k = \begin{Bmatrix} V \cos \theta \\ V \cos \theta \\ V \cos \theta + a \\ V \cos \theta - a \end{Bmatrix}, \quad \mu_k = \frac{1}{r} \begin{Bmatrix} b \\ b \\ b + a \sqrt{1+h^2} \\ b - a \sqrt{1+h^2} \end{Bmatrix}$$

où $h = \tan \theta + r'Y$, $b = V(\sin \theta - h \cos \theta)$ et a représente la célérité du son.

Le schéma (1.8), (1.8') $U_{j,i}^{n+1} = \mathcal{L}_Y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \mathcal{L}_X \left(\frac{\Delta t}{2} \right) U_{j,i}^n$ est stable si :

$$(1.9) \quad \Delta t \leq \Delta t_x = \text{Min} \left[\frac{\Delta X}{|V \cos \theta| + a} \right],$$

$$(1.10) \quad \Delta t \leq \Delta t_y = \text{Min} \left[\frac{r \Delta Y}{|b| + a \sqrt{1+h^2}} \right].$$

(*) La notation utilisée dans (1.7), (1.7') et plus loin dans (1.11) est symbolique. Les systèmes monodimensionnels sont écrits seulement pour introduire des opérateurs monodimensionnels de différences finies.

Cette condition de stabilité est moins restrictive que la condition de stabilité à laquelle est assujéti un schéma bidimensionnel, mais le schéma (1.8) n'est que du premier ordre du fait que les opérateurs $\mathcal{L}_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ et $\mathcal{L}_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ ne commutent pas.

On est donc amené à définir une autre décomposition du système (1.1') qui conduit à un schéma faisant appel à une suite commutative d'opérateurs pour que celui-ci soit du second ordre. D'autre part on divise l'écoulement en trois régions de maillages respectifs $\Delta X/2, \Delta Y$ (région 1); $\Delta X, \Delta Y$ (région 2) et $2\Delta X, \Delta Y$ (région 3) (figure 3) et on effectue dans chacune de ces régions une décomposition du système(1.1') de façon à ce qu'elle conduise à une suite d'opérateurs symétrique. On constate, compte-tenu des maillages choisis en pratique, que l'on a en général $\Delta t_x \leq \Delta t_y$, ce qui conduit à la décomposition suivante:

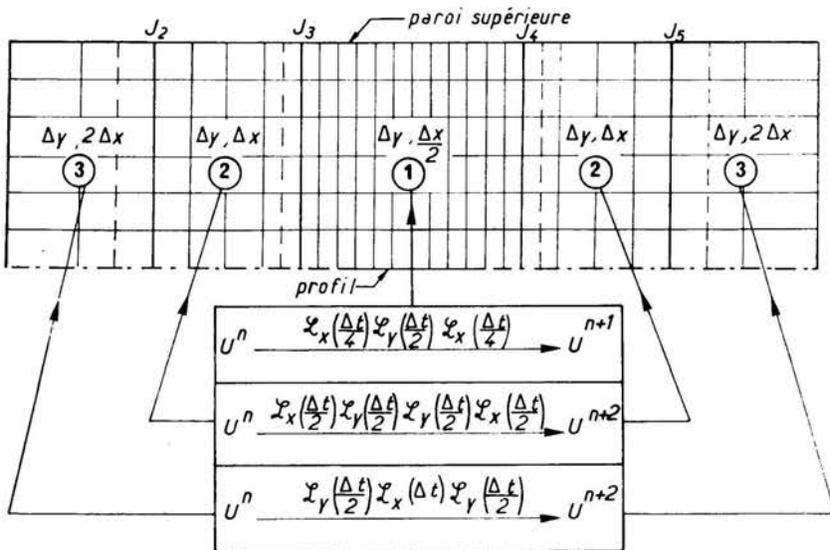


FIG. 3. Méthode à pas fractionnaires. Décomposition en opérateurs commutatifs.

dans la région 1: ($t^n \rightarrow t^{n+1}$)

$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad & (t^n \rightarrow t^{n+1/4}) \quad \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial X} = 0, \\
 & (t^{n+1/4} \rightarrow t^{n+3/4}) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \\
 & (t^{n+3/4} \rightarrow t^{n+1}) \quad \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial X} = 0;
 \end{aligned}$$

dans la région 2: ($t^n \rightarrow t^{n+2}$)

$$\begin{aligned}
 (1.11') \quad & (t^n \rightarrow t^{n+1/2}) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X} = 0, \\
 & (t^{n+1/2} \rightarrow t^{n+1}) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial Y} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t^{n+1} \rightarrow t^{n+3/2}) \quad & \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \\ (t^{n+3/2} \rightarrow t^{n+2}) \quad & \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X} = 0; \end{aligned}$$

dans la région 3: $(t^n \rightarrow t^{n+2})$

$$\begin{aligned} (1.11'') \quad (t^n \rightarrow t^{n+1/2}) \quad & \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \\ (t^{n+1/2} \rightarrow t^{n+3/2}) \quad & \frac{\partial U}{\partial t} + 2 \frac{\partial F}{\partial X} = 0, \\ (t^{n+3/2} \rightarrow t^{n+2}) \quad & \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial Y} = 0. \end{aligned}$$

Cette décomposition permet de discrétiser les systèmes (1.11), (1.11') et (1.11'') à l'aide de suites d'opérateurs commutatifs données sur la figure 3.

Il est clair que le raccord des solutions obtenues dans les régions 1 et 2 doit être fait tout d'abord au temps t^{n+1} . Pour qu'il en soit ainsi, l'application de ces opérateurs est réalisée dans la pratique en cinq étapes:

$$\begin{aligned} (1.12) \quad \text{dans la région 1:} \quad & \mathbf{U}_{j,i}^n \xrightarrow{\mathcal{L}_X(\frac{\Delta t}{4}) \mathcal{L}_Y(\frac{\Delta t}{2}) \mathcal{L}_X(\frac{\Delta t}{4})} \mathbf{U}_{j,i}^{n+1}, \\ \text{dans la région 2:} \quad & \mathbf{U}_{j,i}^n \xrightarrow{\mathcal{L}_X(\frac{\Delta t}{2}) \mathcal{L}_Y(\frac{\Delta t}{2})} \mathbf{U}_{j,i}^{n+1}, \\ \text{dans la région 1:} \quad & \mathbf{U}_{j,i}^{n+1} \xrightarrow{\mathcal{L}_X(\frac{\Delta t}{4}) \mathcal{L}_Y(\frac{\Delta t}{2}) \mathcal{L}_X(\frac{\Delta t}{4})} \mathbf{U}_{j,i}^{n+2}, \\ \text{dans la région 2:} \quad & \mathbf{U}_{j,i}^{n+1} \xrightarrow{\mathcal{L}_Y(\frac{\Delta t}{2}) \mathcal{L}_X(\frac{\Delta t}{2})} \mathbf{U}_{j,i}^{n+2}, \\ \text{dans la région 3:} \quad & \mathbf{U}_{j,i}^n \xrightarrow{\mathcal{L}_Y(\frac{\Delta t}{2}) \mathcal{L}_X(\Delta t) \mathcal{L}_Y(\frac{\Delta t}{2})} \mathbf{U}_{j,i}^{n+2}. \end{aligned}$$

Les couplages des régions 1 et 2 et des régions 2 et 3 nécessitent l'utilisation de quatre lignes $X = \text{const}$ intermédiaires (marquées en pointillés sur la figure 3) sur lesquelles les grandeurs sont calculées par interpolation linéaire.

