

# PRACE ITME

INSTYTUT  
TECHNOLOGII  
MATERIAŁÓW  
ELEKTRONICZNYCH

MATEMATYCZNY  
MODEL FILTRU  
Z FALĄ POWIERZCHNIOWĄ



INSTYTUT TECHNOLOGII MATERIAŁÓW ELEKTRONICZNYCH

**Piotr Nagłowski**

**MATEMATYCZNY MODEL FILTRU  
Z FALĄ POWIERZCHNIOWĄ**

WARSZAWA ITME 1994

<http://rcin.org.pl>

## KOLEGIUM REDAKCYJNE:

prof. dr hab. inż. Wiesław MARCINIAK (redaktor naczelny)  
prof. dr hab. inż. Andrzej JELEŃSKI (z-ca redaktora naczelnego)  
prof. dr inż. Andrzej HAŁAS, prof. dr hab. inż. Andrzej JAKUBOWSKI,  
doc. dr hab. inż. Jan KOWALCZYK, doc. dr Zdzisław LIBRANT,  
prof. dr h.c. Bohdan PASZKOWSKI, prof. dr hab. inż. Władysław K. WŁOSIŃSKI  
mgr Eleonora JABRZEMSKA (sekretarz redakcji)

### Adres Redakcji:

INSTYTUT TECHNOLOGII MATERIAŁÓW ELEKTRONICZNYCH

ul. Wólczyńska 133, 01-919 Warszawa

tel. 34 90 03,

34 93 91 w. 405 - redaktor naczelny

35 44 16,

35 93 91 w. 454 - z-ca redaktora naczelnego

34 97 30 w. 129 - sekretarz redakcji

### Od redakcji

W niniejszej pracy wykorzystano fragmenty rozprawy doktorskiej pod tytułem "Kompensacja efektów drugiego rzędu w filtrach z akustyczną falą powierzchniową przy użyciu metod optymalizacji z ograniczeniami", której obrona odbyła się 22 września 1992 roku na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej.

W prezentowanej pracy omówiono zaproponowany przez autora matematyczny model filtru z akustyczną falą powierzchniową.

PL ISSN 0209 - 0066

SKŁAD KOMPUTEROWY ITME

Piotr Śmietanowski

Druk: Zakład Poligraficzny J. Dymczak S. Prasek  
Piastów ul. Kołtąja 10

<http://rcin.org.pl>

Piotr NAGŁOWSKI: "Matematyczny model filtru z akustyczną falą powierzchniową"

W pracy zaproponowano metodę modelowania (model matematyczny) filtru z akustyczną falą powierzchniową (AFP), uwzględniającą dwa istotne zjawiska drugiego rzędu: dyfrakcję AFP i oddziaływania filtru z obwodami zewnętrznymi. Zgodnie z przedstawioną metodą, wzbudzenie i detekcję AFP modelowano przy zastosowaniu quasistatycznej teorii przetwornika międzypalczastego, pomijając tzw. zjawiska końcowe - związane z gromadzeniem się ładunków elektrycznych na elektrodach położonych blisko krańców przetworników. Przyjęto, że propagacja AFP jest opisywana przez teorię kąтового widma fal płaskich. Podano wzory umożliwiające wyznaczenie elementów macierzy admitancyjnej i transmitancji filtru.

Piotr NAGŁOWSKI: "SAW Filter Mathematical Model"

This paper presents a SAW filter modeling method (mathematical model) which takes into account two important second-order effects: SAW diffraction and filter interactions with external networks. According to the method SAW generation and detection are described by means of the quasistatic theory of interdigital transducer. The model neglects so called end effects connected with electric charge accumulation on the electrodes located near transducer edges. It was assumed that SAW propagation is described by the angular spectrum of waves theory. Formulas for filter admittance matrix elements and transmittance were given.

Пётр Нагловский: Математическая модель фильтра  
на поверхностных акустических волнах.

В статье предложено метод моделирования (математическую модель) фильтра на поверхностных акустических волнах (ПАВ) учитывающих два существенные эффекты второго порядка: дифракцию и взаимодействия с внешними цепями. Согласно с представленным методом возбуждение и детекцию ПАВ моделировано с применением квазистатической теории встречно - штыревого преобразователя пренебрегая так называемые конечные эффекты связаны с собиранием электрического заряда на электродах расположенных вблизи от краев преобразователей. Принято, что распространение ПАВ описано теорию углового спектра плоских волн. Подано формулы создающие возможность определения элементов матрицы полной проводимости и передаточной функции фильтра.

*Czuję się w miłym obowiązku podziękować Panu Profesorowi Waldemarowi Soluchowi za cenne uwagi i inspirujące dyskusje podczas realizacji niniejszej pracy. Dyskusje z Panem Profesorem znacznie wzbogaciły moją wiedzę i rozszerzyły spojrzenie na zagadnienia związane z projektowaniem elementów z akustyczną falą powierzchniową.*

*Pragnę wyrazić wdzięczność Pani Hannie Majewskiej za kilkuletnią, niezmiernie korzystną dla mojego rozwoju jako inżyniera, współpracę w dziedzinie filtrów z akustyczną falą powierzchniową.*

*Dziękuję wszystkim Koleżankom i Kolegom, dzięki którym ta praca mogła powstać.*

Piotr Nagłowski





## SPIS TREŚCI

1. Wstęp . . . . .	9
2. Model admitancyjny filtru z AFP . . . . .	10
3. Generacja AFP przez przetwornik międzypalczasty . . . . .	19
4. Detekcja AFP przez przetwornik międzypalczasty . . . . .	28
5. Wyznaczenie transadmitancji filtru . . . . .	34
6. Wyznaczenie admitancji przetwornika międzypalczastego . . . . .	47
6.1 Wyznaczenie pojemności statycznej . . . . .	48
6.2 Wyznaczenie admitancji akustycznej . . . . .	52
7. Podsumowanie . . . . .	54
Bibliografia . . . . .	55



## 1. WSTĘP

Ze względu na dużą złożoność zjawisk występujących w filtrach z akustyczną falą powierzchniową (AFP), projektowanie tych elementów wymaga skomplikowanych i czasochłonnych obliczeń przy użyciu maszyn cyfrowych. Współczesne metody projektowania filtrów z AFP są najszybciej dwuetapowe. W pierwszym etapie dokonuje się syntezy filtru wykorzystując uproszczony model matematyczny tego elementu. W drugim etapie przeprowadza się kompensację zjawisk drugiego rzędu nie uwzględnionych w uproszczonym modelu. Skuteczna kompensacja wymaga m.in. użycia metody analizy filtrów z AFP, która wykorzystuje możliwie dokładny model matematyczny filtru do określenia wpływu zjawisk drugiego rzędu na jego charakterystykę częstotliwościową.

Natężenie zjawisk pasożytniczych i stopień, w jakim degradują one charakterystykę częstotliwościową filtru, są zależne od zastosowanego materiału podłoża piezoelektrycznego. Filtry TV p.cz. wykonuje się najczęściej na podłożu z niobianu litu o orientacji  $128^\circ$  YX. Masowe zastosowanie niobianu litu o orientacji  $128^\circ$  YX w projektowaniu filtrów z AFP sprawiło, że postanowiono opracować model matematyczny filtru z AFP uwzględniający najważniejsze zjawiska drugiego rzędu, występujące w tym właśnie materiale.

Najistotniejszymi, wymagającymi kompensacji zjawiskami drugiego rzędu w filtrach TV p.cz. wytwarzanych przy użyciu niobianu litu o orientacji  $128^\circ$  YX są: dyfrakcja AFP i wpływ obwodów zewnętrznych na charakterystyki częstotliwościowe filtrów. Skuteczna kompensacja tych zjawisk warunkuje poprawne działanie filtrów i z tego względu ma duże znaczenie praktyczne.

Zjawisko dyfrakcji powoduje, iż fala powierzchniowa wyemitowana przez źródło o skończonej aperturze nie jest falą płaską, lecz jej amplituda i faza są zmienne wzdłuż i w poprzek kierunku propagacji. Obecność dyfrakcji zniekształca charakterystykę częstotliwościową filtru, powodując m.in. obni-

zenie tłumienności w pasmach zaporowych. Natężenie zjawiska dyfrakcji jest zależne od anizotropii prędkości AFP w kryształach.

Oddziaływania filtru z obwodami zewnętrznymi sprawiają, że transmisja filtru jest zależna od admitancji wejściowej i wyjściowej tego elementu oraz od admitancji zewnętrznych. Nasilenie omawianego zjawiska jest w dużym stopniu zależne od układu aplikacyjnego, w którym pracuje filtr. W przypadku filtrów TV p.cz. admitancja obciążenia i admitancja wyjściowa filtru są na ogół wielkościami tego samego rzędu. Sprawia to, że wpływ oddziaływań filtru z obwodami zewnętrznymi na charakterystykę częstotliwościową jest duży. Zniekształceniom ulega zwłaszcza kształt pasma przepustowego filtru.

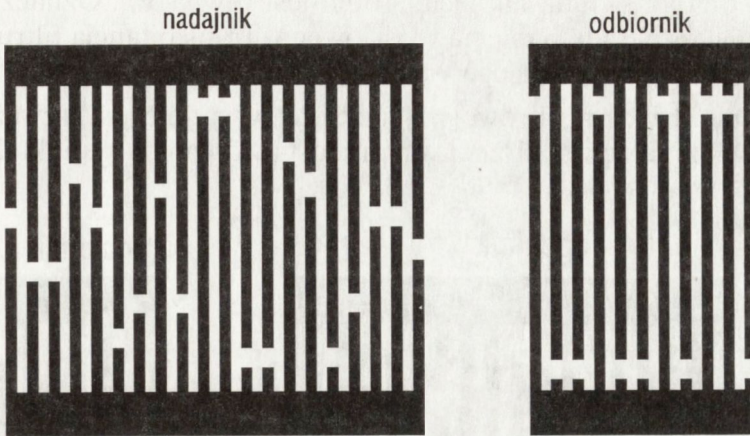
Przykładami innych zjawisk drugiego rzędu powodujących zniekształcenia charakterystyk częstotliwościowych filtrów są: generacja i detekcja fal objętościowych przez przetwornik międzypalczasty, odbicia AFP od elektrod przetworników, skończona wartość konduktancji elektrod i szyn zbiorczych i sygnał przesłuchu elektromagnetycznego. Zjawiska te nie są rozpatrywane w niniejszej pracy.

W pracy opisano opracowaną metodę analizy filtrów z AFP. Metoda ta umożliwia m.in. symulację zjawiska dyfrakcji AFP i modelowanie oddziaływań filtru z obwodami zewnętrznymi. Może ona być użyta we współpracy z zaproponowanym w pracy [1] algorytmem kompensacji zjawisk drugiego rzędu, który wykorzystuje metody optymalizacji z ograniczeniami w celu zapobieżenia wzrostowi apertury filtru w trakcie kompensacji.

Eksperymentalną weryfikację opisanej metody przedstawiono w pracach [2,3]. Prezentowaną metodę zastosowano podczas projektowania filtru FT-383, który jest pierwszym wdrożonym do produkcji w kraju filtrem TV p.cz., wykorzystującym jako podłoże piezoelektryczne niobian litu o orientacji  $128^\circ$  YX.

## 2. MODEL ADMITANCYJNY FILTRU Z AFP

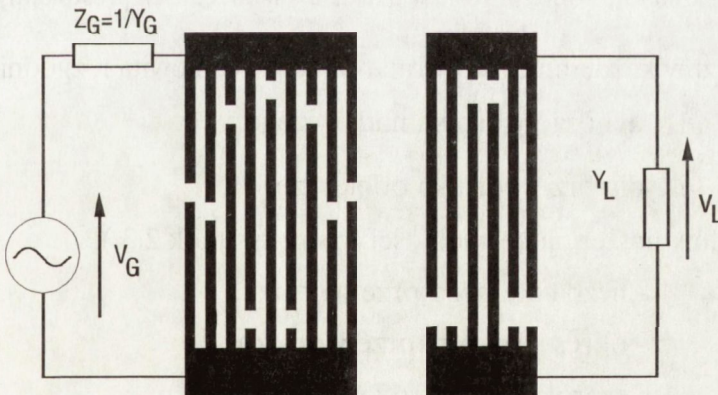
Rozważmy strukturę filtrową przedstawioną na rysunku 2.1. Składa się ona z dwóch przetworników międzypalczastych: apodyzowanego (ważonego) nadajnika i nieapodyzowanego (prostego) odbiornika. Przetworniki te utworzone są przez cienką warstwę metalu, naniesioną na podłoże piezoelektryczne. Założmy, że każdy przetwornik charakteryzuje się stałymi wartościami okresu struktury i szerokości elektrod.



Rys. 2.1.  
Rozważana struktura filtrowa.

Omawiana struktura filtrowa umożliwia realizację szerokiej gamy charakterystyk częstotliwościowych i jest powszechnie stosowana w konstrukcji filtrów z AFP. Struktura ta jest m.in. stosowana w filtrach TV p.cz. wytwarzanych na niobianie litu o orientacji  $128^\circ$  YX.

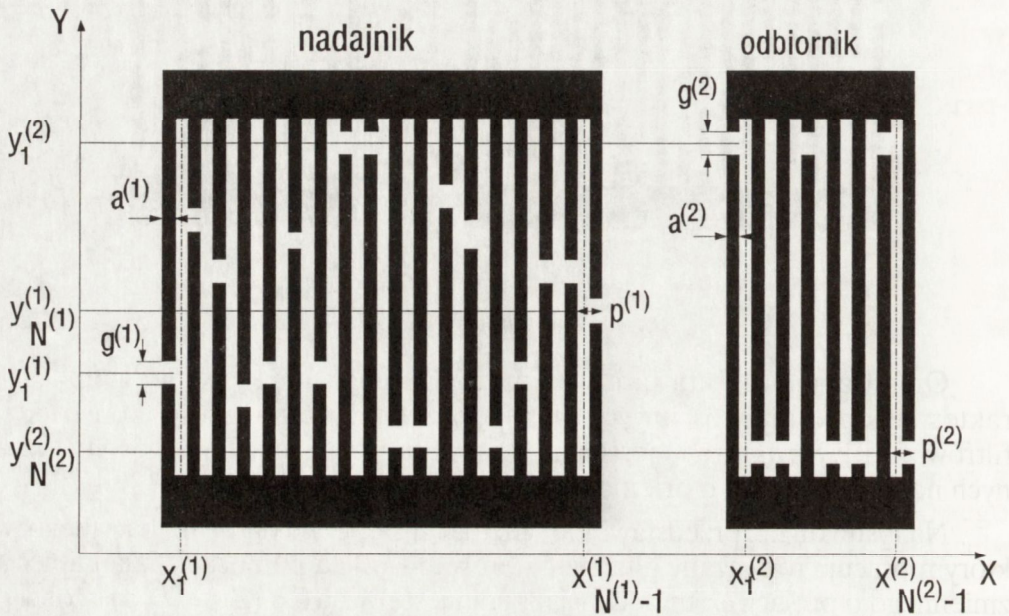
Na rysunku 2.2. przedstawiono schemat zastępczy układu aplikacyjnego, w którym pracuje rozważany filtr. Filtr sterowany jest za pomocą źródła napięcia zmiennego o pulsacji  $\omega$ . Impedancja źródła jest równa  $Z_G$  ( $Z_G \equiv 1/Y_G$ ), a obciążenie filtru stanowi admitancja  $Y_L$ .



Rys. 2.2.  
Schemat zastępczy układu aplikacyjnego zawierającego filtr z AFP.

Zespolona amplituda napięcia źródła jest równa  $V_G$ . Oznaczmy przez  $V_L$  zespoloną amplitudę napięcia wyjściowego. Transmitancja filtru jest wtedy zdefiniowana jako stosunek  $V_L$  do  $V_G$ .

