



Prace
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

III. - Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Travaux de la Société des Sciences de Varsovie.

III. Classe des sciences mathématiques et naturelles.

N^o 12.

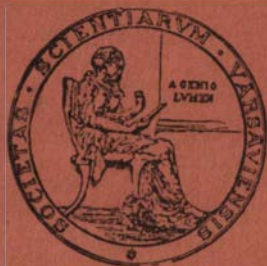
JAN KRASSOWSKI.

O RUCHU PLANETOID TYPU $\frac{3}{4}$ (THULE).

WYZNACZENIE WYRAZÓW TYPOWYCH ORAZ PRZERWY.

SUR LE MOUVEMENT DES PETITES PLANÈTES
DU TYPE DE THULE ($\frac{3}{4}$).

DÉTERMINATION DES TERMES ÉLÉMENTAIRES ET DE LA LACUNE
POUR LE TYPE THULE.



WYDANE Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWYM IMIENIA D-ra JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

WARSZAWA.

NAKLADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Skład główny w księgarni E. Wende i S-ki.

1916.

Dodatek do „Sprawozdań z posiedzeń” T. N. W.

TRAVAUX
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE VARSOVIE.
III. Classe des sciences mathématiques et naturelles.

№ 12.—1916.

Jan Krassowski: Sur le mouvement des petites planètes
du type de Thule (³/₄).

Prace
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

III. — Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Travaux de la Société des Sciences de Varsovie.

III. Classe des sciences mathématiques et naturelles.

№ 12.

JAN KRASSOWSKI.

O RUCHU PLANETOID TYPU $\frac{3}{4}$ (THULE).

WYZNACZENIE WYRAZÓW TYPOWYCH ORAZ PRZERWY.

SUR LE MOUVEMENT DES PETITES PLANÈTES
DU TYPE DE THULE ($\frac{3}{4}$).

DÉTERMINATION DES TERMES ÉLÉMENTAIRES ET DE LA LACUNE
POUR LE TYPE THULE.



WYDANE Z ZAPOMOZI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH
NA POLU NAUKOWEM IMIENIA D-ra JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

WARSZAWA.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO

Skład główny w księgarni E. Wende i S-ki.

1916.

Dodatek do „Sprawozdań z posiedzeń” T. N. W.



P.1062
P.1601

Geprüft und freigegeben durch die Kais. Deutsche Presseabteilung.

Warschau den 14. 7. 1916. T. № 1908. Dr. № 103.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

O ruchu planetoid typu $\frac{3}{4}$ (Thule).

Wyznaczenie wyrazów typowych oraz przerwy.

Wstęp.

Wiadomo, że za charakterystykę danej grupy planetoid służy wymierność stosunku ruchu dziennego Jowisza, Marsa lub Saturna do ruchu dziennego planetoidy. Gdy dana planetoida posiada ruch dzienny taki, iż stosunek ruchu dziennego planety głównej do ruchu dziennego planetoidy wyraża się w przybliżeniu stosunkiem dwóch małych liczb całkowitych, jak np. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, ... etc., to zaburzenia w ruchu tej planetoidy, spowodowane planetą główną, są tem większe, im bardziej się ów stosunek ruchów dziennych zbliża do stosunku takich dwóch liczb. Największe zakłócenia w ruchach planetoid powoduje Jowisz, dzięki swej olbrzymiej masie; niektóre tylko planetoidy, których ruch dzienny jest współmierny z ruchem Marsa, podlegają dość znacznym zaburzeniom z jego strony, np. Hebe (6), Vala (131), Asia (67), Nysa (44), Lutetia (21) o dość znacznych ruchach dziennych i mimośrodkach. Zaburzenia Jowiszowe wywierane na tę grupę planetoid nie są duże, a to z powodu znacznej odległości Jowisza od tej grupy. Dopiero planetoidy grupy $\frac{1}{3}$ (z ruchem dziennym około 900''), o małym mimośrodku, planetoidy grupy $\frac{1}{2}$ (z ruchem dziennym około 600'') właściwie rozpoczynają grupę planetoid silnie podlegających zaburzeniom ze strony Jowisza. O ile stosunek ruchu planetoidy i planety głównej nie jest bardzo bliski stosunku dwóch małych liczb, to perturbacje

nie będą zbyt wielkie, i wtedy zwykłe metody obliczania perturbacji stosują się bez trudności.

Gdy jednak ów stosunek staje się coraz bliższy takiego prostego ułamka, jak np. dla przedstawicieli każdej grupy planetoid, a więc Hestii, Hekuby, Hildy etc., których ruchy dzienne najbardziej są zbliżone do pewnej niewielkiej wielokrotności ruchu Jowisza—trudności przy obliczaniu perturbacji stają się coraz większe; zwykłe metody zawodzą, gdyż w wyrażeniach na perturbacje występują bardzo małe dzielniki, które przy całkowaniu jeszcze bardziej się zmniejszają.

Przy pierwszym przybliżonem obliczeniu perturbacji takich planetoid należałoby już uwzględnić wyrazy rzędu kwadratu masy zakłócającej, co, jak wiemy, niepomniernie komplikuje rachunki i często nawet uniemożliwia ich wykonanie o ile chcemy postępować według metod klasycznych.

Gyldén podał właściwie jedną z metod przybliżonych, która, jak paru uczniów jego wykazało (Brendel, Backlund, Harzer i in.),¹⁾ nie zawodzi nawet i wtedy, gdy stosunek ruchów jest bardzo blizki do prostego ułamka. Metodę Gyldén'a, dość skomplikowaną i niezbyt dobrze przystosowaną do rachunków praktycznych, przerobił i uzupełnił Brendel. Metodę tę uczniowie Gyldén'a zastosowali już do planetoid grupy Hestii, Hekuby i Hiidy — i zawsze z dobrym rezultatem. Brendel i Kramer podali obszernie tablice, pozwalające w niedługim czasie obliczyć najważniejsze perturbacje planetoid typu Hestii i Hekuby i ich pozycje geocentryczne, tak że prawdopodobnie z łatwością będzie można zawsze odnaleźć te planetoidy. Wyniki dla ruchu Hekuby, otrzymane przez Harzer'a¹⁾, zostały do pewnego stopnia skontrolowane na innej drodze przez Simonin'a²⁾. Przypadek planetoid typu Hildy ($\frac{2}{3}$), trudny z powodu bardzo blizkiego sąsiedztwa Jowisza z temi planetoidami, zbadał Buchholz (obliczył on charakterystyczne wyrazy, ale nie podał jeszcze wyrażeń samych perturbacji).

Planetoida Thule (279) należy do oddzielnej klasy planetoid: $\frac{3}{4}$ i jest, jak dotąd, jedynym tej klasy przedstawicielem. Thule je-

¹⁾ Harzer P. Untersuchungen über einen speziellen Fall... etc.

²⁾ Simonin M. Sur l'orbite d'Hécube, Annales de l'observatoire de Nice, t. IV.

szcze bardziej niż planetoidy typu Hildy może się zbliżyć do Jowisza; takich zbliżeń, jak wspomina Bidschof¹⁾, bywa po trzy na sto lat. Podczas takiego zbliżenia z Jowiszem, ponieważ Thule przez dłuższy czas znajduje się pod jego silnym wpływem zakłócającym, droga jej ulega bardzo znacznym zmianom; np. dzięki zbliżeniu do Jowisza, które miało miejsce w 1912 r., średni ruch dzienny Thule znacznie się zmniejszył, jak to widzimy z rachunków Viljev'a²⁾. Kobb³⁾ przypuszczał nawet na zasadzie wzorów S. H. Darwin'a⁴⁾, odnoszących się do orbit okresowych, że ruch Thule może z czasem stać się niestałym i droga jej może się nawet kiedyś przeciąć z drogą Jowisza.

Dotąd nie badano ogólnie ruchu tej ciekawej planetoidy. O ile wiem, tylko Bidschof i Wedemeyer⁵⁾ obliczyli lub poprawili pierwiastki drogi Thule, a Viljev obliczył tylko zaburzenia ruchu, odnoszące się do niedługiego okresu czasu, i to opierając się na danych orbity, otrzymanych przez Wedemeyer'a.

Wydało mi się więc rzeczą ineresującą przystąpić na zasadzie metod, podanych przez H. Gyldén'a, które z tak wielkiem powodzeniem dopełnił M. Brendel, do zbadania ruchu tej ciekawej grupy planetoid typu Thule, których ruch średni dzienny jest bardzo bliski $\frac{4}{3}$ ruchu średniego dziennego Jowisza. Punktem wyjścia naszych rozważań będą dane liczbowe, odnoszące się do planetoidy Thule, podane przez Wedemeyer'a.

W niniejszej pracy zamierzam streścić ogólny zarys teorii Gyldén'a, obliczenia perturbacyj małych planet w modyfikacji, wprowadzonej przez Brendel'a, i następnie wyznaczyć charakterystyczne wyrazy, odnoszące się do ruchu planetoidy Thule, oraz szerokość przerwy⁶⁾ w pierścieniu planetoidalnym, która dla typu Thule dotąd nie została jeszcze oznaczoną.

1) Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Bd. 100 Math.-Naturwiss., p. 937. J. Bidschof, Bestimmung der Bahn des Planeten (279) Thule.

2) Viljev A. N. Bd. 195.

3) Kobb G. Sur un cas d'instabilité possible, Bull. Astr. 1902.

4) Darwin G. H. On periodic orbits, Acta Mathematica t. XV.

5) Wedemeyer. Archiv der Seewarte XXXI Jhrg. 1909.

6) Brendel. Theorie d. kl. Pl. II, p. 5.

I. Wyprowadzenie równań ruchu zakłóconego w spólrzędnych Gyldeńowskich.

1. Wiadomo, że ogólne równania ruchu trzech ciał, które charakteryzują ruch zakłócony jakiejś planety dokoła słońca, są następujące:

$$I. \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = k^2(m+1)\frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = k^2(m+1)\frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = k^2(m+1)\frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{cases}$$

gdzie, według przyjętego zwyczaju, przez k oznaczamy stałą Gaussa, przez m masę planety zakłóconej (przyjmując masę słońca za jedność), r promień wodzący tej planety; m' , r' takie same wielkości dla planety zakłócającej; x, y, z i x', y', z' odpowiednio dla każdej są to spólrzędne prostokątne, odniesione do pewnego stałego kierunku w przestrzeni i których początek jest w środku słońca; t czas liczony w dniach średnich słonecznych, który upłynął od jakiejś epoki początkowej. Funkcja Ω jest to funkcja perturbacyjna:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \int \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \Big| = \frac{m'}{1+m} \int \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos H \Big|$$

gdzie

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos H$$

zaś H jest to kąt w środku słońca, pomiędzy promieniami wodzącymi r i r' obydwóch planet.

Równania I należy przedewszystkiem odpowiednio przekształcić.

H. Gyldeń analogicznie do myśli Hansen'a rozpatruje ruch planetoidy zakłóconej na swej chwilowej drodze oddzielnie od ruchu samej płaszczyzny drogi w przestrzeni.

Hansen okazał¹⁾, że istotnie można znaleźć takie wyrażenie analityczne dla ruchu zakłóconego planetoidy, iż elementy charakteryzujące położenie orbity w przestrzeni, a więc Ω i i i z nimi związane stałe, wystąpią oddzielnie od pozostałych elementów. Taki rozdział tych dwóch rodzajów charakterystycznych wielkości

¹⁾ Hansen P. A. Auseinandersetzung etc. I. § 3.

można osiągnąć przez wprowadzenie pewnego nowego układu spólrzędnych x_1, y_1, z_1 mającego — jak zresztą i poprzedni układ $x y z$ — swój początek w środku ciężkości słońca.

Całkowanie układu równań różniczkowych I, w których prawe strony byłyby zerami, dawałoby nam, jak wiemy, ruch po elip-sie Keplerowskiej.

Równania te są następujące:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} k^2(1+m) = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} k^2(1+m) = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} k^2(1+m) = 0. \end{cases}$$

Stałych całkowania w tym wypadku jest 6; są one dwóch rodzajów: jedne określają położenie drogi planetoidy w przestrzeni, pozostałe zaś kształt i rozmiary drogi. Metoda waryacji stałych dowolnych, jak wiemy, upoważnia nas, zamiast całek równania I (ruchu niekeplerowskiego, zakłóconego) wziąć całki równania (2) dla ruchu Ke p l e r o w s k i e g o — pod warunkiem atoli, abyśmy stałe dowolne, które są w całkach równań ruchu keplerowskiego znajdującą, uważali jako funkcje czasu, które muszą spełniać równania I.

Wtedy wartości spólrzędnych x, y, z i ich pochodnych $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ obliczone na zasadzie układów równ. 2 i I mieć będą i tę samą postać analityczną. Wszelkie spólrzędne, spełniające powyższy warunek (t. j. mające taki sam kształt analityczny w ruchu Keplerowskim i w ruchu zakłóconym) H a n s e n nazwał spólrzędnymi idealnemi ¹⁾.

Niech te spólrzędne idealne będą x_1, y_1, z_1 ; dostawy kierunkowe osi x_1 oznaczmy przez α, β, γ , osi y_1 przez $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ a osi z_1 przez $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, — wówczas, jak wiemy; zachodzić będą związki następujące:

$$(3) \quad x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z; \quad y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z; \quad z_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$

i odwrotnie

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 z_1; & y &= \beta x_1 + \beta_1 y_1 + \beta_2 z_1; \\ & & z &= \gamma x_1 + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 z_1 \end{aligned}$$

¹⁾ Hansen P. A. Auseinandersetzung etc. 1. § 3.

$$(4a) \quad \begin{cases} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 = 0 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1. \end{cases}$$

Aby nowe spólrzędne $x_1 y_1 z_1$ były „idealne“, wystarczy aby były spełnione związki następujące:

$$(5) \quad x \frac{d\alpha}{dt} + y \frac{d\beta}{dt} + z \frac{d\gamma}{dt} = 0; \quad *x \frac{d\alpha_1}{dt} + y \frac{d\beta_1}{dt} + z \frac{d\gamma_1}{dt} = 0;$$

$$x \frac{d\alpha_2}{dt} + y \frac{d\beta_2}{dt} + z \frac{d\gamma_2}{dt} = 0.$$

Związki (5) redukują się do dwóch tylko warunków niezależnych; jakoż uwzględniając związki (3) i podstawiając w równ. (5):

$$(6) \quad \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$$

gdzie dla krótkości oznaczyliśmy:

$$A dt = \sum \gamma d\beta = - \sum \beta d\gamma$$

$$B dt = \sum \alpha d\gamma = - \sum \gamma d\alpha$$

$$C dt = \sum \beta d\alpha = - \sum \alpha d\beta$$

(wielkości te są to dostawy kierunkowe chwilowej osi obrotu).

Z równania (6) widzimy przeto, że we wszelkim układzie spólrzędnych idealnych, odniesionym do osi ruchomych, oś chwilowa obrotu układu schodzi się z promieniem wodzącym planetoidy. Jeśli założymy, że stała $z_1 = 0$, wtedy płaszczyzna x, y stale zawierać będzie w sobie promień wodzący planetoidy i nowy układ spólrzędnych ruchomych x_1, y_1, z_1 będzie najzupełniej określonym w przestrzeni.

Ponieważ wprowadziliśmy warunek¹⁾ $z_1 = 0$, mieć więc będziemy

$$(7) \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0;$$

¹⁾ Należy przypomnieć, że H o e n e W r o ń s k i, podając swoje nowe metody obliczenia perturbacyj w „Réforme absolue du savoir humain“, rozpatruje perturbacje, odnoszące się do płaszczyzny drogi planetoidy oddzielnie od perturbacji elementów jej orbity.

to równanie, jak to widzimy od razu, jest równaniem płaszczyzny przechodzącej przez promień wodzący, a zmiennej z czasem t ; płaszczyzna, zawierająca w sobie w czasie t nie tylko promień wodzący planetoidy dla tej chwili, ale jeszcze i styczną do jej drogi, spełniać będzie równanie, w którym zamiast x, y, z podstawimy $x + dx, y + dy, z + dz$.

Wówczas muszą być spełnione związki następujące:

$$(8) \quad \alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz = 0$$

oraz

$$(9) \quad x d\alpha_2 + y d\beta_2 + z d\gamma_2 = 0.$$

Równania (7) i (8) dają nam warunek, który musi być spełniony, aby płaszczyzna $x_1 y_1$ znajdowała się w płaszczyźnie chwilowej drogi planetoidy; przy pomocy zaś równania:

$$(10) \quad \alpha d\alpha_1 + \beta d\beta_1 + \gamma d\gamma_1 = 0$$

wyznamy na tej płaszczyźnie położenie osi $0x_1$.

Pomnóżmy równania (4) raz przez $d\alpha, d\beta, d\gamma$, a drugi raz przez $d\alpha_1, d\beta_1, d\gamma_1$, dodajmy i uwzględnijmy związki: (4a), $z_1 = 0$, oraz (10); otrzymamy:

$$(11) \quad \begin{aligned} x d\alpha + y d\beta + \gamma dz &= 0 \\ x d\alpha_1 + y d\beta_1 + z d\gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Równania (3) zróżniczkujmy i uwzględnijmy równ. (9) i (11), wtedy otrzymamy, dołączając równanie $z_1 = 0$, równania następujące:

$$(12) \quad \begin{cases} dx_1 = \alpha dx + \beta xy + \gamma pz \\ dy_1 = \alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz \\ dz_1 = 0 = \alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz. \end{cases}$$

Równania (12) pomnóżmy przez $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, później drugi raz przez β, β_1, β_2 , i wreszcie trzeci raz przez $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ i dodajmy, to po uwzględnieniu związków (4a) otrzymamy:

$$\begin{aligned} dx &= \alpha dx_1 + \alpha_1 dy_1 \\ dy &= \beta dx_1 + \beta_1 dy_1 \\ dz &= \gamma dx_1 + \gamma_1 dy_1. \end{aligned}$$

Z tych równań po uwzględnieniu (4a) otrzymamy:

$$\begin{aligned} d\alpha dx + d\beta dy + d\gamma dz &= 0 \\ d\alpha_1 dx + d\beta_1 dy + d\gamma_1 dz &= 0 \end{aligned}$$



po uwzględnieniu których z (12) otrzymamy równania następujące:

$$(13) \quad \begin{cases} d^2x_1 = \alpha d^2x + \beta d^2y + \gamma d^2z, \\ d^2y_1 = \alpha_1 d^2x + \beta_1 d^2y + \gamma_1 d^2z, \\ d^2z_1 = 0, \text{ oraz:} \\ \begin{cases} d^2x = \alpha d^2x_1 + \alpha_1 d^2y_1 + d\alpha dx_1 + d\alpha_1 dy_1 \\ d^2y = \beta d^2x_1 + \beta_1 d^2y_1 + d\beta dx_1 + d\beta_1 dy_1 \\ d^2z = \lambda d^2x_1 + \gamma_1 d^2y_1 + d\gamma dx_1 + d\gamma_1 dy_1. \end{cases} \end{cases}$$

Funkcja perturbacyjna Ω da nam związki następujące:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = \alpha_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0. \end{cases}$$

Jeżeli wreszcie równania I odpowiednio pomnożymy przez α , β , γ i dodamy do siebie po uwzględnieniu dopiero co otrzymanych związków, to mieć będziemy¹⁾:

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{x_1}{r^3} = k^2(1+m) \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{y_1}{r^3} = k^2(1+m) \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}. \end{cases}$$

Układ równań II jest najzupełniej analogiczny do równania I i wyraża ruch planetoidy po chwilowej drodze²⁾. W układzie równań II zamiast spólrzędnych prostokątnych wprowadźmy spólrzędne biegunowe r i v . Ponieważ płaszczyzna drogi planetoidy leży w płaszczyźnie x_1y_1 , więc wskutek perturbacji droga ta bynajmniej nie jest zamkniętą, i dla tego musimy liczyć kąty v nie tak, jak zwykle w elipsach od 0° do 360° , lecz od $-\infty$ do $+\infty$.