Pour traiter un tel problème où l'on rencontre de forts gradients dans les régions du choc et du bord d'attaque, il est nécessaire d'introduire un terme de viscosité artificielle dans le schéma numérique: connaissant le vecteur $\mathbf{U}_{j,i}^{n+2}$ en tous les points du plan X, Y on calcule sa nouvelle valeur $\tilde{\mathbf{U}}_{j,i}^{n+2}$ par la relation suivante:

$$\begin{aligned} (1.13) \quad \tilde{\mathbf{U}}_{j,i}^{n+2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varphi_X + 2} (\varphi_X \mathbf{U}_{j,i}^{n+2} + \mathbf{U}_{j-1,i}^{n+2} + \mathbf{U}_{j+1,i}^{n+2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\varphi_Y + 2} (\varphi_Y \mathbf{U}_{j,i}^{n+2} + \mathbf{U}_{j,i-1}^{n+2} + \mathbf{U}_{j,i+1}^{n+2}) \right], \end{aligned}$$

où φ_X et φ_Y représentent des paramètres de pondération.

L'application de cette formule revient bien à introduire un terme de viscosité artificielle dans le schéma puisque l'erreur de troncature introduite par (1.13) est donnée par :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varphi_x + 2} \frac{\Delta X^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X^2} + \frac{1}{\varphi_y + 2} \frac{\Delta Y^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial Y^2} \right].$$

On a vu dans [6] et [7] que, dans le cas d'écoulements transsoniques stationnaires avec chocs, les valeurs prises pour les deux paramètres φ_x et φ_y étaient telles que cette erreur était du second ordre [$0(\Delta X^2)$ et $0(\Delta Y^2)$] dans les régions 2 et 3 et du premier ordre [$0(\Delta X)$ et $0(\Delta Y)$] dans la région du profil où ces paramètres étaient donc définis par :

$$(1.14) \quad 4(\varphi_x + 2) \frac{\Delta t}{\Delta X} \sim 0(1) \quad \text{et} \quad 4(\varphi_y + 2) \frac{\Delta t}{\Delta Y} \sim 0(1).$$

Ce qui importe, dans le problème considéré ici, c'est que ce terme de viscosité artificielle soit suffisamment faible pour ne pas cacher les perturbations instationnaires qui doivent être elles-mêmes petites. Pour qu'il en soit ainsi on peut définir les paramètres φ_x et φ_y en fonction des pas de progression ΔX et ΔY et du petit paramètre α représentant l'amplitude du mouvement de rotation du profil : en effet, d'après la relation (1.13), on a :

$$\tilde{\mathbf{U}}(X, Y, t) = \mathbf{U}(X, Y, t) + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta X^2}{\varphi_x + 2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial X^2} + \frac{\Delta Y^2}{\varphi_y + 2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial Y^2} \right].$$

La solution $\mathbf{U}(X, Y, t)$ sera de la forme :

$$\mathbf{U}(X, Y, t) = \mathbf{U}^0(X, Y) + \hat{\mathbf{U}}(X, Y, t)$$

(suivant les notations adoptées au début de ce paragraphe) et les perturbations instationnaires $\hat{\mathbf{U}}(X, Y, t)$ étant supposées petites seront a priori de la forme :

$$\hat{\mathbf{U}}(X, Y, t) = \alpha \hat{\mathbf{U}}^{(1)}(X, Y, t) + 0(\alpha^2).$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}(X, Y, t) = \mathbf{U}^0(X, Y) + \alpha \hat{\mathbf{U}}^{(1)}(X, Y, t) + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta X^2}{\varphi_x + 2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^0}{\partial X^2} + \frac{\Delta Y^2}{\varphi_y + 2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^0}{\partial Y^2} \right] + 0(\alpha^2) \\ + 0 \left(\frac{\alpha \Delta X^2}{2(\varphi_x + 2)}, \frac{\alpha \Delta Y^2}{2(\varphi_y + 2)} \right). \end{aligned}$$

Pour que le terme prédominant $\alpha \hat{\mathbf{U}}^{(1)}$ des perturbations instationnaires ne soit pas effacé par cette formule de lissage ou encore pour que $\tilde{\mathbf{U}}(X, Y, t)$ soit également de la forme :

$$\tilde{\mathbf{U}}(X, Y, t) = \mathbf{U}^0(X, Y) + \alpha \mathbf{U}'_1(Y, X, t) + 0(\alpha^2),$$

il faut donc que le terme de viscosité artificielle soit de l'ordre de α^2 , c'est-à-dire que les paramètres φ_x et φ_y doivent être choisis de telle sorte que :

$$(1.15) \quad \frac{\Delta X^2}{2(\varphi_x + 2)} \sim 0(\alpha^2) \quad \text{et} \quad \frac{\Delta Y^2}{2(\varphi_y + 2)} \sim 0(\alpha^2).$$

Les conditions (1.14) et (1.15) peuvent, dans certains cas, conduire à des valeurs assez différentes de ces paramètres. En d'autres termes, d'une façon générale, le calcul de l'écoulement instationnaire nécessite un terme de viscosité artificielle plus faible que celui du

calcul de l'écoulement stationnaire. Les paramètres de pondération seront donc choisis tout d'abord de façon à satisfaire les conditions (1.14) dans la région 1, puis on fera varier ceux-ci linéairement pendant la période transitoire (qui sera définie ci-dessous au paragraphe 2) de façon à aborder le calcul de l'écoulement instationnaire proprement dit avec des valeurs compatibles avec les conditions (1.15).

2. Conditions sur les frontières

2.1. Conditions sur les frontières inférieure ($Y = 0$) et supérieure ($Y = 1$)

2.1.1 Conditions sur le profil. On rappelle que l'on calcule successivement trois écoulements autour du profil :

l'écoulement stationnaire asymptotique non isentropique (vitesse normale V_N nulle sur le profil, $t \leq t_0$) ;

l'écoulement instationnaire transitoire ($t_0 \leq t \leq t_1$) pendant lequel on fait varier V_N continument de la valeur zéro à celle correspondant au mouvement harmonique afin de ne pas lui imposer une variation brutale. Plus précisément $\varphi(t)$ est déterminé pendant cette période transitoire en s'imposant les conditions suivantes: $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0$ (état stationnaire à l'instant t_0) et $\varphi(t_1) = 0$, $\varphi'(t_1) = \alpha\omega$, $\varphi''(t_1) = 0$ (mise en mouvement harmonique à l'instant t_1).

Les fonctions $\varphi(t)$ et $\Omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ (intervenant dans la relation (1.2)₂ donnant $V_N = \mathbf{V}_e \cdot \mathbf{n}$) sont définies ici par la solution polynomiale:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha\omega(t_1 - t_0)z^3(-3z^2 + 7z - 4), \\ \Omega(t) &= \alpha\omega z^2(-15z^2 + 28z - 12), \end{aligned}$$

où $z(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$.

l'écoulement instationnaire proprement dit dû au mouvement oscillatoire harmonique donné ($t \geq t_1$)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha \sin \omega(t - t_1), \\ \Omega(t) &= \alpha\omega \cos \omega(t - t_1). \end{aligned}$$

2.1.2 Conditions sur l'axe: pendant la première phase (calcul de l'écoulement stationnaire): on a les conditions de symétrie et d'antisymétrie d'un écoulement stationnaire:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U_i(X, -Y, t) &= U_i(X, Y, t) \quad \text{avec } i = 1, 2, 4, \\ U_3(X, 0, t) &= 0; \end{aligned}$$

pendant les deux phases suivantes (calcul de l'écoulement transitoire et de l'écoulement instationnaire) il faut distinguer deux régions:

a) régions en amont du profil et en aval du sillage: d'après les conditions de symétrie et d'antisymétrie (relation 4), les composantes U_1 , U_2 et U_4 sont stationnaires:

$$(2.4) \quad U_i(X, 0, t) = U_i^0(X, 0) \quad (\text{pour } i = 1, 2, 4)$$

et la composante U_3 est déterminée en tenant compte de la symétrie de \hat{U}_3 (1.4)₂.