Działanie struktury filtrowej z rysunku 2.1 wygodnie jest rozważać umieszczając ją w układzie współrzędnych przedstawionym na rysunku 2.3.



Rys. 2.3.

Rozważana struktura filtrowa w układzie współrzędnych prostokątnych.

Przypiszmy każdemu przetwornikowi liczbę całkowitą  $r$ , zgodnie z regułą:

$$r = \begin{cases} 1 & \text{dla przetwornika nadawczego} \\ 2 & \text{dla przetwornika odbiorczego} \end{cases}$$

i określmy następujące wielkości (patrz rysunek 2.3.):

$N^{(r)}$  - liczba elektrod przetwornika,

$p^{(r)}$  - okres struktury przetwornika,

$a^{(r)}$  - szerokość elektrod w przetworniku,

$$x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_{N^{(r)}-1}^{(r)}$$

- odcięte środków przerw międzyelektrodowych

$$y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, \dots, y_{N^{(r)}}^{(r)}$$

- rzędne przerw w elektrodach,

$$\underline{x}^{(r)} = [x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_{N^{(r)}-1}^{(r)}]^T$$

- wektor odciętych środków przerw międzyelektrodowych,

$$\underline{y}^{(r)} = [y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, \dots, y_{N^{(r)}}^{(r)}]^T$$

- wektor rzędnych przerw w elektrodach,

$$y_{\min}^{(r)} = \min_{1 \leq i \leq N^{(r)}} y_i^{(r)}$$

- minimalna rzędna przerwy w elektrodzie,

$$y_{\max}^{(r)} = \max_{1 \leq i \leq N^{(r)}} y_i^{(r)}$$

- maksymalna rzędna przerwy w elektrodzie,

$$A^{(r)} = y_{\max}^{(r)} - y_{\min}^{(r)}$$

- apertura akustyczna przetwornika,

$$x_L^{(r)} = x_1^{(r)} - \frac{1}{2}(p^{(r)} + a^{(r)})$$

- odcięta lewego krańca przetwornika,

$$x_R^{(r)} = x_{N^{(r)}-1}^{(r)} + \frac{1}{2}(p^{(r)} + a^{(r)})$$

- odcięta prawego krańca przetwornika,

$$g^{(r)}$$

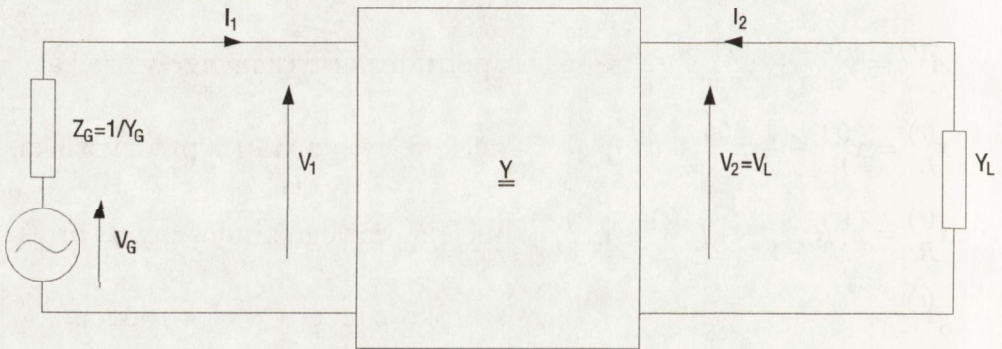
- szerokość przerw w elektrodach.

Przyjmijmy, iż  $y_{\min}^{(1)} \geq y_{\min}^{(2)}$  i  $y_{\max}^{(1)} \leq y_{\max}^{(2)}$ , tak aby przy założeniu braku dyfrakcji AFP cała wiązka energii wyemitowana przez nadajnik mogła być odebrana przez przetwornik odbiorczy. Ponadto założmy, że wielkości okresów  $p^{(r)}$  są tak dobrane, aby w szerokim przedziale częstotliwości, zawierającym pasmo przepustowe filtru, można było zaniedbać wpływ odbić AFP od elektrod przetworników na charakterystykę częstotliwościową filtru. Można to osiągnąć np. stosując wartości okresów zbliżone do jednej czwartej długości AFP [4,5].

Wielkości  $y_i^{(2)}$ , gdzie  $1 \leq i \leq N^{(2)}$  mogą przyjmować tylko dwie wartości ( $y_{\min}^{(2)}$  i  $y_{\max}^{(2)}$ ), gdyż przetwornik wyjściowy jest nieapodyzowany. Ponadto przyjmijmy, że szerokości przerw w elektrodach  $g^{(r)}$  są małe w porównaniu z innymi wymiarami przetworników. Wpływ skończonych wymiarów szerokości tych przerw na działanie przetworników zostanie pominięty we wszystkich rozważaniach.

Górne wskaźniki  $(1), (2)$  będą w dalszej części pracy umieszczane także przy innych nie zdefiniowanych na razie wielkościach, aby zaznaczyć, że dana wielkość dotyczy odpowiednio: nadajnika lub odbiornika. W przypadku wielkości, które mogą odnosić się do dowolnego przetwornika, górne wskaźniki będą pomijane lub używany będzie wskaźnik  $(r)$ .

Z punktu widzenia teorii obwodów filtr z AFP może być uważany za liniowy pasywny czwórnik, którego działanie opisuje jego macierz admitancyjna  $\underline{Y}$ . Znajomość elementów tej macierzy pozwala przewidzieć zachowanie się filtra w dowolnym układzie aplikacyjnym, a w szczególności umożliwia zastąpienie układu z rysunku 2.2. równoważnym układem przedstawionym na rysunku 2.4.



Rys. 2.4.

Filter z AFP jako liniowy czwórnik w układzie aplikacyjnym.

W układzie tym filtr z AFP opisany jest następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$



Przedstawiony w pracy [1] algorytm kompensacji zjawisk drugiego rzędu wymaga, aby współpracująca z nim metoda analizy filtrów umożliwiała obliczenie wartości transmitancji i jej czułości na zmiany pozycji przerw we wszystkich elektrodach przetwornika apodyzowanego - na gęstej siatce częstotliwości. Dlatego celowe jest wprowadzenie następujących oznaczeń:

$M$	- liczba punktów siatki częstotliwości,
$f_1, f_2, \dots, f_M$	- punkty siatki częstotliwości,
$\omega = 2\pi f$	- pulsacja,
$D(\omega, \mathbf{y}^{(1)})$	- transmitancja filtru,
$D_k(\mathbf{y}^{(1)}) \equiv D(2\pi f_k, \mathbf{y}^{(1)})$	- zespolona wartość transmitancji dla $\omega = \omega_k = 2\pi f_k$ ,
$C_{ki}(\mathbf{y}^{(1)}) \equiv \left. \frac{\partial D_k(\mathbf{y})}{\partial y_i} \right _{\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)}}$	- czułość transmitancji na zmianę pozycji przerwy w $i$ -tej elektrodzie przy $\omega = \omega_k = 2\pi f_k$
$(1 \leq k \leq M, 1 \leq i \leq N^{(1)})$	

W powyższych określeniach nie zaznaczono zależności funkcji  $D(\omega, \mathbf{y}^{(1)})$ ,  $D_k(\mathbf{y}^{(1)})$  i  $C_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  od wektorów  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$ ,  $\mathbf{y}^{(2)}$  gdyż współrzędne tych wektorów zachowują stałe wartości w procesie kompensacji zjawisk drugiego rzędu przeprowadzanej zgodnie z algorytmem przedstawionym w pracy [1].

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami zadanie analizy filtru polega na wyznaczeniu wielkości  $D_k(\mathbf{y}^{(1)})$  i  $C_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  dla  $k=1, 2, \dots, M$ ;  $i=1, 2, \dots, N^{(1)}$ . Zastosowanie praw Kirchhoffa do obwodu przedstawionego na rysunku 2.4 pozwala uzyskać następujące wyrażenie na transmitancję:

$$D(\omega, \mathbf{y}^{(1)}) = \frac{V_L}{V_G} = F_{in} \cdot Y_{21} \cdot F_{out} \cdot \frac{1}{1-q} \quad (2.2)$$

gdzie:

$$F_{in} = \frac{Y_G}{Y_{11} + Y_g}, \quad F_{out} = -\frac{1}{Y_{22} + Y_L}, \quad q = \frac{Y_{21} \cdot Y_{12}}{(Y_{22} + Y_L) \cdot (Y_{11} + Y_g)}$$

W praktyce przeważnie  $|q| < 1$  i dlatego prawą stronę wzoru (2.2) można przedstawić w postaci szeregu nieskończonego:

$$D(\omega, \mathbf{y}^{(1)}) = F_{in} Y_{21} F_{out} + q F_{in} Y_{21} F_{out} + q^2 F_{in} Y_{21} F_{out} + \dots \quad (2.3)$$

Drugi, trzeci, czwarty, ... składnik tego rozwinięcia można interpretować jako składowe transmitancji pochodzące odpowiednio od sygnałów trzeciego, piątego, siódmego, ... echa. Składowe te są najczęściej pomijalnie małe w porównaniu z pozostałą częścią transmitancji i dlatego w pracy tej zastosowano przybliżenie:

$$D(\omega, \mathbf{y}^{(1)}) = F_{in} Y_{21} F_{out} \quad (2.4)$$

Różniczkując wyrażenie (2.4) względem  $y_i^{(1)}$ , można wyznaczyć współczynniki  $C_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  według wzoru:

$$C_{ki}(\mathbf{y}^{(1)}) = F_{in}(f_k, \mathbf{y}^{(1)}) \cdot \left. \frac{\partial Y_{21}(f_k, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)}} \cdot F_{out}(f_k) + \left. \frac{\partial F_{in}(f_k, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)}} \cdot Y_{21}(f_k, \mathbf{y}^{(1)}) \cdot F_{out}(f_k) \quad (2.5)$$

We wzorze (2.5) zaznaczono zależność  $Y_{21}$ ,  $F_{in}$  i  $F_{out}$  od częstotliwości oraz zależność  $Y_{21}$  i  $F_{in}$  od wzoru apodyzacji.

W celu uproszczenia obliczeń w pracy tej przyjęto założenie, że drugi składnik we wzorze (2.5) może być pominięty. Przybliżenie to uzasadnione jest faktem, iż stosowane w praktyce wielkości admitancji  $Y_G$  są najczęściej duże w porównaniu z  $Y_{11}$ . Sprawia to, że czynnik  $F_{in}(f_k, \mathbf{y}^{(1)})$  jest bliski jedności i jego pochodne cząstkowe względem  $y_i^{(1)}$  są małe. W związku z tym otrzymujemy:  $C_{ki}(\mathbf{y}^{(1)}) = F_{in}(f_k, \mathbf{y}^{(1)}) \cdot S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)}) \cdot F_{out}(f_k)$

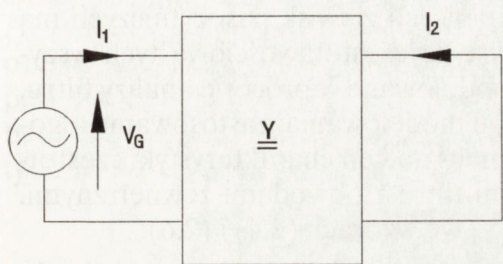
$$C_{ki}(\mathbf{y}^{(1)}) \text{ gdzie współczynniki } S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)}) \text{ są zdefiniowane wzorem } (2.6) \cdot F_{out}(f_k) \quad (2.6)$$

gdzie współczynniki  $S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  są zdefiniowane wzorem

$$S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)}) = \left. \frac{\partial Y_{21}(f_k, \mathbf{y})}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)}} \quad (2.7)$$

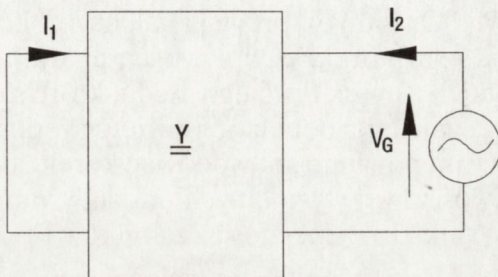
Zastosowanie przybliżonych relacji (2.4) i (2.6) sprawia, że zadanie analizy filtra jest równoważne problemowi wyznaczenia elementów:  $Y_{11}$ ,  $Y_{21}$  i  $Y_{22}$  macierzy admitancyjnej filtra w punktach przyjętej siatki częstotliwości i obliczeniu czułości transadmitancji na zmiany wzoru apodyzacji (wielkości  $S_{ki}(Y^{(1)})$ ).

Elementy macierzy admitancyjnej filtra można określić za pomocą układów elektrycznych przedstawionych na rysunkach 2.5a. i 2.5b.



Rys. 2.5a.

Układ do określania elementów  $Y_{21}$  i  $Y_{11}$  macierzy admitancyjnej czwórnika liniowego.



Rys. 2.5b.

Układ do określania elementów  $Y_{12}$  i  $Y_{22}$  macierzy admitancyjnej czwórnika liniowego.

Na rysunku tym  $V_G$  oznacza zespoloną amplitudę napięcia o pulsacji  $\omega$ , a  $I_1$ ,  $I_2$  oznaczają zespolone amplitudy prądu przepływającego odpowiednio przez przetwornik wejściowy i wyjściowy filtra. Układ z rysunku 2.5a. umożliwia określenie elementów  $Y_{21}$  i  $Y_{11}$  zgodnie ze wzorami:

$$Y_{21} = \frac{I_2}{V_G} \quad (2.8)$$

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_G} \quad (2.9)$$

Dla układu z rysunku 2.5b otrzymuje się:

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_G} \quad (2.10)$$

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_G} \quad (2.11)$$

Elementy macierzy admitancyjnej i współczynniki  $S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  można obliczyć wieloma sposobami, a uzyskane wyniki są zależne od tego, jakie zjawiska drugiego rzędu uwzględniono w analizie i jakich sposobów ich modelowania użyto.

Opisany w pracy [1] algorytm kompensacji zjawisk pasożytniczych ma na celu korekcję wpływu na charakterystykę częstotliwościową tych wszystkich zjawisk drugiego rzędu, które są modelowane w procesie analizy filtru. Niezależnie jednak od przyjętego sposobu modelowania, zastosowanie algorytmu powinno spowodować korekcję zniekształceń charakterystyki częstotliwościowej wywołanych oddziaływaniami filtru z obwodami zewnętrznymi. Wynika to z obecności czynników  $F_{in}$  i  $F_{out}$  we wzorach (2.4) i (2.6).

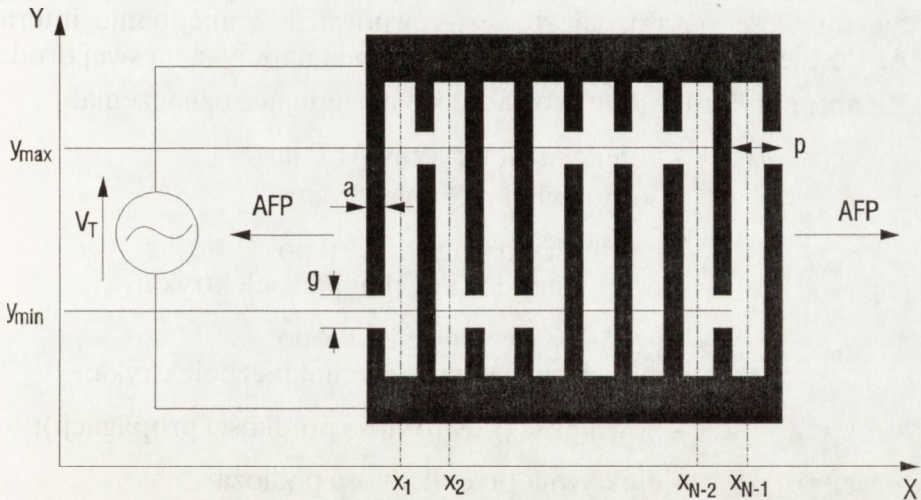
Rozważania stanowiące treść dalszych rozdziałów doprowadziły do opracowania komputerowej metody analizy filtrów z AFP, której zastosowanie umożliwia kompensację nie tylko wspomnianych oddziaływań, ale także dyfrakcji fal powierzchniowych. W przyjętym modelu filtru dokonano wielu uproszczeń - w celu uzyskania odpowiednio szybkich algorytmów obliczeniowych. I tak np. opracowany model uwzględnia jedynie wpływ dyfrakcji AFP na wartości parametru  $Y_{21}$  macierzy admitancyjnej, pomijając wpływ tego zjawiska na wartości admitancji wejściowej i wyjściowej filtru. Wprowadzenie tego uproszczenia jest uzasadnione faktem, iż charakterystyka częstotliwościowa filtrów rozważanego typu jest na ogół w znacznie większym stopniu uzależniona od transadmitancji niż od pozostałych elementów macierzy admitancyjnej.

