Romuald S. WADAS
INSTYTUT TECHNOLOGII MATERIAŁÓW ELEKTRONICZNYCH
ul. Wólczyńska 133, 01-919 Warszawa

Wyjaśnienie całkowitego i ułamkowego zjawiska Halla

1. WSTĘP

Poszerzający się zakres zastosowań materiałów półprzewodnikowych i wzrost wymagań co do ich własności wywołują poszukiwania nowych materiałów i nowych technologii. Jednocześnie dokonuje się wysiłków nad opracowaniem metod regulacji własności półprzewodników za pomocą takich bodźców zewnętrznych, jak: stałe pola elektryczne i magnetyczne, ciśnienie i temperatura.

Niemiec, von Klitzing, badając wpływ pola magnetycznego na heterostrukturalny tranzystor GaAs odkrył w 1980 r. nowe zjawisko, które nazwał kwantowym efektem Halla [1]. Za odkrycie to otrzymał nagrodę Nobla. Poglądowy obraz tego efektu przedstawia rys. 1 [2].

Rezystywność Halla ρ_{xy} definiuje się jako stosunek pola elektrycznego E_x, indukowanego przez pole magnetyczne H_z, do prądu elektrycznego j_y. Von Klitzing stwierdził eksperymentalnie, że rezystywność Halla da się przedstawić za pomocą następującej formuły

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\nu} \quad \frac{h}{e^2} \qquad /1.1/$$

gdzie $\nu = 1, 2, 3, \ldots,$

Sposób liczenia ν nie jest typowy i zaczyna się od górnej wartości rezystywności, którą jest stała h/e^2. Na rys. 1 zabrakło tej wartości rezystywności. Uzyskuje się ją w silnych polach magnetycznych i w niskich temperaturach rzędu 1 K. Von Klitzing zaproponował, aby stała h/e^2 była podstawową jednostką oporności. Prawdopodobnie propozycja ta będzie przyjęta.

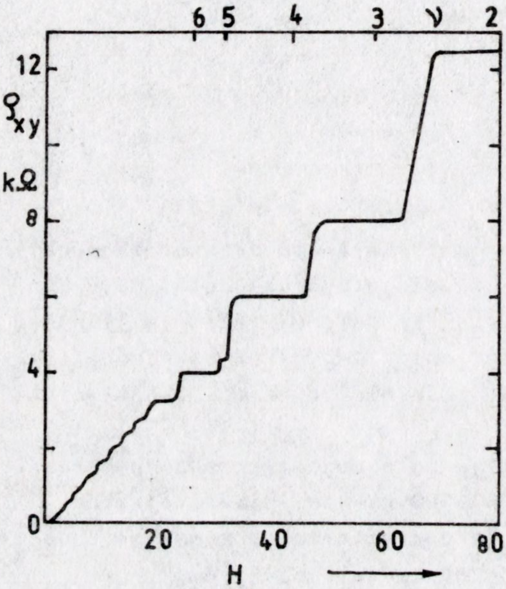
Rezystywność ρ_{xy} zmniejsza się skokowo poczynając od jej skrajnej wartości przy silnych polach magnetycznych. Istotne jest i ciekawe w tym odkryciu, że podstawowa jednostka h/e^2 jest dzielona przez liczby całkowite ν. Każdemu stopniowi rezystywności odpowiada liczba całkowita. Przy słabych polach magnetycznych stopnie rezystywności rozmywają się.

Tsui, Störmer i Gossard odkryli w 1982 r. tzw. ułamkowy efekt Halla. Ilustracją tego efektu jest rys. 2.