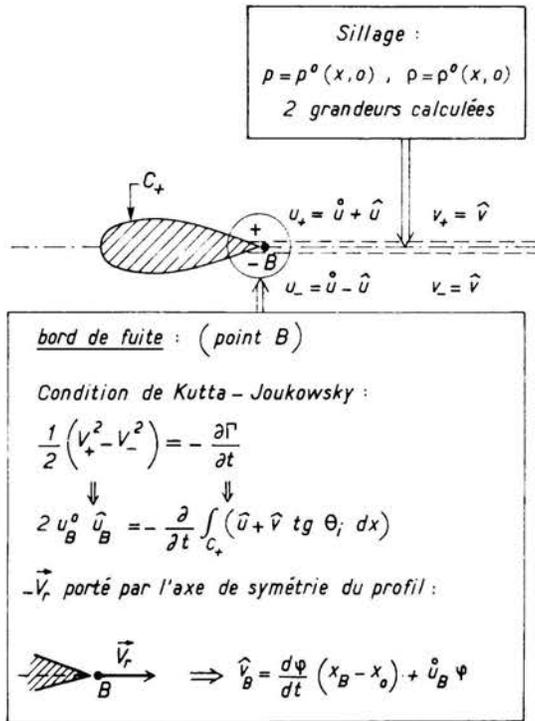


FIG. 4. Conditions au bord de fuite et sur le sillage.

b) *bord de fuite et sillage* En chaque point du sillage que l'on suppose confondu avec l'axe de la tuyère (figure 4) les composantes de la vitesse u (suivant x) et v (suivant y), la pression p et la masse volumique ρ répondent aux conditions de symétrie et d'anti-symétrie:

$$(2.4') \quad \begin{aligned} u_+ &= u^o + \hat{u}, & v_+ &= \hat{v}, & p_+ &= p^o + \hat{p}, & \rho_+ &= \rho^o + \hat{\rho} \\ u_- &= u^o - \hat{u}, & v_- &= \hat{v}, & p_- &= p^o - \hat{p}, & \rho_- &= \rho^o - \hat{\rho} \end{aligned}$$

où l'indice 0 est relatif à l'état stationnaire.

On écrit l'équation de Bernoulli en deux points de part et d'autre du sillage et on suppose que l'entropie est continue à la traversée de celui-ci. On obtient alors par différence (p et ρ étant localement continus):

$$(2.5) \quad \frac{1}{2} (V_+^2 - V_-^2) = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi^+ - \phi^-) = - \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

où ϕ et Γ représentent respectivement le potentiel et la circulation autour du profil.

Au bord de fuite, ou plus précisément au point B , premier point du maillage sur l'axe en aval du bord de fuite ($u_B^o \neq 0$), on utilise l'équation (2.5) sous la forme:

$$(2.5') \quad 2u_B^o \hat{u}_B = - \frac{d\Gamma}{dt}$$

$\left(\frac{1}{2}(V_+^2 - V_-^2) = 2u^\circ \hat{u}\right)$ d'après les conditions (2.4'), pour déterminer \hat{u}_B connaissant la circulation autour du profil $\Gamma = \phi_+ - \phi_-$ qui est donnée par $2 \int_{C^+} (\hat{u} + \hat{v}_i \operatorname{tg} \theta) dx$, compte tenu des conditions de symétrie et d'antisymétrie relatives aux composantes de la vitesse sur le profil. On détermine d'autre part v_B en considérant qu'au point B le vecteur vitesse relative \mathbf{v}_r est porté par l'axe de symétrie du profil, dans le système d'axes relatif lié au profil. On obtient ainsi:

$$(2.6) \quad \hat{v}_B = \frac{d\varphi}{dt}(x_B - x_0) + u_B^\circ \varphi;$$

sur le sillage on a, comme au bord de fuite;

$$p(X, 0, t) = p^\circ(X, 0), \quad \varrho(X, 0, t) = \varrho^\circ(X, 0)$$

et la détermination des composantes u et v (ou U_2 et U_3) sera précisée un peu plus loin.

Le procédé de résolution sur la frontière $Y = 0$ est donc le suivant :

α) pendant la première phase:

Les opérateurs \mathcal{L}_{xy} sont appliqués comme sur les autres lignes $Y = \text{const}$ mais en tenant compte de la condition de glissement $\theta = \theta_i(X)$ sur le profil.

On calcule tout d'abord les quatre composantes de \mathbf{U} par application de \mathcal{L}_x et on en déduit les nouvelles valeurs des composantes U_2 et U_3 :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \bar{U}_2 &= \sqrt{U_2^2 + U_3^2} \cos \theta, \\ \bar{U}_3 &= \sqrt{U_2^2 + U_3^2} \sin \theta, \end{aligned}$$

avec $\theta = \theta_i(X)$ (profil) et $\theta = 0$ (axe).

L'opérateur \mathcal{L}_y n'est pas utilisé sur cette frontière mais les composantes du vecteur \mathbf{U} sont déterminées par extrapolation parabolique sur le profil en tenant compte de la condition de glissement et par interpolation parabolique sur l'axe (conditions de symétrie (2.3)₁) suivant les lignes $X = \text{const}$.

β) pendant les deux phases suivantes:

sur le profil:

Le procédé de résolution est le même que celui défini dans la première phase, si ce n'est que la valeur de θ qui intervient dans (2.7) est donnée cette fois par la relation (1.3), dans laquelle on prend:

$$V = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2}}{U_1} \quad \text{et} \quad \varphi(t) \quad \text{et} \quad \Omega(t)$$

sont fournies par les relations (2.1) (deuxième phase) ou (2.2) (troisième phase).

sur l'axe:

a) régions en amont du profil et en aval du sillage:

Les trois composantes U_1 , U_2 et U_4 sont données par (2.4). Pour déterminer la composante U_3 , les opérations faisant intervenir \mathcal{L}_x ne sont pas modifiées mais celles portant sur \mathcal{L}_y sont remplacées par la condition de symétrie relative à \hat{U}_3 (1.4)₂. On obtient par interpolation parabolique:

$$(2.8) \quad (U_3)_{j,0} = \frac{4[(U_3)_{j,1} - (U_3^\circ)_{j,1}] - [(U_3)_{j,2} - (U_3^\circ)_{j,2}]}{3}.$$

b) bord de fuite et sillage:

On obtient au bord de fuite, par discrétisation de la condition de Kutta-Joukowski (2.5'), la valeur de \hat{u}_B^{n+2} connaissant \hat{u}_B^n et la circulation sur le profil aux temps $t^n = n\Delta t$ et $t^{n+2} = (n+2)\Delta t$:

$$(2.5'') \quad \hat{u}_B^{n+2} = \hat{u}_B^n \left(\frac{\overline{\Delta X} - 2u_B^0 \Delta t}{\overline{\Delta X} + 2u_B^0 \Delta t} \right) - 2 \left(\frac{K_A^{n+2} - K_A^n}{2u_B^0 \Delta t + \overline{\Delta X}} \right),$$

$$\text{avec } K_A = \int_0^{x_A} (\hat{u} + \hat{v} \operatorname{tg} \theta_i) dx + \frac{\Delta X}{2} \hat{u}_A \quad \text{et} \quad \overline{\Delta X} = \frac{\Delta X}{2},$$

où l'indice A est relatif au dernier point de calcul sur le profil. La perturbation \hat{v}_B est donnée par (2.6) et on en déduit les composantes U_2 et U_3 au point B:

$$U_2^{n+2} = \varrho_B^0 u_B^{n+2} r \quad (\text{avec } u_B = u_B^0 + \hat{u}_B) \quad \text{et} \quad U_3^{n+2} = \varrho_B^0 \hat{v}_B^{n+2} r.$$

sur le sillage:

Les composantes U_2 et U_3 sont calculées de la façon suivante: les opérations faisant intervenir \mathcal{L}_X ne sont pas modifiées, mais au lieu de discrétiser l'équation:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial Y} = 0,$$

on obtient U_2 par extrapolation parabolique et U_3 par interpolation parabolique (2.8).

On a par ailleurs au point B et sur le sillage: $U_1 = \varrho^0 r$ et $U_4 = \frac{p^0 r}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{U_2^2 + U_3^2}{\varrho^0 r}$.