W rozdziałach 3 i 4 przedstawiono matematyczny opis zjawisk generacji i detekcji AFP przez przetwornik międzypalczasty. W każdym z tych rozdziałów rozważono najpierw przypadek przetwornika prostego, a następnie wyniki uogólniono na przypadek przetwornika apodyzowanego. Wszystkie wzory matematyczne podane dla przetwornika apodyzowanego obowiązują także dla jego szczególnej postaci, jaką jest przetwornik prosty. W rozdziale 5 wyznaczono transadmitancję filtru, tzn. element  $Y_{21}$  macierzy admitancyjnej (można dowieść, że  $Y_{12} = Y_{21}$ ) i współczynniki  $S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  zdefiniowane

wzorem (2.7). W rozdziale 6 przedstawiono sposób wyznaczania admitancji wejściowej przetwornika międzypalczastego. Uzyskane tam wzory umożliwiają obliczenie admitancji wejściowej i wyjściowej filtru, tzn. elementów  $Y_{11}$  i  $Y_{22}$  macierzy admitancyjnej filtru.

### 3. GENERACJA AFP PRZEZ PRZETWORNIK MIĘDZYPALCZASTY

Rozważmy nieapodyzowany przetwornik międzypalczasty przedstawiony na rysunku 3.1 i załóżmy, że między jego szyny zbiorcze przyłożono sinusoidalnie zmienne napięcie o zespolonej amplitudzie  $V_T$ . Generację AFP przez taki przetwornik pod wpływem przyłożonego napięcia można opisać za pomocą quasistatycznej teorii przetwornika międzypalczastego przedstawionej w pracy [6]. Teoria ta stanowi uproszczenie opisanej w [7] bardziej ogólnej teorii analizującej zachowanie się struktur międzypalczastych za pomocą funkcji Greena.



Rys. 3.1.

Generacja AFP przez nieapodyzowany przetwornik międzypalczasty.

W pracy [6] przyjęto następujące założenia:

1. Przetwornik międzypalczasty umieszczony jest na płaskiej powierzchni, stanowiącej granicę między półprzestrzenią wypełnioną piezoelektrykiem i próżnią.

2. Szerokość apertury akustycznej jest na tyle duża, że pomija się zmienność pól elektrycznego i akustycznego w kierunku osi Y. Pomija się w szczególności zaburzenia tych pól spowodowane obecnością szyn zbiorczych i innych elementów struktury przetwornikowej, położonych w obszarach określonych nierównościami: ( $y < y_{\min}$ ) i ( $y > y_{\max}$ ).
3. Przyjmuje się, że elektrody przetwornika nie obciążają powierzchni piezoelektryka mechanicznie, a ich rezystywność jest nieskończenie mała.
4. Zanedbuje się wpływ pola magnetycznego (stosuje się tzw. przybliżenie quasielektrostatyczne).
5. Przyjmuje się, iż jedynym rodzajem fal akustycznych wzbudzanych przez przetwornik są fale Rayleigh'a. W szczególności zanedbuje się generację fal objętościowych.
6. Zakłada się, że gęstość ładunku elektrycznego  $\sigma(x)$  gromadzącego się na elektrodach przetwornika jest niezależna od częstotliwości. Gęstość tę otrzymuje się jako rozwiązanie równania całkowego, w którym pełną funkcję Greena zastąpiono jej częścią elektrostatyczną, niezależną od częstotliwości. (Założenie to jest równoważne zaniebaniu interakcji AFP z elektrodami przetwornika, które fala napotyka na swej drodze.)

Za autorami pracy [6] wprowadza się następujące oznaczenia:

- |                     |  |
|---------------------|--|
| $\phi_s(x, \omega)$ | - potencjał elektryczny AFP na powierzchni piezoelektryka;             |
| $v_0$               | - prędkość propagacji AFP po swobodnej powierzchni piezoelektryka;     |
| $v_m$               | - prędkość propagacji AFP po metalizowanej powierzchni piezoelektryka; |
| $s$                 | - powolność (odwrotność prędkości propagacji);                         |
| $\epsilon_s(s)$     | - efektywna przenikalność podłoża piezoelektrycznego;                  |

$G_s$  - ujemna liczba określona wzorem:

$$G_s = \frac{1}{\epsilon_s(\infty)} \cdot \frac{v_m - v_0}{v_0}$$

- $k_0$  - wartość liczby falowej odpowiadająca propagacji AFP po powierzchni swobodnej piezoelektryka ( $k_0 = \omega / v_0$ );
- $k_m$  - wartość liczby falowej odpowiadająca propagacji AFP po metalizowanej powierzchni piezoelektryka ( $k_m = \omega / v_m$ );
- $\sigma_e(x)$  - powierzchniowa gęstość ładunku elektrycznego w przypadku przyłożenia jednostkowej różnicy potencjałów między szyny zbiorcze przetwornika ( $\sigma(x) = V_T \cdot \sigma_e(x)$ );
- $\bar{\sigma}_e(k)$  - transformata Fouriera gęstości ładunku  $\sigma_e(x)$ :
- $$\bar{\sigma}_e(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_e(x) \cdot e^{-jkx} dx$$
- $\bar{\sigma}_e^*(k)$  - wartość sprzężona w stosunku do  $\bar{\sigma}_e(k)$ :
- $$\bar{\sigma}_e^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_e(x) \cdot e^{jkx} dx$$
- $x_L$  - odcięta lewego krańca przetwornika międzypalczastego;
- $x_R$  - odcięta prawego krańca przetwornika międzypalczastego.

Jak wykazano w pracy [6], przyjęcie podanych wyżej założeń pozwala wyrazić potencjał elektryczny AFP na powierzchni piezoelektryka w kanale akustycznym wyznaczonym rzędnymi  $y_{\min}$  i  $y_{\max}$  wzorem:

$$\phi_s(x, \omega) = \begin{cases} -jG_s V_T \cdot e^{jk_0 x} \cdot \bar{\sigma}_e(k_0) & \text{dla } x < x_L \\ -jG_s V_T \cdot e^{-jk_0 x} \cdot \bar{\sigma}_e^*(k_0) & \text{dla } x > x_R \end{cases} \quad (3.1)$$

W pracy [8] wykazano, iż dokładność teorii opisanej w [6] można poprawić stosując inną niż w [6] wartość współczynnika  $G_s$ . Autorzy pracy [8] wprowadzili zamiast ujemnego współczynnika  $G_s$  dodatnią stałą  $\Gamma_s$  zdefiniowaną wzorem:

$$\Gamma_s = \frac{1}{\varepsilon_s(\infty)} \cdot \frac{\Delta v}{v_0} \cdot \left[ 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta v}{v_0} \right] \quad (3.2)$$

gdzie  $\Delta v = v_0 - v_m$ .

Zauważmy, że  $|\Gamma_s| > |G_s|$ .

Ponieważ  $\Gamma_s$  i  $G_s$  mają przeciwne znaki, wzór (3.1) przyjmuje, po wprowadzeniu w nim wspomnianej poprawki, postać:

$$\phi_s(x, \omega) = \begin{cases} j\Gamma_s V_T \cdot e^{jk_0 x} \cdot \bar{\sigma}_e(k_0) & \text{dla } x < x_L \\ j\Gamma_s V_T \cdot e^{-jk_0 x} \cdot \bar{\sigma}_e^*(k_0) & \text{dla } x > x_R \end{cases} \quad (3.3)$$

Wzory (3.2) i (3.3) umożliwiają obliczenie potencjału AFP wygenerowanej przez przetwornik pod warunkiem znajomości transformaty Fouriera powierzchniowej gęstości ładunku  $\bar{\sigma}_e(k)$  w funkcji częstotliwości.

W ogólnym przypadku przetwornika o strukturze przedstawionej na rysunku 3.1., wartości jakie przyjmuje funkcja  $\bar{\sigma}_e(k)$  mogą być wyznaczone jedynie numerycznie. Metody prowadzenia takich obliczeń przedstawiono np. w pracach [7,9].

W pracy [10] otrzymano wzór na  $\sigma(x)$ , którego zastosowanie umożliwia uzyskanie transformaty Fouriera gęstości ładunku w postaci analitycznej. Wynik ten otrzymano pomijając tzw. zjawiska końcowe (ang.: end effects), tzn. zniekształcenia rozkładu gęstości ładunku na elektrodach przetwornika położonych blisko lewego lub prawego krańca przetwornika. W szczególności autorzy pracy [10] założyli, że rozkład ładunku w przetworniku z rysunku 3.1 ulegnie jedynie niewielkiej zmianie, jeśli z lewej strony tego przetwornika umieści się periodycznie nieskończoną liczbę elektrod o potencjale zgodnym z potencjałem pierwszej elektrody przetwornika, a po prawej stronie przetwornika nieskończoną liczbę elektrod o potencjale równym potencjałowi N-tej elektrody. Dla takiej periodycznej struktury otrzymano:

$$\sigma(x) = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} - v_i) \cdot \delta(x - x_i) \right] * \sigma_g(x) \quad (3.4)$$

gdzie:

$V_i$  - potencjał elektryczny i-tej elektrody,

$\delta(x)$  - delta Diraca,

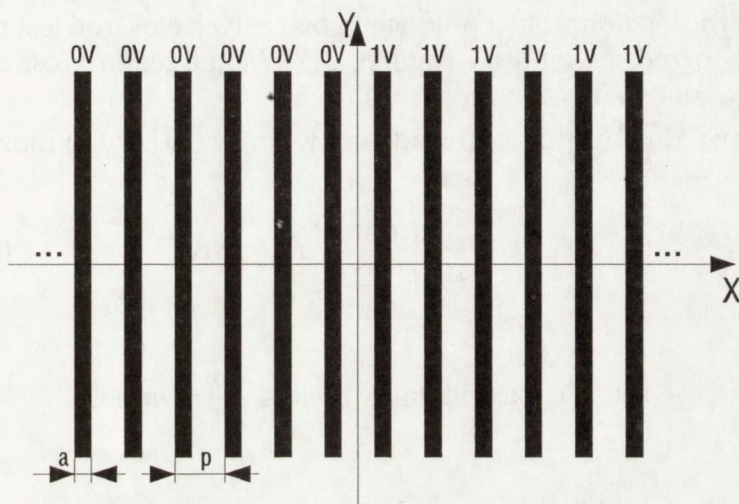


$\sigma_g(x)$

- powierzchniowa gęstość ładunku wytworzona przez pojedynczą przerwę międzyelektrodową w nieskończonym periodycznym układzie elektrod. Układ taki przedstawiono na rysunku 3.2. Współrzędna  $x$  środka przerwy międzyelektrodowej wynosi zero. Różnica potencjałów między elektrodami umieszczonymi na prawo od przerwy a elektrodami umieszczonymi po jej lewej stronie wynosi jeden volt.

\*

- operacja splotu dwóch funkcji.



Rys. 3.2.

Elementarna przerwa międzyelektrodowa w nieskończonym periodycznym układzie elektrod.

Z rysunku 3.1 wynika zależność

$$V_{i+1} - V_i = V_T \operatorname{sgn}(y_i - y_{i+1}). \quad (3.5)$$

Podstawienie wzoru (3.5) do (3.4), poddanie otrzymanej równości przekształceniu Fouriera i obustronne podzielenie otrzymanej tożsamości przez  $V_T$  daje:

$$\bar{\sigma}_e(k) = \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{-jkx_i} \right] \bar{\sigma}_g(k) \quad (3.6)$$

Analityczną postać funkcji  $\bar{\sigma}_g(k)$  można otrzymać w zademonstrowany poniżej sposób.

Jak wykazano w pracy [10], obowiązuje zależność

$$\bar{\sigma}_g(k) = \frac{\bar{\sigma}_0(k)}{2j \sin\left(\frac{kp}{2}\right)} \quad (3.7)$$

gdzie  $\bar{\sigma}_0(k)$  oznacza transformatę Fouriera gęstości ładunku  $\sigma_0(x)$ .

Gęstość ta jest powierzchniową gęstością ładunku wytworzoną w nieskończonym periodycznym układzie elektrod, w którym potencjał jednej z elektrod wynosi jeden volt, a potencjał pozostałych elektrod jest równy zero. Układ taki przedstawiono na rysunku 3.3. Współrzędna  $x$  osi elektrody o potencjale jednostkowym wynosi zero.

Zgodnie z analizą przeprowadzoną w pracy [11],  $\bar{\sigma}_0(k)$  można wyrazić wzorem:

$$\bar{\sigma}_0(k) = (\varepsilon_0 + \varepsilon_p^T) \cdot \frac{2\sin(\pi s)}{P_{-s}(-\cos\Delta)} \cdot P_m(\cos\Delta) \quad (3.8)$$

gdzie:

$m$  - liczba całkowita taka, że  $m \leq \frac{kp}{2\pi} \leq m + 1$

$\Delta = \frac{\pi a}{P}$

$s = \frac{kp}{2\pi} - m$

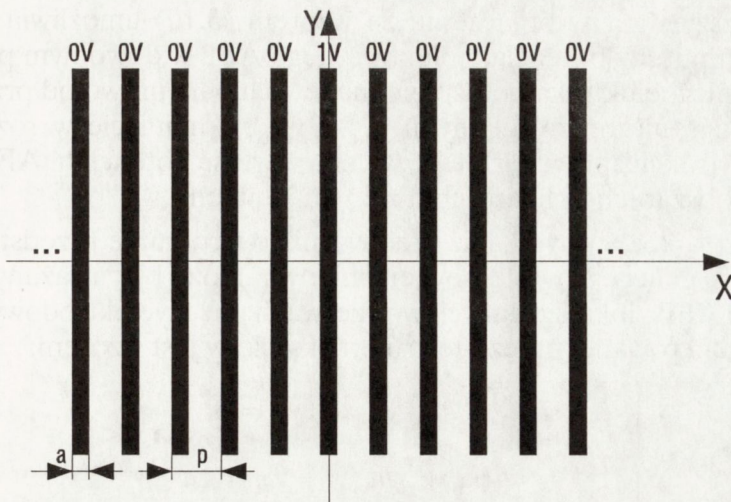
$P_m$  - wielomian Legendre'a stopnia  $m$ ;

$P_{-s}$  - funkcja Legendre'a pierwszego rodzaju, stopnia  $-s$ ;

$\varepsilon_0$  - przenikalność dielektryczna próżni;

$\varepsilon_p^T$  - efektywna stała dielektryczna podłoża piezoelektrycznego wyznaczona w warunkach stałego naprężenia na jego powierzchni.

W pracy [8] wykazano, że wyniki quasistatycznej analizy przetwornika międzypalczastego są dokładniejsze, jeśli użytą w [11] stałą  $(\varepsilon_0 + \varepsilon_p^T)$  zastąpi



Rys. 3.3.