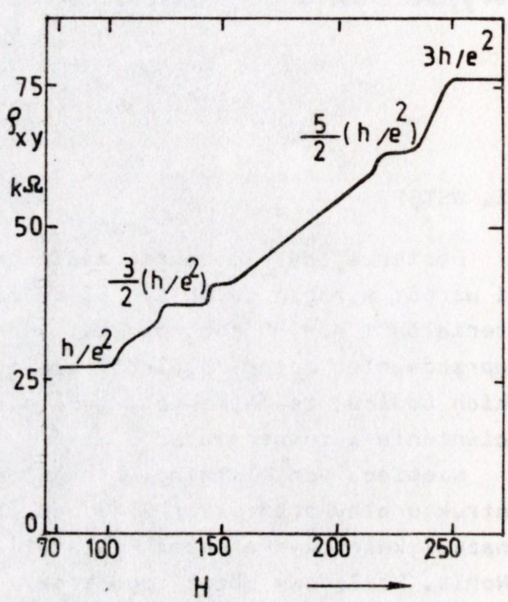
Rezystywność w tym efekcie określa wzór następujący

$$\rho_{xy} = k\frac{h}{e^2}$$

gdzie k = 1/2, 3/2, 5/2...



Rys. 1. Kwantowa zależność rezystywności Halla od pola magnetycznego. Stopniom rezystywności odpowiadają liczby całkowite $\nu = 1,2,3,...,$ umieszczone w górnej części rysunku [2]



Rys. 2. Ułamkowa rezystywność Halla jako funkcja pola magnetycznego [4]

Należy zauważyć, że tam gdzie kończy się całkowity efekt Halla, rozpoczyna się ułamkowy efekt. Efekt ten kończy się również całkowitą liczbą k = 6/2.

Mimo licznych prac na temat naszkicowanych wyżej zjawisk nie zostały one wyjaśnione do chwili obecnej. Podstawową tego przyczyną jest niezrozumienie klasycznego zjawiska Halla mierzonego dotąd w słabych polach magnetycznych i temperaturach pokojowych. Przedstawiona w podręcznikach interpretacja jest nieprawidłowa.

Celem tej pracy jest opis zjawisk, jakie zachodzą, kiedy półprzewodnik lub dowolny przewodnik z prądem zostanie poddany działaniu pola magnetycznego. Będzie również wyjaśniony całkowity i ułamkowy efekt Halla.

2. ENERGIA KRYSZTAŁU DIAMAGNETYCZNEGO

Półprzewodniki są materiałami diamagnetycznymi. Jak okaże się niżej, podkreślenie tej klasyfikacji jest istotne.

W sytuacji, kiedy nie istnieje interpretacja obserwowanych w ciele stałym zjawisk lub istniejąca interpretacja zawodzi, rozsądnie jest zanalizować energię kryształu i jej zmiany pod wpływem bodźców zewnętrznych. Energia kryształu jest parametrem na tyle ogólnym, że inne parametry określające własności materiałów są jej pochodnymi. Wykorzystamy funkcję Hamiltona o postaci

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}/\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}/^2 + e\varphi \qquad /2.1/$$

gdzie m jest masą elektronu, $\vec{p}$ jego pędem, e ładunkiem, $\vec{A}$ potencjałem wektorowym i φ potencjałem skalarnym.

Potencjał skalarny może być wyrażony w postaci $\varphi = \vec{r}\,\vec{E}^o$, przy czym $\vec{E}^o$ jest zewnętrznym polem elektrycznym stosowanym w efekcie Halla.

Jeśli rozwiniemy funkcję Hamiltona wówczas otrzymuje się

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\vec{A}\vec{p} + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 - e\vec{r}\vec{E}^o \qquad /2.2/$$

Pierwszy wyraz prawej strony powyższego równania opisuje energię kinetyczną elektronów. Analiza wyrazu drugiego prowadzi do wniosku, że opisuje on paramagnetyczne własności półprzewodników. Stwierdzenie to wymaga komentarza. Przedstawiony on będzie w dalszej części pracy. Trzeci wyraz opisuje diamagnetyczną energię półprzewodnika. Jeśli półprzewodnik zostanie poddany działaniu pola magnetycznego, to zgodnie z regułą Lenza indukowane prądy elektryczne wytwarzają pole magnetyczne przeciwnie skierowane do pola zewnętrznego. Dlatego energia ta nosi nazwę diamagnetycznej. Ostatni wyraz opisuje energię zewnętrznego pola elektrycznego. Wyrazy drugi, trzeci i czwarty opisują energię potencjalną półprzewodnika i będą w dalszym ciągu oznaczone odpowiednio przez V_1, V_2 i V_3.