2.1.3 Conditions sur la frontière $Y = 1$. Le procédé de résolution sur cette frontière est le même pour les trois phases de calcul:

on applique sans modification les opérateurs \mathcal{L}_X en calculant tout d'abord les trois composantes U_1 , U_2 et U_4 puis $U_3 = U_2 \operatorname{tg} \theta_s(X)$ et au lieu d'appliquer l'opérateur \mathcal{L}_Y on calcule les composantes du vecteur \mathbf{U} par extrapolation parabolique en tenant compte de la condition de glissement $U_3 = U_2 \operatorname{tg} \theta_s(X)$.

Les valeurs ainsi obtenues sur ces frontières au temps t^{n+2} (avec $n = 2, 4, 6$, etc...) deviennent après lissage (celui-ci ne faisant appel qu'aux points de la frontière considérée)

$$(1.13') \quad \tilde{\mathbf{U}}_{j,l}^{n+2} = \frac{1}{\varphi_X + 2} (\varphi_X \mathbf{U}_{j,l}^{n+2} + \mathbf{U}_{j-1,l}^{n+2} + \mathbf{U}_{j+1,l}^{n+2}),$$

exception faite des composantes U_1 , U_2 et U_4 qui sont connues sur l'axe lors des deux dernières phases: $U_i(X, 0, t) = U_i^0(X, 0)$ (en amont du profil et en aval du sillage).

Un traitement particulier tenant compte des conditions au bord d'attaque est employé pendant la première phase du calcul: les valeurs d'arrêt U^A de l'état stationnaire en ce point sont utilisées pour corriger les valeurs obtenues aux deux points E_1 et E_2 du maillage situés de part et d'autre du point E (sur la frontière $Y = 0$) dans la formule (1.13') (figure 5).

On utilise en ces deux points les formules de lissage suivantes:

en E_1 :

$$(2.9) \quad \tilde{\mathbf{U}}_{k-1,0}^{n+2} = \frac{1}{\varphi_X + 2} \{ \varphi_X \mathbf{U}_{k-1,0}^{n+2} + 2[\omega_1 \mathbf{U}_{k-2,0}^{n+2} + (1 - \omega_1) \mathbf{U}^E] \},$$

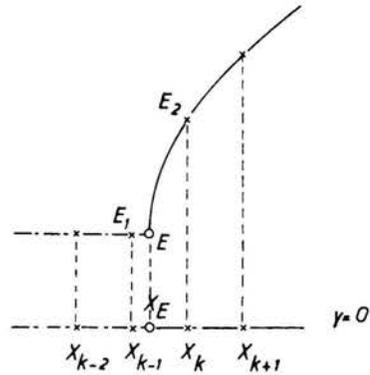


FIG. 5. Traitement des deux points voisins du bord d'attaque.

en E_2 :

$$(2.10) \quad \tilde{U}_{k,0}^{n+2} = \frac{1}{\varphi_X + 2} \{ \varphi_X U_{k,0}^{n+2} + 2[\omega_2 U^E + (1 - \omega_2) U_{k+1,0}^{n+2}] \},$$

avec

$$\omega_1 = \frac{X_E - X_{k-1}}{X_E - X_{k-2}}, \quad \omega_2 = \frac{X_{k+1} - X_k}{X_{k+1} - X_E}, \quad U^E = U^A.$$

Lors des deux phases de calcul suivantes, la vitesse d'entraînement V_e , au point E , se réduit à sa composante verticale v_e : $V_e = v_e = \Omega(t) (x_E - x_0)$ et le vecteur U^E est alors défini par:

$$U^E = r \left\{ \begin{array}{l} \rho^A \\ -\rho^A V_e \sin \varphi \\ \rho^A V_e \cos \varphi \\ \frac{p^A}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\rho^A V_e^2}{2} \end{array} \right\}.$$

Les formules (2.9) et (2.10) seront respectivement utilisées en E_1 (pour U_3 seulement) et en E_2 .

2.2. Conditions sur les frontières amont ($X = 0$) et aval ($X = X_{max}$)

Pour le problème instationnaire considéré ici, il est nécessaire de considérer les domaines de dépendance physique dans les sections d'entrée et de sortie pour déterminer le nombre de variables que l'on peut se fixer dans ces sections. Reportons nous donc aux systèmes (1.11'') d'équations monodimensionnelles utilisées dans la région 3 en amont et en aval de la tuyère et plus précisément au système (1.11'')₂:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 2 \frac{\partial F}{\partial X} = 0,$$

dont les caractéristiques sont définies par:

$$\frac{dX}{dt} = 2 \begin{Bmatrix} V \cos \theta \\ V \cos \theta \\ V \cos \theta + a \\ V \cos \theta - a \end{Bmatrix}.$$

Si l'écoulement est subsonique dans la section d'entrée (figure 6a), il est clair que l'on peut se donner trois grandeurs dans cette section (étant donné que les informations ne proviennent de l'aval que par la caractéristique C^-) mais qu'il faut calculer la quatrième.

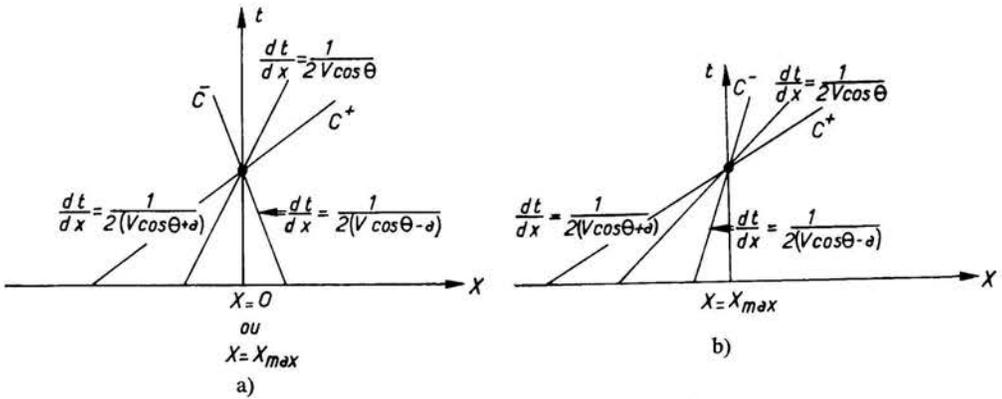


FIG. 6. Caractéristiques du système $\frac{\partial U}{\partial t} + 2 \frac{\partial F}{\partial X} = 0$.

- a) Domaine de dépendance (écoulement subsonique).
- b) Domaine de dépendance (écoulement supersonique).

De la même façon dans la section de sortie:

si l'écoulement est subsonique (fig. 6a) on ne peut se donner qu'une seule grandeur et il faut calculer les trois autres (qui doivent être compatibles avec la première),

si l'écoulement est supersonique (fig. 6b) il faut calculer les quatre grandeurs.

