

Sur l'analyse des réponses impulsionnelles en grandes déformations sphériques

P. GUELIN (GRENOBLE), W. K. NOWACKI (VARSOVIE) et
J. M. TERRIEZ (GRENOBLE)

Nous avons montré que la méthode de résolution directe des problèmes aux limites hyperboliques non-linéaires (dans l'analyse des continus anélastiques) présenté dans [1], permet d'obtenir les solutions d'une précision satisfaisante dans le cas des problèmes impulsionnels de grandes déformations sphériques. Nous avons considéré les équations constitutives pour les milieux isotropes anélastiques. Nous avons donné les exemples des solutions obtenues dans le cas d'une coque mince sphérique ainsi que dans le cas d'une cavité sphérique, soumise à une sollicitation impulsionnelle de pression.

Przedstawiono metodę bezpośredniego rozwiązania zagadnień granicznych nieliniowych typu hiperbolicznego (w analizie ośrodków ciągłych niesprężystych) zaproponowaną w pracy [1], pozwalającą otrzymać z dostateczną dokładnością rozwiązania problemów działań impulsowych w zakresie skończonych deformacji sferycznych. Rozważono przypadek równań konstytutywnych dla ośrodków izotropowych niesprężystych. Podano przykłady otrzymanych rozwiązań dla przypadku grubościennego kuli z pustką oraz dla cienkiej powłoki sferycznej poddanej działaniu impulsu ciśnienia.

Представлен метод непосредственного решения предельных нелинейных задач гиперболического типа (в анализе сплошных неупругих сред) предложенный в работе [1], который позволяет получить, с достаточной точностью, решения задач импульсных действий в области конечных сферических деформаций. Рассмотрен случай определяющих уравнений для изотропных неупругих сред. Приведены примеры полученных решений для случая толстостенного шара с пустотой и для тонкой сферической оболочки подвергнутой действию импульса давления.

1. Introduction

UNE MÉTHODE de résolution directe [1] a été adaptée en vue du traitement des problèmes aux limites hyperboliques non-linéaires dans l'analyse des continus anélastiques, avec ou sans hystérésis, dans le cas mono ou multidimensionnel [2, 3, 4].

On montre que cette méthode permet d'obtenir des solutions d'une précision satisfaisante dans le cas des problèmes impulsionnels de grandes déformations sphériques. L'un des résultats fournis ici concerne la comparaison du calcul avec la solution analytique du problème de la propagation en milieu élastique d'un Dirac de pression interne appliqué dans une cavité sphérique [5]. Un second contrôle est effectué, dans le cas viscoélastique, en utilisant des résultats obtenus par la méthode des caractéristiques [6].

2. Cinématique. Equations de conservation. Conditions aux limites

On considère une enveloppe sphérique de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 , initialement au repos et à l'état neutre. Dans le système de coordonnées sphériques la-

grangiennes: r, φ, θ ($r_1 \leq r \leq r_2$), le déplacement du point matériel à l'instant t est défini par $u(r, t)$. Le vecteur accélération a pour composantes: $\left\{ \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2}, 0, 0 \right\}$.

On note u' la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial r}$. Les tenseurs de Lagrange \mathbf{F} et de Green-Lagrange \mathbf{E} ont pour composantes:

$$(2.1) \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1+u' & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{u}{r} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{vmatrix} u' + \frac{(u')^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{r} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{r} \right)^2 \end{vmatrix}.$$

Soit $v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$ la vitesse du point matériel. Le tenseur vitesse de déformation:

$$(2.2) \quad \mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

est lié au tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E} par la relation:

$$(2.3) \quad \frac{\partial E_{ij}(a, t)}{\partial t} = \mathcal{D}_{km}(a, t) \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_j},$$

où a note les coordonnées de Lagrange de la configuration initiale.

Avec (2.1) et (2.3), (2.2) s'écrit:

$$(2.4) \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u'/\partial t}{1+u'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\partial u/\partial t)/r}{1+u/r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\partial u/\partial t)/r}{1+u/r} \end{vmatrix}.$$

Les composantes non-nulles du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ sont σ_{rr} et $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$.