Spólrzędne biegunowe, które wprowadzamy do równań II, są nam dane przez równanie następujące:

$$(15) \quad x_1 = r \cos v; \quad y_1 = r \sin v;$$

zaś rów. II przejdą w następujące:

¹⁾ Hansen. Auseinandersetzung I. p. 69.

²⁾ Harzer P. Untersuchungen etc. p. 8.

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} = k^2(1+m) \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ 2 \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + r \frac{d^2 v}{dt^2} = k^2(1+m) \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \end{cases}$$

W tych równaniach v oznacza prawdziwą długość planety, zaś r jest to jej promień wodzący. Te równania są to równania zasadnicze Haesen'a, ale w spólrzędnych biegunowych.

2. Równ. III H. Gyldeń przekształca przez wprowadzenie pewnych nowych zmiennych zależnych ρ, η, S oraz zmiennej niezależnej v „prawdziwej długości“; te wielkości są to tak zwane spólrzędne Gyldeńowskie. Zanim jednak to przekształcenie równania III wykonamy, przypomnimy w ogólnych zarysach bieg myśli Gyldeń'a. Jeżeli w równaniach III przypuścimy, że $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ i $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ są równe 0, to wtedy te równania przedstawiać będą ruch Kepleraowski i, jak to wiemy, otrzymamy całki następujące:

$$(1) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(v-\pi)}$$

oraz stałą prędkość wycinkową

$$(2) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{a(1-e^2)}.$$

Ponieważ masę planetoidy zawsze możemy zaniedbać wobec masy słońca, którą przyjmujemy za 1, więc w ruchu Kepleraowskim jest zawsze:

$$(3) \quad a(1-e) < r < a(1+e).$$

Jeżeli $\frac{\partial \Omega}{\partial r} \neq 0$ i $\frac{\partial \Omega}{\partial v} \neq 0$, to mieć będziemy do czynienia z ruchem zakłóconym, i wtedy prawdziwa droga planetoidy znacznie się różnić będzie od elipsy Kepleraowskiej, jednak, jak to nam wykazują spostrzeżenia, dla czasu skończonego promienie wodzące planetoidy wahać się będą w pewnych skończonych granicach. Otóż Gyldeń wprowadził tak zwane krzywe periplegmaticzne¹⁾, zawarte między dwiema współśrodkowymi kulami, skończenie od siebie oddalonymi. Krzywe te są to poszczególne drogi planety, które się tworzą wskutek ciągłych zmian wielkości połowy osi jej orbity.

¹⁾ Gyldeń H. *Orbites absolues* t. I, I. 1; id. *Undersökningar...* I.

Zmiany te, według Gyl'dén'a są nieograniczone w czasie, jednak zawarte są w skończonych granicach; wielkość a Gyl'dén nazywa protometrem. Ponieważ w dalszych rozważaniach naszych a nie będzie absolutnym¹⁾ elementem, przeto, idąc za Brendel'em, wielkość a nazywać będziemy wprost połową osi drogi (nie jest to jednak półoś chwilowej elipsy Keplerskiej).

Przypuśćmy, że planeta zakłócona porusza się po drodze, leżącej w pewnej stałej płaszczyźnie; niech r będzie jej promień wodzący, v —prawdziwa długość, liczona od pewnego stałego kierunku. Wskutek perturbacyj elipsa Keplerska stale się odkształca, i równanie drogi, opisaney przez planetę zakłóconą, napisać można, według Gyl'dén'a, w postaci następującej:

$$(4) \quad r = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \rho}$$

gdzie a jest to pewna średnia wartość promienia wodzącego, a η i ρ są to funkcye prawdziwej długości, które przedstawić możemy przy pomocy szeregów trygonometrycznych; η jest to pewna wielkość, bardzo powoli zmienna z czasem i porównywalna z mimośrodem eliptycznym. W ruchu Keplerskim prędkość wycinkowa była stałą, w ruchu zakłóconym, według Gyl'dén'a, już to nie ma miejsca, gdyż ta prędkość wycinkowa waha się dokoła pewnej średniej wartości. Przez analogię z ruchem Keplerskim, możemy więc napisać, że w ruchu zakłóconym zachodzi dla prędkości wycinkowej równanie następujące:

$$(5) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{a(1 - \eta^3)}}{1 + S}$$

gdzie S jest to pewna mała wielkość. Wprowadźmy funkcye S, ρ, η w równania III.

Drugie z równań III możemy napisać:

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right) = k^2 (1 + m) \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Położmy $m = 0$; wtedy będziemy mogli napisać przez analogię, ze wzorem na ruch Keplerski, równanie następujące:

¹⁾ Absolutną drogą Gyl'dén nazywa pewną orbitę, w której elementy są to pewne zupełne stałe, i która różni się od rzeczywiście opisywanej przez dane ciało drogi, o wielkości rzędu siły zakłócającej.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{kVa(1-\eta^2)}{1+S} \right\} = k^2 \frac{\partial \Omega}{\partial v};$$

wykonajmy wskazane różniczkowanie, wtedy otrzymamy:

$$\frac{1}{r^2} \frac{kVa(1-\eta^2)}{(1+S)} \left\{ -\frac{kVa(1-\eta^2)}{(1+S)^2} \frac{dS}{dv} - \frac{1}{2} \frac{kVa}{1+S} \cdot \frac{1}{V_{1-\eta^2}} \cdot \frac{d\eta^2}{dv} \right\} = k^2 \frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

czyli, jeśli wraz z Gylgén'em i Brendel'em¹⁾ oznaczymy:

$$\text{IV}^{\text{bis}} \quad Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

powyższy wzór przejdzie w równanie następujące, które nam określą S:

$$\text{(IV)} \quad -\frac{1}{1+S} = (1+S)^2 Q + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2} \frac{d\eta^2}{dv}.$$

Zwróćmy się teraz do wzorów (4) i (5); bez trudności znajdziemy:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{kVa(1-\eta^2)}{1+S} \cdot \frac{d}{dv} \frac{1}{r}$$

oraz

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{ka^2(1-\eta^2)}{r^2(1+S)^2} \left\{ \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q \frac{d}{dv} \frac{1}{r} \right\}.$$

Uważajmy teraz równania III; w tych równaniach podstawmy znalezioną dopiero co wartość na $\frac{d^2 r}{dt^2}$ oraz na $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$, to otrzymamy:

$$\text{(a)} \quad a(1-\eta^2) \left\{ \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dv^2} + (1+S)^2 Q \right\} - (1+S)^2 = -r^2 (1+S)^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Równanie $r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$ da nam:

¹⁾ Brendel. Om Användningen p. 5; Gylgén, Undersökningar II.

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dv^2} = \frac{1}{a(1-\eta)^2} \left\{ \frac{d^2 \rho}{dv^2} + \frac{2}{1-\eta^2} \cdot \frac{d\eta^2}{dv} \cdot \frac{d\rho}{dv} + 2 \frac{1+\rho}{(1-\rho^2)^2} \left(\frac{d\eta^2}{dv} \right)^2 + \frac{1+\rho}{1-\eta^2} \cdot \frac{d^2 \eta^2}{dv^2} \right\}$$

co podstawione w równanie (a) da nam w rezultacie:

$$(V)^1) \quad \frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho = - \left\{ \frac{2}{1-\eta^2} \cdot \frac{d\eta^2}{dv} + (1+S)^2 Q \right\} \frac{d\rho}{dv} + 2S + S^2 - \\ - (1+S^2)P - \left\{ \frac{1}{1-\eta^2} \cdot \frac{d^2 \eta^2}{dv^2} + \frac{2}{(1-\eta^2)^2} \left(\frac{d\eta^2}{dv} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(1+S)^2}{1-\eta^2} Q \frac{d\eta^2}{dv} \right\} (1+\rho)$$

gdzie analogicznie do poprzedniego przez P oznaczyliśmy funkcję następującą:

$$(V^{bis}) \quad P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

Równanie (V) daje nam właśnie wyrażenie na ρ w funkcji v .

Ponieważ P i Q są to pewne szeregi trygonometryczne, więc równania IV i V mieć będą postać następującą:

$$(1) \quad \frac{dS}{dv} = \sum a_n \sin(\lambda_n v - B_n)$$

$$(2) \quad \frac{d^2 \rho}{dv^2} + (1-\beta)\rho = \sum b_n \cos(\lambda_n v - B_n).$$

Zgodnie z oznaczeniami Brendel'a przyjmujemy, że w równ. (1) i (2) wielkości $a_n, b_n, \lambda_n, B_n, \beta$ są to pewne stałe wielkości; w wielkościach a_n, b_n, β , (co jest istotne) masa ciała, wywołującego zaburzenia (w tym przypadku masa Jowisza), występuje jako czynnik. Te trzy wielkości są przeto porównywalne z masą zakłócającego ciała.

Całkowanie równania (1) da nam odrazu rezultat następujący:

$$(3) \quad S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n),$$

gdzie przez a_0 oznaczyliśmy stałą całkowania.

Z równania zaś (2) otrzymamy:

¹⁾ Brendel. Th. d. kl. Planeten I.

$$(4) \quad \rho = k \cos [V1 - \beta v - \Gamma] + \sum \frac{b_n}{1 - \beta - \lambda_n^2} \cos(\lambda_n - B_n).$$

Wyrażenia (3) i (4) zawierają jako dzielnik wielkość zwykle małą λ_n rzędu masy zakłócającej; wskutek całkowania we wszystkich wyrazach zależnych od λ_n wystąpią wielkości, w których masa zakłócająca zachodzi w mianowniku w wyższej potęgde, wskutek czego wyrazy zależne od λ_n zostaną bardzo powiększone.

W równ. (1) istnieją wyrazy pomnożone przez masę ciała zakłócającego w pierwszej potęgde; te wyrazy w całce (3) już nie będą zawierać tej masy jako czynnika. Podobne wyrazy Gyldeń nazywa elementarnymi; ponieważ w przypadku tych wyrazów elementarnych spółczynniki λ_n będą bardzo małe (masa Jowisza $\frac{1}{1045}$) przeto te wyrazy będą bardzo powolnie zmienne z czasem i według określenia Harzer'a¹⁾ są to wyrazy elementarne długookresowe.

Jeżeli ruch planetoidy i planety zakłócającej jest tego rodzaju, że stosunek ich ruchów średnich dziennych jest prawie równy prostemu ułankowi $\frac{p}{q}$, to wtedy też w równ. (3) wystąpią wyrazy będące pierwszego rzędu w stosunku do masy planety zakłócającej; w niektórych przypadkach specjalnych mogą nawet być rzędu niższego od pierwszego, a mianowicie takiego, jak pierwiastek trzeciego stopnia z masy zakłócającej. Wyrazy, których rząd jest zawarty pomiędzy $\frac{1}{3}$ i 1—Gyldeń nazywa charakterystycznymi; ponieważ jednak w tych wyrazach czynnik λ_n jest bardzo mały, przeto i te wyrazy będą charakterystyczne długookresowe. Wreszcie w równ. (1) mogą występować takie wyrazy, dla których czynniki λ_n nie będą małymi wielkościami, wskutek czego po zcałkowaniu w (3) wyrazy te nie będą zwiększone; podobne wyrazy są to wyrazy zwykłe.

Oznaczmy przez σ_n spółczynniki przy v w wyrażeniach wyrazów elementarnych długookresowych (σ_n jest rzędu masy zakłócającej); przez δ_n tę samą wielkość w wyrazach charakterystycznych długookresowych (δ_n jest wielkością małą, jednak znacznie większą, niż masa zakłócająca); wtedy będziemy mogli napisać równ. (3) w postaci następującej:²⁾

¹⁾ Harzer P. Untersuchugen, p. 3.

²⁾ Brendel. Theor. d. kl. Planeten I. p. 18 et sqq.

$$(5) \quad S = a_0 - \sum \frac{a_n}{\sigma_n} \cos(\sigma_n v - A_n) - \sum \frac{a'_n}{\delta_n} \cos(\delta_n v - C_n) - \\ - \sum \frac{a''_n}{\lambda_n} \cos(\lambda_n v - B_n)$$

i w tem wyrażeniu λ_n już nie jest małą wielkością.

Zbadajmy obecnie w analogiczny sposób równ. (2). Przede wszystkim należy tutaj zauważyć, że $\sqrt{1-\beta} \neq \lambda_n$ wskutek czego w (4) nigdy nie wystąpią dzielniki zerowe. Z pośród różnych wyrazów z λ_n , wchodzących w równ. (4), musimy odróżnić przede wszystkim wyrazy, w których λ_n różni się od jedności tylko o wielkości rzędu masy ciała zakłócającego; w tych wyrazach λ_n będzie mieć kształt $1 - \sigma_n$, gdzie σ_n , jak i poprzednio, oznacza wielkość rzędu masy zakłócającej. W równ. (4) w odnośnych wyrazach wystąpią dzielniki tego samego rzędu, wskutek czego te wyrazy będą wyrazami elementarnymi; jednak będą one elementarnymi krótkookresowymi. Dalej w równ. (2) wystąpią także wyrazy, w których λ_n różni się od 1 o wielkości rzędu δ_n , tak iż możemy napisać $\lambda_n = 1 - \delta_n$ w tych wyrazach występują dzielniki rzędu δ_n ; wyrazy te są to wyrazy charakterystyczne krótkookresowe.

Wreszcie w równ. (2) są i takie λ_n , które bardzo się różnią od jedności; wyrazy, zawierające te wielkości, przy całkowaniu nie uzyskują małych dzielników, nie są więc one powiększone: są to wyrazy zwykłe.

Podobnie, jak to zrobiliśmy dla S , możemy napisać równanie na ρ w ten sposób, że każdy rodzaj wyrazów charakterystycznych występować będzie oddzielnie; ρ zatem mieć będzie postać następującą:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho = & k \cos [(1-\zeta)v - \Gamma] + \Sigma k_n \cos [(1-\sigma_n)v - F_n] + \\ & + \Sigma \beta_n \cos [(1-\delta_n)v - D] + \Sigma b_n \cos [\lambda_n v - B_n] \end{aligned} \right.$$

gdzie, idąc za Brendel'em, oznaczyliśmy:

$$(7) \quad 1 - \zeta = \sqrt{1 - \beta}; k_n = \frac{b_n}{2\sigma_n - \sigma_n^2 - \beta} = \frac{b_n}{2(\sigma_n - \zeta) - (\sigma_n^2 - \zeta^2)}; \\ \beta_n = \frac{b'_n}{2\delta_n - \delta_n^2 - \beta} = \frac{b'_n}{2(\delta_n - \zeta) - (\delta_n^2 - \zeta^2)}; b^n = \frac{b''_n}{1 - \lambda_n^2 - \beta}.$$

¹⁾ Harzer. Untersuchungen, p. 3.

Wyrazy charakterystyczne długookresowe i krótkookresowe, wyrazy elementarne obydwu kategorii odgrywają zasadniczą rolę w rozwinięciach wielkości P i Q , które wchodzą w wyrażenia samej funkcji perturbacyjnej.

Harzer ¹⁾ przejrzyście oznaczył w następujący sposób te wszystkie wyrazy, wypisując dla każdego rodzaju charakterystyczny kąt, którego sinus lub cosinus zachodzi w naszych wzorach. Harzer rozróżnia cztery postacie A, B, C, D wyrazów, charakteryzujące się następującymi argumentami:

$$(8) \quad \begin{array}{ll} \text{A) } \sigma_n v - A_n; & \text{C) } \delta_n v - C_n; \\ \text{B) } (1 - \sigma_n) v - \Gamma_n; & \text{D) } (1 - \delta_n) v - D_n. \end{array}$$

Wyrazy A) i B) są to wyrazy elementarne; C) i D) — charakterystyczne. Wyrazy kształtu A) i C) są długookresowe; zaś B) i D) krótkookresowe; wszelkie wyrazy, których argumenty nie są kształtu (8), są wyrazami zwykłymi. Należy zauważyć, że najniższy rząd względem mimośrodków drogi ciała zakłóconego i zakłócającego dla wyrazów kształtu (A) jest rząd drugi, zaś dla wyrazów (B) już pierwszy. Najniższy rząd wyrazów kształtu (C) i (D) względem mimośrodków, zależy od stosunku ruchów średnich μ planety zakłóconej i planety zakłócającej. Niech stosunek ten mało się różni od stosunku dwóch liczb całkowitych p i q , wtedy ów rząd najniższy będzie $|p - q|$ albo $\{|(p - q) - 1|\}$; w przypadku planetoid typu Thule, dla których $\frac{p}{q}$ mało się różni od $\frac{3}{4}$, wyrazy (B), (C) i (D) będą już pierwszego rzędu, a więc bardzo znaczne.

Przy całkowaniu, które dało początek współczynnikom \bar{b}_n , może się zdarzyć, że niektóre z tych \bar{b}_n wypadną niezupełnie elementarne, t. j. takie, które nie są rzędu 0 względem m' , lecz wyższego. Te wyrazy Gylden nazywa wyrazami podelementarnymi. Wyrazy elementarne zawierają w sobie perturbacje wiekowe, w których według klasycznych teorii czas występuje przed znakami funkcji sinus i cosinus. Gylden przez wprowadzenie wyrazów elementarnych uniknął tej niedogodności.

Wielkością stopnia n -go nazywać będziemy wyrażenie, które zawiera jako czynniki niektóre z wielkości η, η', k_n, k_n' przyczem suma wykładników przy tych czynnikach jest równa n . Brendel

¹⁾ Harzer. Untersuchungen, p. 3.

do teorii małych planet wprowadza jeszcze określenie następujące. Wiadomo, że wielkością rzędu n -go nazywamy wielkość, która zawiera jako czynnik masę zakłócającą w potęgę n -tej. Może się jednak zdarzyć, że podobny wyraz oprócz masy ciała zakłócającego zawiera jeszcze mały dzielnik rzędu δ_n ; otóż Brendel¹⁾ nazywa wyrazami rzędu istotnie n -go takie wyrazy, których wartość bezwzględna może być porównywalna z n -tą potęgą masy m' . Np. w równ. (7) zwykle wyrazy (a także ich współczynniki b_n) są istotnie 1-go rzędu; charakterystyczne wyrazy (także i współczynniki β_n) nie są istotnie pierwszego rzędu; natomiast iloczyn $b_n \times \beta_n$ jest formalnie drugiego rzędu, ale tylko istotnie pierwszego rzędu; idąc za Brendel'em oznaczać będziemy przez litery łacińskiego alfabetu wielkości istotnie pierwszego rzędu, zaś przez litery greckiego alfabetu wszystkie te wielkości, w których występują dzielniki rzędu δ .

3. Przejdziemy teraz do zbadania ruchu planetoidy w jej chwilowej płaszczyźnie drogi. Gyldeń zakłada, że protometr orbity a (w naszym przypadku jest to półoś orbity) jest zdefiniowany przez takie samo równanie, które daje nam związek w ruchu Keplerskim pomiędzy a i n , a więc,

$$(1) \quad n = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

w ruchu Keplerskim. Według Gyldeń'a a musi też takie samo równanie formalnie spełnić, tylko w tym równaniu n nie odpowiada już ruchowi średniemu po elipsie Keplerskiej, jest raczej pewną stałą całkowania, którą Brendel nazywa stałą ruchu planetoidy, i która, jak zobaczymy, pozostaje w związku z wielkością n_1 , oznaczającą ruch dzienny średni.

Ponieważ równ. $r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{Va(1-\eta^2)}{1+S}$ da nam $\frac{dt}{dv} = \frac{r^2(1+S)}{Va(1-\eta^2)}$, więc możemy napisać:

$$(2) \quad n \frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\rho)^2} (1+S)$$

równanie to będziemy musieli całkować.