Elektroda o potencjale jednostkowym umieszczona w nieskończonym okresowym układzie elektrod (wszystkie elektrody z wyjątkiem centralnej mają potencjał równy 0V)

się wartością efektywnej przenikalności podłoża piezoelektrycznego  $\varepsilon_s(\infty)$ , odpowiadającą nieskończenie dużej powolności. Prowadzi to do wzoru:

$$\bar{\sigma}_0(k) = \varepsilon_s(\infty) \cdot \frac{2\sin(\pi s)}{P_{-s}(-\cos\Delta)} \cdot P_m(\cos\Delta) \quad (3.9)$$

Na podstawie wzorów (3.9) i (3.7) można otrzymać  $\bar{\sigma}_g(k)$  w postaci

$$\bar{\sigma}_g(k) = -j\varepsilon_s(\infty) \cdot \frac{(-1)^m}{P_{-s}(-\cos\Delta)} \cdot P_m(\cos\Delta) \quad (3.10)$$

Użycie otrzymanego wyniku we wzorze (3.6) umożliwia obliczenie transformaty Fouriera powierzchniowej gęstości ładunku  $\sigma_e(x)$ . Podstawienie (3.6) do (3.3) daje:

$$\phi_s(x, \omega) = \begin{cases} j\Gamma_s V_T \cdot \bar{\sigma}_g(k_0) \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{jk_0(x-x_i)} & \text{dla } x < x_L \\ j\Gamma_s V_T \cdot \bar{\sigma}_g^*(k_0) \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{-jk_0(x-x_i)} & \text{dla } x > x_R \end{cases} \quad (3.11)$$

Powyższy wzór w połączeniu ze wzorem (3.10) umożliwia wyliczenie wartości amplitudy potencjału elektrycznego AFP w dowolnym punkcie powierzchni piezoelektryka położonym na lewo lub na prawo od przetwornika w kanale ograniczonym rzędnymi  $y_{\min}$  i  $y_{\max}$ . Pominięcie w rozważaniach zjawiska dyfrakcji sprawia, że teoretyczna wartość potencjału AFP jest równa zero w obszarach położonych poza tym kanałem.

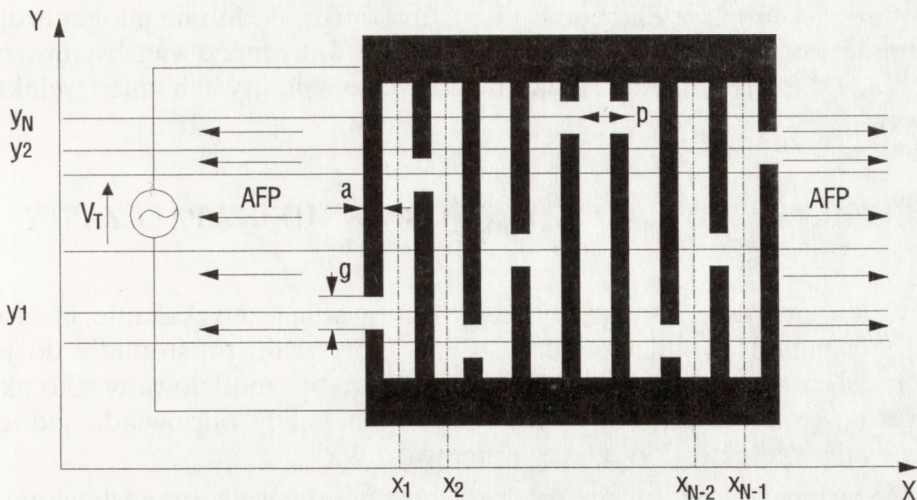
Ze wzoru (3.11) wynika, iż przetwornik o strukturze przedstawionej na rysunku 3.1, generujący falę powierzchniową, może być uważany za zestaw  $N-1$  źródeł AFP zlokalizowanych w przerwach międzyelektrodowych. Potencjał AFP generowanej przez  $i$ -te źródło określony jest wzorem:

$$\phi_{si}(x, \omega) = \begin{cases} j\Gamma_s V_T \cdot \bar{\sigma}_g(k_0) \cdot \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{jk_0(x - x_i)} & \text{dla } x < x_L \\ j\Gamma_s V_T \cdot \bar{\sigma}_g^*(k_0) \cdot \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{-jk_0(x - x_i)} & \text{dla } x > x_R \end{cases} \quad (3.12)$$

Ze wzoru (3.10) wynika, że  $\bar{\sigma}_g^*(k) = -\bar{\sigma}_g(k)$ . Pozwala to wyrazić potencjał AFP generowanej przez  $i$ -tą przerwę międzyelektrodową wspólnym dla obu kierunków propagacji wzorem:

$$\begin{aligned} \phi_{si}(x, \omega) &= \\ &= j\Gamma_s V_T \bar{\sigma}_g(k_0) \text{sgn}(x - x_i) \text{sgn}(y_{i+1} - y_i) e^{-jk_0|x - x_i|} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Uzyskany wynik można uogólnić na przypadek przetwornika apodyzowanego. Rozważmy w tym celu sterowany napięciem zmiennym przetwornik międzypalczasty przedstawiony na rysunku 3.4. Przetwornik taki można umownie podzielić poziomymi liniami o rzędnych równych przerw w elektrodach ( $y_i$ ) na niezależne kanały akustyczne. Zauważmy, że geometria każdego z kanałów jest stała w kierunku osi  $Y$ . Dlatego każda część przetwornika apodyzowanego wypełniająca dowolny z kanałów może być uważana za przetwornik prosty. Z punktu widzenia sieci elektrycznej sterującej przetwornikiem apodyzowanym, przetwornik ten może być uznany za równoległe połączenie wszystkich przetworników prostych, powstałych w wyniku opisanej konstrukcji myślowej. Można przyjąć, iż każdy z takich przetworników emituje niezależną wiązkę fali akustycznej w odpowiadającym sobie kanale. Zaniedbując zmienność pól elektrycznych i akustycznych w kierunku osi  $Y$  w każdym z kanałów, można zastosować do każdego z nich metodę analizy, którą podano powyżej dla przetwornika prostego. Otrzymamy wtedy zgodnie z relacją (3.13) następujący wzór na potencjał  $\phi_{si}^j(x, \omega)$  fali powierzchniowej emitowanej w  $j$ -tym kanale przez  $i$ -te źródło:



Rys. 3.4.

Generacja AFP przez apodyzowany przetwornik międzypalczasty.

$$\begin{aligned} \phi_{si}^j(x, \omega) = \\ = j \Gamma_s V_T \bar{\sigma}_g(k_0) \operatorname{sgn}(x-x_i) \operatorname{sgn}(y_{i+1}^j - y_i^j) e^{-j k_0 |x - x_i|} \end{aligned} \quad (3.14)$$

W powyższym wzorze  $y_i^j$  jest równe rzędnej dolnej granicy j-tego kanału w przypadku, gdy fragment i-tej elektrody leżący w tym kanale jest dołączony do górnej szyny zbiorczej i rzędnej górnej granicy j-tego kanału w przypadku, gdy fragment ten jest połączony z dolną szyną zbiorczą.

Zauważmy, że dla wszystkich kanałów leżących pomiędzy liniami poziomymi wyznaczonymi przez rzędne  $y_i, y_{i+1}$  znak wyrażenia  $(y_{i+1}^j - y_i^j)$  jest stały i równy znakowi różnicy  $(y_{i+1} - y_i)$ , a wyrażenie to jest równe zero dla wszystkich pozostałych kanałów. Na podstawie wzoru (3.14) można więc stwierdzić, iż potencjały generowanych przez i-tą przerwę międzyelektrodową AFP są takie same we wszystkich kanałach ograniczonych rzędnymi  $y_i$  i  $y_{i+1}$ , a w pozostałych obszarach potencjały te są równe zero. Powyższe rozumowanie dowodzi, że potencjał AFP generowanej przez i-tą przerwę międzyelektrodową w przetworniku apodyzowanym przedstawionym na rysunku 3.4 jest w kanale ograniczonym rzędnymi  $y_i, y_{i+1}$  dany wzorem (3.13) i równy zero w obszarach leżących poza tym kanałem.

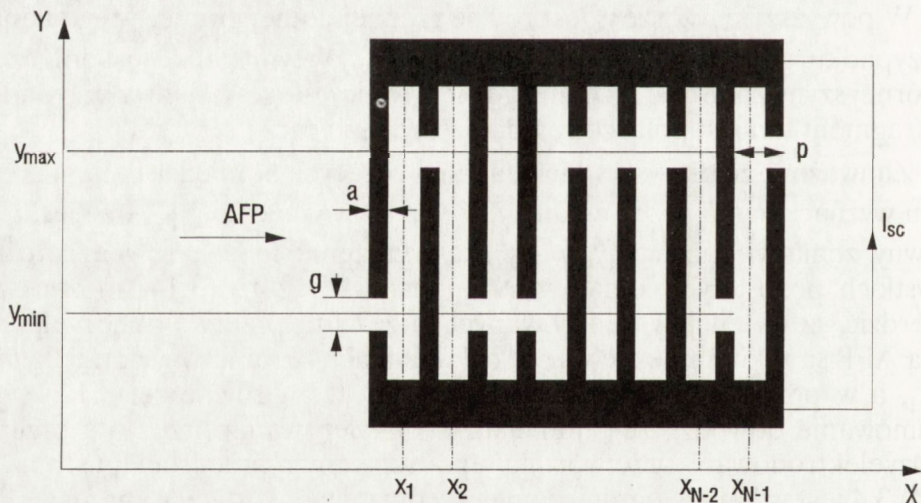
Potencjał elektryczny AFP generowanej przez przetwornik apodyzowany można obliczyć jako superpozycję potencjałów pochodzących od wszy-

stkich przerw międzyelektrodowych przetwornika. Podobnie jak generujący AFP przetwornik prosty, przetwornik apodyzowany może więc być uważany za układ N-1 źródeł AFP zlokalizowanych w przerwach międzyelektrodowych.

#### 4. DETEKcja AFP PRZEZ PRZETWORNIK MIĘDZYPALCZASTY

Celem przedstawionego poniżej rozumowania jest wykazanie, iż apodyzowany przetwornik międzypalczasty, na który pada prostopadle do jego elektrod akustyczna fala powierzchniowa, może być modelowany jako układ elementarnych odbiorników AFP, z których każdy odpowiada jednej z przerw międzyelektrodowych tego przetwornika.

Rozważmy najpierw nieapodyzowany przetwornik przedstawiony na rysunku 4.1. Przyjmijmy, że zwarto szyny zbiorcze tego przetwornika i że z lewej lub prawej strony pada na ten przetwornik prostopadle do jego elektrod akustyczna fala powierzchniowa o pulsacji  $\omega$ , której pola akustyczne i elektryczne są niezależne od współrzędnej  $y$ . Fala ta spowoduje indukcję ładunku elektrycznego na elektrodach przetwornika, a tym samym wywoła przepływ prądu  $I_{sc}$  między szynami zbiorczymi. Wielkość prądu  $I_{sc}$  można wyznaczyć korzystając z zasady wzajemności udowodnionej dla przetwornika



Rys. 4.1.

Detekcja AFP przez nieapodyzowany przetwornik międzypalczasty.

nieapodyzowanego w pracy [11]. Zasada ta wiąże detekcję AFP z jej generacją równaniem:

$$\left[ \frac{I_{sc}}{\phi_I(x, \omega)} \right]_{detekcja} = - \frac{\omega A}{\Gamma_s} \left[ \frac{\phi_s(x, \omega)}{V_T} \right]_{generacja} \quad (4.1)$$

gdzie:

- $A = y_{max} - y_{min}$  – apertura akustyczna przetwornika,
- $x$  – odcięta punktu leżącego poza przetwornikiem ( $x < x_L$  lub  $x > x_R$ ),
- $V_T$  – zespolona amplituda napięcia zmiennego przyłożonego między szyny zbiorcze przetwornika, gdy pracuje on jako element generujący falę powierzchniową,
- $\phi_s(x, \omega)$  – zespolona amplituda potencjału AFP generowanej przez przetwornik międzypalczasty w przypadku przyłożenia między jego szyny zbiorcze napięcia  $V_T$ . Punkt o odciętej  $x$ , w którym określono  $\phi_s(x, \omega)$ , leży poza przetwornikiem.
- $\phi_I(x, \omega)$  – zespolona amplituda fali powierzchniowej padającej na przetwornik w przypadku, gdy pracuje on jako detektor AFP (ze zwartymi szynami zbiorczymi). Punkt o odciętej  $x$ , w którym określono  $\phi_I(x, \omega)$ , leży poza przetwornikiem.
- $I_{sc}$  – prąd zwarcia przepływający między szynami zbiorczymi przetwornika w wyniku detekcji fali powierzchniowej o potencjale  $\phi_I(x, \omega)$  padającej na przetwornik.

Wielkość stosunku  $\left[ \frac{\phi_s(x, \omega)}{V_T} \right]_{generacja}$  można wyznaczyć ze wzoru (3.11). Podstawienie wyniku do wzoru (4.1) daje następujące wyrażenie na  $I_{sc}$ :

$$I_{sc} = \begin{cases} -j\omega A\phi_1(x, \omega) \cdot \bar{\sigma}_g(k_0) \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{jk_0(x-x_i)} & \text{dla } x < x_L \\ -j\omega A\phi_1(x, \omega) \cdot \bar{\sigma}_g^*(k_0) \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{-jk_0(x-x_i)} & \text{dla } x > x_R \end{cases} \quad (4.2)$$

Uzyskane wyrażenie pozwala wyznaczyć prąd zwarcia  $I_{sc}$ , jeśli znana jest wielkość potencjału AFP, propagującej się w kierunku przetwornika, w dowolnym punkcie leżącym poza przetwornikiem w obrębie kanału akustycznego wyznaczonego przez rzędne  $y_{\min}$  i  $y_{\max}$ .

Przetwornik nieapodyzowany, pracujący jako detektor AFP, jest więc równoważny  $N-1$  elementarnym odbiornikom AFP, przy czym każdy z tych odbiorników wnosi do całkowitego prądu  $I_{sc}$  elementarny wkład  $I_{sci}$  dany wzorem:

$$I_{sci} = \begin{cases} -j\omega A\phi_1(x, \omega) \cdot \bar{\sigma}_g(k_0) \cdot \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{jk_0(x-x_i)} & \text{dla } x < x_L \\ -j\omega A\phi_1(x, \omega) \cdot \bar{\sigma}_g^*(k_0) \cdot \text{sgn}(y_i - y_{i+1}) \cdot e^{-jk_0(x-x_i)} & \text{dla } x > x_R \end{cases} \quad (4.3)$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, uwzględnienie, że  $\bar{\sigma}_g^*(k) = -\bar{\sigma}_g(k)$ , umożliwia wyrażenie elementarnego prądu  $I_{sci}$  odbieranego przez pojedynczą przerwę międzylektrodową wspólnym dla obu kierunków propagacji wzorem:

$$I_{sci} = -j\omega A\phi_1(x, \omega) \bar{\sigma}_g(k_0) \text{sgn}(x-x_i) \text{sgn}(y_{i+1} - y_i) e^{-jk_0|x-x_i|} \quad (4.4)$$

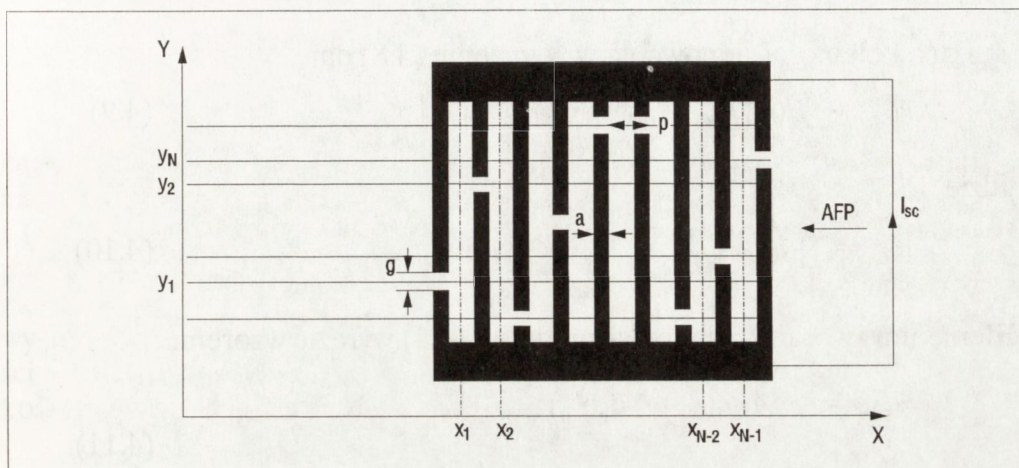
Z porównania wzorów (4.4) i (3.13) otrzymujemy

$$\left[ \frac{I_{sci}}{\phi_1(x, \omega)} \right]_{\text{detekcja}} = -\frac{\omega A}{\Gamma_s} \left[ \frac{\phi_{si}(x, \omega)}{V_T} \right]_{\text{generacja}} \quad (4.5)$$

Tak więc zasada wzajemności udowodniona w [11] dla przetwornika prostego jest także prawdziwa dla pojedynczej przerwy międzylektrodowej w takim przetworniku.