L'équation lagrangienne du mouvement est:

$$(2.5) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}),$$

où ρ_0 est la densité de masse initiale et \mathbf{T} le tenseur de Piola-Lagrange ayant pour composantes:

$$(2.6) \quad \mathbf{T} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & (1+u') \left(1 + \frac{u}{r}\right) \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & (1+u') \left(1 + \frac{u}{r}\right) \sigma_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}.$$

Les conditions initiales et aux limites sont respectivement:

$$(2.7) \quad v(r, 0) = \sigma_{rr}(r, 0) = \sigma_{\theta\theta}(r, 0), \quad \forall r \in [r_1, r_2]$$

d'une part et:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}(r_1, t) &= p_1(t), \\ \sigma_{rr}(r_2, t) &= p_2(t), \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

d'autre part.

3. Lois constitutives envisagées

3.1.

Nous allons considérer les équations constitutives pour les milieux isotropes non-élastiques. Soit pour un continu isotrope anélastique, une loi de la forme

$$(3.1) \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \varphi \bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \bar{\mathcal{D}}, \quad \dot{S}_1 = (3\lambda + 2\mu) E_1$$

où $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est le déviateur du tenseur contrainte de Cauchy, $\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ la dérivée de Jaumann de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ identique ici à la dérivée partielle $\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} / \partial t$,

$$S_1 \text{ la trace du tenseur } \boldsymbol{\sigma}: \quad S_1 = \sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta},$$

$$E_1 \text{ la trace du tenseur } \mathcal{D}: \quad E_1 = \mathcal{D}_{rr} + 2\mathcal{D}_{\theta\theta},$$

λ et μ les constantes de Lamé.

La fonction φ vaut simplement $\frac{1}{t_0}$ pour le modèle de Maxwell. Dans le cas élasto-viscoplastique (Malvern, Prager, Perzyna) elle est de la forme:

$$(3.2) \quad \varphi = 2\mu g(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$$

où α est une famille de paramètres cachés et/ou observables caractérisant l'état interne du matériau et son écrouissage [7].

3.2.

L'élasticité considérée ici est à deux paramètres λ et μ .

4. Le problème aux limites

On met l'équation du mouvement (2.5) sous la forme:

$$(4.1) \quad \frac{\partial \sigma_{rr}^e}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr}^e - \sigma_{\theta\theta}^e) - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{2}{r} (E - F),$$

avec

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}^e &= (\lambda + 2\mu)u' + 2\lambda \frac{u}{r}, \\ \sigma_{\theta\theta}^e &= \lambda u' + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r}. \end{aligned}$$

Dans le cas des corps anélastiques, compte tenu de (3.1) et (2.4), on a :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} E &= - \int_0^t \left\{ 2\mu \frac{\partial u'}{A} + \lambda E_1 - \frac{2}{3} \varphi \bar{\sigma}_0 - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u'}{\partial t} - 2\lambda \frac{\partial u}{r} \right\} dt, \\ F &= - \int_0^t \left\{ 2\mu \frac{\partial u}{rB} + \lambda E_1 - \frac{1}{3} \varphi \bar{\sigma}_0 - \lambda \frac{\partial u'}{\partial t} - 2(\lambda + \mu) \frac{\partial u}{r} \right\} dt. \end{aligned}$$

Dans le cas du milieu élastique, compte tenu de (2.1), on a :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} E &= -(1 + u') \left[\lambda \left(\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{r^2} \right) + \mu u'^2 \right] - u' \sigma_{rr}^e, \\ F &= - \left(1 + \frac{u}{r} \right) \left[\lambda \left(\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{r^2} \right) + \mu \frac{u^2}{r^2} \right] - \frac{u}{r} \sigma_{\theta\theta}^e. \end{aligned}$$

La condition aux limites en contrainte (2.8) est, sur $r = r_1$ par exemple, de la forme :

$$(4.5) \quad \sigma_{rr}^e(r_1, t) = p_1(t) + p^*(t),$$

d'où

$$(4.6) \quad p^*(t) = p_1(t) \left[\left(1 + \frac{u}{r} \right)^2 - 1 \right] + E.$$

5. Solution du problème

Les premiers membres de (4.1) et (4.5) sont des opérateurs linéaires en \mathbf{u} . Il est facile de générer par éléments finis l'approximation de la fonctionnelle lagrangienne associée [1]. La technique de la discrétisation est classique. Soit \mathbf{A} et \mathbf{M} les opérateurs matériels relatifs d'une part à l'énergie de déformation associée à (4.2) et d'autre part à l'inertie. Si \mathbf{G} note le vecteur associé à la densité des forces volumiques ou fictives représentatives des non-linéarités du second membre de (4.1), on obtient dans le cas explicite :

$$(5.1) \quad \mathbf{A} \mathbf{u}^{t+1} + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{t+1} - 2\mathbf{u}^t + \mathbf{u}^{t-1}) = \mathbf{G}^t.$$