Potencjał wektorowy może być przedstawiony w postaci iloczynu wektorowego

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\,\vec{H}\right]$$

Przyjmiemy, że w efekcie Halla, prąd elektryczny /a tym samym pole elektryczne/ jest skierowany wzdłuż osi y. Natomiast pole magnetyczne - wzdłuż osi z. Wówczas energia potencjalna $V = V_1 + V_2 + V_3$, określona z formuły /2.2/, przybierze postać

$$V = \frac{e^2}{8mc^2}(x^2 + y^2)H_z^2 - \frac{e}{2mc}(p_y x - p_x y)H_z - eyE_y^o \qquad /2.3/$$

Zależność powyższej energii od pola magnetycznego przedstawiono na rys. 1.

Energia potencjalna V dla pól magnetycznych mniejszych od H_1^m jest ujemna. Jej pochodna dV/dH_z jest również ujemna. Taki stan ciała stałego jest całkowicie niestabilny i nie może istnieć w rzeczywistości. Wobec tego półprzewodnik jest opisywany przez energię diamagnetyczną V_2, tj. przez pierwszy wyraz formuły /2.3/. Powyżej pola magnetycznego H_1^m energia potencjalna /2.3/ jest nadal ujemna, lecz jej pochodna jest dodatnia. Stan taki jest metastabilny, tj. może istnieć w pewnych warunkach. W tym przypadku jest utrzymywany przez pole magnetyczne w zakresie od H_1^m do H_2. Energia /2.3/ osiąga minimum przy polu magnetycznym H_1^m. Pole to może być określone analitycznie z warunków minimum energii, tj. $(dV/dH) = 0$. Wówczas z równania /2.3/ otrzymuje się

$$H_1^m = 2 \frac{(p_y ex - p_x ey)}{r_\perp^2} \frac{c}{e^2} \qquad /2.4/$$

gdzie $r_\perp^2 = x^2 + y^2$.

Nowe elementy do zrozumienia efektu Halla wnosi analiza momentu magnetycznego indukowanego w półprzewodniku. Określa się go z równania /2.3/, wg standardowej definicji, tj.:

$$\mu_z = - \frac{\partial V}{\partial H_z} = - \frac{e^2}{4mc^2} r_\perp^2 H_z + \frac{e}{2mc}(p_y x - p_x y) \qquad /2.5/$$

Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną wcześniej, poniżej pola magnetycznego H_1^m moment magnetyczny jest ujemny, tj. diamagnetyczny. Powyżej pola magnetycznego H_1^m moment magnetyczny opisują oba wyrazy równania /2.5/, tzn. ujemny i dodatni. Półprzewodnik znajduje się w mieszanym stanie: diamagnetycznym i paramagnetycznym. W stanie paramagnetycznym moment magnetyczny ma ten sam kierunek co zewnętrzne pole magnetyczne.

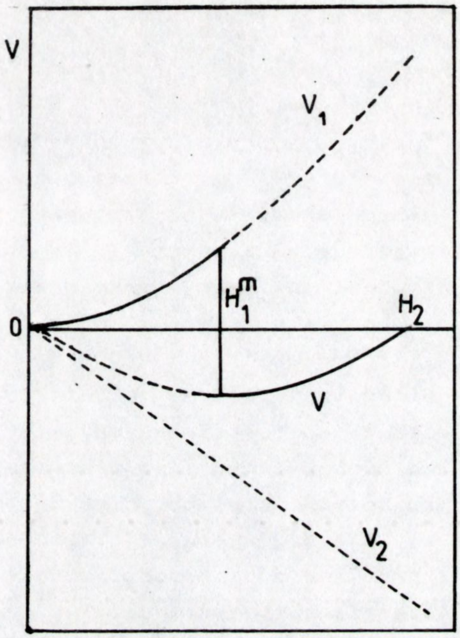
Poniżej pola magnetycznego H_1^m moment magnetyczny jest wytwarzany przez elektrony "swobodne". Nie mogą one wytwarzać paramagnetycznego momentu, ponieważ stan półprzewodnika byłby całkowicie niestabilny. Momenty takie nie mogą być również wytwarzane przez jony, ponieważ są one ekranowane przez elektrony swobodne. Sytuacja zmienia się przy polu magnetycznym H_1^m. Pole to jest na tyle silne, że przenika do wnętrza próbki i oddziaływuje z jonami. Energia tych oddziaływań jest paramagnetyczna. Dlatego powyżej pola H_1^m energia półprzewodnika jest sumą energii potencjalnych: paramagnetycznej i diamagnetycznej.