Le procédé de résolution est donc le suivant:

a) sur la frontière aval ($X = X_{max}$):

On utilise le schéma $U^{n+3/2} = \mathcal{L}_X(\Delta t)U^{n+1/2}$ pour calculer les composantes U_i dans la section de sortie ($i = 1, 2, 3$ et p_∞ donné si l'écoulement est subsonique; $i = 1, 2, 3, 4$ si l'écoulement est supersonique) en utilisant deux fois une différence retardée pour approcher $\partial F/\partial X$ dans le schéma. On applique d'autre part l'opérateur $\mathcal{L}_Y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ pour calculer les 3 (ou 4) composantes du vecteur U (suivant $X = X_{max}$) et les grandeurs calculées sur cette frontière, au temps t^{n+2} , sont lissées comme les valeurs obtenues aux points intérieurs:

$$(1.13'') \quad \tilde{U}_{j,i}^{n+2} = \frac{1}{\varphi_Y + 2} (\varphi_Y U_{j,i}^{n+2} + U_{j,i-1}^{n+2} + U_{j,i+1}^{n+2}).$$

b) sur la frontière amont ($X = 0$):

Si l'on considère l'écoulement dans un canal dont la paroi a une pente nulle (comme dans les applications présentées ici) ou dans une tuyère dont la paroi a également une pente nulle dans la section d'entrée, on pourra se donner dans cette section les grandeurs suivantes $\theta = 0$, M_∞ et p_∞ . Dans ces conditions le gradient $\frac{\partial G}{\partial Y}$ est nul dans la section d'entrée (relations (1.6')). Il suffit donc d'utiliser une équation du système monodimensionnel $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial X} = 0$, au lieu de passer par le système à pas fractionnaires (1.11''), pour calculer la quatrième grandeur, par exemple U_1 , au temps t^{n+2} , connaissant celle-ci au temps t^n . On discrétise cette équation à l'aide du schéma aux différences décentrées du second ordre [12]:

$$\begin{aligned} \overline{(U_1)_{0,t}^{n+2}} &= (U_1)_{0,t}^n - \frac{\Delta t}{\Delta X} ((F_1)_{1,t}^n - (F_1)_{0,t}^n), \\ (U_1)_{0,t}^{n+2} &= \frac{1}{2} \left\{ (U_1)_{0,t}^n + \overline{(U_1)_{0,t}^{n+2}} - \frac{\Delta t}{\Delta X} [(F_1)_{1,t}^{n+2} - \overline{(F_1)_{0,t}^{n+2}}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta t}{\Delta X} [(F_1)_{2,t}^n - 2(F_1)_{1,t}^n + (F_1)_{0,t}^n] \right\}. \end{aligned}$$

On a, d'autre part, en chaque point de cette section:

$$U_2 = \sqrt{kU_1}, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = \frac{p_\infty r}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}k, \quad \text{avec} \quad k = \gamma p_\infty M_\infty^2 r.$$

Le procédé de calcul ainsi utilisé dans les sections d'entrée et de sortie, qui est plus simple que celui qui consiste à employer des relations de compatibilité suivant les caractéristiques [13] [14], s'est avéré satisfaisant à condition d'introduire dans la formule de lissage de la grandeur calculée dans la section d'entrée, un terme de convection $\partial U / \partial X$, correspondant à une propagation des perturbations vers l'amont, en plus du terme de dissipation $\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}$ figurant déjà dans (1.13'')

$$(1.13''') \quad \begin{aligned} \tilde{U}_1)_{0,t}^{n+2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\varphi_Y + 2} [\varphi_Y (U_1)_{0,t}^{n+2} + (U_1)_{0,t+1}^{n+2} + (U_1)_{0,t-1}^{n+2}] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varphi_X + 2} [\varphi_X (U_1)_{0,t}^{n+2} + (U_1)_{1,t}^{n+2} + (U_1)_{0,t}^{n+2}] \right\}. \end{aligned}$$

(On vérifie en effet que les premiers termes du développement de Taylor du second membre font apparaître ces termes de dissipation et de convection:

$$\tilde{U}_1(0, Y, t) = U_1(0, Y, t) + \frac{1}{2(\varphi_Y + 2)} \Delta Y^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial Y^2} + \frac{1}{2(\varphi_X + 2)} \Delta X \frac{\partial U_1}{\partial X}.$$

3. Résultats

3.1. Exemples traités et définitions

Les résultats présentés concernent des calculs d'écoulements sur un profil biconvexe de longueur c , d'épaisseur e , placé dans un canal dont la demi-hauteur h est constante

(fig. 7). Le profil est animé d'un mouvement harmonique, autour d'un axe fixe passant par son centre, de fréquence réduite k et d'amplitude α .

Les conditions de calcul sont les suivantes:

$$\gamma = 1,4, \quad M_\infty = 0,85, \quad \frac{e}{c} = 8,4\%, \quad \frac{h}{c} = 2, \quad k = \frac{\omega c}{V} = 1,6; \quad \alpha = 1^\circ 5 \text{ et } 3^\circ.$$

Le maillage (X, Y) est de 91 (dont 34 sur le profil) points sur 17 points. Les calculs ont été effectués sur CII IRIS 80.

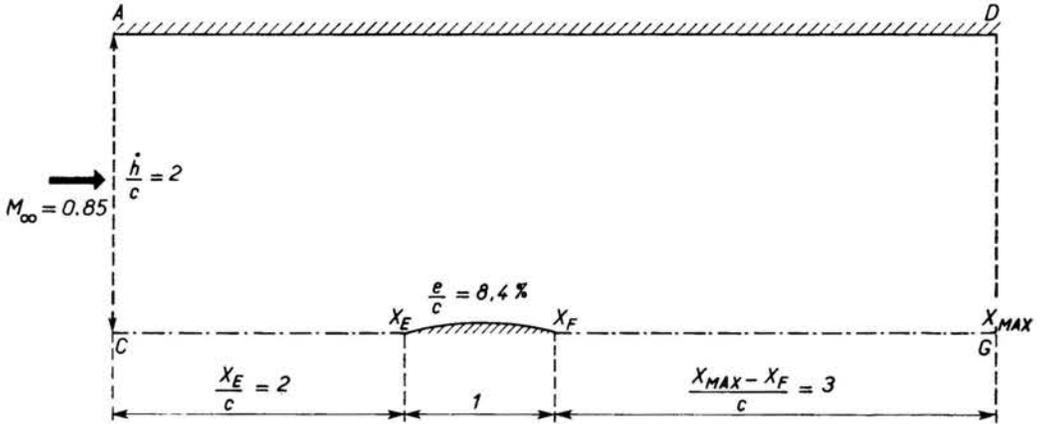


FIG. 7. Profil biconvexe placé dans un canal.

On définit les coefficients de force normale et de moment, que l'on note C_N^+ et M^+ , ne faisant intervenir que la valeur de la pression $p^+ = p(X, 0, t)$ calculée d'un côté du profil (extrados):

$$C_N^+(t) = K_\infty \int_{C_+} [p(X, 0, t) - p^\circ(X, 0, t_0)] dX = \bar{C}_N^+(t) - \bar{C}_N^+(t_0), \quad (3.1)$$

$$M^+(t) = K_\infty \int_{C_+} f(X) [p(X, 0, t) - p^\circ(X, 0, t_0)] dX = \bar{M}^+(t) - \bar{M}^+(t_0),$$

avec $K_\infty = \frac{2}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2}$ et $f(X) = (X - X_0) + Y_i(X) \operatorname{tg} \theta_i(X)$.

3.2. Phase stationnaire

On considère que l'état stationnaire est obtenu sur le profil lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites pendant vingt itérations successives ($2\Delta t$ entre deux itérations):

$$-\Delta \bar{C}_N^+ = |\bar{C}_N^+(t+2\Delta t) - \bar{C}_N^+(t)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta \bar{M}^+ = |\bar{M}^+(t+2\Delta t) - \bar{M}^+(t)| \leq \varepsilon,$$

avec $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ ($0(\Delta X^2)$).

$-\Delta \bar{C}_N^+$ et $\Delta \bar{M}^+$ sont décroissants.

Les quantités $I(t) = \frac{\bar{C}_N^+(t)}{C}$ et $J(t) = \frac{-\bar{M}^+(t)}{S}$ (où S est la surface du profil) sont

représentées en fonction du temps sur la figure 8. L'état stationnaire est obtenu sur le profil au bout de 620 itérations, ce qui représente un calcul d'environ 90 minutes.