La discrétisation dynamique peut faire appel à une méthode de type implicite régularisée. On a par exemple :

$$(5.2) \quad \frac{1}{2} \mathbf{A} (\mathbf{u}^{t+1} + \mathbf{u}^t + \mathbf{u}^{t-1}) + \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{t+1} - 2\mathbf{u}^t + \mathbf{u}^{t-1}) = \frac{1}{3} (\mathbf{G}^{t+1} + \mathbf{G}^t + \mathbf{G}^{t-1}).$$

Cette formulation est utilisée sous forme semi-implicite en approximant G^{t+1} par extrapolation [2].

Pour l'analyse des résultats, il est utile d'illustrer dès à présent les principales différences observées entre les solutions obtenues par (5.1) et (5.2) respectivement. Une illustration commode est obtenue en considérant la propagation d'une onde de pression intérieure de la forme: $\frac{4c_0}{e} t$ si $t < \frac{e}{4c_0}$, 1 si $t \geq \frac{e}{4c_0}$ dans une coque élastique mince:

$e = r_2 - r_1 = \frac{r_1}{10}$. La pression extérieure est nulle — la vitesse de propagation est

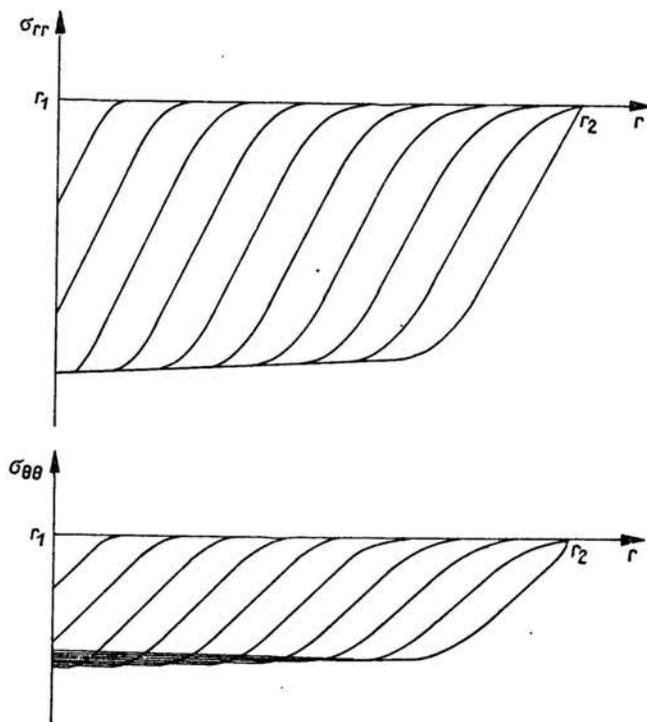


FIG. 1. Propagation d'un échelon de pression interne dans une coque élastique mince: formulation explicite (5.1), discrétisation telle que $c = 2,5$.

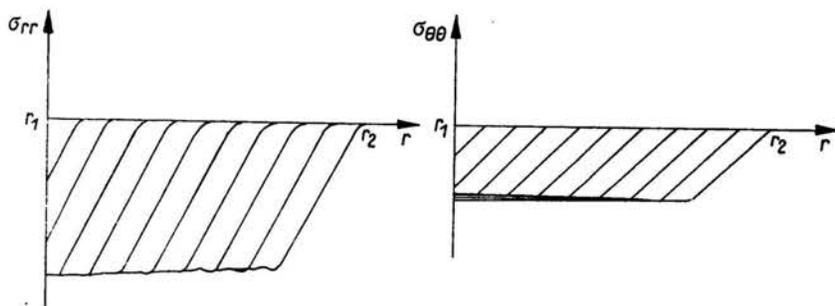


FIG. 2. Propagation d'un échelon de pression interne dans une coque élastique mince: formulation semi-implicite (5.2), discrétisation telle que $c = 2,5$.