Zwrócić należy uwagę, że paramagnetyczny moment magnetyczny opisywany przez ostatni wyraz formuły /2.5/ nie znika, jeśli $v_y ex \neq v_x ey$, gdzie v_x i v_y są składowymi prędkości elektronów w atomie. Jeśli założyć, że składowe te są równe sobie, to ex musi być różne od ey.

Ale ex i ey są składowymi dipola elektrycznego d = er. W związku z tym w efekcie Halla jony są spolaryzowane. Efekt ten jest znany w innych zjawiskach i jest formułowany w bardziej ogólnej formie. Moment magnetyczny orbitalny znika, jeśli jony mają symetrię sferyczną.

Jeśli zewnętrzne pole elektryczne nie działa na półprzewodnik, to efekt Halla nie występuje. Wynika stąd wniosek, że zewnętrzne pole elektryczne wnika do wnętrza próbki i polaryzuje elektrycznie jony tworząc dipole. Dlatego pole elektryczne indukuje moment orbitalny. Moment więc paramagnetyczny jest indukowany przez pole elektryczne. Pole magnetyczne nie indukuje w jonach momentów magnetycznych, a tylko zmienia ich kierunek. To dziwne zjawisko zostało nazwane magnetoelektrycznym. Ogólnie definiuje się go jako zjawisko, w którym momenty magnetyczne są indukowane przez pole elektryczne, a momenty elektryczne przez pole magnetyczne.

Można więc sformułować wniosek, że w silnych polach magnetycznych /powyżej H_1^m/ pole magnetyczne oddziaływuje nie tylko z elektronami swobodnymi, ale również z jonami tworzącymi sieć kryształów.



Rys. 3. Zależność energii potencjalnych półprzewodnika od pola magnetycznego

3. REZYSTYWNOŚĆ HALLA

W celu wyznaczenia rezystywności Halla określimy gęstość prądu elektrycznego i pole elektryczne. Skorzystamy ze znanej w elektrodynamice relacji określającej prąd elektryczny, tzn.

$$j = -c\,\frac{dV}{dA} \qquad /3.1/$$

Prąd elektryczny może więc być określony z równania /2.2/ w sposób następujący

$$j_y = \left(\frac{e}{m}\,p_y - \frac{e^2}{mc}\,A_y\right) \qquad /3.2/$$

Natomiast pole elektryczne określimy z formuły

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \cdot \frac{e}{e}$$

skąd

$$E_x = -\frac{1}{e}\frac{\partial V}{\partial x} \qquad /3.3/$$

Z równania /2.2./ mamy więc

$$E_x = \frac{H_z}{ec}\left(\frac{e}{m}p_y - \frac{e^2}{mc}A_y\right) \qquad /3.4/$$

Dzieląc pole elektryczne /3.4/ przez prąd elektryczny /3.2/ otrzymuje się rezystywność Halla w postaci

$$\varrho_{xy} = \frac{1}{ec}H_z \qquad /3.5/$$

Dyskusja powyższej rezystywności będzie przeprowadzona w dalszej części pracy przy okazji opisu kwantowego efektu Halla.

Nowe elementy do zrozumienia efektu Halla wnosi analiza pola elektrycznego. Przypomnijmy, że poniżej pola magnetycznego H_1^m półprzewodnik jest opisywany tylko przez energię diamagnetyczną, tj. przez pierwszy wyraz energii potencjalnej /2.3/. Pole elektryczne poniżej H_1^m jest więc określone przez ostatni wyraz formuły /3.4/ i jest ujemne. Powyżej pola magnetycznego H_1^m energia paramagnetyczna V_1 jest większa od energii diamagnetycznej V_2 /rys. 1/. Dominującym więc polem elektrycznym jest pierwszy wyraz formuły /3.4/, który jest dodatni. Pole więc elektryczne E_x poniżej krytycznego pola magnetycznego H_1^m jest ujemne, a powyżej tego pola - dodatnie. Efekt ten wyjaśnia niezrozumiałe dotąd spostrzeżenie, że jedne pierwiastki mają stałą Halla dodatnią a inne ujemną.