Wielkość ρ Gyldeń rozbija na dwie części (ρ) i R :

$$(3) \quad \rho = (\rho) + R$$

¹⁾ Brendel. Theorie d. kl. Pl. I, p. 21.

w ten sposób, że w (ρ) są objęte wszystkie wyrazy typu (B), a R jest funkcją pierwszego rzędu i zawiera wyrazy charakterystyczne oraz największe zwyczajne. Równanie na (ρ) możemy napisać w postaci następującej:

$$(\rho) = k \cos [(-\varepsilon)v - \Gamma] + \Sigma k_n \cos [(1 - \sigma_n)v - \Gamma_n]$$

albo

$$(4) \quad (\rho) = k \cos (v - \omega) + \Sigma k_n \cos (v - \omega_n)$$

gdzie

$$\omega = \Gamma + \rho v; \quad \omega_n = \Gamma_n + \sigma_n v^1).$$

Wprowadźmy do równ. na (ρ) funkcje η i Π przy pomocy związków następujących:

$$\eta \cos \Pi = k \cos \omega + \Sigma k_n \cos \omega_n$$

$$\eta \sin \Pi = k \sin \omega + \Sigma k_n \sin \omega_n$$

z tych związków z łatwością znajdziemy

$$(5) \quad (\rho) = \eta \cos (v - \Pi),$$

gdzie η i Π są to funkcje zawierające wyrazy elementarne długookresowe. Gdy funkcje η , Π , R są już znane, to możemy przy pomocy następujących związków obliczyć promień wodzący r , mianowicie równanie str. 4 jest:

$$(4) \quad r = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \rho} = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + (\rho) + R} = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \eta \cos v + R},$$

gdzie $v = v - \Pi$.

Z równania ostatniego wydzielimy znów pewną część r , analogicznie do tego cośmy zrobili dla ρ , mianowicie

$$(6) \quad (r) = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \eta \cos v}.$$

Wielkość (r) w ten sposób zdefiniowana jest to według Gyl d é n'a „absolutny promień wodzący“.

Równanie (2) z poprzedniego paragrafu daje nam związek pomiędzy czasem t i miejscem plauetoidy na jej drodze; to równanie przekształca Gyl d é n, postępując się analogią wzorów dla zmien-

¹⁾ ρ jest rzędu masy zakłócającej i charakteryzuje ruch apsyd.

nych ruchu eliptycznego i tych nowych zmiennych, które on wprowadził jako charakteryzujące ruch planetoidy. W tym celu Gylden wprowadził nową zmienną ε , analogiczną do anomalii mimośrodowej w ruchu eliptycznym, która jednakże występuje nie w wyrażeniach promienia wodzącego r , lecz absolutnego promienia (r). Posługując się wspomnianą analogią kształtu wzorów dla ruchu Keplera i zakłóconego, znajdziemy

$$(7) \quad (r) = a(1 - \eta \cos \varepsilon)$$

stąd

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \sin \varepsilon = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \eta \cos v} \sin v; \text{ b) } \cos \varepsilon = \frac{\eta + \cos v}{1 + \eta \cos v} \text{ oraz} \\ \text{c) } \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + \eta}{1 - \eta}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}. \end{array} \right.$$

Podobnie oznaczając przez M zmienną analogiczną do anomalii średniej w ruchu eliptycznym, mieć będziemy:

$$(9) \quad M = \varepsilon - \eta \sin \varepsilon.$$

Posługując się formalnie wzorami ruchu eliptycznego, rozwińmy anomalie M w szereg¹⁾:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \varepsilon - \eta \sin \varepsilon = v + \sum B_n \sin n v, \text{ gdzie} \\ B_1 = -2\eta; \quad B_2 = \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4 + \dots \quad B_4 = -\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{8}\eta^5; \\ B_4 = \frac{5}{32}\eta^4; \quad B_n = \frac{2(-1)^n}{n} \left(\frac{\eta}{1 + \sqrt{1 - \eta^2}} \right)^2 (1 + n\sqrt{1 - \eta^2}). \end{array} \right.$$

Różniczkujemy pierwsze równanie z (10), uważając, iż η jest stałą:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon - \eta \cos \varepsilon d\varepsilon = dv + \sum n B_n \cos n v dv, \text{ czyli} \\ (1 - \eta \cos \varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dv} = 1 + \sum_n B_n \cos n v; \\ 1 - \eta \cos \varepsilon = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta \cos v} \quad (\text{a}) \end{array} \right.$$

różniczkujemy ten związek względem v :

$$\sin \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dv} = \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta \cos v)^2} \sin v, \text{ lecz } \sin \varepsilon = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \eta \cos v}$$

¹⁾ Brendel. Th. d. kl. Pl. I. p. 30.

podstawiając tę wartość otrzymamy:

$$\sqrt{1-\eta^2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv} = \frac{1-\eta^2}{(1+\eta \cos v)} = \frac{d\varepsilon}{dv} = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1+\eta \cos v}.$$

Obie strony (11) (a) pomnóżmy stronami przez otrzymane równanie dla $\frac{d\varepsilon}{dv}$ otrzymamy:

$$(1-\eta \cos \varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta \cos v^2)}$$

co znów podstawiając w równanie (11) da nam rozwinięcie następujące:

$$(12) \quad \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta \cos v)^2} = 1 + \sum n B_n \cos n v$$

Równanie (12) jest bardzo ważne a to dlatego, że dzięki samej definicji G y l d é n osiągnął to, iż po prawej stronie (12) nie ma żadnego wyrazu długookresowego, podczas gdy z lewej strony znajduje się funkcja o długim okresie.

Zwróćmy się obecnie do związku pomiędzy anomalią v i czasem t : mamy równanie (2), p. 16; w tym równaniu n jest to tak zwana stała ruchu planetoidy. Niech L oznacza długość średnią, analogicznie do definicji w ruchu eliptycznym, będzie ona określona w sposób następujący:

$$(13) \quad L = nt + \Lambda,$$

gdzie Λ oznacza długość średnią w chwili gdy $t=0$; wtedy będziemy mogli zdefiniować nową zmienną czas zredukowany (t).

„Czas zredukowany“ spełnia związek następujący:

$$(14) \quad n(t) + \Lambda = v + \sum B_n \sin n v.$$

Na zasadzie znanego wzoru z trygonometrii możemy napisać uwzględniając wartość v :

$$B_n \sin n v = B_n \sin n v \cos n \Pi - B_n \cos n v \sin n \Pi,$$

skąd otrzymamy:

$$(14a) \quad n \frac{d(t)}{dv} = 1 + \sum n B_n \cos n v + \frac{d\Pi}{dv}$$

$$\text{gdzie } \frac{d\Pi}{dv} = \sum \frac{d(B_n \cos n \Pi)}{dv} \sin n v - \sum \frac{d(B_n \sin n \Pi)}{dv} \cos n v$$

jest to zresztą mała wielkość, którą przeważnie można zaniedbać (w naszym przypadku nie możemy tego zrobić). Ostatecznie więc, uwzględniając poprzednie związki, otrzymamy:

$$(15) \quad n \frac{d(t)}{dv} = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \eta \cos v)^2} + \frac{d\Xi}{dv}.$$

Niech W oznacza różnicę pomiędzy kątem, odpowiadającym prawdziwemu czasowi nt i kątem odpowiadającym czasowi zredukowanemu $n(t)$ —mieć będziemy:

$$(16) \quad W = nt - n(t),$$

a ponieważ

$$L = nt + \Lambda$$

zaś

$$\Lambda = v - n(t) + \Sigma B_n \sin nv,$$

więc

$$L = nt - n(t) + v + \Sigma B_n \sin nv,$$

czyli

$$L = v + \Sigma B_n \sin nv + W.$$

Wynika z (16)

$$\frac{dW}{dv} = n \frac{dt}{dv} - n \frac{d(t)}{dv}$$

ale dla $n \frac{dt}{dv}$ mamy wyrażenie (2), zaś dla $n \frac{d(t)}{dv}$ wyrażenie (14a),

co uwzględniając otrzymamy:

$$(17) \quad \frac{dW}{dv} = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \eta \cos v)^2} \left\{ \frac{1 + S}{\left(1 + \frac{R}{1 + \eta \cos v}\right)^2} - 1 \right\} - \frac{d\Xi}{dv}.$$

Rozwijając wyrażenie (17) według potęg R i S , otrzymamy:

$$\text{VI} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dW}{dv} = S - 2R - 2RS + 3R^2 + 3SR^2 - 4R^3 + \dots \\ \quad + (6R - 2S - 12R^2 + 6RS + \dots)\eta \cos v \\ \quad - 3\eta^2 R + \left(\frac{3}{2}S - 6R + \dots\right)\eta^2 \cos 2v + \dots \\ \quad + 6R\eta^3 \cos v + \left(\frac{19}{4}R - S\right)\eta^3 \cos 3v \end{array} \right.$$

gdzie $v = v - \Pi$.

Cała metoda Gyldén'a jest zawarta we wzorach IV, IV^{bis}, V, V^{bis} i VI. Zajmiemy się teraz zcałkowaniem tych równań i wyznaczeniem wyrazów charakterystycznych i długookresowych w przypadku ruchu planetoidy Thule. Nim jednak do tego przystąpimy, musimy się zapoznać z rozwinięciem funkcji perturbacyjnej w spółrzędnych Gyldénowskich.

II. Rozwinięcie funkcji perturbacyjnej.

W równaniach otrzymanych poprzednio dla S i ρ występują wielkości P i Q , które zawierają pochodne cząstkowe funkcji perturbacyjnej Ω . W funkcji perturbacyjnej występuje część

$$\frac{1}{\Delta} = (r^2 r'^2 - 2rr' \cos H)^{-\frac{1}{2}},$$

wskutek tego nie możemy całkować powyższych wyrazów bezpośrednio. Aby całkowanie wykonać jesteśmy zmuszeni rozwinąć $\frac{1}{\Delta}$ na taki szereg, którego wyrazy można całkować. Gyldén rozwija funkcję perturbacyjną na szereg trygonometryczny według wielokrotności kąta H i potęg wielkości r i r' . Gyldén zakłada że:

$$(1) \quad \frac{a}{\Delta} = R_0 + 2R_1 \cos H + 2R_2 \cos 2H + \dots$$

W tem rozwinięciu spółczynnik R_n wyrazi się przy pomocy wzorów następujących:

$$(2) \quad R_n = \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}} = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{r'} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi d\psi}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r'}\right) \cos \psi}}.$$

Oznaczając $\alpha = \frac{a}{a'}$ i wprowadzając nową wielkość zmienną λ , bardzo małą, określoną przez równanie:

$$(3) \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - \lambda;$$

otrzymamy

$$(4) \quad \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \alpha^2 (1 - \lambda)_n = k^2$$

i związek (2) przejdzie w następujący:

$$R_n = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{r'} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi d\psi}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\psi}}.$$

Jeżeli do tego ostatniego wzoru zastosujemy znane przekształcenie z teorii całek eliptycznych, to w rezultacie otrzymamy:

$$(5) \quad R_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a'}{r'} \alpha^{n+1} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi+\alpha^2\lambda\sin^2\varphi}}.$$

W całce (5) wyrażenie pod pierwiastkiem można napisać w sposób następujący:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \alpha^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi+\alpha^2\lambda\sin^2\varphi}} = \\ & = \frac{2}{\pi} \alpha^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi} \sqrt{1+\frac{\alpha^2\lambda\sin^2\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} \end{aligned} \right.$$

Gyldén, mając już wartość każdego R z wyrażeniem (5) rozwija je według potęg λ . W ten sposób znajdziemy:

$$(7) \quad \frac{2}{\pi} \alpha^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}(1-\lambda)} = \gamma_{n.0} - \gamma_{n.1}\lambda + \gamma_{n.2}\lambda^2 \dots$$

gdzie za Gyldén'em¹⁾, oznaczając przez

$$(8) \quad \beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi d\varphi}{\{1-\alpha^2\sin^2\varphi\}^{\frac{s}{2}}}$$

otrzymamy

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{n.0} &= \alpha^{n+1} \beta_n^{(1)}; \quad \gamma_{n.1} = \frac{1}{2} \alpha^{n+3} \beta_{n+1}^{(3)}; \quad \gamma_{n.2} = \frac{3}{8} \alpha^{n+5} \beta_{n+2}^{(5)} \\ \gamma_{n.\sigma} &= \frac{1.3.5\dots(2\sigma-1)}{2.4.6\dots 2\sigma} \alpha^{n+2\sigma+1} \beta_{n+\sigma}^{(2\sigma+1)}. \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Gyldén H. Undersökningar etc. II art. 38.

Spółczynniki $\gamma_{n\sigma}$ zależą więc tylko od α . Wprowadźmy otrzymane wyrażenia z (7) i (9) do wzoru (5), wtedy znajdziemy:

$$(10) \quad R_n = \frac{a'}{r'} (1 - \lambda)^{\frac{n}{2}} \{ \gamma_{n,0} - \gamma_{n,1} \lambda + \gamma_{n,2} \lambda^2 - \gamma_{n,3} \lambda^3 + \dots \}$$

Rozwinięcie (10) jest jeszcze zbieżne i w przypadku planetoidy Thule. Podstawiając wzór (10) w równ. (1) otrzymamy żądane rozwinięcie tylko części $\frac{a}{\Delta}$ funkcji perturbacyjnej—wiadomo bowiem, że cała funkcja perturbacyjna¹⁾ ma kształt następujący:

$$(11) \quad a(\Omega) = m' \left(\frac{a}{\Delta} - \frac{ar}{r^2} \cos H \right) = m' \left[\frac{a}{\Delta} - \frac{a'}{r'} \alpha^2 (1 - \lambda)^{\frac{1}{2}} \cos H \right]$$

Rozwińmy w szereg wzór (11); w tym celu uwzględniając rozwinięcie dla $\frac{a}{\Delta}$ otrzymamy ze wzoru (11) wzór następujący:

$$(12) \quad a(\Omega) = m' \left\{ R_0 + 2 \left[R_1 - \frac{a'}{r'} (1 - \lambda)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha^2}{2} \right] \cos H + 2R_2 \cos 2H + \dots \right\}$$

możemy ogólnie więc napisać, że szukane przez nas rozwinięcie funkcji perturbacyjnej mieć będzie kształt następujący:

$$(13) \quad a(\Omega) = \Omega_0 + 2\Omega_1 \cos H + 2\Omega_2 \cos 2H + \dots + 2\Omega_n \cos nH = \\ = \Omega_0 + \Sigma \Omega_n \cos nH,$$

gdzie

$$(14) \quad \Omega_n = m' \frac{a'}{r'} (1 - \lambda)^{\frac{n}{2}} \{ \gamma_{n,0} - \gamma_{n,1} \lambda + \gamma_{n,2} \lambda^2 - \gamma_{n,3} \lambda^3 \dots \}$$

$\gamma_{n,0}$ oznacza, że dla wszystkich wartości n , z wyjątkiem $n=1$, mieć będziemy

$$\gamma_{n,0} = \gamma_{n,0}, \text{ zaś dla } n=1 \quad \gamma_{1,0} = \gamma_{1,0} - \frac{a^2}{2}.$$

Otrzymaliśmy więc rozwinięcie funkcji perturbacyjnej, w postaci, podanej przez Gylden'a. Jest to jednak jeszcze postać nie ostateczna, gdyż w rozwinięcie (13) zamiast wielkości λ musimy wprowadzić wielkości ρ , ρ' , η^2 , η'^2 .

Związki pomiędzy r , r' i η , η' są następujące:

$$r = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \rho}; \quad r' = \frac{a(1 - \eta'^2)}{1 + \rho'};$$

¹⁾ Z pominięciem zaburzeń samej płaszczyzny drogi.

a więc

$$(15) \quad \lambda = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1-\eta^2}{1+\rho}\right)^2 \left(\frac{1+\rho'}{1-\eta'^2}\right)^2.$$

Podnosząc λ do potęgi od 1-jej do 3-jej i uwzględniając wyrazy trzeciego rzędu włącznie (a więc w krózych mamy ρ^3 , ρ'^3 , $\rho^2\eta$, $\rho'^2\eta'$, $\eta^2\rho$, etc.) znajdziemy:

$$(16) \quad \begin{cases} \lambda = 2\rho - 2\rho' - 3\rho^2 + 4\rho\rho' - \rho'^2 + 2\eta^2 - 2\eta'^2 + 4\rho^3 - 6\rho^2\rho' + \\ \quad + 2\rho\rho'^2 - 4\rho\eta^2 + 4\rho'\eta'^2 + 4\rho\eta'^2 - 4\rho'\eta^2. \\ \lambda^2 = 4\rho^2 - 8\rho\rho' + 4\rho'^2 - 12\rho^3 + 28\rho^2\rho' - 20\rho\rho'^2 + 4\rho'^3 + 8\rho\eta^2 + \\ \quad + 8\rho\eta'^2 - 8\rho'\eta^2 - 8\rho'\eta'^2. \\ \lambda^3 = 8\rho^3 - 24\rho^2\rho' - 24\rho\rho'^2 - 8\rho'^3. \end{cases}$$

skąd na $\frac{a'}{r'} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}}$ otrzymamy związek następujący:

$$(17) \quad \frac{a'}{r'} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}} = \frac{(1+\rho')^{n+1} (1-\eta'^2)^n}{(1+\rho)^n (1-\eta^2)^{n+1}} = 1 - n\rho + (n+1)\rho' + \\ + \frac{n(n+1)}{2} \rho^2 - n(n+1)\rho\rho' + \frac{n(n+1)}{2} \rho'^2 - n\eta^2 + (n+1)\eta'^2 - \\ - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \rho^3 + \frac{n(n+1)^2}{2} \rho^2\rho' - \frac{n^2(n+1)}{2} \rho\rho'^2 + \\ + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \rho'^3 + n^2\rho\eta^2 - n(n+1)\rho'\eta'^2 - n(n+1)\rho\eta'^2 + \\ + n(n+1)^2\rho'\eta^2.$$

Otrzymany związek (17) wprowadźmy do wzoru (13), wtedy otrzymamy ogólnie wzór następujący:

$$(18) \quad a(\Omega) = 2m' \sum_{n, s, s', \nu, \nu'} \Omega(n, s, s') \rho^s \rho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH.$$

W tym wzorze należy pamiętać, że dla $n=0$ mamy opuścić czynnik 2. W ten sposób ostatecznie otrzymaliśmy rozwinięcie postępujące według potęg η^2 , η'^2 , ρ i ρ' dla całej funkcji perturbacyjnej.

Spółczynniki Ω_n wyrażają się przy pomocy związku następującego:

$$(19) \quad \Omega_n = m' \sum_{n, s, s', \nu, \nu'} \Omega_{(n, s, s') \nu, \nu'} \rho^s \rho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'}.$$

Te współczynniki są to funkcje liczbowe znanej nam wielkości α , a więc nie trudne do obliczenia. Harzer¹⁾ obliczył liczbowe współczynniki w wyrażeniu Ω_n , zaś Gyldeń²⁾ podał wartości tych współczynników dla wielkich planet aż do wyrażeń zawierających α^7 a także i liczbowe wartości stałych niezależnych od α , które wchodzi w wyrażenia na Ω .