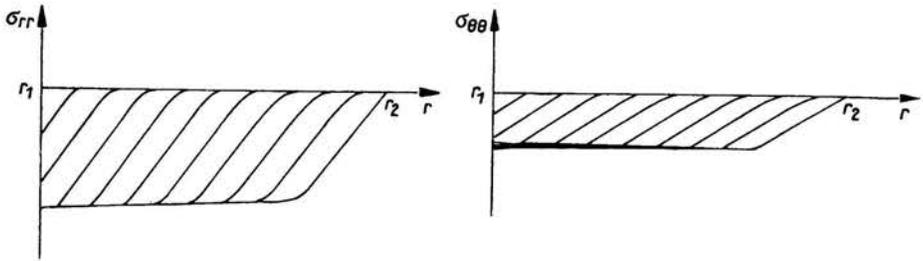


FIG. 3. Propagation d'un échelon de pression interne dans une coque élastique mince: formulation explicite (5.1), discrétisation telle que $c = 0,5$.

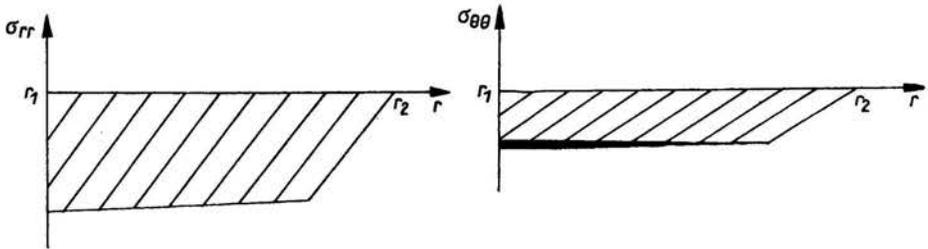


FIG. 4. Propagation d'un échelon de pression interne dans une coque élastique mince: formulation semi-implicite (5.2), discrétisation telle que $c = 0,5$.

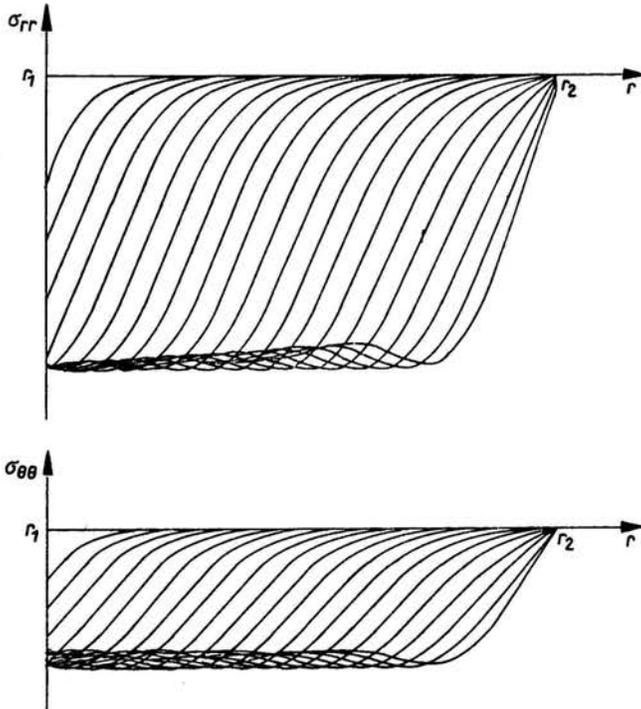


FIG. 5. Cas de la figure 2 avec une discrétisation spatiale dix fois plus fine.

$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}$. L'élément fini vaut $\Delta r = e/500$ et la discrétisation est telle que $c = \frac{c_0 \Delta t}{\Delta r} = 2,5$ (Fig. 1 et Fig. 2) ou 0.5 (Fig. 3 et Fig. 4).

On observe que la description du front d'onde est de meilleure qualité avec (5.2) et que la solution présente moins d'oscillations avec (5.1). L'allure de la solution s'améliore si, pour Δr fixé, c décroît ($\Delta t = \frac{1}{200} \frac{e}{c_0}$ pour les figures 1 et 2, $\Delta t = \frac{1}{1000} \frac{e}{c_0}$ pour les figures 3 et 4).

Pour c fixé, les résultats sont évidemment améliorés, quelle que soit la formulation utilisée. Si Δr tend vers 0 — la comparaison de la figure 5 ($c = 2,5$ et $\Delta r = e/50$) et de la figure 2 ($c = 2,5$ et $\Delta r = e/500$) illustre cette propriété.