Rozważmy przedstawiony na rysunku 4.2 przetwornik apodyzowany o zwartych szynach zbiorczych i założmy, że pada na niego z lewej lub prawej strony akustyczna fala powierzchniowa, której pola akustyczne i elektryczne są niezależne od współrzędnej  $y$ . Podobnie jak w analizowanym poprzednio przypadku przetwornika nieapodyzowanego, spowoduje to powstanie ładunków elektrycznych na elektrodach przetwornika i w konsekwencji przepływ prądu  $I_{sc}$  między szynami zbiorczymi.



Rys. 4.2.

Detekcja AFP przez apodyzowany przetwornik międzypalczasty.

Przedstawiony niżej sposób analizy zjawiska detekcji AFP przez przetwornik apodyzowany jest bardzo podobny do metody analizy generacji AFP przez taki przetwornik, zastosowanej w poprzednim rozdziale. Tak jak poprzednio, podzielmy przetwornik na kanały akustyczne, z których każdy zawiera przetwornik prosty. Można przyjąć, że znajdujący się w  $j$ -tym kanale przetwornik odbiera, niezależnie od przetworników znajdujących się w pozostałych kanałach, padającą na niego AFP, co powoduje przepływ prądu  $I_{sc}^j$  między szynami zbiorczymi. Całkowity prąd przepływający między szynami zbiorczymi można wyrazić jako sumę prądów pochodzących od wszystkich przetworników prostych:

$$I_{sc} = \sum_j I_{sc}^j \quad (4.6)$$

Prąd  $I_{sc}^j$  jest sumą prądów  $I_{sci}^j$ , z których każdy pochodzi od  $i$ -tej przerwy międzylektrodowej zlokalizowanej w  $j$ -tym kanale, tzn.

$$I_{sc}^j = \sum_i I_{sci}^j \quad (4.7)$$

Tak więc

$$I_{sc} = \sum_j \sum_i I_{sci}^j \quad (4.8)$$

Zmiana kolejności sumowania w wyrażeniu (4.8) daje

$$I_{sc} = \sum_i I_{sci} \quad (4.9)$$

gdzie

$$I_{sci} = \sum_j I_{sci}^j \quad (4.10)$$

Elementarny prąd  $I_{sci}^j$  można zgodnie z (4.4) wyrazić wzorem:

$$I_{sci}^j = -j\omega A_j \phi_I(x, \omega) \bar{\sigma}_g(k_0) \cdot \quad (4.11)$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(x-x_i) \operatorname{sgn}(y_{i+1}^j - y_i^j) e^{-j k_0 |x-x_i|}$$

We wzorze (4.11) przyjęto oznaczenia z poprzedniego rozdziału. Ponadto  $A_j$  oznacza szerokość (aperturę)  $j$ -tego kanału. Podstawiając (4.11) do (4.10) otrzymujemy następujące wyrażenie na prąd wytwarzany przez  $i$ -tą przerwę w przetworniku apodyzowanym:

$$I_{sci} = -j\omega \phi_I(x, \omega) \bar{\sigma}_g(k_0) \operatorname{sgn}(x-x_i) \cdot \quad (4.12)$$

$$\cdot e^{-j k_0 |x-x_i|} \cdot \sum_j A_j \operatorname{sgn}(y_{i+1}^j - y_i^j)$$

Jak zauważono w poprzednim rozdziale,  $\operatorname{sgn}(y_{i+1}^j - y_i^j) = \operatorname{sgn}(y_{i+1} - y_i)$  dla kanałów ograniczonych rzędnymi  $y_i, y_{i+1}$ , a ponadto  $\operatorname{sgn}(y_{i+1}^j - y_i^j) = 0$  dla pozostałych kanałów. Otrzymujemy więc:

$$\sum_j A_j \operatorname{sgn}(y_{i+1}^j - y_i^j) =$$

$$= |y_{i+1} - y_i| \operatorname{sgn}(y_{i+1} - y_i) = y_{i+1} - y_i \quad (4.13)$$

Prąd wytworzony przez i-tą przerwę międzyelektrodową w apodyzowanym przetworniku międzypalczastym można zatem opisać zależnością:

$$I_{sci} = -j\omega\phi_1(x, \omega) \bar{\sigma}_g(k_0) \operatorname{sgn}(x-x_i) \cdot$$

$$\cdot e^{-j k_0 |x - x_i|} \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad (4.14)$$

Zastosowanie powyższego wzoru i wzoru (4.9) umożliwi obliczenie całkowitego prądu  $I_{sc}$  pod warunkiem znajomości potencjału elektrycznego akustycznej fali powierzchniowej padającej na przetwornik. Ze wzorów (4.9) i (4.14) wynika, iż apodyzowany przetwornik międzypalczasty odbierający padającą na niego AFP można uważać za zbiór elementarnych odbiorników zlokalizowanych w środkach przerw międzyelektrodowych. Składowa prądu wytwarzana przez i-ty elementarny odbiornik jest proporcjonalna do długości i-tej przerwy elektrodowej wziętej z odpowiednim znakiem, tzn. do wielkości  $y_{i+1} - y_i$ .

Porównanie wzorów (4.14) i (3.13) prowadzi do wniosku, że zasada wzajemności sformułowana w [11] dla przetwornika nieapodyzowanego pozostaje słuszna dla pojedynczej przerwy międzyelektrodowej w przetworniku apodyzowanym, jeśli apertura akustyczna tej przerwy zostanie zdefiniowana relacją

$$A_i = |y_{i+1} - y_i| \quad (4.15)$$

Przeprowadzona analiza dotyczyła przypadku, w którym wiązka akustyczna padająca na przetwornik obejmuje całą jego szerokość. Załóżmy, że na przetwornik przedstawiony na rysunku 4.2 pada z lewej lub prawej strony wiązka zlokalizowana w poziomym kanale wyznaczonym rzędnymi  $y_A, y_B$ , gdzie  $y_B > y_A$ , przy czym kanał ten jest usytuowany dowolnie względem przetwornika, tzn. może on obejmować cały przetwornik, mieć z nim część wspólną, leżeć całkowicie w kanale wyznaczonym przez ten przetwornik lub nie mieć z nim punktów wspólnych. W opisywanym przypadku prąd  $I_{sci}$  wytworzony przez i-tą przerwę międzyelektrodową może być różny od prądu wyznaczonego równaniem (4.14). Różnica ta wynika z faktu, iż w sumowaniu we wzorze (4.12) należy teraz uwzględnić tylko te kanały (lub ich fragmenty), które są objęte wiązką akustyczną (przerwy międzyelektrodowe nie wytwa-

rzają składowych prądu w pozostałych kanałach). Z rozważenia wszystkich możliwości wzajemnego usytuowania wiązki akustycznej i krańców i-tej przerwy międzyelektrodowej  $y_i, y_{i+1}$  wynika, po przeprowadzeniu sumowania analogicznego jak we wzorze (4.12), równość

$$I_{sci} = -j\omega\phi_I(x, \omega) \bar{\sigma}_g(k_0) \operatorname{sgn}(x-x_i) \cdot e^{-jk_0|x-x_i|} \cdot C_i \quad (4.16)$$

w której współczynniki  $C_i$  są zdefiniowane wzorem:

$$C_i = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \\ & y_A \geq \max(y_i, y_{i+1}) \\ & \text{lub} \\ & y_B \leq \min(y_i, y_{i+1}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \min[y_B, \max(y_i, y_{i+1})] - \\ \max[y_A, \min(y_i, y_{i+1})] \end{array} \right\} \cdot \operatorname{sgn}(y_{i+1} - y_i) & \text{w pozostałych} \\ & \text{przypadkach} \end{cases} \quad (4.17)$$

Mimo skomplikowanej postaci zapisu wielkości  $C_i$  jej interpretacja jest prosta. Moduł  $C_i$  jest równy szerokości kanału stanowiącego wspólną część dwóch kanałów: wyznaczonego przez wiązkę akustyczną i zdefiniowanego przez rzędne krańców i-tej przerwy międzyelektrodowej  $y_i, y_{i+1}$ . Znak  $C_i$  jest taki, jak znak różnicy  $y_{i+1} - y_i$ . Ze wzorów (4.16) i (4.17) wynika, iż w przypadku, gdy na elementarną przerwę międzyelektrodową w przetworniku apodyzowanym pada AFP, która tylko częściowo "oświetla" tę przerwę, to cząstkowy prąd  $I_{sci}$  wytworzony przez AFP jest proporcjonalny do długości "oświetlonej" części przerwy międzyelektrodowej wziętej z odpowiednim znakiem.

## 5. WYZNACZENIE TRANSADMITANCJI FILTRU

W pierwszej części niniejszego rozdziału wyznaczono transadmitancję filtru i współczynniki  $S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  zdefiniowane wzorem (2.7), przy pominięciu zjawiska dyfrakcji AFP. Następnie wyprowadzono analogiczne wzory uwzględniając zjawisko dyfrakcji. Uzyskane wyrażenia na transadmitancję i współ-

czynniki  $S_{ki}(\mathbf{Y}^{(1)})$  obowiązują dla szerokiej klasy krzywych powolności podłoża piezoelektrycznego, wymagają jednak numerycznego całkowania szybko zmiennych funkcji. Całki te można sprowadzić do całek Fresnela, jeśli założy się, iż krzywa powolności podłoża piezoelektrycznego może być aproksymowana parabolą. To przybliżenie, określane w literaturze jako przybliżenie paraboliczne, jest uzasadnione dla wielu stosowanych w praktyce podłoży (np. dla kwarcu o orientacji krystalograficznej ST i niobianu litu o orientacji  $128^\circ$  YX). Zastosowanie przybliżenia parabolicznego znacznie upraszcza proces obliczenia transadmitancji i współczynników  $S_{ki}(\mathbf{Y}^{(1)})$ , gdyż istnieją szybkie procedury numeryczne umożliwiające obliczenie całek Fresnela. W pracy [1] zamieszczono wyprowadzenia wzorów umożliwiających obliczenie transadmitancji i współczynników  $S_{ki}(\mathbf{Y}^{(1)})$  w przypadku zastosowania przybliżenia parabolicznego. Podano tam także zastosowany sposób obliczenia całek Fresnela.

Założmy, że przetwornik nadawczy filtru o strukturze przedstawionej na rysunku 2.3 jest sterowany napięciem zmiennym o zespolonej amplitudzie  $V_G$  i pulsacji  $\omega$ , a szyny zbiorcze przetwornika odbiorczego są zwarte. Sytuację taką ilustruje rysunek 2.5a, na którym filtr jest reprezentowany przez czwórnik o macierzy admitancyjnej  $\mathbf{Y}$ . Układ elektryczny z rysunku 2.5a umożliwia określenie transadmitancji (elementu  $Y_{21}$  macierzy admitancyjnej) filtru zgodnie ze wzorem (2.8).

Wyznamy najpierw transadmitancję filtru, ignorując zjawisko dyfrakcji AFP. Przyjmijmy dodatkowo, że obecność przetwornika odbiorczego ma pomijalny wpływ na rozkład ładunku elektrycznego w przetworniku nadawczym. Pomińmy także odbicia AFP od elektrod zwartego przetwornika odbiorczego. Założenia te umożliwiają wykorzystanie wyników uzyskanych w rozdziałach 3. i 4. do wyznaczenia transadmitancji filtru. W szczególności pozwalają one przyjąć, iż przetwornik nadawczy generuje AFP w sposób opisany w rozdziale 3. Potencjał elektryczny związany z AFP wytworzoną na skutek przyłożenia napięcia  $V_G$  między szyny zbiorcze tego przetwornika jest superpozycją potencjałów wytworzonych przez każdą z przerw międzyelektrodowych.

Rozważmy i-tą przerwę międzyelektrodową w przetworniku nadawczym i punkt o współrzędnych  $(x,y)$ , leżący pomiędzy przetwornikami w obrębie wiązki akustycznej generowanej przez tę przerwę. Współrzędne punktu  $(x,y)$  spełniają następujące nierówności:

$$\begin{aligned} x_R^{(1)} &\leq x \leq x_L^{(2)} \\ y_i^{(1)} &\leq y \leq y_{i+1}^{(1)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dostosowując oznaczenia przyjęte we wzorze (3.13) do oznaczeń z rysunków 2.3 i 2.5a, otrzymujemy następujące wyrażenie na wartość potencjału, jaki wytwarza w punkcie  $(x, y)$  AFP wygenerowana przez  $i$ -tą przerwę:

$$\begin{aligned} \phi_{si}(x, \omega) &= \\ &= j \Gamma_s V_G \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \operatorname{sgn}(y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)}) e^{-jk_0(x - x_i^{(1)})} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Górny wskaźnik  $(1)$  umieszczony w powyższym wzorze przy wielkościach  $\bar{\sigma}_g(k_0)$ ,  $y_{i+1}$ ,  $y_i$ ,  $x_i$  oznacza, że odnoszą się one do przetwornika nadawczego.