$\Omega_{n.ss'vv'}$ w funkcji współczynników liczbowych $\gamma_{n,\sigma}$ wyrażają się w sposób następujący³⁾:

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{n,0,0} = \bar{\gamma}_{n,0} \\ \Omega_{n,1,0} = -n\bar{\gamma}_{n,0} - 2\bar{\gamma}_{1,n}; \\ \Omega_{n,2,0} = \frac{n(n+1)}{2} \bar{\gamma}_{n,0} + (2n+3)\bar{\gamma}_{n,1} + 4\bar{\gamma}_{n,1} \\ \Omega_{n+1,1,1} = -(n+1)(n+2)\bar{\gamma}_{n+1,1} - 2(2n+5)\bar{\gamma}_{n+1,1} - 8\bar{\gamma}_{n+2,2} \\ \Omega_{n-1,1,1} = -(n-1)n\bar{\gamma}_{n-1,0} - 2(2n+1)\bar{\gamma}_{n-1,1} - 8\bar{\gamma}_{n-1,2} \\ \Omega_{n+1,1,0} = -(n+1)\bar{\gamma}_{n+1,1} - 2\bar{\gamma}_{n+1,1} \\ \Omega_{n-1,1,0} = -(n-1)\bar{\gamma}_{n-1,1} - 2\bar{\gamma}_{n-1,1} \\ \Omega_{0,2,0} = 3\bar{\gamma}_{0,1} + 4\bar{\gamma}_{0,2} \\ \Omega_{n+1,2,1} = \frac{(n+1)(n+2)^2}{2} \bar{\gamma}_{n+1,1} - 10\bar{\gamma}_{1,1} - 8\bar{\gamma}_{1,2} + \\ \quad + 4(3n+11)\bar{\gamma}_{n+1,2} + 24\bar{\gamma}_{n+1,3} \\ \Omega_{n+1,2,0} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \bar{\gamma}_{n+1,1} + (2n+5)\bar{\gamma}_{n+1,1} + 4\bar{\gamma}_{n+1,2} \\ \Omega_{n-1,2,1} = \frac{n^2(n-1)}{2} \bar{\gamma}_{n-1,0} + (3n^2+4n+2)\bar{\gamma}_{n-1,1} + \\ \quad + 4(3n+5)\bar{\gamma}_{n-1,2} + 24\bar{\gamma}_{n-1,3} \\ \Omega_{n-1,2,0} = \frac{n(n-1)}{2} \bar{\gamma}_{n-1,0} + (2n+1)\bar{\gamma}_{n-1,1} + 4\bar{\gamma}_{n-1,2} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

W równ. różniczkowych na S i ρ wchodzi wyrażenia pochodnych cząstkowych funkcji perturbacyjnej względem r i v —a nie bezpośrednio rozwinięcie samej funkcji — przeto obecnie, znając wyrażenia rozwiniętej już funkcji perturbacyjnej możemy zna-

¹⁾ Harzer P. Untersuchungen pg. 22.

²⁾ Gyldeń. Orbites absolues t. I.

³⁾ Brendel. Th. d. kl. Pl. I, pg. 52; Harzer. Untersuch., pg. 29; Kramer. Th. d. kl. Planeten, pg. 9.

leżć i związek pomiędzy P i Q oraz funkcjami $\Omega_{(nss'v')}$; w ten sposób wielkości P i Q staną się znanymi funkcjami liczbowymi $\gamma_{n\sigma}$, co zatem idzie α , a więc ich obliczenie, choć kłopotliwe, dla danej planetoidy, nie przedstawia zasadniczych trudności.

Mieliśmy równ. następujące:

$$P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}; \text{ oraz } Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Ponieważ

$$v = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\rho}$$

to znajdziemy:

$$Q = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{1-\eta^2}{(1+\rho)^2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

W tem wyrażeniu pierwszy czynnik rozwińmy w szereg potęgowy, potem zróżniczkujmy względem v ; otrzymamy wtedy

$$Q = -(1 - 2\rho + 3\rho^2 - \dots) 2 \sum n \Omega_{(nss',v')} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \sin nH \frac{\partial H}{\partial v}$$

(bo wiemy, że H zależy od v) co możemy napisać:

$$(21) \quad Q = -2 \sum n Q_{n.ss',v,v'} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta^{2v'} \sin nH \frac{\partial H}{\partial v}$$

(dla $n=0$ należy opuścić czynnik 2) — gdzie przez $Q_{n.ss',v,v'}$ oznaczyliśmy pewną funkcję $\Omega_{n.ss',v,v'}$ a więc funkcję wielkości $\gamma_{n\sigma}$, którą można otrzymać na drodze rachunkowej; postać tej funkcji jest:

$$(22) \quad \frac{1}{m'} Q_{n.ss',v,v'} = \Omega_{n.ss',v,v'} - 2\Omega_{n,s-1,s',v,v'} + 3\Omega_{n,s-2,s',v,v'} - \dots$$

Zupełnie analogicznie znajdziemy wyrażenie

$$P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -(1-\eta^2) \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}.$$

Po wykonaniu działań i podstawień wskazanych, jak to zrobiliśmy dla Q , otrzymamy rezultat następujący:

$$(23) \quad P = 2 \sum P_{n.ss',v,v'} \rho^s \cdot \rho^{s'} \cdot \eta^{2v} \cdot \eta^{2v'} \cos nH,$$

gdzie przez $P_{n.ss',v,v'}$ oznaczyliśmy wyrażenie następujące:

$$(24) \quad \frac{1}{m'} P_{n.ss',v,v'} = -(s+1)\Omega_{n,s+1,s',v,v'} + (s+1)\Omega_{n,s+1,s',v-1,v'} - \dots$$

Wielkości P są tylko funkcjami liczbowymi wielkości $\Omega_{n,ss',v'}$, a więc $\gamma_{n,\sigma}$, przez co także te wielkości są znanymi funkcjami α .

Brendel¹⁾, Harzer²⁾ podali wartości $P_{nss'}$ i $Q_{nss'}$:

$$(24) \left\{ \begin{array}{ll} P_{n,0,0} = -\Omega_{n,1,0} & Q_{n,0,0} = \Omega_{n,0,0} \\ P_{n,1,0} = -2\Omega_{n,2,0} & Q_{n,1,0} = \Omega_{n,1,0} - 2\Omega_{n,0,0} \\ P_{n,2,0} = -3\Omega_{n,3,0} & Q_{n,2,0} = \Omega_{n,2,0} - 2\Omega_{n,1,0} + 2\Omega_{n,0,0} \\ P_{n+1,0,1} = -\Omega_{n+1,1,1} & Q_{n+1,0,1} = \Omega_{n+1,0,1} \\ P_{n-1,0,1} = -\Omega_{n-1,1,1} & Q_{n-1,0,1} = \Omega_{n-1,0,1} \\ P_{n-1,0,0} = -\Omega_{n-1,0,0} & Q_{n+1,0,0} = \Omega_{n+1,0,0} \\ P_{0,1,0} = -2\Omega_{0,2,0} & Q_{1,0,1} = \Omega_{1,0,1} \\ P_{1,0,1} = -\Omega_{1,1,1} & Q_{1,0,0} = \Omega_{1,0,0} \\ P_{1,0,0} = -\Omega_{1,1,0} & Q_{n+1,1,1} = \Omega_{n+1,1,1} - 2\Omega_{n+1,0,1} \\ P_{n+1,1,1} = -2\Omega_{n+1,2,1} & Q_{n-1,1,1} = \Omega_{n-1,1,1} - 2\Omega_{n-1,0,1} \\ P_{n-1,1,1} = -2\Omega_{n-1,2,1} & Q_{n+1,1,0} = \Omega_{n+1,1,0} - 2\Omega_{n+1,0,0} \\ P_{n+1,1,0} = -2\Omega_{n+1,2,0} & Q_{n-1,1,0} = \Omega_{n-1,1,0} - 2\Omega_{n-1,0,0} \\ P_{n-1,1,0} = -2\Omega_{n-1,2,0} & Q_{1,1,1} = \Omega_{1,1,1} - 2\Omega_{1,0,1} \\ P_{0,2,0} = -3\Omega_{0,3,0} & Q_{1,1,0} = \Omega_{1,1,0} - 2\Omega_{1,0,0} \\ P_{1,1,1} = -2\Omega_{1,2,1} \\ P_{1,1,0} = -2\Omega_{1,2,0} \end{array} \right.$$

W wyrażeniach na P i Q występuje kąt H . Musimy obecnie ten kąt wyrazić przy pomocy prawdziwych długości v i v' planetoidy i planety zakłócającej; jak dotąd tak i teraz rozpatrujemy tylko ruch planetoidy w płaszczyźnie drogi chwilowej, pozostawiając do dalszej części niniejszych rozważań, wyznaczenie wyrazów funkcji perturbacyjnej, zależnych od nachylenia i zmian położenia płaszczyzny samej drogi. W ten sposób znajdziemy po zaniedbaniu drugiej potęgi wstawy kąta nachylenia pomiędzy drogą planetoidy i planety zakłócającej:

$$(25) \quad H = v - v'$$

Po wprowadzeniu tej wartości H w wyrażenia na P i Q otrzymamy wzory, w których występować będą obecnie długości prawdziwe v i v' . W równaniach, z których możemy otrzymać

¹⁾ Brendel, l. cit., pg. 56. Harzer, l. cit., pg. 30, 31.

²⁾ Masal H. Formeln u. Tafeln etc., pg. 5.

S, ρ, W —zmienną niezależną jest prawdziwa długość v —więc aby móc zcałkować równ. dla P i Q musimy wyrazić v' przez v . W tym celu zwróćmy się, idąc za Brendel'em, do równania (13) pg. 19, z którego otrzymamy związek pomiędzy położeniem planetoidy na jej drodze i czasem. Znane wzory ruchu Keplera dać nam dla planetoidy:

$$(a) \quad nt + \Lambda = v - 2\eta \sin \tau + \frac{3}{4}\eta \sin 2\tau - \dots + W$$

i analogicznie dla planety zakłócającej:

$$(b) \quad n't + \Lambda' = v' - 2\eta' \sin \tau' + \frac{3}{4}\eta' \sin 2\tau' - \dots + W'$$

gdzie $\tau = v - \Pi$, zaś $\tau' = v' - \Pi'$.

Mnożąc wyrażenie (a) przez $\mu = \frac{n'}{n}$ otrzymamy:

$$(26) \quad n't = \mu v - \mu \Lambda - 2\mu \eta \sin \tau + \frac{3}{4}\mu \eta^2 \sin 2\tau + \dots + \mu W$$

Z równań (b) i (26) przez porównanie znajdziemy:

$$v' = (\mu v - \mu \Lambda - 2\mu \eta \sin \tau + \frac{3}{4}\mu \eta^2 \sin 2\tau + \dots + \mu W) + \Lambda' + 2\eta' \sin \tau' + \dots + W'$$

Wprowadźmy oznaczenie następujące:

$$(27) \quad B = \Lambda' - \mu \Lambda \quad \text{i} \quad G = \mu \sum B_n \sin n\tau - \sum B'_n \sin n\tau'$$

to otrzymamy:

$$(28) \quad v' = \mu v + B + G + \mu W - W'$$

a więc:

$$(29) \quad v - v' = (1 - \mu)v - B - G - \mu W = w_1 - G.$$

(Możemy opuścić W' jako małą wielkość, gdyż w tym wyrażeniu jest zawarty wpływ Saturna na ruch Jowisza, zresztą ta wielkość jest nam znaną z teorii Jowisza), gdzie:

$$(30) \quad w_1 = (1 - \mu)v - B - \mu W.$$

• Położmy dalej

$$(31) \quad v' = -w_1 + G + v_1 \quad ^1)$$

wtedy

$$(32) \quad G = -2\mu \eta \sin \tau + 2\eta' \sin \tau_1' + \frac{3}{4}\mu \eta^2 \sin 2\tau + 2\eta'^2 \sin 2\tau_1 + \dots$$

¹⁾ Brendel. Th. d. kl. Pl. I, pg. 63.

Aby przedstawić $\cos n(v - v')$ jako funkcją v , rozwińmy przede wszystkim, uwzględniając związek (31), wyrażenie $\eta' \sin v_1'$ w szereg według potęg η' :

$$(33) \quad \eta' \sin v_1' = -\eta' \sin [\mathbf{w}_1 - G - \mathbf{v}_1] = -\eta' \sin (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) + \\ + \eta' G \cos (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) - \dots$$

gdy w (32) uwzględnimy wyrazy tylko do pierwszego stopnia włącznie, to otrzymamy:

$$G = -2\mu\eta \sin v - 2\eta' \sin (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1).$$

Podstawiając tę wartość w (33) znajdziemy:

$$\eta' \sin v_1' = -\eta \sin (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) - 2\mu\eta\eta' \sin v \cos (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) - \\ - 2\mu\eta'^2 \sin (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) \cos (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) = -\eta \sin (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) - \\ - \mu\eta\eta' \sin (v - \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + \mu\eta\eta' \sin (\mathbf{w}_1 - v - \mathbf{v}_1) \\ - \eta'^2 \sin (2\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{v}_1) + \dots$$

Analogicznie postępując otrzymany dalej:

$$-\frac{3}{4}\eta'^2 \sin 2v_1' = \frac{3}{4}\eta'^2 \sin 2(\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1 + G) + \frac{3}{4}\eta'^2 \sin 2(\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) + \dots$$

Podstawiając te wyrażenia we wzór na G , otrzymamy w rezultacie:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = -2\mu\eta \sin v - 2\eta' \sin (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) + \frac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2v - \\ - 2\mu\eta\eta' \sin (\mathbf{w}_1 + v - \mathbf{v}_1) + 2\mu\eta\eta' \sin (\mathbf{w}_1 - v - \mathbf{v}_1) - \\ - \frac{3}{4}\eta'^2 \sin (2\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{v}_1) + \dots \end{array} \right.$$

Ponieważ ze wzoru (29) mamy

$$v - v' = \mathbf{w}_1 - G,$$

więc

$$\cos n(v - v') = \cos n \mathbf{w}_1 + nG \sin n \mathbf{w}_1 - \frac{n^2 G^2}{2} \cos n \mathbf{w}_1 + \dots$$

Możemy więc, uwzględniając wyrazy do III stopnia włącznie, wstawić wyrażenie (34) w to ostatnie rozwinięcie. Ostatecznie otrzymujemy $\cos n(v - v')$ w postaci szeregu, w którym zmienną jest tylko v . Dla $\sin n(v - v')$ analogiczny wzór mieć będziemy z tą różnicą, że zamiast \cos wystąpi \sin .

Będzie więc:

$$(35) \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos}{\sin} n(v-v') &= \frac{\cos}{\sin} n \mathbf{w}_1 + k_1 \eta \frac{\cos}{\sin} (n \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}) + k_2 \eta \frac{\cos}{\sin} (n \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}) \\ &+ k_3 \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)\mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_1] + k_4 \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1] \\ &+ k_5 \eta^2 \frac{\cos}{\sin} n \mathbf{w}_1 + k_6 \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (n \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{v}) \\ &+ k_7 \eta^2 \frac{\cos}{\sin} (n \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{v}) + k_8 \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)\mathbf{w}_1 + \mathbf{v} - \mathbf{v}_1] \\ &+ k_9 \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)\mathbf{w}_1 + \mathbf{v} + \mathbf{v}_1] + k_{10} \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n-1)\mathbf{w}_1 - \mathbf{v} + \mathbf{v}_1] \\ &+ k_{11} \eta \eta' \frac{\cos}{\sin} [(n+1)\mathbf{w}_1 - \mathbf{v} - \mathbf{v}_1] + k_{12} \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} n \mathbf{w}_1 \\ &+ k_{13} \eta'^2 \frac{\cos}{\sin} [(n-2)\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{v}_1] + k_{14} \frac{\cos}{\sin} [(n+2)\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{v}_1] \end{aligned} \right.$$

gdzie:

$$(36) \left\{ \begin{aligned} k_1 &= n\mu; k_2 = -n\mu; k_3 = -n; k_4 = +n; k_5 = -n^2\mu^2; \\ k_6 &= \left\{ \frac{n^2\mu^2}{2} - \frac{3}{8}n\mu \right\}; k_7 = \left\{ \frac{n^2\mu^2}{2} + \frac{3}{8}n\mu \right\}; \\ k_8 &= -n(n-1)\mu; k_9 = +n(n+1)\mu; k_{10} = +n(n-1)\mu; \\ k_{11} &= -n(n+1)\mu; k_{12} = -n^2; k_{13} = \left\{ \frac{n^2}{2} - \frac{5}{8}n \right\}; \\ k_{14} &= \left\{ \frac{n^2}{2} + \frac{5}{8}n \right\}. \end{aligned} \right.$$

Gdy już wykonaliśmy rozwinięcie $\frac{\cos}{\sin} nH$ według potęg v , to wtedy wyrażenia (21) i (23) pg. 26 napisać będzie można w postaci następującej:

$$(36a) \quad P = 2 \overset{*}{\Sigma} P_{(n, s, s')vv'} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos n(v-v'),$$

oraz

$$(37) \quad Q = -2 \overset{*}{\Sigma} Q_{(n, s, s')vv'} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \sin n(v-v').$$

($\overset{*}{\Sigma}$ oznacza, że dla $n=0$ należy opuścić czynnik 2).

W tych wzorach wydzielmy z wielkości ρ część elementarną kształtu B oraz zwykłą wraz z charakterystyczną; pomiędzy temi różnemi częściami ρ mamy, na zasadzie poprzedniego, związku następujące:

$$(38) \quad \rho = \eta \cos v + R \quad \text{oraz} \quad \rho = (\rho) + R,$$

gdzie, jak zawsze, (ρ) oznacza część elementarną ρ postaci B ; zaś w R są zawarte wyrazy zwykłe i charakterystyczne.

Ponieważ:

$$\rho^s = [(\rho) + R]^s = (\rho)^s + s(\rho)^{s-1} \cdot R + \binom{s}{2} (\rho) \cdot R^2 + \dots R^s,$$

więc gdy w tym wyrażeniu na ρ uwzględnimy tylko część charakterystyczną i podstawimy w (36a), to otrzymamy rozwinięcie postaci następującej:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = P_0 + P_1 R + P_2 R^2 + P_3 R^3 + \dots P_\lambda R^\lambda + \dots \\ \text{gdzie} \\ P_\lambda = 2 \sum_{\sigma} P_{\sigma(n,s,\sigma)vv'} (\rho)^s \cdot (\rho')^s \eta^{2\sigma} \eta'^{2\sigma} \cos(v-v'). \end{array} \right.$$

Dla Q_λ mieć będziemy analogiczne wzory, tylko w tych wzorach zamiast $\cos(v-v')$ wszędzie znajdować się będzie $\sin(v-v')$. Zatem według drugiego wzoru ze związku (39) mieć będziemy:

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} = 2 & \left[\sum_{Q(n,0,0)0,0}^* \frac{P(n,0,0)0,0}{Q(n,0,0)0,0} + \sum_{Q(n,1,0)0,0}^* \frac{P(n,1,0)0,0}{Q(n,1,0)0,0} (\rho) + \sum_{Q(n,0,1)0,0}^* \frac{P(n,0,1)0,0}{Q(n,0,1)0,0} \rho' + \right. \\ & + \sum_{Q(n,2,0)0,0}^* \frac{P(n,2,0)0,0}{Q(n,2,0)0,0} (\rho)^2 + \sum_{Q(n,1,1)0,0}^* \frac{P(n,1,1)0,0}{Q(n,1,1)0,0} (\rho)\rho' + \sum_{Q(n,0,2)0,0}^* \frac{P(n,0,2)0,0}{Q(n,0,2)0,0} \rho'^2 + \\ & \left. + \sum_{Q(n,0,0)1,0}^* \frac{P(n,0,0)1,0}{Q(n,0,0)1,0} \eta^2 + \sum_{Q(n,0,0)0,1}^* \frac{P(n,0,0)0,1}{Q(n,0,0)0,1} \eta'^2 + \dots \right] \frac{\cos}{\sin} n(v-v') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} = 2 & \left[\sum_{Q(n,1,0)0,0}^* \frac{P(n,1,0)0,0}{Q(n,1,0)0,0} + \sum_{Q(n,2,0)0,0}^* \frac{P(n,2,0)0,0}{Q(n,2,0)0,0} (\rho) + \sum_{Q(n,1,1)0,0}^* \frac{P(n,1,1)0,0}{Q(n,1,1)0,0} \times \right. \\ & \left. \times R \frac{\cos}{\sin} n(v-v') \text{ i t. d.} \right. \end{aligned}$$

Aby otrzymać ostateczną postać rozwinięcia funkcji P i Q — musimy wykonać jeszcze jedno przekształcenie. Każda funkcya S , R , W , zawiera bowiem część zwykłą, krótkookresową, oraz dłu-

gookresową, wyrazy długo i krótkookresowe elementarne, także wyrazy charakterystyczne i wreszcie wyrazy zwykłe.