6. Exemples de solutions obtenues

Pour tous les exemples présentés, on a $\lambda = 0,15 \cdot 10^6$ MPa, $\mu = 0,075 \cdot 10^6$ MPa, $\rho_0 = 7800$ kg/m³. Ainsi $c_0 = 6200$ ms⁻¹.

6.1. Milieu élastique

On considère une cavité sphérique ($e = 5r_1$) au sein d'un milieu élastique. On s'intéresse à la propagation d'une sollicitation impulsionnelle de pression, triangulaire, symétrique, de durée totale $t = \frac{e}{50c_0}$.

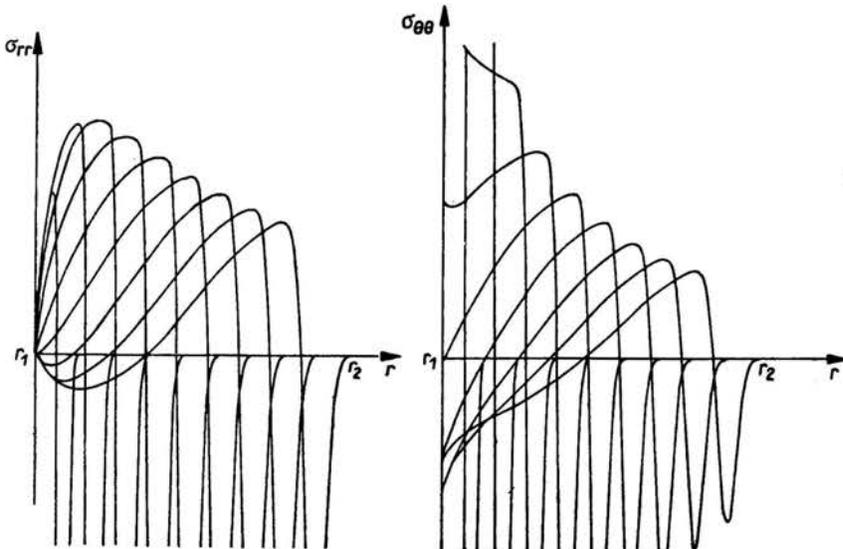


FIG. 6. Approximation numérique du cas de propagation d'un Dirac de pression interne appliquée dans une cavité [5]. L'impulsion de pression est approchée par une répartition triangulaire symétrique — schéma explicite (5.1); $c = 0,5$.

Le résultat que nous présentons à la figure 6, obtenu avec $\Delta r = e/500$ et $c = 0,5$, est directement comparable avec la solution analytique du problème de la propagation d'un Dirac de pression dans un tel milieu [5]. Nous constatons une parfaite analogie dans l'allure des solutions. Un changement d'échelle (Fig. 7) permet de distinguer la prise en compte de l'impulsion (forme et propagation).

L'utilisation du schéma semi-implicite (5.2) avec, comme précédemment $c = 0.5$ et $\Delta r = e/500$, conduit à une solution plus satisfaisante malgré l'apparition d'oscillations — Fig. 8.

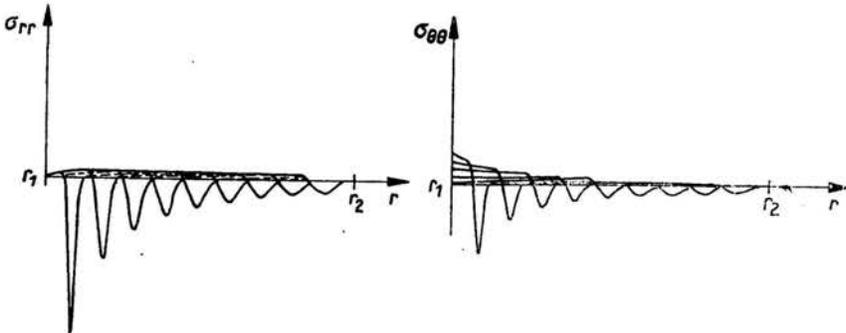


FIG. 7. Reprise de la figure 6 avec changement d'échelle visant à indiquer la forme et la propagation de l'impulsion.