Zjawisko to jest wykorzystywane do celów technicznych w przyrządach wykorzystujących efekt Halla. Wytwarza się specjalnie do tych celów przeznaczone materiały wielopierwiastkowe, niekiedy amorficzne. Zwraca się przy tym uwagę, aby znak stałej Halla był jednakowy we wszystkich składnikach. W większości przypadków taki sposób rozumowania prowadzi do pozytywnych rezultatów. Niekiedy jednak, któryś z pierwiastków zmienia znak stałej Halla w zestawie z innymi. Zmniejsza to indukowane pole elektryczne, a tym samym czułość elementu hallowskiego. Oznacza to, że nie wszystkie pierwiastki mają jednakową wartość krytycznego pola magnetycznego H_1^m. Pole to określa formuła /2.4/. Jeśli uwzględnić, że elektron ma wartość ujemną i w związku z tym wprowadzić wartość bezwzględną dipola $|d_y| = |e|\,y$, to formuła powyższa zmieni znak. Zewnętrzne pole elektryczne jest skierowane wzdłuż osi y i ono określa wartość dipola, który może być zapisany w postaci $d_y = \alpha E_y^o$, gdzie α jest polaryzowalnością sieci jonów.

Zatem krytyczne pole magnetyczne H_1^m jest proporcjonalne do polaryzowalności jonowej i do wartości zewnętrznego pola elektrycznego stosowanego w elemencie Halla. Parametry te należy uwzględniać przy opracowywaniu technologii materiałów.

Pole elektryczne E_x określone przez formułę /3.4/ jest mierzone w badaniach efektu Halla i uważa się, że jest to jedyne pole indukowane przez polę magnetyczne. Z równania jednak /2.3/ wynika, że pole magnetyczne indukuje również składową E_y pola elektrycznego.

$$E_y = -\frac{1}{e}\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{H_z}{2ec}\left(\frac{e}{c}p_x + \frac{e^2}{mc}H_y\right)$$

Zwrócić należy uwagę, że powyższa składowa pola elektrycznego jest przeciwnie skierowana do zewnętrznego pola elektrycznego E_y^o.

Pole magnetyczne więc w efekcie Halla indukuje dwie składowe pola elektrycznego: E_x - prostopadłe do kierunku przepływu prądu i E_y - - antyrównoległe do tego prądu. Właśnie składowa E_y powoduje, że przy bardzo silnych polach magnetycznych, kiedy $E_y = E_y^o$, prąd elektryczny w półprzewodniku nie płynie.

4. KWANTOWY EFEKT HALLA

Wydaje się, że opis efektów kwantowych a tym samym stosowanie mechaniki kwantowej w czasopismach technologicznych albo nie ma sensu albo jest przesadą.

W elektronice powstają przyrządy półprzewodnikowe, których własności kwantowe są regulowane za pomocą pól elektrycznych lub magnetycznych sterowanych komputerowo. Operacje takie są nazywane niekiedy profilowaniem. Konstruuje się profilowane, lawinowe fotodetektory i lasery, bipolarne tranzystory o dużym wzmocnieniu, prostowniki i inne elementy w technice światłowodowej. Poważna część inżynierów jest zmuszona do zrozumienia efektów kwantowych lub jest zastępowana przez fizyków.

Dlatego wydaje się, że pewne "jaskółki" kwantowe mogą ukazywać się w czasopismach fabrycznych.