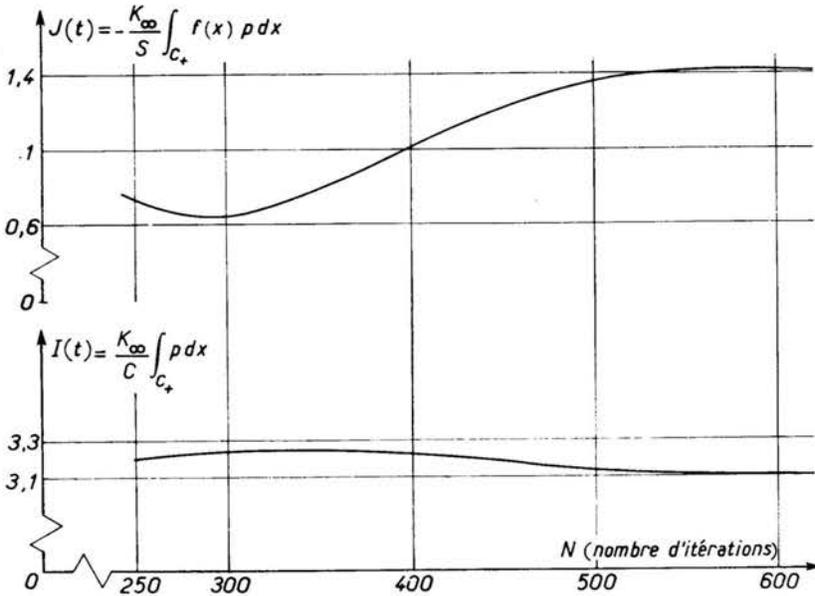


FIG. 8. Obtention de l'état stationnaire. Evolution des intégrales $I(t)$ et $J(t)$ en fonction du temps.

3.3. Phase transitoire

Le profil est ensuite animé d'un mouvement instationnaire transitoire (relation (2.1)) pendant cent itérations ($2\Delta t$ entre deux itérations) ce qui correspond approximativement à une demi-période $\left(\frac{\omega(t_1 - t_0)}{\pi} \sim 1\right)$ du mouvement harmonique. Il faut bien préciser que cette phase transitoire, introduite pour éviter une variation brutale de la vitesse normale V_N à un instant donné, est effectivement nécessaire pour la fréquence étudiée ($k = 1,6$) étant donné que V_N est alors proportionnelle à α à l'instant t_1 (on pourrait vraisemblablement imposer brutalement un mouvement harmonique si l'on étudiait des fréquences faibles ($k \leq 0,2$) pour lesquelles V_N serait proportionnelle à α^2). Il importe de souligner que cette phase transitoire permet d'éviter l'apparition d'oscillations dans les résultats numériques au début de la phase instationnaire proprement dite et que par ailleurs les essais effectués sur sa durée ont montré qu'elle n'avait pas d'incidence sur les résultats instationnaires (dès que $\frac{\omega(t - t_1)}{\pi} \geq \frac{1}{2}$).

3.4. Phase instationnaire

3.4.1. Analyse des résultats. Les répartitions de pression sur le profil, relatives à l'état stationnaire et à quatre instants du mouvement harmonique d'amplitude $\alpha = 3^\circ$, sont représentées sur la figure 9. On constate qu'aux instants 1 et 2, qui correspondent

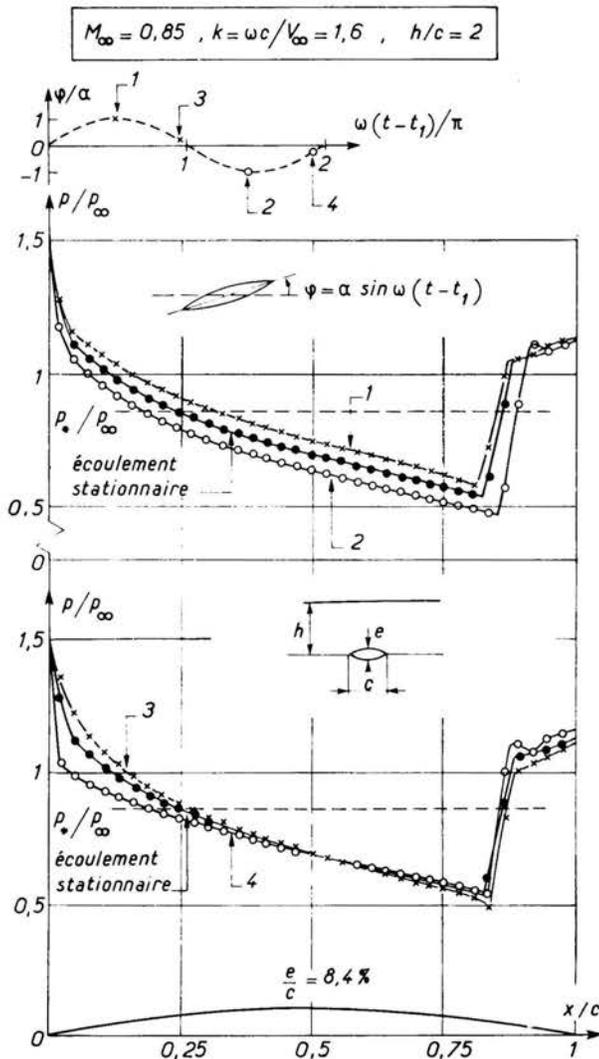


FIG. 9. Ecoulement instationnaire autour d'un profil oscillant ($\alpha = 3^\circ$) autour de son centre.

approximativement à deux maxima relatifs de l'angle de rotation du profil et du coefficient de force normale C_N^+ (fig. 10), les répartitions de pression sont pratiquement symétriques par rapport à la répartition de pression stationnaire en amont de la zone de choc (pour $x/c < 0,8$) mais que, par contre, les deux positions correspondantes du choc ne sont pas symétriques par rapport à sa position stationnaire. Aux instants 3 et 4, qui correspondent approximativement à deux maxima relatifs du moment M^+ (fig. 10) et pour lesquels le profil est voisin de sa position moyenne, on remarque que la pression subit une variation relativement importante par rapport à sa valeur stationnaire dans la partie avant du profil ($x/c < 0,25$) alors que les deux positions instationnaires du choc sont très voisines de sa position stationnaire.

La figure 10, sur laquelle sont représentées les évolutions des coefficients de force normale C_N^+ et de moment M^+ (définis par (3.1)) en fonction du temps, montre que ceux-ci ont une allure nettement périodique (du moins au bout d'une période $\omega(t-t_1)/\pi > 2$) — le C_N^+ est presque en phase avec l'angle de rotation φ du profil —, le moment M^+ est approximativement déphasé d'une demi-période par rapport à φ — et que le régime permanent semble pratiquement établi dès la deuxième période.

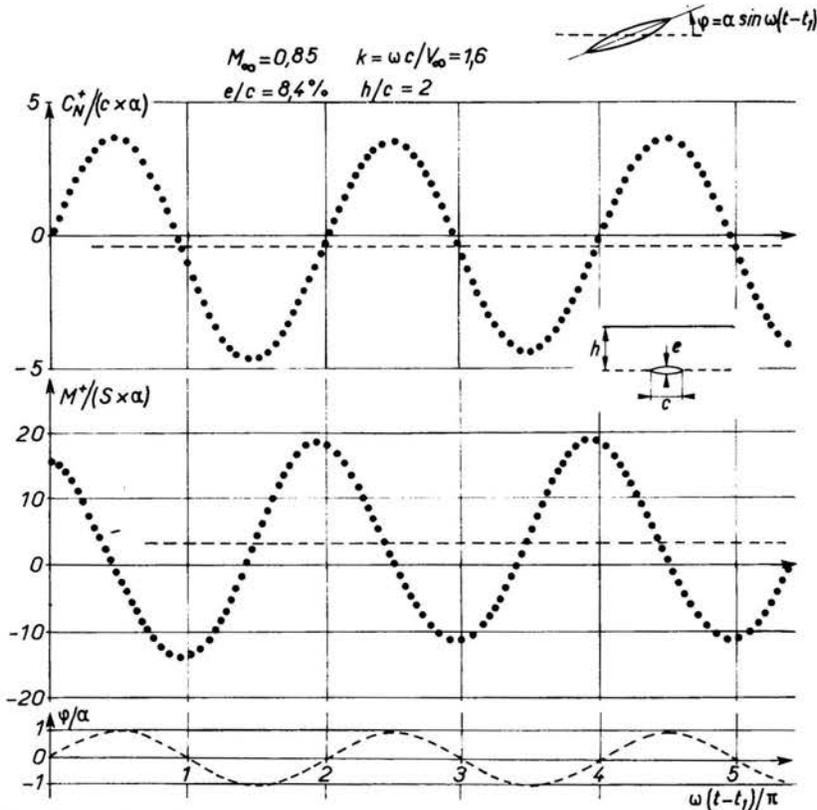


FIG. 10. Écoulement instationnaire autour d'un profil oscillant ($\alpha = 3^\circ$) autour de son centre. Evolutions des coefficients de force normale (C_N^+) et de moment (M^+) en fonction du temps.