W ten sposób funkcję W możemy napisać w postaci następującej:

$$(40) \quad W = \bar{\gamma}v + W_d + W_k + W_s$$

Część $\bar{\gamma}v$ jest to część wiekowa. W_d oznacza wyrazy długoookresowe, W_k —wyrazy krótkookresowe, W_s zaś wyrazy zwykłe.

Według Brendel'a oznaczymy

$$(41) \quad W_k + W_s = K,$$

to wtedy

$$(42) \quad W = \bar{\gamma}v + W_d + K,$$

ale we wzorze (30) pg. 28 mamy

$$(43) \quad n w_1 = n(1 - \mu)v - nB - n\mu W = n(1 - \mu)v - nB - n\mu W_d - n\mu K,$$

gdzie dla kótkości oznaczyliśmy

$$\mu(1 + \bar{\gamma}) = \mu_2.$$

Jeżeli jeszcze oznaczymy

$$(1 - \mu_2)v - B - \mu W_d = w,$$

to wtedy ¹⁾

$$w_1 = w - \mu K.$$

Wtedy dla

$$\sin n w_1$$

otrzymamy wzór:

$$(44) \quad \sin n w_1 = \sin n w - n\mu K \cos n w - \frac{n^2 \mu^2 K^2}{2!} \sin n w \dots$$

Jeżeli teraz uwzględnimy wszystkie wartości $P_0, P_1, P_2 \dots$ i złączymy razem wyrazy zależne od tego samego argumentu, oraz uwzględnimy związki (44), to otrzymamy w rezultacie rozwinięcie w szereg nieskończony według potęg η, η', R, K cząstkowej pochodnej P funkcji perturbacyjnej, w którym występować będą tylko argumenty v, v_1 , oraz w_1 i pewne liczbowe współczynniki ($n.s.s'$) v, v' zależne jedynie od $\frac{a}{a'} = \alpha$, które dla każdego poszczególnego przypadku zawsze będziemy mogli obliczyć.

¹⁾ Brendel, l.c. pg. 69.

W rezultacie więc otrzymamy dla P rozwinięcie¹⁾ podane przez Brendel'a w postaci następującej:

$$\begin{aligned}
 (45) \quad P = & \Sigma B_{n,0,0} \cos nw + \Sigma B_{n,1,0}^{(+1)} \eta \cos(nw+v) + \Sigma B_{n,1,0}^{(-1)} \eta \cos(nw-v) \\
 & + \Sigma B_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \cos(nw+v_1) + \Sigma B_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \cos(nw-v_1) \\
 & + \Sigma B_{n,2,0} \eta^2 \cos nw \\
 & + \Sigma B_{n,2,0}^{(+2)} \eta \cos(nw+2v) + \Sigma B_{n,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos(nw-2v) \\
 & + \Sigma B_{n,1,1}^{(+2)} \eta \eta' \cos(nw+v+v_1) + \Sigma B_{n,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \cos(nw+v-v_1) \\
 & + \Sigma B_{n,1,1}^{(-1)} \eta \eta' \cos(nw-v+v_1) + \Sigma B_{n,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \cos(nw-v-v_1) \\
 & + \Sigma B_{n,0,2} \eta'^2 \cos nw \\
 & + \Sigma B_{n,0,2}^{(+2)} \eta'^2 \cos(nw+2v_1) + \Sigma B_{n,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos(nw-2v_1) \\
 & + \dots \\
 & + R \{ \Sigma B_{n,0,0}^{1,0} \cos nw + \Sigma B_{n,1,0}^{+1,1,0} \eta \cos(nw+v) \\
 & + \Sigma B_{n,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos(nw-v) + \Sigma B_{n,0,1}^{+1,1,0} \eta' \cos(nw+v_1) \\
 & + \Sigma B_{n,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos(nw-v_1) + \dots \} \\
 & + \mu K \{ \Sigma n B_{n,0,0} \sin nw + \Sigma n B_{n,1,0}^{(+1)} \eta \sin(nw+v) \\
 & + \Sigma n B_{n,1,0}^{(-1)} \eta \sin(nw-v) + \Sigma n B_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \sin(nw+v_1) \\
 & + \Sigma n B_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(nw-v_1) + \dots \} \\
 & + R^2 \{ \Sigma B_{n,0,0}^{2,0} \cos nw + \dots \} + \mu RK \{ \Sigma n B_{n,0,0}^{1,0} \sin nw + \dots \} \\
 & - \mu^2 K^2 \{ \Sigma \frac{n^2}{2} B_{n,0,0} \cos nw \}^2.
 \end{aligned}$$

¹⁾ Brendel, l. c. pg. 70. Harzer. Untersuchungen etc., pg. 30.

²⁾ Wskaźniki przy spółczynnikach A i B są tak dobrane, że u dołu pierwszy wskaźnik odpowiada czynnikowi przy w , następny daje nam wykładnik η , trzeci zaś wykładnik η' — górne wskaźniki dają czynniki przy v oraz wykładnik przy R (confr. Brendel l. c., pg. 71). Dla wartości $n=0$ niektóre ze spółczynników A i B są zerami (confr. Brendel, l. c., pg. 71 i 79).

Dla Q zaś mieć będziemy analogicznie:

$$\begin{aligned}
 (46) \quad Q = & \Sigma A_{n,0,0} \sin nw + \Sigma A_{n,1,0}^{(+1)} \eta \sin(nw+v) + \Sigma A_{n,1,0}^{(-1)} \eta \sin(nw-v) \\
 & + \Sigma A_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \sin(nw+v_1) + \Sigma A_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(nw-v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,2,0} \eta^2 \sin nw \\
 & + \Sigma A_{n,2,0}^{(+2)} \eta^2 \sin(nw+2v) + \Sigma A_{n,2,0}^{(-2)} \eta^2 \sin(nw-2v) \\
 & + \Sigma A_{n,1,1}^{(+2)} \eta \eta' \sin(nw+v+v_1) + \Sigma A_{n,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin(nw+v-v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,1,1}^{(-1)} \eta \eta' \sin(nw-v+v_1) + \Sigma A_{n,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \sin(nw-v-v_1) \\
 & + \Sigma A_{n,0,2} \eta'^2 \sin nw \\
 & + \Sigma A_{n,0,2}^{(+2)} \eta'^2 \sin(nw+2v_1) + \Sigma A_{n,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \sin(nw-2v_1) + \dots \\
 & + R \{ \Sigma A_{n,0,0}^{1,0} \sin nw + \Sigma A_{n,1,0}^{+1,1,0} \eta \sin(nw+v) + \Sigma A_{n,1,0}^{-1,1,0} \eta \sin(nw-v) \\
 & + \Sigma A_{n,0,1}^{+1,1,0} \eta' \sin(nw+v_1) + \Sigma A_{n,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos(nw-v_1) + \dots \} \\
 & - \mu K \{ \Sigma n A_{n,0,0} \cos nw + \Sigma n A_{n,1,0}^{(+1)} \eta \cos(nw+v) \\
 & + \Sigma n A_{n,1,0}^{(-1)} \eta \cos(nw-v) + \Sigma n A_{n,0,1}^{(+1)} \eta' \cos(nw+v_1) \\
 & + \Sigma n A_{n,0,1}^{(-1)} \eta' \cos(nw-v_1) + \dots \} \\
 & + R^2 \{ \Sigma A_{n,0,0}^{2,0} \sin nw + \dots \} - \mu RK \{ \Sigma n A_{n,0,0}^{1,0} \cos nw \} \\
 & - \mu^2 K^2 \left\{ \Sigma \frac{n^2}{2} A_{n,0,0} \sin nw \right\}^1.
 \end{aligned}$$

Wzory (45) i (46) rozwinięte do 3-go rzędu włącznie posłużą nam do wynalezienia wyrażeń analitycznych dla ruchu planetoidy Thule (279). Wyrażenia (45) i (46) będą wystarczające dla naszego celu, ponieważ nachylenie orbity Thule względem orbity Jowisza jest bardzo małe.

We wzorach (45) i (46) występują współczynniki A i B opatrzone wskaźnikami; te współczynniki są w dość prostym związku z wielkościami $P_{n,ss'}$ i $Q_{nss'}$, które, jak wiemy, są to funkcje $\Omega_{nss'}$, przeto współczynniki A i B ze wskaźnikami dadzą się z łatwością

¹⁾ l. c. pg. 33.

obliczyć jako funkcje liczbowe $\gamma_{n,\sigma}$, czyli wielkości α , znanej nam z elementów drogi uważanej planetoidy i Jowisza.

Związki pomiędzy A i B oraz P i Q są następujące¹⁾:

$$A_{n,0,0} = -2n Q_{n,0,0}$$

$$A_{n,0,0}^{1,0} = -2n Q_{n,1,0}$$

$$A_{n,0,0}^{2,0} = -2n Q_{n,2,0}$$

$$A_{n,1,0}^{(+1)} = -n \{ Q_{n,1,0} + 2n\mu Q_{n,0,0} \}$$

$$A_{n,1,0}^{(-1)} = -n \{ Q_{n,1,0} - 2n\mu Q_{n,0,0} \}$$

$$A_{n,0,1}^{(+1)} = -(n+1) \{ Q_{n+1,0,1} - 2(n+1) Q_{n+1,0,0} \}$$

$$A_{n,0,1}^{(-1)} = -(n-1) \{ Q_{n-1,0,1} + 2(n-1) Q_{n-1,0,0} \}$$

$$A_{n,1,0}^{+1,1,0} = -n \{ 2Q_{n,2,0} + 2n\mu Q_{n,1,0} \}$$

$$A_{n,1,0}^{-1,1,0} = -n \{ 2Q_{n,2,0} - 2n\mu Q_{n,1,0} \}$$

$$A_{n,0,1}^{+1,1,0} = -(n+1) \{ Q_{n+1,1,1} - 2(n+1) Q_{n+1,1,0} \}$$

$$A_{n,0,1}^{-1,1,0} = -(n-1) \{ Q_{n-1,1,1} + 2(n-1) Q_{n-1,1,0} \}$$

$$B_{n,0,0} = 2P_{n,0,0}$$

$$B_{n,0,0}^{1,0} = 2P_{n,1,0}$$

$$B_{n,0,0}^{2,0} = 2P_{n,2,0}$$

$$B_{n,1,0}^{(+1)} = P_{n,1,0} - 2n\mu P_{n,0,0}$$

$$B_{n,1,0}^{(-1)} = P_{n,1,0} + 2n\mu P_{n,0,0}$$

$$B_{n,0,1}^{(+1)} = P_{n+1,0,1} - 2(n+1)P_{n+1,0,0}$$

$$B_{n,0,1}^{(-1)} = P_{n-1,0,1} + 2(n-1)P_{n-1,0,0}$$

$$B_{n,1,0}^{+1,1,0} = 2P_{n,2,0} + 2n\mu P_{n,1,0}$$

$$B_{n,1,0}^{-1,1,0} = 2P_{n,2,0} - 2n\mu P_{n,1,0}$$

$$B_{n,0,1}^{+1,1,0} = P_{n+1,1,1} - 2(n+1)P_{n+1,1,0}$$

$$B_{n,0,1}^{-1,1,0} = P_{n-1,1,1} + 2(n-1)P_{n-1,1,0}$$

¹⁾ Brendel. Th. d. kl. Pl. I kap. V sparsim.

III. Wyznaczenie wyrazów charakterystycznych i elementarnych w rozwinięciach odnoszących się do ruchu planetoidy Thule.

Na str. 13 i 14 podaliśmy ogólny kształt równań różniczkowych wyznaczających wielkości S i ρ ; równanie dające W jest analogiczne do równ. na S , mianowicie $W = C_0 + \sum \frac{C_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n v - B_n)$.

W powyższych równaniach wielkości a_n b_n c_n są to bardzo małe stałe wielkości; λ_n , jak to wiemy, jest mały dzielnik. Może się zdarzyć, iż pomimo, że wielkości a_n b_n c_n są małe, jednak wskutek całkowania wystąpią jako dzielniki λ_n , które w niektórych przypadkach mogą mieć takie wartości, że dany wyraz, w którym wystąpią po całkowaniu czynniki $\frac{1}{\lambda_n}$ albo $\frac{1}{1-\lambda_n^2}$, może się stać albo bardzo małym blizkim zera, albo też bardzo dużym¹⁾.

Gdy λ_n jest bardzo małe, blizkie zera; wtedy argument cosinusa jest bardzo małym kątem, z czego wynika, że okres takiego wyrazu, zawierającego w sobie jako dzielnik bardzo małe λ_n jest bardzo znacznym. — Wyrazy zależne od takiego λ_n będą wyrazami długookresowymi.

Gdy zaś λ_n jest blizkie 1, wtedy okres takiego wyrazu jest niewiele różny od okresu zmienności kąta v , a więc od czasu obiegu planetoidy. Te wyrazy nazywać będziemy wyrazami krótkookresowymi.

Jest rzeczą oczywistą, iż okresy krótkookresowych wyrazów są blizkie okresu obiegu planetoidy. Jak to już poprzednio wspominaliśmy w wyrażeniach odnoszących się do S , wskutek całkowania tylko wyrazy długookresowe zostaną powiększone, podczas gdy wyrazy o krótkim okresie nie ulegną zmianie; odwrotnie zaś dziać się będzie, gdy całkować będziemy wyrażenia dające nam ρ — tam długookresowe wyrazy nie zmienią się, natomiast krótkookresowe będą powiększone. Brendel zauważył²⁾, że w przypadku współmierności bardzo blizkiej pomiędzy ruchem planetoidy i planety zakłócającej, wyrazy nawet drugiego rzędu bywają jeszcze bardzo znaczne. — Z drugiej strony zasadnicza myśl Gylden'a

¹⁾ Brendel. Om amvändningen pg. 6. Ludendorff. Die Jupiterstörungen d. kl. Planeten von Hecuba-Typus pg. 4.

²⁾ Brendel. Th. d. kl. Pl. I Kap. VII sparsim.

polega właśnie na tem, że w wyrażeniach przybliżonych, jakie otrzymujemy na P i Q porządkujemy wyrazy nie według rzędu ani stopnia, lecz jedynie według rzeczywistej wartości tych wyrażen, które one osiągnają w wyrażeniach całkowych.

Dla tego też przedewszystkiem musimy w rozwinięciach na S, ρ, R, W zająć się wyznaczeniem krótko i długookresowych wyrazów dla specjalnego przypadku ruchu planetoidy Thule (279). W wielkościach S, ρ, W, R , zgodnie z Brendel'em, oddzielmy część długookresową, część zwykłą i część krótkookresową w ten sposób, że pod odnośną liczbą dopisujemy wskaźniki d, z, k ; przez (ρ) , zgodnie zresztą z tem co poprzednio pisaliśmy, oznaczmy w wielkości ρ wszystkie wyrazy elementarne postaci B ; te wyrazy zresztą, jak to już zauważył Brendel, są krótkookresowe ¹⁾ (są one oznaczone przez (ρ)). Miec więc będziemy:

$$(1) \quad S = S_d + S_k + S_z; \quad R = R_d + R_k + R_z \\ \rho = (\rho) + R; \quad w = \bar{\gamma} v + W_d + K,$$

gdzie $K = W_k + W_z$, zaś $\bar{\gamma} v$ oznacza wyraz wiekowy.

Przejdźmy do naszego przypadku specjalnego; stosunek ruchu dziennego n' Jowisza do ruchu dziennego średniego n_2 planetoidy (279) Thule wynosi:

$$(2) \quad \frac{n'}{n_2} = \mu_2 = 0.7398 = \frac{3 - \delta_2}{4}$$

gdzie δ_2 jest bardzo mała wielkość.

Zatem

$$(3) \quad 1 - \mu_2 = \frac{1 + \delta_2}{4},$$

a ponieważ ogólna postać argumentu, wchodzącego w nasze rozwinięcie jest

$$(4) \quad nw = n(1 - \mu)v - nB - \mu n W_d = n(1 - \mu_2)v - nB - n\mu W_d,$$

to w wyrazach krótkookresowych spólczylnik przy v w tym argumencie jest blizkim 1, w długookresowych zaś różni się on mało od zera. Jeżeli więc chcemy znaleźć w rozwinięciach na P i Q

¹⁾ Brendel, l. c., pg. 19.

wyrazy krótkookresowe i długookresowe, to musimy tak dobrać czynnik n , mnożnik przy v , aby argument cosinusa, względnie sinusa odpowiedniego kąta był w pierwszym przypadku blizki jedności, w drugim zaś blizkim zera. Uważajmy zatem nasze rozwinięcie (45) i (46).

Ponieważ w obu tych wzorach wskaźniki odnośnych spółczynników są te same, zaś same spółczynniki są inaczej oznaczone, przeto chwilowo wystarczy nam w zupełności zbadać tylko spółczynniki zawarte w rozwinięciu dla P , gdyż spółczynniki rozwinięcia dla Q otrzymamy ze spółczynników P , zamieniając tylko symbol A na symbol B .

W rozwinięciu (45) następujące wyrazy I-go rzędu 0, 1 i 2 stopnia będą długookresowe. W 1, 6, 13 wyrazie składnik argumentu zależny od v jest blizki 0 dla $n=0$, a więc długookresowe funkcje będą przy $B_{0.0.0}$, $B_{0.0.2}$, $B_{0.1.1}^{+1}$, $B_{0.1.1}^{-2}$; dla $n=4$ 3-ci i 5-ty wyrazy są długookresowe. Odnośne tedy spółczynniki dla tych wyrazów będą: $B_{4.1.0}^{-1}$, $B_{4.0.1}^{-1}$. Podobnie 8, 12, 15 wyraz dla $n=8$ będzie blizki zera; spółczynniki tych wyrazów będą odpowiednio $B_{8.2.0}^{-2}$, $B_{8.1.1}^{-2}$, $B_{8.0.2}^{-2}$. Wyrazy krótkookresowe tego samego rzędu co poprzednie, a więc I-go, są te, dla których argument zależny od v będzie blizki 1; te wyrazy są następujące: drugi i czwarty wyraz dla $n=0$. Spółczynniki tych wyrazów będą: $B_{0.1.0}^{+1}$ i $B_{0.0.1}^{+1}$; dalej 3 i 5-ty które nam dadzą $B_{0.1.0}^{-1}$ i $B_{0.0.1}^{-1}$. Biorąc $n=4$ otrzymamy krótkookresowe wyrażenia dla 1, 6, 9, 10, 12 wyrazu, dla których spółczynniki będą $B_{4.0.0}$, $B_{4.2.0}$, $B_{4.0.2}$, $B_{4.1.1}^{+1}$, $B_{4.1.1}^{-1}$, $B_{4.2.0}^{-2}$, $B_{4.1.1}^{-2}$, $B_{4.0.2}^{-2}$; dla $n=8$ argumenty powodujące wyrazy krótkookresowe występują w wyrazach 3 i 5-ym, dla których spółczynniki będą $B_{8.1.0}^{-1}$ i $B_{8.0.1}^{-1}$; wreszcie dla $n=12$ takie same wyrazy występują w 8, 12, 15 wyrazie rozwinięcia, skąd otrzymamy: $B_{12.2.0}^{-2}$, $B_{12.1.1}^{-2}$, $B_{12.0.2}^{-2}$. Wyczerpaliśmy tedy wśród wyrazów I-go rzędu już wszystkie, które dla Thule (279) będą krótko i długookresowe.