Fala powierzchniowa wygenerowana przez  $i$ -tą przerwę międzyelektrodową dociera kolejno do każdej przerwy międzyelektrodowej w przetworniku odbiorczym. Zgodnie z wynikami przedstawionymi w rozdziale 4., cząstkowy prąd Iscij będący wynikiem interakcji AFP wygenerowanej przez  $i$ -tą przerwę międzyelektrodową w przetworniku nadawczym z  $j$ -tą przerwą w przetworniku odbiorczym można wyrazić za pomocą odpowiednio zmodyfikowanej równości (4.16), w postaci:

$$I_{scij} = j\omega\phi_{si}(x, \omega) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) e^{jk_0(x - x_j^{(2)})} C_{ij} \quad (5.3)$$

gdzie współczynniki  $C_{ij}$  dane są wzorem:

$$C_{ij} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \left. \begin{array}{l} \text{jeśli} \\ \min(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}) \geq \\ \geq \max(y_j^{(2)}, y_{j+1}^{(2)}) \\ \text{lub} \\ \max(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}) \leq \\ \leq \min(y_j^{(2)}, y_{j+1}^{(2)}) \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \cdot \operatorname{sgn}(y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)}) \end{array} \quad (5.4)$$

Podstawiając (5.2) do (5.3) otrzymujemy:

$$I_{scij} = -\omega \Gamma_s \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) e^{-jk_0(x_j^{(2)} - x_i^{(1)})} D_{ij} V_G \quad (5.5)$$

gdzie  $D_{ij}$  zdefiniowano wzorem:

$$D_{ij} = C_{ij} \operatorname{sgn}(y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)}) \quad (5.6)$$

to znaczy:

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \\ & \min(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}) \geq \\ & \quad \geq \max(y_j^{(2)}, y_{j+1}^{(2)}) \\ & \text{lub} \\ & \max(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}) \leq \\ & \quad \leq \min(y_j^{(2)}, y_{j+1}^{(2)}) \end{cases} \quad (5.7)$$

$$= \begin{cases} \{ \min[\max(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}), \max(y_j^{(2)}, y_{j+1}^{(2)})] - \\ \max[\min(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}), \min(y_j^{(2)}, y_{j+1}^{(2)})] \} \cdot \text{w pozostałych} \\ \cdot \operatorname{sgn}(y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)}) \cdot \operatorname{sgn}(y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)}) \end{cases} \text{przypadkach}$$

Przy wyprowadzeniu wzoru (5.5) nie korzystano z założenia, iż przetwornik odbiorczy jest nieapodyzowany. Uwzględnienie tego faktu pozwala uprościć uzyskane wyrażenie na prąd  $I_{scij}$ . Jeśli przetwornik odbiorczy jest przetwornikiem prostym, to możliwe są cztery przypadki:

$$\begin{aligned}
a) \quad & y_j^{(2)} = y_{\min}^{(2)}, \quad y_{j+1}^{(2)} = y_{\max}^{(2)} \\
b) \quad & y_j^{(2)} = y_{\max}^{(2)}, \quad y_{j+1}^{(2)} = y_{\min}^{(2)} \\
c) \quad & y_j^{(2)} = y_{\min}^{(2)}, \quad y_{j+1}^{(2)} = y_{\min}^{(2)} \\
d) \quad & y_j^{(2)} = y_{\max}^{(2)}, \quad y_{j+1}^{(2)} = y_{\max}^{(2)}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Podstawienie każdego z czterech wariantów równości (5.8) do wzoru (5.7) i uwzględnienie, że dla wszystkich elektrod przetwornika nadawczego zachodzą nierówności:

$$y_{\min}^{(2)} \leq y_i^{(1)} \leq y_{\max}^{(2)}$$

prowadzi do następującego wzoru na współczynniki  $D_{ij}$ :

$$D_{ij} = \left( y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)} \right) \operatorname{sgn} \left( y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)} \right) \tag{5.9}$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{sgn}(y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)}) = \frac{y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)}}{A^{(2)}} \tag{5.10}$$

Na podstawie (5.10) i (5.9) dostajemy więc:

$$D_{ij} = \frac{1}{A^{(2)}} \left( y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)} \right) \left( y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)} \right) \tag{5.11}$$

Podstawiając (5.11) do (5.5), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
I_{scij} &= \\
&= - \frac{\omega \Gamma_s}{A^{(2)}} \cdot \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) V_G \cdot \\
&\cdot e^{-jk_0 \left( x_j^{(2)} - x_i^{(1)} \right)} \left( y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)} \right) \left( y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)} \right)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Całkowity prąd  $I_2$  przepływający między szynami zbiorczymi przetwornika odbiorczego można wyznaczyć stosując zasadę superpozycji i sumując prądy cząstkowe  $I_{scij}$  pochodzące od wszystkich par:  $i$ -tę elementarne źródło AFP,  $j$ -ty elementarny odbiornik AFP. Sumowanie to daje:



$$\begin{aligned}
 I_{scij} &= \\
 &= -\frac{\omega\Gamma_s}{A^{(2)}} \cdot \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0)\bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0)V_G \cdot
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{N^{(1)}-1} \sum_{j=1}^{N^{(2)}-1} e^{-jk_0(x_j^{(2)} - x_i^{(1)})} (y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)}) (y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)})$$

Podzielenie obu stron równania (5.13) przez  $V_G$  pozwala otrzymać transadmitancję filtru w postaci

$$\begin{aligned}
 Y_{21} &= \\
 &= -\frac{\omega\Gamma_s}{A^{(2)}} \cdot \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0)\bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \cdot
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{N^{(1)}-1} \sum_{j=1}^{N^{(2)}-1} e^{-jk_0(x_j^{(2)} - x_i^{(1)})} (y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)}) (y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)})$$

Zastępując podwójną sumę w wyrażeniu (5.14) iloczynem dwóch sum pojedynczych, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 Y_{21} &= \\
 &= -\frac{\omega\Gamma_s}{A^{(2)}} \cdot \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0)\bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \cdot
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\cdot \left( \sum_{i=1}^{N^{(1)}-1} (y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)}) e^{jk_0x_i^{(1)}} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{N^{(2)}-1} e^{-jk_0x_j^{(2)}} (y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)}) \right)$$

Zróżniczkowanie ostatniego wzoru względem  $y_i^{(1)}$  daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{21}}{\partial y_i^{(1)}} &= \\ &= \frac{\omega \Gamma_s}{A^{(2)}} \cdot \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \cdot \\ &\cdot \left( \sum_{j=1}^{N^{(2)}-1} e^{-jk_0 x_j^{(2)}} (y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)}) \right) \cdot B_i \end{aligned} \quad (5.16)$$

gdzie

$$B_i = \begin{cases} e^{jk_0 x_i^{(1)}} & \text{dla } i = 1 \\ e^{jk_0 x_i^{(1)}} - e^{jk_0 x_{i-1}^{(1)}} & \text{dla } i = 2, 3, \dots, N^{(1)}-1 \\ e^{jk_0 x_{i-1}^{(1)}} & \text{dla } i = N^{(1)} \end{cases} \quad (5.17)$$

Równania (5.16) i (5.17) pozwalają wyznaczyć współczynniki  $S_{ki}(\mathbf{y}^{(1)})$  zgodnie z ich definicją wyrażoną wzorem (2.7).

Wzory (5.15-5.17) zostały wyprowadzone przy założeniu, iż obecność elektrod przetworników międzypalczastych nie ma wpływu na propagację AFP. Obecność tych elektrod powoduje jednak m.in., iż prędkość AFP w obszarze przetworników międzypalczastych jest mniejsza niż prędkość  $v_0$ . W konsekwencji charakterystyka częstotliwościowa filtra wyliczona za pomocą wzoru (5.15) będzie przesunięta w stronę wyższych częstotliwości w stosunku do charakterystyki określonej eksperymentalnie. Prędkość AFP w obszarze przetwornika międzypalczastego jest zależna od częstotliwości i okresu struktury. Zakładając identyczne lub zbliżone szerokości elektrod i wielkości okresów w obu przetwornikach można przyjąć, że prędkość AFP jest taka sama w obszarze obu przetworników i dla poprawienia dokładności analizy zmodyfikować wzory (5.15 - 5.17), używając w nich zamiast liczby falowej  $k_0$ , liczby  $k_p$  odpowiadającej propagacji AFP w nieskończonym periodycznym układzie zwartych elektrycznie elektrod. Analiza takiego układu oparta na podejściu zastosowanym w pracach [12, 13] prowadzi do wyprowadzonego w [11] przybliżonego wzoru

$$k_p = \left[ k_0^2 + \frac{1}{2} (k_m^2 - k_0^2) \left( 1 + \frac{P_s(-\cos\Delta)}{P_{-s}(-\cos\Delta)} \right) \right]^{1/2} \quad (5.18)$$

w którym  $k_0, k_m$  oznaczają liczby falowe charakteryzujące propagację AFP odpowiednio po swobodnej i metalizowanej powierzchni piezoelektryka,  $s = k_0 p / (2\pi), \Delta = \pi a / p$  (przy czym przyjęto tutaj, że wielkości  $p$  i  $a$  są odpowiednio okresem i szerokością elektrody w dowolnym z przetworników). Wzór (5.18) obowiązuje dla pulsacji  $\omega < 2\pi v_0 / p$ , z wyłączeniem  $\omega \approx \pi v_0 / p$ .

Wprowadzona modyfikacja ma istotny wpływ na transadmitancję filtru i jej pochodne cząstkowe względem współrzędnych wektora  $\underline{y}^{(1)}$  wskutek zmian wartości wykładników funkcji eksponencjalnych, spowodowanych tą modyfikacją. Zmiana wartości argumentu funkcji  $\bar{\sigma}^{(r)}(k)$  ma na ogół małe znaczenie, gdyż funkcje te są zwykle wolno zmienne w szerokim paśmie częstotliwości, zawierającym pasmo przepustowe filtru.

Wzory (5.15 - 5.17) z wprowadzoną w nich powyżej modyfikacją mogą być zastosowane do analizy filtru w przypadku, gdy dopuszczalne jest pominięcie zjawiska dyfrakcji AFP. Jeśli jednak zjawisko dyfrakcji w istotny sposób zniekształca charakterystykę filtru, to celowe jest jego uwzględnienie w matematycznym modelu filtru.

Poniżej przedstawiono model filtru z AFP umożliwiający wyznaczenie transadmitancji i jej pochodnych cząstkowych przy uwzględnieniu zjawiska dyfrakcji. W modelu tym:

- propagacja AFP wzbudzanej w przetworniku nadawczym opisywana jest metodą kąтового widma fal płaskich (ang.: angular spectrum of plane waves) [14, 15];
- wzbudzenie i detekcja AFP przez przetwornik międzypalczasty są modelowane przy użyciu quasistatycznej teorii przetwornika międzypalczastego, w sposób przedstawiony w rozdziałach: 3 i 4.

Rozważmy ponownie filtr pracujący w układzie przedstawionym na rysunku 2.5a. Przyjmijmy, że przetwornik nadawczy filtru może być zastąpiony zestawem  $N^{(1)}$ -1 źródeł AFP, przy czym  $i$ -te źródło jest skoncentrowane na pionowym odcinku wyznaczonym przez odciętą  $x_i^{(1)}$  i rzędne  $y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}$  (patrz rysunek 2.3). Zgodnie z teorią kąтового widma fal płaskich, fala powierzchniowa generowana przez takie źródło może być reprezentowana przez skalarną wielkość, np. jedną ze składowych przemieszczenia lub potencjał

elektryczny na powierzchni piezoelektryka. Reprezentując AFP przez ten potencjał, można otrzymać jego wartość jako superpozycję nieskończenie wielu fal płaskich. W szczególności dla punktu o współrzędnych  $(x, y)$  położonego na prawo od źródła (tzn. w przypadku  $x > x_i^{(1)}$ ) potencjał na powierzchni piezoelektryka można wyrazić równaniem:

$$\phi_{si}(x, y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_i(k_y) e^{-j[k_x(k_y)(x-x_i^{(1)}) + k_y y]} dk_y \quad (5.19)$$

w którym  $k_x(k_y)$  i  $k_y$  są składowymi wektora falowego  $\mathbf{k}$  cząstkowej fali płaskiej w kierunkach odpowiednio  $x$  i  $y$ , przy czym

$$k_x(k_y) = \left[ \left( \frac{\omega}{v(k_y)} \right)^2 - k_y^2 \right]^{1/2} \quad (5.20)$$

gdzie  $v(k_y)$  oznacza prędkość fazową AFP w kierunku wyznaczonym przez wektor falowy  $\mathbf{k}$ . Zależność  $k_x(k_y)$  jest często aproksymowana odpowiednim wielomianem, który w większości praktycznych przypadków zawiera jedynie parzyste potęgi  $k_y$ . Przyjmijmy zgodnie z pracą [16], że wielomian ten ma postać

$$k_x(k_y) = k_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^R r_n \left( \frac{k_y}{k_0} \right)^{2n} \right] \quad (5.21)$$

gdzie  $k_0 = \omega/v_0$ , a rzeczywiste współczynniki  $r_n$  zostały dobrane eksperymentalnie lub teoretycznie, przy czym im większa liczba tych współczynników ( $R$ ) tym większa jest możliwa do uzyskania dokładność aproksymacji. Nieznaną funkcję  $F_i(k_y)$  można wyznaczyć przechodząc w równości (5.19) do granicy przy  $x$  dążącym prawostronnie do  $x_i^{(1)}$ . Wprowadzając definicję

$$\phi_{si}^+(y, \omega) = \lim_{x \rightarrow x_i^{(1)+} } (\phi_{si}(x, y, \omega)) \quad (5.22)$$

otrzymujemy

$$\phi_{si}^+(y, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(k_y) e^{-jk_y y} dk_y \quad (5.23)$$

co dowodzi, że funkcja  $\phi_{si}^+(y, \omega)$  jest transformatą Fouriera funkcji  $F_i(k_y)$ . Poddając równość (5.23) odwrotnemu przekształceniu Fouriera, dostajemy

$$F_i(k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{si}^+(y, \omega) e^{jk_y y} dy \quad (5.24)$$

Funkcja  $\phi_{si}^+(y, \omega)$  reprezentuje zespoloną amplitudę potencjału elektrycznego fali powierzchniowej generowanej przez  $i$ -te źródło, określoną w punkcie leżącym po prawej stronie i nieskończenie blisko pionowej linii przechodzącej przez to źródło. Amplituda ta może być wyznaczona na podstawie modelu wzbudzenia AFP przedstawionego w rozdziale 3. Zgodnie z tym modelem, jest ona równa zero dla punktów leżących poza poziomym kanałem wyznaczonym przez krańce źródła, a dla punktów położonych w obrębie tego kanału jej wartość można otrzymać ze wzoru (3.13). Dostosowując oznaczenia w tym wzorze do przyjętych na rysunku 2.3. i przechodząc do granicy przy  $x$  dążącym prawostronnie do  $x_i^{(1)}$ , uzyskujemy

$$\phi_{si}^+(y, \omega) = \begin{cases} j\Gamma_s V_G \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \cdot & \text{dla} \\ \operatorname{sgn}(y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)}) & \min(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}) \leq y \leq \max(y_i^{(1)}, y_{i+1}^{(1)}) \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \quad (5.25)$$

Podstawienie (5.25) do (5.23) i wykonanie całkowania daje

$$F_i(k_y) = \frac{\Gamma_s V_G \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0)}{2\pi k_y} \left( e^{jk_y y_{i+1}^{(1)}} - e^{jk_y y_i^{(1)}} \right) \quad (5.26)$$

Rozważmy interakcję AFP generowanej przez  $i$ -te źródło w przetworniku nadawczym z  $j$ -tym elementarnym odbiornikiem w przetworniku odbiorczym. W tym celu założymy, że odbiornik ten jest zlokalizowany na pionowym odcinku wyznaczonym przez odciętą  $x_j^{(2)}$  i rzędne  $y_j^{(2)}, y_{j+1}^{(2)}$ . Podzielmy ten odcinek na bardzo małe przedziały o długości  $\Delta y$ , tak aby można było przyjąć, iż potencjał AFP jest stały wzdłuż każdego z nich. AFP padająca z lewej strony na jeden z takich przedziałów spowoduje przepływ prądu  $\Delta I_{scij}(y)$  między szynami zbiorczymi przetwornika, gdzie przez  $y$  oznaczono rzędną środka przedziału. Całkowity prąd  $I_{scij}$ , będący wynikiem omawianej interakcji, jest superpozycją prądów pochodzących od wszystkich przedziałów. Przyjmując, że w bliskim otoczeniu elementarnego odbiornika propagująca się AFP może być w każdym z przedziałów uważana za falę płaską i zaniebując możliwe odchylenia kierunków propagacji od kierunku osi  $x$ , można, w celu obliczenia prądu  $\Delta I_{scij}(y)$  w każdym z przedziałów, zastosować odpowiednik wzoru (4.3), w którym przyjęto, iż potencjał elektryczny AFP pada-

jącej na elementarny odbiornik określa się w punkcie o odciętej  $x$ , leżącym po lewej stronie i nieskończenie blisko pionowej linii zawierającej ten odbiornik. Zmodyfikowany wzór (4.3) ma postać

$$\Delta I_{scij}(y) = j\omega \phi_{si}(x_j^{(2)}, y, \omega) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \operatorname{sgn}(y_{j+1} - y_j) \Delta y \quad (5.27)$$