Avant de préciser ces résultats qualitatifs par une analyse de Fourier, on notera tout d'abord que ces forces instationnaires ne sont pas symétriques par rapport à leurs valeurs stationnaires nulles (profil symétrique sans incidence) mais que l'on obtient en fait pour valeurs moyennes $(C_N^+)^0 / (c\alpha) = -0,451$ et $(M^+)^0 / (S\alpha) = 3,386$ si l'on calcule celles-ci sur une ou deux périodes.

Si l'écoulement vérifiait exactement les propriétés de symétrie et d'antisymétrie, on devrait avoir :

$$C_N = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \int (p^+ - p^-) dx = C_N^+$$

(défini en (3.1)) puisque on aurait alors $p^+ - p^- = 2(p^+ - p^0)$ et de même

$$M = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} \int f(X) [p^+ - p^-] dX = M^+$$

et en régime oscillatoire établi les valeurs moyennes devraient être nulles, ce qui n'est pas le cas sur la figure 10; en effet ces propriétés ne peuvent être vérifiées dans la région du choc, comme on le voit sur la figure 9. Aussi est-il plus correct de définir la pression côté intrados obtenue à une incidence φ comme étant égale à la pression calculée à l'extrados à l'incidence $-\varphi$, ce qui est rigoureusement vérifié en régime établi. De cette façon on retrouve bien pour le coefficient de force normale C_N et du moment M des valeurs moyennes nulles en utilisant les résultats numériques sur une seule période. Notons que les hypothèses de symétrie et d'antisymétrie faites au départ n'interviennent ainsi dans le calcul numérique que par certaines conditions aux limites sur l'axe $Y = 0$ (2.1)₂.

L'influence de l'amplitude du mouvement sur les forces instationnaires a été étudiée en effectuant un autre calcul pour $\alpha = 1,5^\circ$. La figure 11 montre que les coefficients de force normale et du moment sont des fonctions quasi-linéaires de l'amplitude α . De façon plus précise, la loi de variation du coefficient de force normale C_N^+ en fonction du temps étant

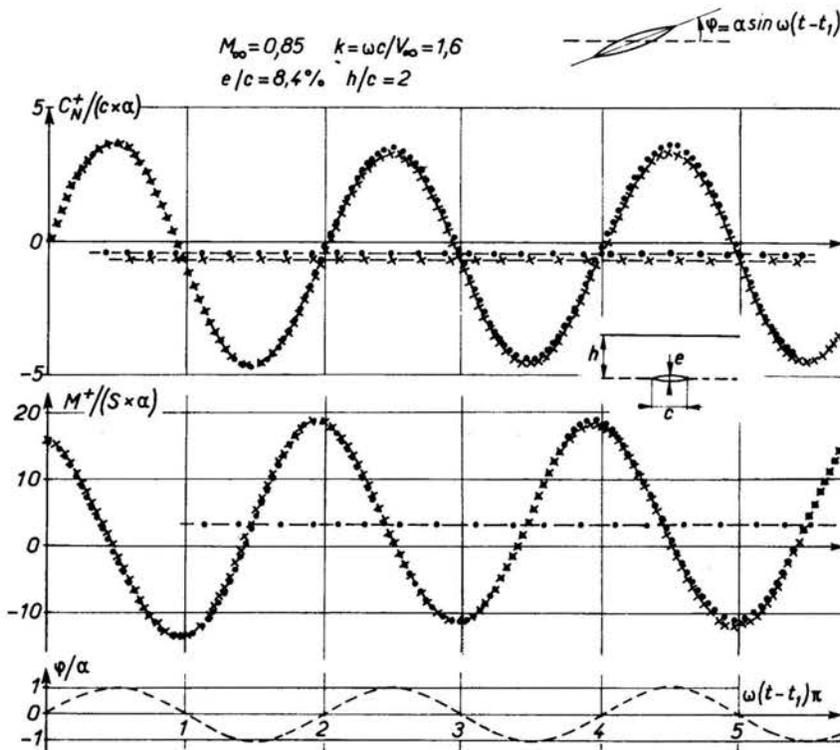


FIG. 11. Evolutions des coefficients de force normale (C_N^+) et de moment (M^+) en fonction du temps, sur un profil oscillant, pour deux valeurs de l'amplitude: $\bullet \alpha = 3^\circ$, $\times \alpha = 1,5^\circ$.

de la forme: $\frac{C_N^+}{C\alpha} = (\overline{C_N^+})^\circ + (\overline{C_N^+})^1(t)$, on peut constater que les deux variations de $\frac{C_N^+}{C\alpha}$ en fonction du temps ne diffèrent que par leurs valeurs moyennes ($(\overline{C_N^+})^\circ \approx \frac{(C_N^+)^0}{C\alpha} \approx -0,45$ pour $\alpha = 3^\circ$ et $(\overline{C_N^+})^\circ \approx -0,7$ pour $\alpha = 1,5^\circ$) mais que $(\overline{C_N^+})^1(t)$ est pratiquement indépendant de l'amplitude.

3.4.2. Interprétation des résultats par analyse de Fourier. L'analyse de Fourier des forces instationnaires, obtenues pour un mouvement harmonique d'amplitude $\alpha = 3^\circ$, a été effectuée sur une période de leur mouvement en ne retenant que les quatre premières harmoniques :

$$f^+ \left(\frac{\bar{t}}{T} \right) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=4} a_i \sin \left(\frac{2\pi i \bar{t}}{T} + \phi_i \right),$$

où $\bar{t} = t - t_F$ avec $\frac{\omega(t_F - t_1)}{\pi} \approx 2$ pour le C_N^+ et $\frac{\omega(t_F - t_1)}{\pi} \sim 3,38$ pour le moment M^+ (fig. 12).

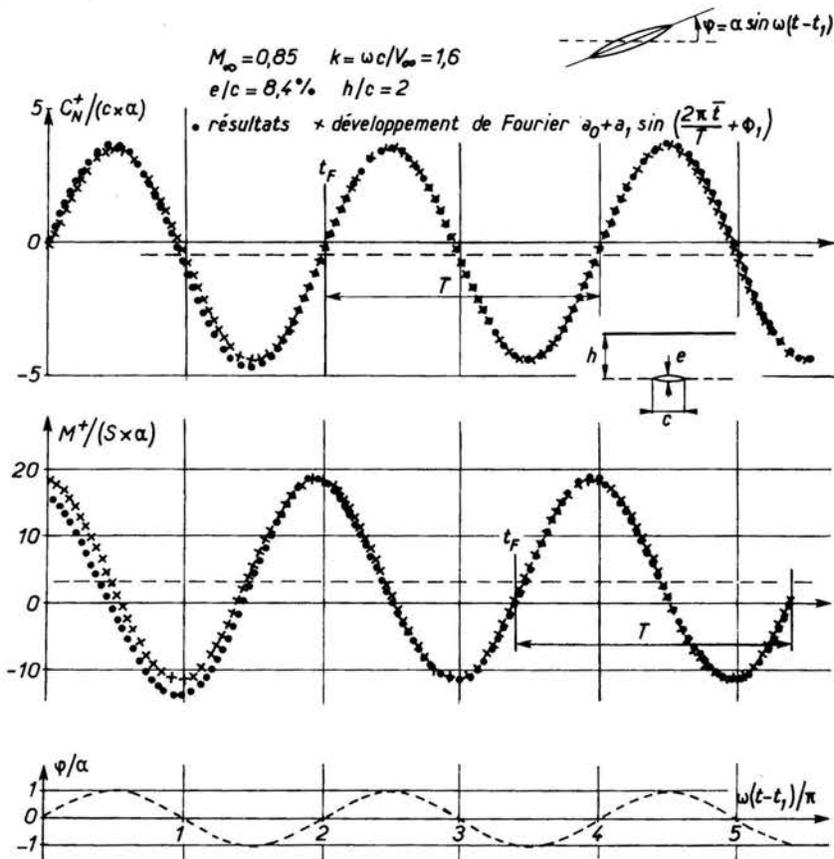


FIG. 12. Evolutions des coefficients de force normale (C_N^+) et de moment (M^+) en fonction du temps sur un profil oscillant ($\alpha = 3^\circ$) autour de son centre.