Wypiszmy te wyrazy:

Wyrazy o długim okresie:

$$B_{0.0.0}$$

$$B_{0.2.0} \eta^2$$

Wyrazy o krótkim okresie:

$$B_{0.1.0}^{+1} \eta \cos v$$

$$B_{0.0.1}^{+1} \eta' \cos v_1$$

$B_{0,0,2} \eta'^2$	$B_{0,1,0}^{(-1)} \eta \cos v$
$B_{0,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \cos (v - v_1)$	$B_{0,0,1}^{(-1)} \eta \cos v_1$
$B_{0,1,1}^{(-1)} \eta \eta' \cos (v_1 - v)$	$B_{4,0,0} \cos 4 w$
$B_{4,1,0}^{(-1)} \eta \cos (4w - v)$	$B_{4,2,0} \eta^2 \cos 4 w$
$B_{4,0,1}^{(-1)} \eta' \cos (4w - v_1)$	$B_{4,0,2} \eta'^2 \cos 4 w$
$B_{8,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos (8w - 2v)$	$B_{4,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \cos (4w + v - v_1)$
$B_{8,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \cos (8w - v - v_1)$	$B_{4,1,1}^{(-1)} \eta \eta' \cos (4w - v + v_1)$
$B_{8,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos (8w - 2v_1)$	$B_{4,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos (4w - 2v)$
	$B_{4,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1)$
	$B_{4,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1)$
	$B_{8,1,0}^{(-1)} \eta \cos (8w - v)$
	$B_{8,0,1}^{(-1)} \eta' \cos (8w - v_1)$
	$B_{12,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos (12w - 2v)$
	$B_{12,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \cos (12w - v - v_1)$
	$B_{12,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos (12w - 2v_1)$

Analogiczne wyrażenia znaleźlibyśmy dla współczynników A . Zajmijmy się teraz wyszukaniem wyrazów o długim i o krótkim okresie wśród wyrazów drugiego rzędu. W tym celu, jak to już zrobiliśmy poprzednio, wielkość R rozbijmy na dwie części, długookresową R_d i krótkookresową R_k , tak że $R = R_d + R_k$.

Ale R jest to szereg trygonometryczny, musimy więc rozwinąć oddzielnie część wyrazów drugiego rzędu, zależną od długookresowych argumentów wchodzących w R , t. j. zawartych w R_d i część w której występuje R_k . Postać tedy tego rozwinięcia, w którym zawarte będą wyrazy drugiego rzędu, będzie następująca:

$$R_{p_2} = (R_k + R_d) \{ B_{n,0,0}^{1,0} \cos nw + B_{n,1,0}^{1,0} \eta \cos (nw + v) + \dots \}$$

Wyrażenie w nawiasie $\{ \dots \}$ oczywiście zawiera wyrazy o krótkim i długim okresie, a także wyrazy zwykłe. Jak to powiedzieliśmy wielkość R jest to szereg trygonometryczny, w którym występować będą argumenty kątów, analogiczne do tych, które są w wyrażeniu w $\{ \}$. Przez wykonanie mnożenia wskazanego powstaną nowe argumenty, będące sumami lub różnicami poszczególnych pierwotnych argumentów. Buchholz podał praktyczne wskazówki, kiedy w wyniku ostatecznym, przy mnożeniu dwóch funkcji różnych (krótko lub długookresowych) otrzymamy wyrazy o długim lub krótkim okresie lub wreszcie wyrazy zwykłe. Oznaczmy według Buchholza przez χ i ξ funkcje długo lub krótkookresowe, występujące w wyrazach szeregu, które mnożymy przez siebie i niech rezultat otrzymany będzie Ψ , wtedy mieć będziemy:

$$(2) \begin{cases} \chi_d \cdot \xi_d = \Psi_d; \chi_d \cdot \xi_k = \Psi_k; \chi_k \cdot \xi_k = \Psi_d + \Psi_s; \chi_d \cdot \xi_s = \Psi_s \\ \chi_k \cdot \xi_s = \Psi_k + \Psi_s; \chi_s \cdot \xi_s = \Psi_d + \Psi_k + \Psi_s. \end{cases}$$

Zastosujmy te wzory Buchholza do naszego przypadku i wyszukajmy wyrazy drugiego rzędu w rozwinięciach (45).

Przedewszystkiem rozważajmy tę część iloczynu R_{p_s} , w którym wchodzi jako czynnik wielkość R_d . W tej części wynajdziemy następujące wyrazy II rzędu:

Długookresowe	Krótkookresowe
$B_{0,0,0}^{1,0}$	$B_{4,0,0}^{1,0} \cos 4w$
$B_{4,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos(4w - v)$	$B_{1,1,0}^{+1,1,0} \eta \cos v$
$B_{4,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos(4w - v_1)$	$B_{1,0,1}^{+1,1,0} \eta' \cos v$
	$B_{0,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos v$
	$B_{0,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos v_1$
	$B_{8,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos(8w - v)$
	$B_{8,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos(8w - v_1)$

Dalej w iloczynie R_{p_s} musimy uwzględnić także wyrazy krytyczne powstałe wskutek mnożenia przez R_k . Wyrazy długo i krótkookresowe będą przedewszystkiem wszystkie te, które już

wyznaczyliśmy dla poprzedniej części (w której jako czynnik występowało R_d); oprócz tych wyrazów wystąpią jeszcze wyrazy pochodne od wyrazów zwykłych, szeregu $\{ \}$ dla których argument jest równy $2v$. Te wyrazy musimy uwzględnić, gdyż po pomnożeniu przez R_k one dadzą nam nowe, wśród których będą wyrazy o krótkim okresie. Oprócz więc powyżej już wypisanych wyrazów (3) w tej drugiej części rozwinięcia dla R_{p_2} wystąpią jeszcze wyrazy zależne od następujących zwyczajnych wyrazów, mianowicie:

$$\begin{aligned} & B_{8,0,0}^{1,0} \cos 8w \\ & B_{4,1,0}^{+1,1,0} \eta \cos (4w + v) \\ & B_{4,0,1}^{+1,1,0} \eta' \cos (4w + v_1) \\ & B_{12,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos (12w - v) \\ & B_{12,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos (12w - v_1) \end{aligned}$$

Wyrazy drugiego rzędu jeszcze powstaną z iloczynu

$$\mu K \{ \sum n B_{n,0,0} \sin nw + \dots \}.$$

Rozłóżmy znów K na części składowe $K = K_a + K_k$; na zasadzie poprzedniego wiemy, że $K_a = 0$, a więc pozostanie rozpatrzyć tylko część

$$\mu K \{ \sum n B_{n,0,0} \sin w + \dots \}.$$

W wyrażeniu w $\{ \}$ następujące wyrazy będą te, które należy uwzględnić:

Wyrazy długookresowe:

$$4\mu B_{4,1,0}^{(-1)} \eta \sin (4w - v)$$

$$4\mu B_{4,0,1}^{-1} \eta' \sin (4w - v_1)$$

Wyrazy o krótkim okresie:

$$4\mu B_{4,0,0} \sin 4w$$

$$8\mu B_{8,1,0}^{(-1)} \eta \sin (8w - v)$$

$$8\mu B_{8,0,1}^{(-1)} \eta' \sin (8w - v_1)$$

Wyrazy zwykłe:

$$8\mu B_{8,0,0} \sin 8w$$

$$4\mu B_{1,1,0}^{(+1)} \eta \sin (4w + v)$$

$$4\mu B_{4,0,1}^{(+1)} \eta' \sin (4w + v_1)$$

$$12 B_{12,1,0}^{(-1)} \eta \sin (12w - v)$$

$$12 B_{12,0,1}^{(-1)} \eta' \sin (12w - v)$$

(4) {

W ten sposób wyczerpaliśmy już wszystkie wyrazy w rozwinięciu funkcji P aż do drugiego rzędu włącznie. Wyrazy trzeciego rzędu zwykle są już tak małe, że można ich nie uwzględniać — jednak w przypadku ruchu niektórych planet krytycznych bliskich Jowisza będziemy musieli uwzględnić jeszcze wyższe wyrazy (trzeciego rzędu) w tych rozwinięciach, a to dla tego, że one nie będą o wiele mniejsze od wyrazów niższych rzędów, które uwzględniamy. Z pośród wyrazów trzeciego rzędu należy uwzględnić oczywiście tylko te, które są zerowego stopnia.

$$(5) \begin{cases} B_{4,0,0}^{2,0} \cos 4w; & 4 B_{4,0,0}^{1,0} \sin 4w; & 8 B_{4,0,0} \cos 4w \\ B_{12,0,0}^{2,0} \cos 12w; & 12 B_{12,0,0}^{1,0} \sin 12w; & 62 B_{12,0,0} \cos 12w \end{cases}$$

te wyrazy przemnożone przez R i K dadzą nam wyrazy o długim i o krótkim okresie.

W rezultacie będziemy mogli ostatecznie napisać następujące rozwinięcie dla P . W tym rozwinięciu zostały uwzględnione wszystkie wyrazy szczególne aż do III-go rzędu, zachodzące w przypadku ruchu małej planety typu Thule — t. j. takiej, której ruch dzienny średni jest bliski $\frac{4}{3}$ ruchu średniego dziennego Jowisza.

$$\begin{aligned} P = & B_{0,0,0} + B_{4,0,0} \cos 4w + B_{0,1,0}^{(+1)} \eta \cos v + B_{0,0,1}^{(+1)} \eta' \cos v_1 + \\ & + B_{4,1,0}^{(-1)} \eta \cos (4w - v) + B_{4,0,1}^{(-1)} \eta' \cos (4w - v_1) + \\ & + B_{8,1,0}^{(-1)} \eta \cos (8w - v) + B_{8,0,1}^{(-1)} \eta' \cos (8w - v_1) + \\ & + B_{0,2,0} \eta^2 + B_{0,0,2} \eta'^2 + B_{0,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \cos (v - v_1) + B_{4,2,0} \eta^2 \cos 4w + \\ & + B_{4,0,2} \eta'^2 \cos 4w + B_{4,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos (4w - 2v) + \\ & + B_{4,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1) + B_{8,1,0}^{(-1)} \eta \cos (8w - v) + \\ & + B_{8,0,1}^{(-1)} \eta' \cos (8w - v_1) + B_{4,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \cos (4w + v - v_1) + \\ & + B_{4,1,1}^{(-1)} \eta \eta' \cos (4w - v + v_1) + B_{4,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) + \\ & + B_{8,1,0}^{(-2)} \eta \eta' \cos (8w - v - v_1) + B_{12,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \cos (12w - v - v_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{8,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos(8w - 2v) + B_{8,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos(8w - 2v_1) + \\
& + B_{12,0,2}^{(-2)} \eta'^2 \cos(12w - 2v_1) + B_{12,2,0}^{(-2)} \eta^2 \cos(12w - 2v) + \\
& + \{ B_{8,0,0}^{1,0} \cos 8w + B_{4,1,0}^{+1,1,0} \eta \cos(4w + v) + B_{4,0,1}^{+1,1,0} \eta' \cos(4w + v_1) + \\
& + B_{12,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos(12w - v) + B_{12,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos(12w - v_1) \} R_k + \\
& + \{ B_{0,0,0}^{1,0} + B_{4,0,0}^{1,0} \cos 4w + B_{1,1,0}^{+1,1,0} \eta \cos v + B_{1,0,1}^{+1,1,0} \eta' \cos v + \\
& + B_{0,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos v + B_{0,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos v_1 + B_{8,1,0}^{-1,1,0} \eta \cos(8w - v) + \\
& + B_{8,0,1}^{-1,1,0} \eta' \cos(8w - v_1) \} (R_d + R_k) + \\
& + \{ 4B_{4,0,0} \sin 4w + 8B_{8,0,0} \sin 8w + 4B_{4,1,0}^{(-1)} \eta \sin(4w - v) + \\
& + 4B_{4,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(4w - v_1) + 4B_{1,1,0}^{(+1)} \eta \sin(4w + v) + \\
& + 4B_{4,0,1}^{(+1)} \eta' \sin(4w + v_1) + 8B_{8,1,0}^{(-1)} \eta \sin(8w - v) + \\
& + 8B_{8,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(8w - v_1) + 12B_{12,1,0}^{(-1)} \eta \sin(12w - v) + \\
& + 12B_{12,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(12w - v) \} \mu (K_a + K_k) + \\
& + \{ B_{4,0,0}^{2,0} \cos 4w + B_{12,0,0}^{2,0} \cos 12w \} R_0^2 + \{ 4B_{4,0,0}^{1,0} \sin 4w + \\
& + 12B_{12,0,0}^{1,0} \sin 12w \} \mu K_0 R_0 - \{ 8B_{4,0,0} \cos 4w + \\
& + 62B_{12,0,0} \cos 12w \} \mu^2 K_0^2.
\end{aligned}$$

Analogiczne wyrażenie otrzymamy dla wielkości Q , tylko odpowiednio zamieniając współczynnik liczbowy B ze wskaźnikami na odpowiadający współczynnik A .

Otrzymamy tedy:

$$\begin{aligned}
Q = & A_{4,0,0} \sin 4w + A_{0,0,1}^{(+1)} \eta' \sin v_1 + A_{4,1,0}^{(-1)} \eta \sin(4w - v) + \\
& + A_{8,1,0}^{(-1)} \eta \sin(8w - v) + A_{4,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(4w - v_1) + A_{8,0,1}^{(-1)} \eta' \sin(8w - v_1) + \\
& + A_{0,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin(v - v_1) + A_{4,2,0} \eta^2 \sin 4w + A_{4,2,0}^{(-2)} \eta'^2 \sin(4w - 2v) + \\
& + A_{8,2,0}^{(-2)} \eta'^2 \sin(8w - 2v) + A_{12,2,0}^{(-2)} \eta^2 \sin(12w - 2v) + \\
& + A_{4,1,1}^{(+1)} \eta \eta' \sin(4w + v - v_1) + A_{4,1,1}^{(-2)} \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{8.1.1}^{(-2)} \eta \eta' \sin (8 w - v - v_1) + A_{12.1.1}^{(-2)} \eta \eta' \sin (12 w - v - v_1) + \\
& + A_{4.1.1}^{(-1)} \eta \eta' \sin (4 w - v + v_1) + A_{4.0.2}^{(-2)} \eta'^2 \sin (4 w - 2 v_1) + \\
& + A_{8.0.2}^{(-2)} \eta'^2 \sin (8 w - 2 v_1) + A_{12.0.2}^{(-2)} \eta'^2 \sin (12 w - 2 v_1) + \\
& + \{ A_{8.0.0}^{1.0} \sin 8 w + A_{4.1.0}^{+1.1.0} \eta \sin (4 w + v) + A_{12.1.0}^{-1.1.0} \eta \sin (12 w - v) + \\
& + A_{4.0.1}^{+1.1.0} \eta' \sin (4 w + v_1) + A_{12.0.1}^{-1.1.0} \eta' \sin (12 w - v_1) \} R_k + \\
& + \{ A_{4.0.0}^{1.0} \sin 4 w + A_{4.1.0}^{-1.1.0} \eta \sin (4 w - v) + A_{8.1.0}^{-1.1.0} \eta \sin (8 w - v) + \\
& + A_{0.0.1}^{+1.1.0} \eta' \sin v_1 + A_{4.0.1}^{-1.1.0} \eta' \sin (4 w - v_1) + \\
& + A_{8.0.1}^{-1.1.0} \eta' \sin (8 w - v_1) \} (R_d + R_k) - \{ 4 A_{4.0.0} \cos 4 w + \\
& + 8 A_{8.0.0} \cos 8 w + 4 A_{4.1.0}^{(+1)} \eta \cos (4 w + v) + 4 A_{4.0.1}^{(+1)} \eta' \cos (4 w + v_1) + \\
& + 4 A_{4.1.0}^{(-1)} \eta \cos (4 w - v) + 8 A_{8.1.0}^{(-1)} \eta \cos (8 w - v) + \\
& + 12 A_{12.1.0}^{(-1)} \eta \cos (12 w - v) + 4 A_{4.0.1}^{(-1)} \eta' \cos (4 w - v_1) + \\
& + 8 A_{8.0.1}^{(-1)} \eta' \cos (8 w - v_1) + 12 A_{12.0.1}^{(-1)} \eta' \cos (12 w - v_1) \} \mu (K_k + K_s) + \\
& + \{ A_{4.0.0}^{2.0} \sin 4 w + A_{12.0.0}^{2.0} \sin 12 w \} R_0^2 - \{ 4 A_{4.0.0}^{1.0} \cos 4 w + \\
& + 12 A_{12.0.0}^{1.0} \cos 12 w \} \mu R_0 K_0 - \{ 8 A_{4.0.0} \sin 4 w + \\
& + 62 A_{12.0.0} \sin 12 w \} \mu^2 K_0^2 + \{ A_{8.0.0} \cos 8 w + A_{4.1.0}^{(+1)} \eta \cos (4 w + v) + \\
& + A_{12.1.0}^{(-1)} \eta \cos (12 w - v) + A_{4.0.1}^{(+1)} \eta' \cos (4 w + v_1) + \\
& + A_{12.0.1}^{-1} \eta' \cos (12 w - v_1) \}.
\end{aligned}$$

Abyśmy jednak mogli ostatecznie obliczyć wielkości P i Q musimy mieć możliwość obliczenia

$$(*) \quad S_d, S_k, R_d, R_k, K_k. *$$

Wielkości te są to znów szeregi trygonometryczne, w których występować będą wyrazy o krótkich lub długich okresach. Musimy więc obecnie, mając rozwinięcie dla P i Q , wynaleźć jeszcze wartości dla wielkości (*), które podstawimy w nasze wzory. Przedewszystkiem należy zauważyć, że we wszystkich wielkościach (*) występować będą wyrazy krótko i długookresowe, zależne od tych samych argumentów, które już występowały w rozwinięciach dla P

i Q . Mieć więc będziemy w rozwinięciach dla S, R, K wyrażenia następujące:

	Długookresowe. Wyraz stały	Krótkookresowe.
(9) {	η^2	$\eta \cos v$
	η'^2	$\eta' \cos v_1$
	$\eta\eta' \cos (v - v_1)$	$\cos 4w$
		$\eta \cos (8w - v)$
	$\eta \cos (4w - v)$	$\eta' \cos (8w - v_1)$
	$\eta' \cos (4w - v_1)$	$\eta^2 \cos 4w$
	$\eta^2 \cos (8w - 2v)$	$\eta\eta' \cos (4w + v - v_1)$
	$\eta'^2 \cos (8w - 2v_1)$	$\eta\eta' \cos (4w - v + v_1)$
	$\eta\eta' \cos (8w - v - v_1)$	$\eta'^2 \cos 4w$
		$\eta^2 \cos (4w - 2v)$
		$\eta'^2 \cos (4w - 2v_1)$
		$\eta\eta' \cos (4w - v - v_1)$
		$\eta_2 \cos (12w - 2v)$
		$\eta'^2 \cos (12w - 2v_1)$
	$\eta\eta' \cos (12w - v - v_1)$	

W tych wyrażeniach (9) są zawarte wszystkie kategorie argumentów Gylden'owskich, o których wspominaliśmy na str. 15 wzór (8) mianowicie argumenty typu A, B, C i D .

Z tego, cośmy teraz powiedzieli widzimy, że do typu A należeć będą 4 pierwsze wyrazy długookresowe, będą one elementarne, gdyż te wyrazy są drugiego stopnia względem η — wszystkie zaś pozostałe długookresowe wyrazy należeć będą do wyrażań charakterystycznych kształtu C . Podobnie, do wyrazów elementarnych krótkookresowych należeć będą dwa pierwsze wyrazy o krótkim okresie, reszta zaś należeć będzie do wyrazów kształtu D .

Aby móc lepiej zbadać istotę wyrazów (9) postarajmy się wyrazić wszystkie argumenty w postaci tej, jaką Harzer otrzymał dla każdego typu charakterystycznego i który wypisaliśmy już

na str. 15 (8). W tym celu przypomnijmy sobie, że mieliśmy związki następujące:

$$\mu_2 = \frac{3 - \delta_2}{4}$$

skąd:

$$4(1 - \mu_2) = 1 + \delta_2; \quad 4w = (1 + \delta_2)v - 4B - 4\mu \mathbf{W}^d,$$

oraz

$$\mathbf{v}_1 + v - \Pi; \quad \mathbf{v}_1 = v - \Pi_1,$$

czyli

$$\mathbf{v} = v(1 - \varsigma) - \Pi_{00}; \quad \mathbf{v}_1 = v(1 - \varsigma_1) - \Pi_{01},$$

(gdzie Π_{00} stała, zaś Π_{01} znamy z teorii Jowisza, ς ruch apsyd).