Zmniejszając  $\Delta y$  do zera i całkując powyższe równanie w granicach wyznaczonych krańcami  $j$ -tego elementarnego odbiornika, dostajemy

$$I_{scij} = j\omega \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \int_{y_j}^{y_{j+1}} \phi_{si}(x_j^{(2)}, y, \omega) dy \quad (5.28)$$

Podstawiając (5.26) do (5.19) a następnie (5.19) do (5.28), otrzymujemy po przekształceniach:

$$I_{scij} = -V_G \frac{2}{\pi} \omega \Gamma_s \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\left[ \sin\left(\frac{k_y L_i^{(1)}}{2}\right) \sin\left(\frac{k_y L_j^{(2)}}{2}\right) \right]}{k_y^2} \cdot e^{-j[k_x(k_y)x_{ij} + k_y u_{ij}]} \right\} dk_y \quad (5.29)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$\begin{aligned} L_i^{(1)} &= y_{i+1}^{(1)} - y_i^{(1)} \\ L_j^{(2)} &= y_{j+1}^{(2)} - y_j^{(2)} \\ x_{ij} &= x_j^{(2)} - x_i^{(1)} \\ u_{ij} &= \frac{y_{j+1}^{(2)} + y_j^{(2)}}{2} - \frac{y_{i+1}^{(1)} + y_i^{(1)}}{2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sumując prądy  $I_{scij}$  pochodzące od wszystkich par:  $i$ -te elementarne źródło AFP,  $j$ -ty elementarny odbiornik AFP, a następnie dzieląc obie strony równości (5.29) przez  $V_G$ , otrzymujemy

$$Y_{21} = -\frac{2}{\pi} \omega \Gamma_s \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \cdot \sum_{i=1}^{N^{(1)}-1} \sum_{j=1}^{N^{(2)}-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin\left(\frac{k_y L_i^{(1)}}{2}\right) \sin\left(\frac{k_y L_j^{(2)}}{2}\right)}{k_y^2} \right] \cdot e^{-j[k_x(k_y)x_{ij} + k_y w_{ij}]} dk_y \quad (5.31)$$

Zróżniczkowanie powyższego wzoru względem  $y_i^{(1)}$  prowadzi do relacji

$$\frac{\partial Y_{21}}{\partial y_i^{(1)}} = \frac{1}{\pi} \omega \Gamma_s \bar{\sigma}_g^{(1)}(k_0) \bar{\sigma}_g^{(2)}(k_0) \sum_{j=1}^{N^{(2)}-1} B_{ij} \quad (5.32)$$

w której

$$B_{ij} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k_y L_j^{(2)}}{2}\right)}{k_y} \cdot e^{-j[k_x(k_y)x_{ij} + k_y w_{ij}]} dk_y & \text{dla } i = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k_y L_j^{(2)}}{2}\right)}{k_y} \cdot e^{-j[k_x(k_y)x_{ij} + k_y w_{ij}]} dk_y - & \text{dla} \\ & 2 \leq i \leq N^{(1)}-1 \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k_y L_j^{(2)}}{2}\right)}{k_y} \cdot e^{-j[k_x(k_y)x_{i-1,j} + k_y w_{ij}]} dk_y & \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k_y L_j^{(2)}}{2}\right)}{k_y} \cdot e^{-j[k_x(k_y)x_{i-1,j} + k_y w_{ij}]} dk_y & \text{dla } i = N^{(1)} \end{cases} \quad (5.33)$$

przy czym współczynniki  $w_{ij}$  dane są wzorem

$$w_{ij} = \frac{y_{j+1}^{(2)} + y_j^{(2)}}{2} - y_i^{(1)} \quad (5.34)$$

Podobnie jak analogiczne wzory uzyskane przy pominięciu dyfrakcji, wzory (5.31-5.33) wyprowadzono ignorując wpływ obecności elektrod przewodników międzypalczastych na propagację AFP. Wpływ ten można uwzględnić wprowadzając odpowiednią modyfikację w tych wzorach. Jeśli

mianowicie zastosuje się aproksymację (5.21), to podobnie jak poprzednio można zastąpić liczbę falową  $k_0$  wielkością  $k_p$  daną wzorem (5.18).

Relacje (5.20) i (5.21) opisują kształt krzywej powolności odpowiadającej propagacji AFP po swobodnej powierzchni piezoelektryka. Obecność elektrod zmienia jednak zależność między  $k_x$  i  $k_y$ . Efekt ten można modelować w sposób zasugerowany w pracy [17]. W przypadku zastosowania aproksymacji kształtu krzywej powolności wielomianem, doprowadzi to do modyfikacji wartości współczynników  $r_n$  w relacji (5.21).

Wzory (5.30-5.34) umożliwiają analizę filtru z AFP przy uwzględnieniu zjawiska dyfrakcji. Analiza taka wymaga obliczenia całek oznaczonych występujących we wzorach (5.31) i (5.33). W ogólnym przypadku całki te można wyznaczyć jedynie numerycznie. Użycie do tego celu standardowych metod całkowania numerycznego jest często niepraktyczne ze względu na długie czasy obliczeń wynikające z silnie oscylacyjnego charakteru funkcji podcałkowych.

W pracach [18, 16] wyprowadzono rozwinięcia asymptotyczne całek o postaciach takich, jak we wzorach (5.31) i (5.33), przy założeniu że obowiązuje relacja (5.21). Zastosowanie tych rozwinięć umożliwia przybliżone wyznaczenie potrzebnych całek w czasie wielokrotnie krótszym niż ma to miejsce przy użyciu standardowych metod całkowania. Przy danej geometrii obu przetworników filtru dokładność obliczeń jest tym większa, im większa jest odległość między przetwornikami.

W przypadkach, w których uzasadniona jest aproksymacja zależności  $k_x$  od  $k_y$  parabolą, możliwe jest uzyskanie dużej szybkości i wysokiej dokładności obliczeń niezależnie od odległości między przetwornikami. Wyniki badań przedstawione w pracach [19, 20] dowodzą, iż użycie przybliżenia parabolicznego jest uzasadnione m.in. dla niobianu litu o orientacji  $128^\circ$ . W pracy [1] wyprowadzono wzory umożliwiające obliczenie transadmitancji i jej pochodnych cząstkowych w przypadku zastosowania przybliżenia parabolicznego.

Powyżej wyznaczono zgodnie ze wzorem (2.8) element  $Y_{21}$  macierzy admitancyjnej filtru w dwóch przypadkach: przy pominięciu i przy uwzględnieniu dyfrakcji. Stosując tę samą metodykę, można znaleźć na podstawie równości (2.10) wyrażenia umożliwiające wyznaczenie elementu  $Y_{12}$ , będące odpowiednikami relacji (5.15) i (5.31). Można w ten sposób wykazać, iż w obu przypadkach zachodzi

$$Y_{21} = Y_{12} \quad (5.35)$$



Znajomość parametru  $Y_{12}$  nie jest konieczna do obliczenia transmitancji filtru i współczynników  $C_{ki}(Y^{(1)})$  przy użyciu wzorów (2.4) i (2.6). Znając jego wartość można natomiast obliczyć tłumienie trzeciego echa i ech wyższego rzędu (patrz wzory (2.2) i (2.3)).

## 6. WYZNACZENIE ADMITANCJI PRZETWORNIKA MIĘDZYPALCZASTEGO

Admitancje wejściową i wyjściową filtru (elementy  $Y_{11}$  i  $Y_{22}$  macierzy admitancyjnej) można wyznaczyć stosując wzory (2.9) i (2.11), które dotyczą sytuacji przedstawionych odpowiednio na rysunkach 2.5a. i 2.5b.

Założmy, podobnie jak w poprzednim rozdziale, że rozkład ładunku elektrycznego na elektrodach przetwornika generującego AFP nie jest zniekształcony na skutek obecności drugiego przetwornika. Zaniebajmy także wpływ odbić AFP od elektrod. Założenia te pozwalają pominąć wpływ zwartego przetwornika na wyznaczaną admitancję w obu rozpatrywanych przypadkach i przyjąć, iż element  $Y_{11}$  jest równy admitancji przetwornika nadawczego, a element  $Y_{22}$  - admitancji przetwornika odbiorczego. Dalsze rozważania będą dotyczyć sposobu wyznaczenia admitancji apodyzowanego przetwornika międzypalczastego. Wyprowadzone tu wzory mogą być zastosowane do obliczenia admitancji każdego z przetworników filtru. Dla wygody czytelnika we wszystkich wzorach opuszczono górne wskaźniki  $(r)$ .

Pożądaną admitancję można wyznaczyć analizując generację AFP przez sterowany napięciem sinusoidalnie zmiennym przetwornik międzypalczasty, pracujący w układzie przedstawionym na rysunku 3.4. Stosując metodę funkcji Greena opisaną w pracy [7], można wyznaczyć zależną od częstotliwości gęstość ładunku na elektrodach przetwornika, a poprzez scałkowanie otrzymanej gęstości - całkowity ładunek na elektrodach dołączonych do każdej z szyn zbiorczych. Mnożąc wziętą z odpowiednim znakiem zespoloną amplitudę tego ładunku przez  $j\omega$ , dostaje się zespoloną amplitudę prądu przepływającego przez przetwornik. Dzieląc tę amplitudę przez zespoloną amplitudę napięcia sterującego, uzyskuje się zależną od częstotliwości wartość admitancji.

Opisana technika zapewnia dużą dokładność obliczeń, jest jednak czasochłonna. Zastosowanie tej samej techniki przy użyciu quasistatycznej teorii przetwornika międzypalczastego znacznie upraszcza obliczenia. Teoria quasistatyczna zawiera jednak założenie o niezależności gęstości ładunku od

częstotliwości, co pociąga za sobą czysto pojemnościowy charakter wyznaczonej tą metodą admitancji przetwornika. Zastosowanie teorii quasistatycznej w opisany wyżej sposób jest równoważne zignorowaniu faktu, iż fale powierzchniowe emitowane przez przetwornik oddziałują z elektrodami, wytwarzając na nich dodatkowy ładunek, którego wielkość zależy od częstotliwości. Ładunek ten powoduje powstanie dodatkowej składowej admitancji, określanej w literaturze jako admitancja akustyczna. Indukowany akustycznie ładunek i admitancja akustyczna mogą być oszacowane przybliżoną metodą przedstawioną przez autora w pracy [21].

Całkowita admitancja przetwornika określona jest zależnością

$$Y(\omega) = j\omega C_T + Y_a(\omega) \quad (6.1)$$

gdzie  $C_T$  oznacza pojemność statyczną, którą można określić przy użyciu teorii quasistatycznej, a  $Y_a(\omega)$  admitancję akustyczną. Admitancję tę można wyrazić wzorem

$$Y_a(\omega) = G_a(\omega) + jB_a(\omega) \quad (6.2)$$

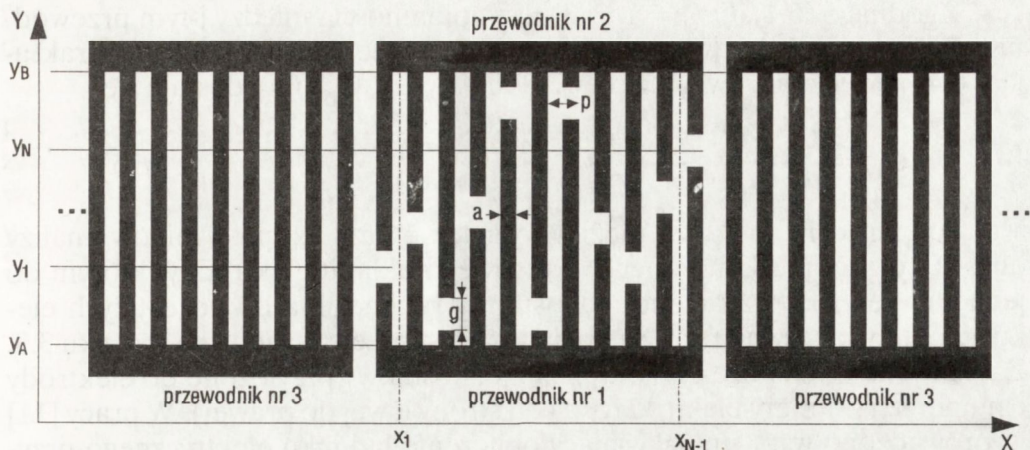
w którym rzeczywiste funkcje  $G_a(\omega)$ ,  $B_a(\omega)$  określa się odpowiednio jako konduktancję akustyczną i susceptancję akustyczną.

W podrozdziale 6.1 wyprowadzono przybliżony wzór na pojemność statyczną przetwornika międzypalczastego korzystając z wyników analizy quasistatycznej przedstawionej w [11]. Podano także efektywny sposób numerycznego wyznaczania tej pojemności. W podrozdziale 6.2 podano w formie dostosowanej do oznaczeń przyjętych w niniejszej pracy wyprowadzony w pracy [21] wzór na admitancję akustyczną przetwornika międzypalczastego i opisano przedstawiony tam algorytm umożliwiający szybkie obliczenie admitancji akustycznej w punktach siatki częstotliwości.

## 6.1. Wyznaczenie pojemności statycznej

Rozważmy przetwornik apodyzowany o strukturze przedstawionej na rysunku 3.4. Jest on w istocie układem złożonym z dwóch przewodników. Nadajmy umownie przewodnikowi zawierającemu dolną szynę zbiorczą numer 1., a przewodnikowi zawierającemu górną szynę zbiorczą numer 2. i umieścmy w ich pobliżu przewodnik o numerze 3. (patrz rys.6.1).

Przewodnik 3. składa się z dwóch części położonych po obu stronach przewodników 1. i 2. i tworzy wraz z nimi strukturę o stałym okresie i stałej



Rys. 6.1.

Przetwornik apodyzowany w nieskończonym okresowym układzie elektrod.

szerokości elektrod. Obie części przewodnika 3. zawierają nieskończoną liczbę elektrod i są ze sobą połączone za pomocą na tyle cienkiego przewodu, że można zaniedbać gromadzący się na nim ładunek. Wprowadzenie przewodnika 3. umożliwia wykorzystanie opisanych w literaturze wyników analizy quasistatycznej nieskończonego układu periodycznie położonych elektrod. Wzór na pojemność przetwornika międzypalczastego zostanie wyprowadzony przy założeniu, że obecność przewodnika 3 ma niewielki wpływ na pojemność między przewodnikami 1 i 2. Założenie to wydaje się być tym bardziej uzasadnione, im większa jest liczba elektrod przetwornika, gdyż obecność przewodnika 3. modyfikuje głównie rozkład ładunku na skrajnych elektrodach przetwornika.