W mechanice kwantowej wektory znajdujące się w formule /2.2/ zastępuje się operatorami i otrzymuje się formuły bardzo podobne do formuł klasycznych. W miejsce klasycznej funkcji Hamiltona otrzymuje się operator Hamiltona o postaci

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{e^2 H_z^2}{8mc^2}(x^2 + y^2) - \mu_B \hat{1}_z H_z \qquad /4.1/$$

gdzie

Ostatni wyraz równania /4.1/ jest operatorem energii potencjalnej V_1, a energia odpowiadająca mu ma postać $m_1 \mu_B H_Z$, gdzie $m_1 = 1,2,3,\ldots$ $\ldots 1$. Wprowadźmy oznaczenia

$$\gamma = \frac{e}{2mc}, \quad \omega = \gamma H_z$$

Dwa pierwsze wyrazy operatora /4.1/ przybierają postać

$$\mathcal{H}_o = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\tilde{\omega}^2}{2}(x^2 + y^2) \qquad /4.2/$$

Jest to znany operator energii dwu oscylatorów harmonicznych. Energia tych operatorów jest następująca

$$E_n^{/d/} = \hbar\omega n, \qquad n = 1,2,3,..., \qquad /4.3/$$

Jest to energia układu czysto diamagnetycznego. Jest ona przedstawiona na rys. 4.

Energią ta nie zawiera ostatniego wyrazu operatora /4.1/, tzn. energii paramagnetycznej. Jeśli określi się wartości średnie energii potencjalnej V_1 i V_2, to otrzymuje się wykresy tych energii takie jak na rys. 1. Dyskusja tych wykresów jest również identyczna. Poniżej pola magnetycznego H_1^m półprzewodnik jest opisywany przez oscylator diamagnetyczny z energią określoną przez formułę /4.3/. Powyżej pola magnetycznego H_1^m powinna być uwzględniona również energia paramagnetyczna, tj. ostatni wyraz równania /4.1/. Znany jest już taki oscylator, który zawiera również wyraz paramagnetyczny i zwany jest oscylatorem Landaua /również w literaturze anglosaskiej/. Jego energia ma postać

$$E_n^L = \hbar\omega_o /n + \frac{1}{2}/ \qquad n = 0,1,2,3,..., \qquad /4.4/$$

gdzie

$$\omega_o = \frac{e}{mc} H$$

Oscylator Landaua opisuje półprzewodnik powyżej pola magnetycznego H_1^m. Do opisu więc półprzewodnika w polu magnetycznym potrzebne są dwa różne oscylatory: diamagnetyczny i "mieszany" Landaua. Ich energie przedstawiono na rys. 5.

Energia oscylatora mieszanego równa jest energii $E_n^{/d/}$ i V_1, tj.

$$n\mu_B H + m_1 \mu_B H = 2\mu_B H /n + \frac{1}{2}/$$

skąd

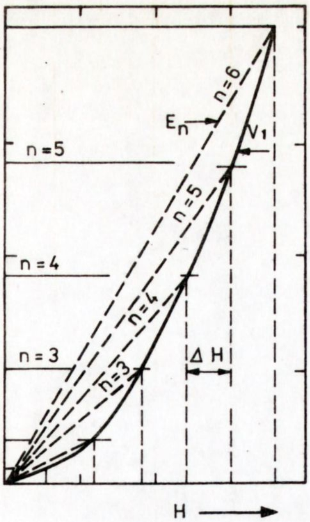
$$m_1 = n + 1 \qquad /4.5/$$

Pole magnetyczne H_1^m określa się z minimum energii kinetycznej układu i otrzymuje się

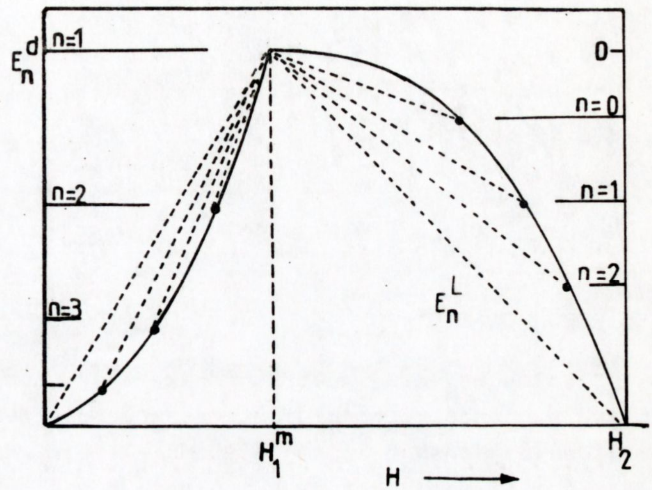
$$H_1^m = \frac{hc}{e} /n^m - m_1/ \qquad /4.6/$$

gdzie n^m jest liczbą kwantową przy polu magnetycznym H_1^m.