Wprowadźmy te wielkości do wzorów (9) wtedy otrzymamy:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \text{Const.} \\ \text{(A) } \left\{ \begin{array}{l} \eta^2 \\ \eta'^2 \\ \eta\eta' \cos [\varsigma v + (\Pi_{00} - \Pi_1)] \end{array} \right. \quad \text{(B) } \left\{ \begin{array}{l} \eta \cos [(1 - \rho)v - \Pi_{00}] \\ \eta' \cos [(1 - \rho_1)v - \Pi_{01}] \end{array} \right. \\ \text{(C) } \left\{ \begin{array}{l} \eta \cos [\delta_2 v - 4B - 4\mu \mathbf{W}_d + \Pi] \\ \eta' \cos [\delta_2 v - 4B - 4\mu \mathbf{W}_d + \Pi_1] \\ \eta^2 \cos [2\delta_2 v - 8B - 8\mu \mathbf{W}_d + 2\Pi] \\ \eta'^2 \cos [2\delta_2 v - 8B - 8\mu \mathbf{W}_d + 2\Pi_1] \\ \eta\eta' \cos [2\delta_2 v - 8B - 8\mu \mathbf{W}_d + \Pi + \Pi_1] \end{array} \right. \\ \text{(D) } \left\{ \begin{array}{l} \cos [(1 + \delta_2)v - 4B - 4\mu \mathbf{W}_d] \\ \eta \cos [(1 + 2\delta_2)v - 8B - 8\mu \mathbf{W}_d + \Pi] \\ \eta' \cos [(1 + 2\delta_2)v - 8B - 8\mu \mathbf{W}_d + \Pi_1] \\ \eta^2 \cos [(1 + \delta_2)v - 4B - 4\mu \mathbf{W}_d] \\ \eta\eta' \cos [(1 + \delta_2)v - 4B - 4\mu \mathbf{W}_d - \Pi - \Pi_1] \\ \eta\eta' \cos [(1 + \delta_2)v - 4B - 4\mu \mathbf{W}_d + \Pi - \Pi_1] \\ \eta'^2 \cos [(1 + \delta_2)v - 4B - 4\mu \mathbf{W}_d] \\ \eta^2 \cos [(1 + \delta_2)v + 4B + 4\mu \mathbf{W}_d - 2\Pi] \\ \eta'^2 \cos [(1 - \delta_2)v + 4B + 4\mu \mathbf{W}_d - 2\Pi_1] \\ \eta\eta' \cos [(1 - \delta_2)v + 4B + 4\mu \mathbf{W}_d - \Pi - \Pi_1] \\ \eta^2 \cos [(1 + 3\delta_2)v - 12B - 12\mu \mathbf{W}_d + 2\Pi] \\ \eta'^2 \cos [(1 + 3\delta_2)v - 12B - 12\mu \mathbf{W}_d + 2\Pi_1] \\ \eta\eta' \cos [(1 + 3\delta_2)v - 12B - 12\mu \mathbf{W}_d + \Pi + \Pi_1] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

¹⁾ Brendel. l. c., pg. 20.

W powyższem zestawieniu wyrazów tylko 5 nie zawiera wielkości δ_2 , jak wiemy, związanej z ruchem pewnej określonej planetoidy; te wyrazy odnosić się więc będą do ruchu dowolnej planety¹⁾, podczas, gdy reszta wyrazów wypisanych w (10) musi być obliczona oddzielnie w każdym przypadku szczególnym, dlatego też Gylden nazwał te wyrazy wyrazami charakterystycznymi, jako zawierające w sobie cechy ruchu pewnej badanej planetoidy. Zwróćmy się do zestawienia tych szczególnych postaci wyrazów podanych na str. 15, wtedy z łatwością w (10) będziemy mogli wydzielić wyrazy, odnoszące się do każdego rodzaju, co już zresztą uczyniliśmy, wydzielając klamrami każdą grupę argumentów.

W wyrażeniach kształtu (C) i (D) występuje W_a , które jest bardzo mało zmienne z czasem, gdyż jest to długookresowa część wielkości W — redukcji czasu. Obecność tej wielkości utrudnia znacznie całkowanie naszych równań różniczkowych. W wyrażeniach kształtu A wskutek całkowania wystąpi mały dzielnik ϵ który jest rzędu masy zakłócającej. W wyrażeniach kształtu D i C przez całkowanie w mianownikach wystąpi wielkość δ , która, aczkolwiek mała, nie jest jednak rzędu masy zakłócającej, lecz zawiera masę z wykładnikiem mniejszym od jedności: wyrazy więc tego kształtu stają się zerem wraz z masą. Zgodnie z tym, co już poprzednio mówiliśmy, musimy zauważyć, że gdy całkujemy równanie dające S , to przez całkowanie wyrazy kształtu A i C powiększają się, podczas gdy przez całkowanie równania dającego ρ — są zwiększone tylko wyrazy typu B i D . Wskutek tej uwagi skonstatujemy, że S_d będzie rzędu m' , zaś S_k rzędu $\frac{m'}{\delta}$; R_d, R_k, W_k są rzędu $\frac{m'}{\delta}$, W_a i K_k są tegoż samego rzędu. Na tej samej zasadzie można z łatwością stwierdzić, że zwykle wyrazy w S, R, K są rzędu masy zakłócającej²⁾.

Po tych uwagach, będziemy mogli napisać następujące wyrażenia³⁾ dla S (w S wyrażenia kształtu (A) będą conajmniej drugiego stopnia).

¹⁾ Brendel. l. c., pg. 106.

²⁾ Kramer J. Theorie der kl. Planeten von Hecuba-Typus, pg. 22.

³⁾ Ludendorff. Jupiterstörungen etc. kap. I u. II sparsim.;

Kramer J., l. c., pg. 43.

$$\begin{aligned}
 (11) \left\{ \begin{aligned}
 S &= S_d + S_k = a_0 + a_1 \cos 4w + a_2 \eta \cos v \\
 &\quad + a_2 \eta \cos (4w - v) + a_4 \eta \cos (8w - v) \\
 &\quad \quad \quad + a_3 \eta' \cos v_1 \\
 &\quad + a_3 \eta' \cos (4w - v_1) + a_5 \eta' \cos (8w - v_1) \\
 &\quad + a_7 \eta^2 \cos 4w + a_{11} \eta^2 \cos (4w - 2v) \\
 &\quad + a_{14} \eta^2 \cos (8w - 2v) + a_{17} \eta^2 \cos (12w - 2v) \\
 &\quad + a_8 \eta \eta' \cos (4w + v - v_1) + a_{12} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) \\
 &\quad + a_{15} \eta \eta' \cos (8w - v - v_1) + a_{18} \eta \eta' \cos (12w - v - v_1) \\
 &\quad + a_9 \eta \eta' \cos (4w - v + v_1) + a_{13} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1) \\
 &\quad + a_{16} \eta'^2 \cos (8w - 2v_1) + a_{19} \eta'^2 \cos (12w - 2v_1) \\
 &\quad + a_{10} \eta'^2 \cos 4w \quad \quad \quad + \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + S_A \quad 1)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

w tem rozwinięciu jest:

$$\begin{aligned}
 S_d &= a_0 + a_2 \eta \cos (4w - v) + a_{14} \eta^2 \cos (8w - 2v) \\
 &\quad + a_3 \eta' \cos (4w - v_1) + a_{15} \eta \eta' \cos (8w - v - v_1) \\
 &\quad \quad \quad + a_{16} \eta'^2 \cos (8w - 2v_1)
 \end{aligned}$$

zaś S_A oznacza wszystkie wyrazy w S kształtu A .

Analogicznie mieć będziemy rozwinięcie (2) dla R , zważywszy, że wyrazy kształtu (B) są już zawarte w (ρ):

$$\begin{aligned}
 (12) \left\{ \begin{aligned}
 R &= b_0 + \beta_1 \cos 4w + \beta_2 \eta \cos (4w - v) + \beta_4 \eta \cos (8w - v) + \\
 &\quad \quad \quad + \beta_3 \eta' \cos (4w - v_1) + \beta_5 \eta' \cos (8w - v_1) + \\
 &\quad + \beta_7 \eta^2 \cos 4w \quad + \beta_{11} \eta^2 \cos (4w - 2v) + \beta_{14} \eta^2 \cos (8w - 2v) + \\
 &\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \beta_{17} \eta^2 \cos (12w - 2v) \\
 &\quad + \beta_8 \eta \eta' \cos (4w + v - v_1) + \beta_{12} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) + \\
 &\quad \quad \quad + \beta_{15} \eta \eta' \cos (8w - v - v_1) + \beta_{18} \eta \eta' \cos (12w - v - v_1) \\
 &\quad + \beta_9 \eta \eta' \cos (4w - v + v_1) + \beta_{13} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1) + \\
 &\quad \quad \quad + \beta_{16} \eta'^2 \cos (8w - 2v_1) + \beta_{19} \eta'^2 \cos (12w - 2v_1) \\
 &\quad + \beta_{10} \eta'^2 \cos 4w \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + R_A
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

gdzie R_A oznacza część R , w której są ugrupowane wyrazy kształtu (A).

1) Kramer J., l. c., pg. 28.

Wyrazy długookresowe w R czyli R_a są:

$$R_a = b_0 + \beta_2 \gamma_1 \cos(4w - v) + \beta_{14} \eta^2 \cos(8w - 2v) \\ + \beta_3 \eta' \cos(4w - v_1) + \beta_{15} \eta \eta' \cos(8w - v - v_1) \\ + \beta_{16} \eta'^2 \cos(8w - 2v_1).$$

Jak to już poprzednio zaznaczyliśmy, po zcałkowaniu w tych wyrazach nie będzie występować mały dzielnik δ .

Ponieważ $K_a = 0$, przeto wielkość $K = K_k + K_s$. Niektóre wyrazy zwyczajne będziemy musieli uwzględnić, gdyż one w naszym rozwinięciu będą już nawet pierwszego rzędu. Mieć więc będziemy:

$$(13) \left\{ \begin{array}{ll} K = \gamma_1 \sin 4w & + \gamma_4 \eta \sin(8w - v) + \gamma_6 \eta \sin(4w - v) \\ & + \gamma_5 \eta' \sin(8w - v_1) \\ & + \gamma_7 \eta^2 \sin 4w & + \gamma_{11} \eta^2 \sin(4w - 2v) \\ & & + \gamma_{17} \eta^2 \sin(12w - 2v) \\ & + \gamma_8 \eta \eta' \sin(4w + v - v_1) & + \gamma_{12} \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) \\ & & + \gamma_{18} \eta \eta' \sin(12w - v - v_1) \\ & + \gamma_9 \eta \eta' \sin(4w - v + v_1) & + \gamma_{13} \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) \\ & & + \gamma_{19} \eta' \sin(12w - 2v_1) \\ & + \gamma_{10} \eta'^2 \sin 4w & + \gamma_{20} \eta^2 \sin(4w + 2v) \\ & & + \gamma_{21} \eta^2 \sin 8w \\ & & + \gamma_{22} \eta \eta' \sin(8w + v - v_1) \end{array} \right.$$

gdzie jak widać:

$$K_s = \gamma_6 \eta \sin(4w - v) \\ + \gamma_{20} \eta^2 \sin(4w + 2v) + \gamma_{21} \eta^2 \sin 8w + \gamma_{22} \eta \eta' \sin(8w + v - v_1).$$

Wreszcie część o długim okresie wyrażenia $\frac{dw}{dv}$ będzie $\left(\frac{dw}{dv}\right)_a$.

Dla tej samej wielkości mieć będziemy rozwinięcie następujące:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dw}{dv}\right)_a = \gamma_2 \gamma_1 \cos(4w - v) + \gamma_{14} \eta^2 \cos(8w - 2v) \\ + \gamma_3 \eta^2 \cos(4w - v_1) + \gamma_{15} \eta \eta' \cos(8w - v - v_1) \\ + \gamma_{16} \eta'^2 \cos(8w - 2v_1) + \left(\frac{dw}{dv}\right)_A \end{array} \right.$$

gdzie znów przez $\left(\frac{dw}{dv}\right)_A$ oznaczymy wyrazy kształtu (A).

Należy zauważyć, że współczynniki a są rzędu masy zakłócającej, zaś współczynniki α i β są rzędu $\frac{m'}{\delta}$ (masa zakłócająca podzielona przez mały dzielnik).

Z wyrażeń (12) (13) (14) od razu widzimy, które rodzaje wyrazów zachodzą w każdej z uważanych wielkości. Napisane szeregi musimy wstawić w wyrażenia wyżej otrzymane dla P i Q i wykonać mnożenie, grupując razem wyrazy zależne od jednego argumentu. Przy mnożeniu musimy uważać aby w rezultacie, zgodnie z zasadniczą myślą Gyldeń'a uwzględniać tylko wyrazy o długim lub krótkim okresie, zaś opuszczać wszystkie zwykłe wyrazy, które później w otrzymanym rozwinięciu na P i Q sprowadzimy, przez dodanie sumarycznego symbolu. Jednakże, ponieważ w iloczynie zawierającym K , wystąpią, jako rezultat mnożenia wyrazów zwykłych w K przez wyrazy krótkookresowe w nawiasie, nie tylko wyrazy zwykłe, które zwykle pomijamy, lecz także wyrazy krótkookresowe, więc musieliśmy także te wyrazy zwykłe uwzględnić w rozwinięciu K .

Wykonajmy więc wskazane podstawienie i mnożenie, korzystając z elementarnych związków goniometrycznych dwóch kątów λ i μ :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \sin \lambda \cdot \sin \mu = -\frac{1}{2} \cos (\lambda + \mu) + \frac{1}{2} \cos (\lambda - \mu) \\ \sin \lambda \cdot \cos \mu = \frac{1}{2} \sin (\lambda + \mu) + \frac{1}{2} \sin (\lambda - \mu) \\ \cos \lambda \cdot \cos \mu = \frac{1}{2} \cos (\lambda + \mu) + \frac{1}{2} \cos (\lambda - \mu). \end{array} \right.$$

Otrzymujemy wzór następujący:

$$\begin{aligned} P = & B_{0,0,0} + B_{4,0,0} \cos 4w + B_{0,1,0}^{+1} \eta \cos v + B_{4,1,0}^{-1} \eta \cos (4w - v) + \\ & + B_{8,1,0}^{-1} \eta \cos (8w - v) + B_{0,0,1}^{+1} \eta' \cos v_1 + B_{4,0,1}^{-1} \eta' \cos (4w - v_1) + \\ & + B_{8,0,1}^{-1} \eta' \cos (8w - v_1) + B_{0,2,0}^{+1} \eta^2 + B_{0,0,2} \eta'^2 + B_{0,1,1}^{+1} \eta \eta' \cos (v - v_1) + \\ & + B_{4,0,2} \eta^2 \cos 4w + B_{4,1,1}^{+1} \eta \eta' \cos (4w + v - v_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{4.2.0}^{-2} \eta^2 \cos(4w-2v) + B_{8.2.0}^{-2} \eta^2 \cos(8w-2v) + \\
& + B_{12.2.0}^{-2} \cos(12w-2v) + B_{4.1.1}^{-1} \eta \eta' \cos(4w-v+v_1) + \\
& + B_{4.1.1}^{-2} \eta \eta' \cos(4w-v-v_1) + B_{8.1.1}^{-2} \eta \eta' \cos(8w-v-v_1) + \\
& + B_{12.1.1}^{-2} \eta \eta' \cos(12w-v-v_1) + B_{4.0.2} \eta'^2 \cos 4w + \\
& + B_{4.0.2}^{-2} \eta'^2 \cos(4w-2v_1) + B_{8.0.2}^{-2} \eta'^2 \cos(8w-2v_1) + \\
& + B_{12.0.2}^{-2} \eta'^2 \cos(12w-2v_1) + \\
& + \{ B_{8.0.0}^{1.0} \cos 8w + B_{4.1.0}^{+1.1.0} \eta \cos(4w+v) + B_{12.1.0}^{-1.1.0} \eta \cos(12w-v) + \\
& + B_{4.0.1}^{+1.1.0} \eta' \cos(4w+v_1) + B_{12.0.1}^{-1.1.0} \eta' \cos(12w-v_1) \} \\
& \{ \beta_1 \cos 4w + \beta_4 \eta \cos(8w-v) + \beta_7 \eta^2 \cos 4w + \beta_{11} \eta^2 \cos(4w-2v) + \\
& + \beta_{17} \eta^2 \cos(12w-2v) + \beta_5 \eta' \cos(8w-v_1) + \beta_8 \eta \eta' \cos(4w+v-v_1) \\
& + \beta_{12} \eta \eta' \cos(4w-v-v_1) + \beta_{18} \eta \eta' \cos(12w-v-v_1) + \\
& + \beta_9 \eta \eta' \cos(4w-v+v_1) + \beta_{13} \eta'^2 \cos(4w-2v_1) + \\
& + \beta_{19} \eta'^2 \cos(12w-2v_1) + \beta_{10} \eta'^2 \cos 4w \} \\
& + \{ B_{0.0.0}^{1.0} + B_{4.0.0}^{1.0} \cos 4w + B_{0.1.0}^{+1.1.0} \eta \cos v + \\
& + B_{4.1.0}^{-1.1.0} \eta \cos(4w-v) + B_{8.1.0}^{-1.1.0} \eta \cos(8w-v) + \\
& + B_{0.0.1}^{+1.1.0} \eta' \cos v_1 + B_{4.0.1}^{-1.1.0} \eta' \cos(4w-v_1) + B_{8.0.1}^{-1.1.0} \eta' \cos(8w-v_1) \} \\
& \{ b_0 + \beta_1 \cos 4w + \beta_2 \eta \cos(4w-v) + \beta_4 \eta \cos(8w-v) + \\
& + \beta_5 \eta' \cos(4w-v_1) + \beta_5 \eta' \cos(8w-v_1) + \beta_7 \eta^2 \cos 4w + \\
& + \beta_{11} \eta^2 \cos(4w-2v) + \beta_{14} \eta^2 \cos(8w-2v) + \beta_{17} \eta^2 \cos(12w-2v) + \\
& + \beta_8 \eta \eta' \cos(4w+v-v_1) + \beta_{12} \eta \eta' \cos(4w-v-v_1) + \\
& + \beta_{15} \eta \eta' \cos(8w-v-v_1) + \beta_{18} \eta \eta' \cos(12w-v-v_1) + \\
& + \beta_9 \eta \eta' \cos(4w-v+v_1) + \beta_{13} \eta'^2 \cos(5w-2v_1) + \\
& + \beta_{16} \eta'^2 \cos(8w-2v_1) + \beta_{19} \eta'^2 \cos(12w-2v_1) + \beta_{10} \eta'^2 \cos 4w \} \\
& + \mu \{ 4 B_{4.0.0} \sin 4w + 8 B_{8.0.0} \sin 8w + 4 B_{4.1.0}^{+1.1.0} \eta \sin(4w+v) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4B_{4.0.1}^{-1} \eta' \sin(4w + v_1) + 4B_{4.1.0}^{-1} \eta \sin(4w - v) + \\
& + 8B_{8.1.0}^{-1} \eta \sin(8w - v) + 12B_{12.1.0}^{-1} \eta \sin(12w - v) + \\
& + 4B_{4.0.1}^{-1} \eta' \sin(4w - v_1) + 8B_{8.0.1}^{-1} \eta' \sin(8w - v_1) + \\
& + 12B_{12.0.1}^{-1} \eta' \sin(12w - v_1) \} \\
& \{ \gamma_1 \sin 4w + \gamma_4 \eta \sin(8w - v) + \gamma_6 \eta \sin(4w + v) + \gamma_5 + \\
& + \gamma_5 \eta' \sin(8w - v_1) + \gamma_7 \eta^2 \sin 4w + \gamma_{11} \eta^2 \sin(4w - 2v) + \\
& + \gamma_{17} \eta^2 \sin(12w - 2v) + \gamma_8 \eta \eta' \sin(4w + v - v_1) + \\
& + \gamma_{12} \eta \eta' \sin(4w - v - v_1) + \gamma_{18} \eta \eta' \sin(12w - v + v_1) + \\
& + \gamma_9 \eta \eta' \sin(4w - v + v_1) + \gamma_{13} \eta'^2 \sin(4w - 2v_1) + \\
& + \gamma_{19} \eta' \sin(12w - 2v_1) + \gamma_{10} \eta'^2 \sin 4w + \\
& + \gamma_{20} \eta^2 \sin(4w + 2v) + \gamma_{21} \eta^3 \sin 8w + \gamma_{22} \eta \eta' \sin(8w + v - v_1) \} \\
& + \{ B_{4.0.0}^{2.0} \cos 4w + B_{12.0.0}^{2.0} \cos 12w \} \{ \frac{1}{2} \beta_1^2 + \frac{1}{3} \beta_1^2 \cos 8w \} \\
& + [\{ 4B_{4.0.0}^{1.0} \sin 4w + 12B_{12.0.0}^{1.0} \sin 12w \} \\
& \{ \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \sin 8w \} - \mu \{ 8B_{4.0.0} \cos 4w + 62B_{12.0.0} \cos 12w \} \\
& \{ \frac{1}{2} \gamma_1^2 - \frac{1}{2} \gamma_1^2 \cos 8w \}] \mu.
\end{aligned}$$