Oznaczmy przez  $C_{jm}$  ( $j, m = 1, 2, 3; j \neq m$ ) pojemność między przewodnikami o numerach  $j, m$  w układzie z rysunku 6.1. Pojemność statyczną przetwornika  $C_T$  można określić za pomocą przybliżonej równości

$$C_T = C_{12} \quad (6.3)$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{12} + C_{13} & C_3 &= C_{13} + C_{23} \\ C_2 &= C_{12} + C_{23} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Zgodnie z (6.4),  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) jest pojemnością między  $j$ -tym przewodnikiem a pozostałymi dwoma przewodnikami, które zwarto ze sobą. Traktując (6.4) jako układ równań z niewiadomymi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ , dostaje się

$$C_{12} = \frac{C_1 + C_2 - C_3}{2} \quad (6.5)$$

Pojemności  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  można wyznaczyć przy użyciu wyników analizy quasistatycznej nieskończonego okresowego układu elektrod, w którym do jednej z elektrod przyłożono jednostkowy potencjał, a do pozostałych elektrod potencjał równy zero. Sytuacja taka jest przedstawiona na rysunku 3.3. Załóżmy, że w układzie tym potencjał jednostkowy przyłożono do elektrody o numerze  $i$  (numery elektrod rosną od strony lewej do prawej). W pracy [11] wyprowadzono wzór umożliwiający obliczenie ładunku elektrycznego przypadającego na jednostkę długości każdej elektrody. Po skorygowaniu wartości stałej dielektrycznej zgodnie z wynikami pracy [8] (por. rozdział 3.), wzór na ładunek elektryczny przypadający na jednostkę długości elektrody o numerze  $k+i$  przybiera postać:

$$Q_k = 2\varepsilon_s(\infty) \int_0^1 \frac{\sin(\pi s) \cos(2\pi ks)}{P_{-s}(-\cos\Delta)} P_{-s}(\cos\Delta) ds \quad (6.6)$$

Oznaczenia w powyższym wzorze są takie same jak we wzorze (3.9) podanym w rozdziale 3. W przypadku, gdy szerokość elektrody jest równa połowie okresu struktury, wzór (6.6) upraszcza się do

$$Q_k = \frac{4\varepsilon_s(\infty)}{\pi(1 - 4k^2)} \quad (6.7)$$

Wyznamy najpierw pojemność  $C_3$ . W tym celu załóżmy, że do przewodników 1 i 2 przyłożono jednostkowy potencjał, a potencjał przewodnika 3 wynosi zero. Pojemność  $C_3$  jest równa całkowitemu ładunkowi zgromadzonemu na elektrodach o jednostkowym potencjale. Ładunek ten można wyznaczyć stosując zasadę superpozycji i sumując wszystkie ładunki cząstkowe  $Q_{i,j}$ , jakie wywołuje na elektrodzie o numerze  $i$  jednostkowy potencjał doprowadzony do elektrody o numerze  $j$ . Otrzymujemy wtedy

$$C_3 = (V_B - V_A) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Q_{i-j} \quad (6.8)$$

gdzie  $y_B, y_A$  oznaczają rzędne wewnętrznych krawędzi odpowiednio górnej i dolnej szyny zbiorczej.

W celu wyznaczenia pojemności  $C_1$  założmy, że do przewodnika 1. przyłożono jednostkowe napięcie, a elektrody przewodników 2. i 3. mają zerowy potencjał. Jednostkowy potencjał  $j$ -tej elektrody przewodnika 1. wywołuje w obszarze  $i$ -tej elektrody tego przewodnika ograniczonym rzędnymi  $y_A, \min(y_i, y_j)$  powstanie ładunku o wielkości  $Q_{i-j}$  na jednostkę długości. Stosując jak poprzednio zasadę superpozycji, dostajemy

$$C_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\min(y_i - y_A, y_j - y_A)] Q_{i-j} \quad (6.9)$$

Analogiczne rozumowanie dowodzi, że

$$C_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\min(y_B - y_i, y_B - y_j)] Q_{i-j} \quad (6.10)$$

Na podstawie (6.5), (6.8 - 6.10) i (6.3) otrzymujemy po przekształceniach

$$C_T = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |y_i - y_j| Q_{i-j} \quad (6.11)$$

Korzystając ze wzorów (6.11) i (6.6) można wyznaczyć pojemność statyczną przetwornika międzypalczystego. Wymaga to numerycznego wyznaczenia  $N-1$  całek oznaczonych potrzebnych do określenia wartości ładunków  $Q_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N-1$ ) zgodnie ze wzorem (6.6) (zauważmy, że  $Q_m = Q_{-m}$ ). Zależność (6.11) można przy użyciu relacji (6.6) przedstawić w formie

$$C_T = -2\epsilon_s(\infty) \int_0^1 \frac{\sin(\pi s) P_{-s}(\cos \Delta)}{P_{-s}(-\cos \Delta)} \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^{N-k} a_k e^{-j2\pi ks} \right) ds \quad (6.12)$$

gdzie współczynniki  $a_k$  dane są wzorem

$$a_k = \sum_{i=1}^{N-k} |y_{k+1} - y_i| \quad (6.13)$$

Wzory (6.12) i (6.13) umożliwiają efektywne obliczenie pojemności statycznej przetwornika. W proponowanej metodzie obliczeniowej w pierwszej kolejności należy wyznaczyć współczynniki  $a_k$  ze wzoru (6.13). Następnie oblicza się wartość całki występującej po prawej stronie wzoru (6.12). W tym celu można zaadaptować pomysł zastosowany w pracy [22] do obliczenia

pojemności przetwornika nieapodyzowanego. Polega on na użyciu dowolnej kwadratury typu Newtona-Cotesa (np. metody Simpsona), przy czym liczba punktów węzłowych  $M$  powinna być dostatecznie duża i umożliwiać efektywne zastosowanie szybkiego przekształcenia Fouriera do obliczenia wartości sumy występującej pod całką we wszystkich punktach węzłowych. Jednym ze sposobów wyboru punktów węzłowych  $s_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, M$ ) jest przyjęcie  $s_i = i/M$ , przy czym  $M$  jest całkowitą potęgą liczby 2.

Jeżeli szerokość elektrody przetwornika jest równa połowie okresu struktury, to obliczenie pojemności statycznej przetwornika bardzo się upraszcza. Podstawiając (6.7) do (6.11), otrzymujemy po przekształceniach

$$C_T = \frac{4}{\pi} \varepsilon_s(\infty) \sum_{k=1}^{N-1} a_k \frac{1}{4k^2 - 1} \quad (6.14)$$

gdzie współczynniki  $a_k$  dane są wzorem (6.13). Wzór (6.14) jest zgodny z wynikiem uzyskanym inną metodą w pracy [23].

## 6.2. Wyznaczenie admitancji akustycznej

W pracy [21] określono pomijając zjawisko dyfrakcji, przybliżoną wartość prądu przepływającego między szynami zbiorczymi przetwornika apodyzowanego w wyniku indukowania na jego elektrodach ładunku elektrycznego przez AFP, którą generuje ten przetwornik pod wpływem sinusoidalnie zmiennego napięcia sterującego. Admitancję akustyczną określono jako stosunek zespolonych amplitud wzbudzonego akustycznie prądu i napięcia przyłożonego między szyny zbiorcze przetwornika. Wzór umożliwiający obliczenie admitancji akustycznej wyprowadzono wykorzystując wykazany przez autorów pracy [7] fakt, iż pole akustyczne niesione przez AFP propagującą się pod przetwornikiem międzypalczystym indukuje w przybliżeniu równe ładunki elektryczne o przeciwnych znakach na elektrodach położonych po obu stronach każdej przerwy międzyelektrodowej przetwornika. Wykorzystano także wyniki quasistatycznej teorii przetwornika międzypalczystego, pomijając zjawiska końcowe. Po odpowiednich przekształceniach uzyskane w [21] wyrażenie na admitancję akustyczną przybiera postać

$$Y_a(\omega) = \omega \Gamma_s \left| \bar{\sigma}_g(k_p) \right|^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} A_{ij} e^{-jk_p |x_i - x_j|} \quad (6.15)$$

gdzie wielkość  $k_p$  można obliczyć za pomocą równości (5.18), a współczynniki  $A_{ij}$  określone są zależnością

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \\ & \min(y_i, y_{i+1}) \geq \max(y_j, y_{j+1}) \\ & \text{lub} \\ & \max(y_i, y_{i+1}) \leq \min(y_j, y_{j+1}) \\ \\ = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \min \left[ \max(y_i, y_{i+1}), \max(y_j, y_{j+1}) \right] - \right. \\ \left. - \max \left[ \min(y_i, y_{i+1}), \min(y_j, y_{j+1}) \right] \right\} \cdot \text{w pozostałych} \\ \cdot \operatorname{sgn}(y_{i+1} - y_i) \operatorname{sgn}(y_{j+1} - y_j) \end{array} \right. \text{przypadkach} \end{cases} \quad (6.16)$$

W pracy [1] zaprezentowano, wychodząc z zależności energetycznych, alternatywny w stosunku do opisanego w [21] sposób wyznaczenia konduktancji akustycznej. Wykazano, że oba podejścia prowadzą do identycznych wyników.

Bezpośrednie zastosowanie wzoru (6.15) do wyznaczenia wartości admitancji akustycznej przetwornika międzypalczystego o dużej liczbie elektrod w punktach gęstej siatki częstotliwości prowadzi do czasochłonnych obliczeń ze względu na podwójną sumę występującą w tym wzorze. Relację (6.15) można jednak przekształcić do postaci

$$Y_a(\omega) = \omega \Gamma_s \left| \bar{\sigma}_g(k_p) \right|^2 \sum_{m=0}^{N-2} c_m e^{-jk_p m} \quad (6.17)$$

gdzie  $p$  oznacza okres struktury przetwornika, a współczynniki  $c_m$  są określone równaniem

$$c_m = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N-1} A_{ii} & \text{dla } m = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^{N-1-m} A_{i, i+m} & \text{dla } m = 1, 2, \dots, N-2 \end{cases} \quad (6.18)$$

Wzory (6.17) i (6.18) są podstawą algorytmu, który umożliwia szybkie obliczanie admitancji akustycznej w punktach dowolnie wybranej siatki częstotliwości. W pierwszej fazie tego algorytmu obliczane są na podstawie wzorów (6.18) i (6.16) niezależne od częstotliwości współczynniki  $c_m$ . W fazie drugiej, korzystając ze wzoru (6.17), wyznacza się zespolone wartości admitancji akustycznej dla wszystkich punktów siatki częstotliwości. Dzięki zastosowaniu zaproponowanego algorytmu znacznie zmniejsza się liczba operacji arytmetycznych, gdyż znika konieczność wykonywania podwójnego sumowania dla każdej wartości częstotliwości. Algorytm zapewnia szybkość obliczeń zbliżoną do szybkości metody przedstawionej w pracy [23].

## 7. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono model matematyczny filtra z akustyczną falą powierzchniową uwzględniający dyfrakcję AFP i oddziaływania filtra z obwodami zewnętrznymi. W modelu uwzględniono także wpływ rozkładu ładunku na elektrodach przetworników międzypalczastych na macierz admitancyjną filtra (pomijając tzw. zjawiska końcowe). Wzięto także pod uwagę wpływ elektrycznego obciążenia powierzchni piezoelektryka elektrodami przetworników międzypalczastych. Zgodnie z przedstawioną metodą, wzbudzenie i detekcję AFP modelowano przy zastosowaniu quasistatycznej teorii przetwornika międzypalczastego. Przyjęto, że propagacja AFP jest opisywana przez teorię kąтового widma fal płaskich. Wyprowadzone wzory umożliwiają wyznaczenie macierzy admitancyjnej. Znajomość tej macierzy wystarcza do zanalizowania działania filtra w dowolnym układzie aplikacyjnym.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] NAGŁOWSKI P.: Kompensacja efektów drugiego rzędu w filtrach z akustyczną falą powierzchniową przy użyciu metod optymalizacji z ograniczeniami. Rozprawa doktorska. Politechnika Warszawska. Warszawa 1991
- [2] NAGŁOWSKI P.: Iterative Method Using Constrained Optimization Techniques for Second-Order Effects Compensation in SAW Filters. Proc. 1989 IEEE Ultrason. Symp., 125-128
- [3] NAGŁOWSKI P., MAJEWSKA H.: Metoda projektowania filtrów z akustyczną falą powierzchniową i jej zastosowanie. Materiały Elektroniczne, 1991, 4, 7-14
- [4] BRISTOL T.W., JONES W.R., SNOW P.B., SMITH W.R.: Application of double electrodes in acoustic surface wave device design. Proc. 1972 IEEE Ultrason. Symp., 343-345
- [5] MITCHELL R.F., PARKER D.W.: Synthesis of acoustic surface-wave filters using double electrodes. Electron. Lett., 10, 1974, 24, 512
- [6] MORGAN D.P.: Quasi-static analysis of generalized SAW transducers using the Green's function method. IEEE Trans. Sonics Ultrason., SU-27, 1980, 3, 111-123
- [7] MILSOM R.F., REILLY N.H.C., REDWOOD M.: Analysis of generation and detection of surface and bulk acoustic waves by interdigital transducers. IEEE Trans. Sonics Ultrason., SU-24, 1977, 3, 147-166
- [8] HARTMANN C.S, JEN SHEN, DOMALEWSKI M.A., ANDLE J.C.: Improved accuracy for determining SAW transducer capacitance and k. Proc. 1987 IEEE Ultrason. Symp., 161-167
- [9] BAGHAI-WADJI A.R., SELBERHERR S., SEIFERT F.: On the calculation of charge, electrostatic potential and capacitance in generalized finite SAW structures. Proc. 1984 IEEE Ultrason. Symp., 44-48
- [10] MORGAN D.P., LEWIS B., METCALFE J.G.: Fundamental charge distributions for surface-wave interdigital transducer analysis. Electron. Lett., 15, 1979, 19, 583-585
- [11] MORGAN D.P.: Surface-wave devices for signal processing. Amsterdam: Elsevier, 1985, 355-361, 348-351, 363 -374

- [12] BLØTEKJAER K., INGEBRIGTSEN K.A., SKEIE H.: A method for analyzing waves in structures consisting of metal strips on dispersive media. IEEE. Trans. Electron Devices, ED-20, 1973, 12, 1133-1138
- [13] BLØTEKJAER K., INGEBRIGTSEN K.A., SKEIE H.: Acoustic surface waves in piezoelectric materials with periodic metal strips on the surface. IEEE. Trans. Electron Devices, ED-20, 1973, 12, 1139-1146
- [14] KHARUSI M.S., FARNELL G.W.: Diffraction and beam steering for surface-wave comb structures on anisotropic substrates. IEEE Trans. Sonics. Ultrason., SU-8, 1971, 1, 35-42
- [15] FARNELL G.W.: Types and properties of surface waves (w książce: Acoustic surface waves - edited by A.A.OLINER, Springer-Verlag 1978). [16] TAN M., FLORY C.: Fast computation of SAW diffraction by asymptotic techniques. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectrics, Frequency Contr., UFFC-34, 1987, 1, 93-104
- [16] TON M., FLORY C.: Fast computation of SAW diffraction by asymptotic techniques. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectrics Frequency Contr. 34, 1987, 1, 93-104
- [17] VISINTINI G., TILL W., EHRMANN-FALKENAU E.: Diffraction analysis with extended angular spectrum of waves formalism. Proc. 1987 IEEE Ultrason. Symp., 145-148
- [18] FLORY C., TAN M.: Compensation of diffraction effects in SAW filters using the uniform asymptotic expansion. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectrics, Frequency Contr., UFFC-34, 1987, 1, 105-113
- [19] KODAMA T.: Broad-band compensation for diffraction in surface acoustic wave filters. IEEE Trans. Sonics Ultrason., SU-30, 1983, 3, 127-136
- [20] MADER W., STOCKER H., TOBOLKA G.: Doffraction in TV-IF filters using multi-strip couplers. Proc. 1980 Ultrason. Symp., 294 - 297
- [21] NAGŁOWSKI P.J.: Fast computation of finger-length-weighted SAW transducer dynamic admittance. Electron. Lett., 24, 1988, 24, 1494-1496
- [22] M. POLITI, MACCHIARELLA G., STRACCA G.B.: Fast computation of static capacitance for periodic SAW transducers. IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectrics, Frequency Contr., UFFC-35, 1988, 6, 708-710
- [23] DANICKI E.: Teoria przetworników międzypalczastych i reflektorów akustycznych fal powierzchniowych. Biuletyn WAT, 1980, 1(329), 61-77