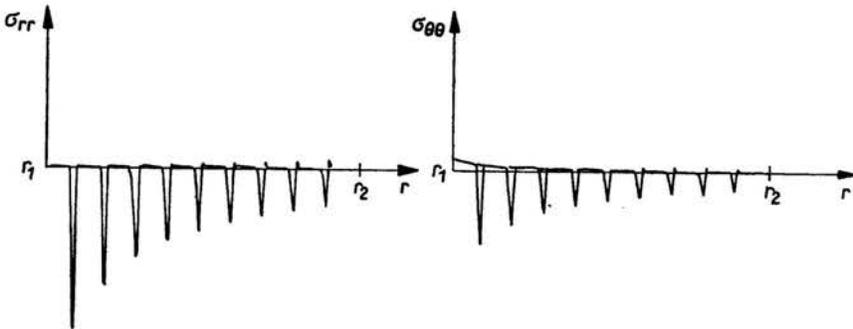


FIG. 8. Cas des figures 6 et 7 avec le schéma semi-implicite (5.2).

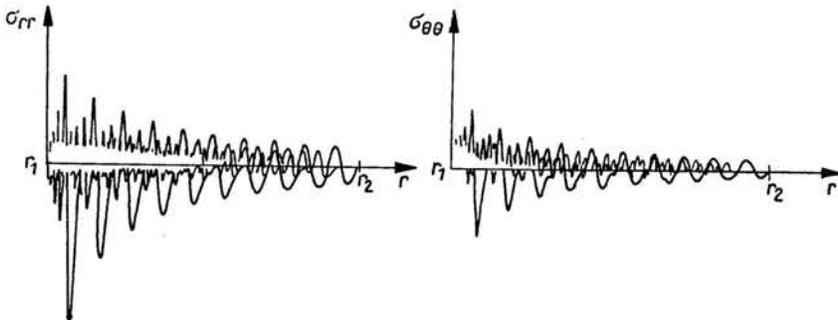


FIG. 9. Cas de la figure 8 traité avec une discrétisation telle que $c = 2,5$.

Si on prend $c = 2,5$, la formulation (5.2) fournit une solution particulièrement perturbée — Fig. 9. Notons que le front est indiqué à celui qu'on obtient à partir de la formulation explicite (5.1) avec $c = 0,5$ — C.f. figure 7.

6.2. Milieu viscoélastique de Maxwell

On considère encore la cavité sphérique ($e = 5r_1$) mais le comportement du milieu est viscoélastique défini par la loi constitutive (3.1) où $\varphi = \frac{1}{t_0} = 5000 \text{ s}^{-1}$.

La sollicitation en vitesse est instantanée:

$$V(t) = v_0 = 10^{-3}c_0, \quad \forall t > 0.$$

Pour: $c = 0,5$, on obtient avec les formulations (5.2) et (5.1), les résultats présentés figures 10 et 11, respectivement.

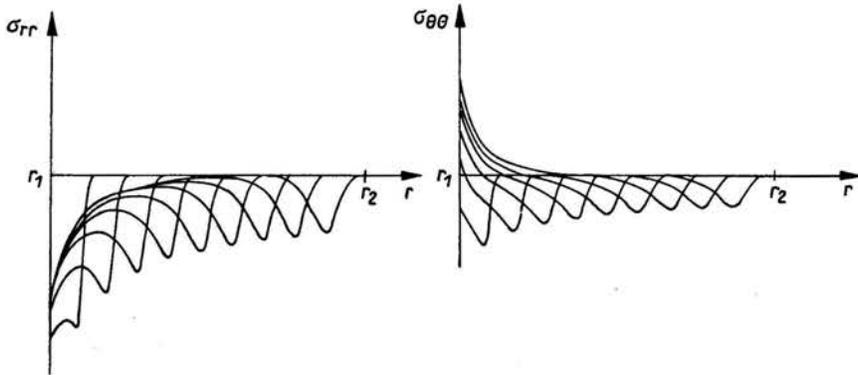


FIG. 10. Propagation d'un échelon de vitesse en milieu visco-élastique. Schéma semi-implicite (5.2)