Les coefficients obtenus figurent dans le Tableau 1.

Tableau 1

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
$C_N^+/(C \cdot \alpha)$	-0,451	3,969	0,035	0,006	0,002
$M^+/(S \cdot \alpha)$	3,386	15,005	0,679	0,030	0,040
		ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
$C_N^+/(C \cdot \alpha)$		0,075	0,897	0,576	1,519
$M^+/(S \cdot \alpha)$		-0,232	-1,321	0,369	0,095

Cette analyse montre que le mouvement du coefficient de force normale est presque sinusoïdal. On peut voir en effet sur la figure 12 que, après la première période ($\omega(t-t_1)/\pi > 2$), la valeur calculée peut être représentée de façon très satisfaisante en ne retenant que la première harmonique. La variation du coefficient de moment s'écarte davantage d'une loi sinusoïdale puisque le coefficient a_2 de la seconde harmonique n'est pas négligeable. On remarque cependant sur la figure 12 que les résultats obtenus sont assez bien représentés (à partir de la seconde période ($\omega(t-t_1)/\pi > 1,5$)) par un développement de Fourier limité à la première harmonique.

Il n'est évidemment pas étonnant que les forces instationnaires ne soient pas purement sinusoïdales, cela est dû aux effets non linéaires et on a constaté précédemment que le mouvement du choc n'était pas sinusoïdal. Si néanmoins, le mouvement des forces instationnaires s'écarte relativement peu d'un mouvement harmonique, c'est que, pour les faibles amplitudes étudiées, le déplacement du choc n'est pas très important (fig. 9).

Ces résultats corroborent ceux de MAGNUS et YOSHIHARA [4], obtenus dans le cas de l'écoulement transsonique avec choc sur un profil portant ($\alpha = 2^\circ$), qui montrent que le mouvement du coefficient de force normal est voisin d'un mouvement sinusoïdal alors que celui du moment s'en écarte davantage.

Enfin cette analyse de Fourier confirme que, pour la fréquence étudiée $k = 1,6$, il suffit de calculer l'écoulement instationnaire pendant deux périodes pour obtenir un régime quasi permanent puisque, comme le montre la figure 12, les deuxième et troisième périodes du mouvement des forces globales instationnaires sont pratiquement identiques.

4. Conclusion

Les résultats présentés concernent des calculs d'écoulements instationnaires supercritiques avec choc sur un profil biconvexe animé d'un mouvement oscillatoire harmonique de fréquence réduite $k = \omega c/V_\infty = 1,6$ et d'amplitudes $\alpha = 1,5$ et 3 degrés. Ils ont montré que la présente méthode permet de caractériser les perturbations instationnaires pour de tels écoulements et ont permis de faire ressortir les points suivants :

les variations des forces locales instationnaires sur le profil sont pratiquement sinusoïdales sauf dans la région du choc, mais son déplacement n'étant pas très important pour les amplitudes étudiées, les variations des coefficients de force normale (C_N) et du moment (M) sont relativement proches de sinusoïdes, surtout celles de C_N ;

les forces instationnaires globales sont des fonctions quasi-linéaires de l'amplitude α , ce qui justifie l'hypothèse de linéarité qui a permis d'appliquer la condition de glissement sur le profil dans sa position moyenne et de se donner des conditions de symétrie ou d'antisymétrie par rapport à l'axe de la tuyère ;

le régime permanent est pratiquement établi au bout de deux périodes, ce qui représente un temps de calcul d'environ 90 minutes (le calcul de la phase transitoire étant inclus) sur CII IRIS 80 pour la fréquence étudiée $k = 1,6$ et une durée totale de 180 minutes pour calculer successivement les trois écoulements : stationnaire, transitoire et instationnaire.

La fréquence utilisée, déjà relativement élevée, a été choisie de façon à pouvoir tester la méthode sans être conduit à des temps de calcul prohibitifs sur l'ordinateur employé. Le domaine des fréquences faibles ($k < 0,4$) présente un plus grand intérêt pratique et on dispose pour celui-ci de résultats expérimentaux. Mais, étant donné que la durée des calculs de la phase instationnaire est inversement proportionnelle à la fréquence, l'application de la méthode à ce domaine nécessite une machine beaucoup plus rapide. Dans ces conditions, la méthode devrait pouvoir être étendue au calcul de l'écoulement transsonique instationnaire dans une grille d'aubes avec un déphasage donné d'une aube à la suivante.

References

1. R. M. BEAM and R. F. WARMING, *Numerical calculations of two dimensional, unsteady transonic flows with circulation*, NASA TND-7605, February 1974.
2. W. F. BALLHAUS and H. LOMAX, *The numerical simulation of low frequency unsteady transonic flow fields*, Presented at the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Boulder, Colorado, June 24-29, 1974.
3. F. E. EHLERS, *A finite difference method for the solution of the transonic flow around harmonically oscillating wing*, AIAA Paper 74543.
4. R. J. MAGNUS and H. YOSHIHARA, *Calculation of transonic flow over an oscillating airfoil*, AIAA Paper 75-98.
5. R. M. BEAM and W. F. BALLHAUS, *Numerical integration of the small disturbance potential and Euler equations for unsteady transonic flow*, Presented at NASA Conf. on Aero, Analyses Requiring Advanced Computers, March 1975.
6. P. LAVAL, *Méthodes instationnaires de calcul des effets d'interaction de paroi en écoulement bidimensionnel supercritique*, Rech. Aérosp., 1973-5; p. 275-288, Traduction ESRO TT-40, 1974.
7. P. LAVAL, *Écoulements transsoniques avec chocs. Méthode de calcul instationnaire à pas fractionnaires, Première partie, Écoulement autour d'un profil symétrique entre parois*, Document ONERA non publié (Décembre 1973).
8. R. W. MAC CORMACK, *Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer*, Proc. of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag 1971.
9. R. W. MAC CORMACK and A. J. PAULLAY, *Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators*, AIAA Paper, 72-154.
10. R. W. MAC CORMACK, *The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering*, AIAA Paper 69-354.
11. P. LAVAL, *Méthode de calcul de l'écoulement instationnaire transsonique autour d'un profil oscillant*, Document ONERA non publié (Septembre 1974).
12. P. KUTLER, W. A. REINHARDT and R. F. WARMING, *Numerical computation of multishocked, three dimensional supersonic flow fields with real gas effects*, AIAA Paper 72-702.

13. R. A. SERRA, *The determination of internal gas flows with a transient numerical technique*, AIAA Paper 71-45.
14. S. GOPALAKRISHNAN and R. BOZZOLA, *Numerical representation of inlet and exit boundary conditions in transient cascade flow*, ASME Paper 73. GT. 75 (April 1973).

OFFICE NATIONAL D'ETUDES ET DE RECHERCHES AEROSPATIALES, CHATILLON.

Reçu Octobre 31, 1975.