Określenie pola elektrycznego i prądu elektrycznego jest stosunkowo skomplikowane. Jeśli jednak wielkości te podzieli się przez siebie, to otrzymuje się rezystywność Halla identyczną z określoną przez formułę klasyczną /3.5/.



Rys. 4. Ilustracja zmian diamagnetycznej energii półprzewodnika jako funkcji pola magnetycznego



Rys. 5. Ilustracja zmian energii diamagnetycznej i mieszanej, tj. diamagnetycznej i paramagnetycznej jako funkcji pola magnetycznego

Jeśli podstawi się formułę /4.6/ do formuły /3.5/, wówczas otrzymuje się

$$\varrho_{xy} = \frac{h}{e^2}\left(n^m - m_1\right)$$

Ale na podstawie formuły /4.5/ $m_1 = n + 1$. Wówczas

$$\varrho_{xy}^{o} = \frac{h}{e^2} \qquad /4.7/$$

Rezystywność powyższa jest mierzona w silnym polu magnetycznym, tj. przy magnetycznym polu krytycznym H_1^m. Taką wartość otrzymał eksperymentalnie von Klitzing.

Jeśli pole magnetyczne jest zmniejszane od wartości H_1^m, to rezystywność również zmniejsza się zgodnie z regułami oscylatora diamagnetycznego, tj.

$$\varrho_{xy} = \frac{1}{n}\ \frac{h}{e^2} \quad n = 1,2,3,\ldots, \qquad /4.8/$$

Formuła powyższa jest identyczna z eksperymentalną formułą /1.1/ von Klitzinga.

Jeśli pole magnetyczne jest zwiększane od pola magnetycznego H_1^m, to rezystywność wzrasta zgodnie z regułami oscylatora Landaua, tj.

$$\varrho_{xy} = /n + \frac{1}{2}/ \frac{h}{e^2} \qquad /4.9/$$

Otrzymuje się wówczas wartości $h/2e^2$, $3h/2e^2$, $5h/2e^2$. Wynik ten jest zgodny z wynikami eksperymentalnymi Tsui i współpracowników. Formuła więc /4.9/ opisuje ułamkowy efekt Halla.

Jeśli nadal pole magnetyczne będzie zwiększane, to przy drugim krytycznym polu magnetycznym H_2 energia potencjalna V jest równa zeru /rys. 1/. Powyżej pola magnetycznego H_2 układ znów jest opisywany przez oscylatory diamagnetyczne i wówczas

$$\varrho_{xy} = n \frac{h}{e^2}$$

Ten wynik nie jest jeszcze potwierdzony eksperymentalnie.

5. PODSUMOWANIE

Stan magnetyczny półprzewodnika w polu magnetycznym ma istotny wpływ na jego własności elektryczne. Półprzewodniki są diamagnetykami. Jeśli jednak pole magnetyczne jest zwiększane, to przy pewnej jego wartości, w diamagnetycznym półprzewodniku pojawiają się własności paramagnetyczne. Następuje przemiana fazy diamagnetycznej w mieszaną: diamagnetyczną i paramagnetyczną. W fazie diamagnetycznej występuje całkowity efekt Halla odkryty przez von Klitzinga. W fazie mieszanej obserwowuje się ułamkowy efekt Halla odkryty przez Tsui, Störmera i Gossarda. Inne są też formuły określające rezystywność Halla. Do opisu tych zjawisk, jako punkt wyjściowy, przyjęto znaną postać energii dla diamagnetyków. Analiza tej energii doprowadziła do formuł określających rezystywność Halla, zgodnych z formułami określonymi eksperymentalnie.

LITERATURA

1. von Klitzing K., Dorda G., Pepper M., Phys. Rev. Lett., vol. 45 /1980/, 494
2. Störmer H.L., Physica, Ser. B, vol. 126, /1984/, 246
3. Tsui D.C., Störmer H.L., Gossard A.C., Phys, Rev. Lett., vol. 48. /1982/, 1559
4. Störmer H.L. Surf. Sci., vol. 132 /1983/, 519

/Tekst dostarczono 1988.05.03./