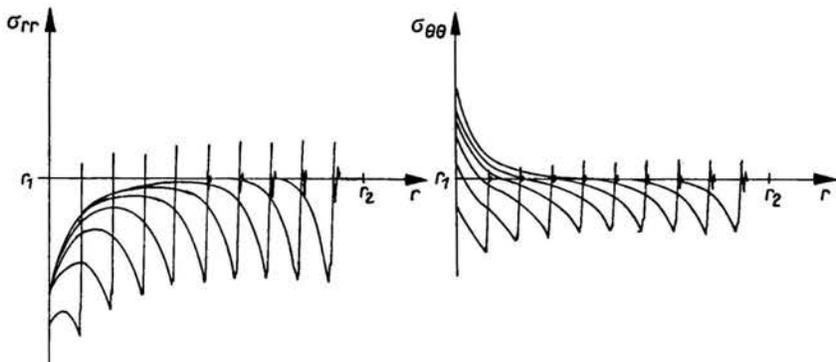


FIG. 11 Propagation d'un échelon de vitesse en milieu visco-élastique. Schéma explicite (5.1).

Nous présentons enfin la réponse à une sollicitation identique d'une coque mince ($e = r_1/10$) munie de la même forme de loi constitutive.

On prend: $\varphi = \frac{1}{t_0} = 20.000 \text{ s}^{-1}$ en vue d'obtenir un amortissement sensible dans la faible épaisseur de la coque.

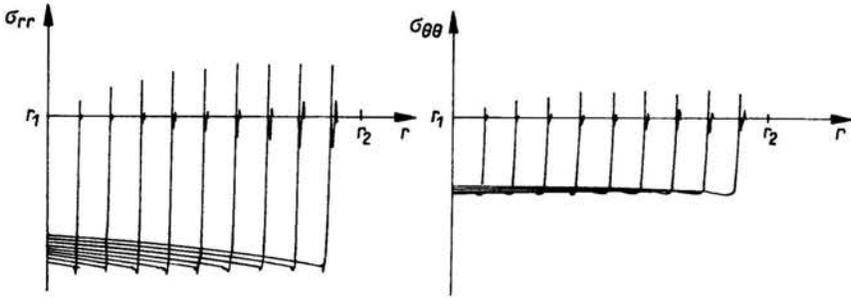


FIG. 12. Le problème précédent (Figure 10) dans le cas d'une coque mince.

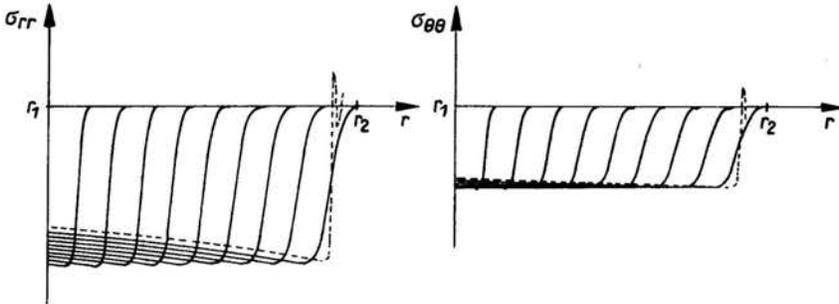


FIG. 13. Le problème précédent (figure 11) dans le cas d'une coque mince.

Comme on a pu le constater sur les exemples précédents, la formulation (5.2), avec $c = 0,5$, permet une description du front d'onde beaucoup plus correcte que la formulation explicite (5.1). (Enpointillé sur la figure 13 la solution obtenue par le schéma (5.2) — C.f. figure 12).

Références

1. J. M. BOISSERIE, P. LEBOURG, P. BAPRAU, M. LINDA, Trans. of 3rd Int. Conf. on Structural Mech. in: Reactor Techn., part E 3/2, 2, 1975.
2. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, P. STUTZ, J. M. TERRIEZ, Mech. Res. Com., 4, 5, 291-296, 1977.
3. P. GUELIN, J. M. TERRIEZ, Mech. Res. Com., 1979 [à paraître].
4. P. GUELIN, W. K. NOWACKI, J. M. TERRIEZ, Mech. Res. Com., [à paraître].
5. C. ERINGEN, E. S. SUHUBI, *Elastodynamics*, Academic Press, New York 1975.
6. S. KALISKI, W. K. NOWACKI, E. WŁODARCZYK, Proc. of Vibr. Probl., 5, 1, 1964.
7. W. K. NOWACKI, *Stress waves in non-elastic solids*, Pergamon Press, Oxford 1978.

INSTITUTE OF MECHANICS
GRENOBLE UNIVERSITY, GRENOBLE, FRANCE

and

POLISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF FUNDAMENTAL TECHNOLOGICAL RESEARCH.

Received February 28, 1979.