Z powyższego wyrażenia otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned}
(15) \quad P = & p_0 + p_1 \cos 4w + p_2 \eta \cos v + p_4 \eta \cos(4w - v) + \\
& + p_6 \eta \cos(8w - v) + p_{20} \eta^2 \cos(12w - 2v) \\
& + p_3 \eta' \cos v_1 + p_5 \eta' \cos(4w - v_1) + p_7 \eta' \cos(8w - v_1) + \\
& + p_{21} \eta \eta' \cos(12w - v - v_1) \\
& + p_8 \eta^2 \qquad \qquad \qquad + p_{14} \eta^2 \cos(4w - 2v) + \\
& \qquad \qquad \qquad + p_{17} \eta^2 \cos(8w - 2v) + p_{22} \eta'^2 \cos(12w - 2v_1) \\
& + p_9 \eta^2 \cos 4w \qquad \qquad + p_{15} \eta \eta' \cos(4w - v - v_1) + \\
& \qquad \qquad \qquad + p_{18} \eta \eta' \cos(8w - v - v_1) + p_{23} \eta \eta' \cos(v - v_1) \\
& + p_{10} \eta \eta' \cos(4w + v - v_1) + p_{16} \eta'^2 \cos(4w - 2v_1) + \\
& \qquad \qquad \qquad + p_{19} \eta'^2 \cos(8w - 2v_1)
\end{aligned}$$

$$+p_{11} \eta \eta' \cos (4w-v+v_1)$$

$$+p_{12} \eta'^2 \cos 4w$$

$$+p_{13} \eta'^2 + G_p$$

Przez G_p oznaczyliśmy sumę wyrazów zwykłych.

Dla krótkości oznaczyliśmy:

$$p_0 = B_{0,0,0} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_1 + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_1 + \frac{1}{2} B_{0,0,0}^{2,0} \beta_1^2$$

$$p_1 = B_{4,0,0} + \{ B_{0,0,0}^{1,0} + \frac{1}{2} B \} \beta_1 + \mu B_{8,0,0} \gamma_1 + \\ + \{ \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{2,0} + \frac{1}{4} B_{4,0,0}^{2,0} + \frac{1}{4} B_{12,0,0}^{2,0} \} \beta_1^2 \\ + \mu \{ B_{4,0,0}^{1,0} + 3B_{12,0,0}^{1,0} \} \beta_1 \gamma_1 + \mu^2 \{ -2B_{4,0,0} + \frac{3}{2} B_{12,0,0} \}$$

$$p_2 = B_{0,1,0}^{(+1)} + \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} \beta_4 + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{+1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_2 + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_1 + \\ + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_6 + 4\mu B_{8,0,0} \gamma_4 + 2\mu B_{4,1,0}^{(+1)} \gamma_1 + 2\mu B_{4,1,0}^{(-1)} \gamma_1$$

$$p_3 = B_{0,0,1}^{+1} + \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} \beta_5 + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{+1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_1 + \\ + 4\mu B_{8,0,0} \gamma_5 + 2\mu B_{4,0,1}^{+1} \gamma_1 + 2\mu B_{4,0,1}^{-1} \gamma_1$$

$$p_4 = B_{4,1,0}^{-1} + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_2 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_4 + \frac{1}{2} B_{0,1,0}^{+1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_1 \\ + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_4 + 4\mu B_{8,0,0} \gamma_6 + 4\mu B_{8,1,0}^{(-1)} \gamma_1$$

$$p_5 = B_{4,0,1}^{(-1)} + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_5 + \frac{1}{2} B_{0,0,1}^{+1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_1 \\ + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_5 + 4\mu B_{8,0,1}^{-1} \gamma_1$$

$$p_6 = B_{8,1,0}^{-1} + B_{12,1,0}^{-1,1,0} \beta_1 + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_4 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_2 + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_1 + 6\mu B_{12,1,0}^{-1} \gamma_1 \\ - 2\mu B_{4,1,0}^{-1} \gamma_1$$

$$p_7 = B_{8,0,1}^{(-1)} + \frac{1}{2} B_{12,0,1}^{-1,1,0} \beta_1 + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_5 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_1 \\ + 6\mu B_{12,0,1}^{-1} \gamma_1 - 2\mu B_{4,0,1}^{-1} \gamma_1$$

$$p_8 = B_{0,2,0} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_7 + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_2 + \frac{1}{2} B_{8,1,0}^{-1,1,0} \beta_4 + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_7 \\ + 4\mu B_{8,0,0} \gamma_{21} + 2\mu B_{4,1,0}^{+1} \gamma_6 + 4\mu B_{8,1,0}^{-1} \gamma_4$$

$$p_9 = B_{4.2.0} + \frac{1}{2} B_{8.0.0}^{1.0} \beta_7 + \frac{1}{2} B_{12.1.0}^{-1.1.0} \beta_4 + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_7 + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0} \beta_2 + \\ + \frac{1}{2} B_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} B_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_2 + 2\mu B_{4.0.0} \gamma_{21} + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_7 + \\ + 6\mu B_{12.1.0}^{-1} \gamma_4 + 2\mu B_{4.1.0}^{-1} \gamma_4$$

$$p_{10} = B_{4.1.1}^{(+1)} + \frac{1}{2} B_{8.0.0}^{1.0} \beta_9 + \frac{1}{2} B_{12.0.1}^{-1.1.0} \beta_4 + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_8 + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0} \beta_3 + \\ + \frac{1}{2} B_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_2 + 2\mu B_{4.0.0} \gamma_{22} + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_9 + \\ + 6\mu B_{12.0.1}^{-1} \gamma_4 + 2\mu B_{4.1.0}^{-1} \gamma_3$$

$$p_{11} = B_{4.1.1}^{-1} + \frac{1}{2} B_{8.0.0}^{1.0} \beta_8 + \frac{1}{2} B_{12.1.0}^{-1.1.0} \beta_5 + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_9 + \frac{1}{2} B_{0.0.1}^{1.1.0} \beta_2 + \frac{1}{2} B_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_4 \\ + \frac{1}{2} B_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_3 + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_8 + 6\mu B_{12.1.0}^{-1} \gamma_5 + 2\mu B_{4.0.1}^{-1} \gamma_4$$

$$p_{12} = B_{4.0.2} + \frac{1}{2} B_{8.0.0}^{1.0} \beta_{10} + \frac{1}{2} B_{0.0.1}^{+1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} B_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_3 + \\ + \frac{1}{2} B_{12.0.1}^{-1.1.0} \beta_5 + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_{10} + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_{10} + 6\mu B_{12.0.1}^{-1} \gamma_5 + \\ + 2\mu B_{4.0.1}^{-1} \gamma_5$$

$$p_{13} = B_{0.0.2} + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{10} + \frac{1}{2} B_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_5 + 2\mu B_{4.0.0} \gamma_{10} + \\ + 4\mu B_{8.0.1}^{-1} \gamma_5$$

$$p_{14} = B_{3.2.0}^{-2} + \frac{1}{2} B_{8.0.0}^{1.0} \beta_{17} + \frac{1}{2} B_{4.1.0}^{+1.1.0} \beta_4 + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_{11} + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{14} + B_{0.1.0}^{+1.1.0} \beta_2 \\ + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_{17} + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_{20} + 2\mu B_{4.1.0}^{+1} \gamma_4 + 4\mu B_{8.1.0}^{-1} \gamma_6$$

$$p_{15} = B_{4.1.1}^{-2} + \frac{1}{2} B_{2.0.0}^{1.0} \beta_{18} + \frac{1}{2} B_{4.1.0}^{+1.1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} B_{4.0.1}^{+1.1.0} \beta_4 + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_{12} + \\ + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{15} + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{0.0.1}^{+1.1.0} \beta_2 + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_{18} + \\ + 4\mu B_{4.1.0}^{+1} \gamma_5 + 2\mu B_{4.0.1}^{+1} \beta_4 + \mu B_{8.0.1}^{-1} \gamma_6$$

$$p_{16} = B_{4.0.2}^{(-2)} + \frac{1}{2} B_{8.0.0}^{1.0} \beta_{19} + \frac{1}{2} B_{4.0.1}^{+1.1.0} \beta_5 + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_{13} + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{16} + \\ + \frac{1}{2} B_{0.0.1}^{+1.1.0} \beta_3 + 4\mu B_{8.0.0} \gamma_{19} + 2\mu B_{4.0.1}^{+1} \gamma_5$$

$$p_{17} = B_{9.2.0}^{-2} + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_{14} + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{11} + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{17} + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0} \beta_4 + \\ + \frac{1}{2} B_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_2 - 2\mu B_{4.0.0} \gamma_{11} + 2\mu B_{4.0.0} \gamma_{17} + 6\mu B_{12.1.0}^{-1} \gamma_6$$

$$p_{18} = B_{8.1.1} + B_{0.0.0}^{1.0} \beta_{15} + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{12} + \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_{18} + \frac{1}{2} B_{0.1.0}^{+1.1.0} \beta_5 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} B_{0,0,1}^{+1,1,0} \beta_4 + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_2 + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_{12} + \\
& + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_{18} + 6\mu B_{12,0,1}^{-1} \gamma_6 \\
p_{19} & = B_{12,0,2}^{-2} + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_{16} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_{13} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_{19} + \frac{1}{2} B_{0,0,1}^{+1,1,0} \beta_5 - \\
& - \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_3 - 2\mu B_{4,0,0} \gamma_{13} + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_{19} \\
p_{20} & = B_{12,2,0}^{-2} + \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} \beta_{11} + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_{17} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_{14} + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_4 + \\
& + \frac{1}{2} B_{8,1,0}^{-1,1,0} \beta_2 - 4\mu B_{8,0,0} \gamma_{11} - 2\mu B_{4,1,0}^{-1} \gamma_4 \\
p_{21} & = B_{12,1,1}^{-2} + \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} \beta_{12} + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_{18} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_{15} + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_5 + \\
& + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_4 + \frac{1}{2} B_{8,1,0}^{-1,1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{8,0,1}^{-1,1,0} \beta_2 - 4\mu B_{8,0,0} \gamma_{12} - \\
& - 2\mu B_{4,0,1}^{-1} \gamma_4 - 2\mu B_{4,1,0}^{-1} \gamma_5 \\
p_{22} & = B_{12,0,2}^{-2} + \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} \beta_{13} + B_{0,0,0}^{1,0} \beta_{19} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_{16} + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_5 + \\
& + \frac{1}{2} B_{8,0,1}^{-1,1,0} \beta_3 - 4\mu B_{8,0,0} \gamma_{13} - 2\mu B_{4,0,0}^{-1} \gamma_5 \\
p_{23} & = B_{0,1,1}^{+1} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_8 + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_9 + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} B_{4,0,1}^{-1,1,0} \beta_2 + \\
& + \frac{1}{2} B_{8,1,0}^{-1,1,0} \beta_5 + \frac{1}{2} B_{8,0,1}^{-1,1,0} \beta_4 + 2\mu B_{4,0,0} + 2\mu B_{4,0,0} \gamma_9 + 4\mu B_{6,0,0} \gamma_{22} + \\
& + 2\mu B_{4,0,1}^{+1} \gamma_6 + 4\mu B_{8,1,0}^{-1} \gamma_5 + 4\mu B_{8,0,1}^{-1} \gamma_4.
\end{aligned}$$

Analogicznie postępując z Q otrzymamy wyrażenia następujące:

$$\begin{aligned}
Q & = A_{4,0,0} \sin 4w + A_{0,0,1}^{+1} \eta' \sin v_1 + A_{4,1,0}^{-1} \eta \sin (4w - v) + \\
& + A_{8,1,0}^{-1} \eta \sin (8w - v) + A_{0,1,1}^{+1} \eta \eta' \sin (v - v_1) + \\
& + A_{4,0,1}^{-1} \eta' \sin (4w - v_1) + A_{8,0,1}^{-1} \eta' \sin (8w - v_1) + \\
& + A_{4,2,0} \eta^2 \sin 4w + A_{4,2,0}^{-2} \eta^2 \sin (4w - 2v) + A_{8,2,0}^{-2} \eta^2 \sin (8w - 2v) \\
& + A_{12,2,0}^{-2} \eta^2 \sin (12w - 2v) + A_{4,1,1}^{+1} \eta \eta' \sin (4w + v - v_1) + \\
& + A_{4,1,1}^{-2} \eta \eta' \sin (4w - v - v_1) + A_{8,1,1}^{-2} \eta \eta' \sin (8w - v - v_1) + \\
& + A_{12,1,1}^{-2} \eta \eta' \sin (12w - v - v_1) + A_{4,1,1}^{-1} \eta \eta' \sin (8w - v + v_1) + \\
& + A_{4,0,2}^{-2} \eta'^2 \sin (4w - 2v_1) + A_{8,0,2}^{-2} \eta'^2 \sin (8w - 2v_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{12.0.2}^{(-2)} \eta'^2 \sin (12w - 2v_1) + \\
& + \{ A_{8.0.0}^{1.0} \sin 8w + A_{4.1.0}^{+1.1.0} \eta \sin (4w + v) + A_{12.1.0}^{-1.1.0} \eta \sin (12w - v) + \\
& + A_{12.0.1}^{-1.1.0} \eta' \sin (12w - v_1) \} . \\
& \{ \beta_1 \cos 4w + \beta_4 \eta \cos (8w - v) + \beta_5 \eta' \cos (8w - v_1) + \\
& + \beta_7 \eta^2 \cos 4w + \beta_{11} \eta^2 \cos (4w - 2v) + \beta_{17} \eta'^2 \cos (12w - 2v) + \\
& + \beta_8 \eta \eta' \cos (4w + v - v_1) + \beta_{12} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) + \\
& + \beta_{18} \eta \eta' \cos (12w - v - v_1) + \beta_9 \eta \eta' \cos (4w - v + v_1) + \\
& + \beta_{13} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1) + \beta_{19} \eta'^2 \cos (12w - 2v_1) + \beta_{10} \eta'^2 \cos 4w \} + \\
& + \{ A_{4.0.0}^{1.0} \sin 4w + A_{4.1.0}^{-1.1.0} \eta \sin (4w - v) + A_{8.1.0}^{-1.1.0} \eta \sin (8w - v) + \\
& + A_{0.0.1}^{+1.1.0} \eta' \sin v_1 + A_{4.0.1}^{-1.1.0} \eta' \sin (4w - v_1) + \\
& + A_{8.0.1}^{-1.1.0} \eta' \sin (8w - v_1) \} \\
& \{ b_0 + \beta_2 \eta \cos (4w - v) + \beta_{14} \eta^2 \cos (8w - 2v) + \beta_3 \eta' \cos (4w - v_1) + \\
& + \beta_{15} \eta \eta' \cos (8w - v - v_1) + \beta_{16} \eta'^2 \cos (8w - 2v_1) + \\
& + \beta_{12} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) + \beta_{18} \eta \eta' \cos (12w - v - v_1) + \\
& + \beta_9 \eta \eta' \cos (4w - v + v_1) + \beta_{13} \eta'^2 \cos (4w - 2v_1) + \\
& + \beta_{19} \eta'^2 \cos (12w - 2v_1) + \beta_{10} \eta'^2 \cos 4w + \beta_1 \cos 4w + \\
& + \beta_4 \eta \cos (8w - v) + \beta_5 \eta' \cos (8w - v_1) + \beta_7 \eta^2 \cos 4w + \\
& + \beta_8 \eta \eta' \cos (4w + v - v_1) + \beta_{12} \eta \eta' \cos (4w - v - v_1) + \\
& + \beta_{11} \eta \cos (4w - 2v) \} - \\
& - \{ 4A_{4.0.0} \cos 4w + 8A_{8.0.0} \cos 8w + 4A_{4.1.0}^{+1} \eta \cos (4w + v) + \\
& + 4A_{4.0.1}^{+1} \eta' \cos (4w + v_1) + 4A_{4.1.0}^{-1} \eta \cos (4w - v) + \\
& + 8A_{8.1.0}^{-1} \eta \cos (8w - v) + 12A_{12.1.0}^{-1} \eta \cos (12w - v) + \\
& + 4A_{4.0.1}^{-1} \eta' \cos (4w - v_1) + 8A_{8.0.1}^{-1} \eta' \cos (8w - v_1) + \\
& + 12A_{12.0.0}^{-1} \eta' \cos (12w - v_1) \} \mu \\
& \{ \gamma_1 \sin 4w + \gamma_4 \eta \sin (8w - v) + \gamma_6 \eta \sin (4w + v) + \\
& + \gamma_5 + \gamma_5 \eta' \sin (8w - v_1) + \gamma_7 \eta^2 \sin 4w + \gamma_{11} \eta'^2 \sin (4w - 2v) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_{17} \eta^2 \sin (12w-2v) + \gamma_8 \eta \eta' \sin (4w+v-v_1) + \\
& +\gamma_{12} \eta \eta' \sin (4w-v-v_1) + \gamma_{18} \eta \eta' \sin (12w-v+v_1) + \\
& +\gamma_9 \eta \eta' \sin (4w-v+v_1) + \gamma_{13} \eta'^2 \sin (4w-2v_1) + \\
& +\gamma_{19} \eta' \sin (12w-2v_1) + \gamma_{10} \eta'^2 \sin 4w + \gamma_{20} \eta^2 \sin (4w+2v) + \\
& +\gamma_{21} \eta^2 \sin 8w + \gamma_{22} \eta \eta' \sin (8w+v-v_1) \} + \\
& + \{ A_{4.0.0}^{2.0} \sin 4w + A_{12.0.0}^{2.0} \sin 12w \} \{ \frac{1}{2} \beta_1^2 + \frac{1}{2} \beta_2^2 \cos 8w \} - \\
& - \{ 4A_{4.0.0}^{1.0} \cos 4w + 12A_{12.0.0}^{1.0} \cos 12w \} \mu \{ \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_1 \sin 8w \} - \\
& - \mu^2 \{ 8A_{4.0.0} \sin 4w + 62A_{12.0.0} \sin 12w \} \{ \frac{1}{2} \gamma_1^2 - \frac{1}{2} \gamma_1'^2 \cos 8w \} \\
& + A_{8.0.0} \cos 8w + A_{4.1.0}^{+1} \eta \cos (4w+v) + A_{12.1.0}^{-1} \eta \cos (12w-v) + \\
& + A_{4.0.1}^{+1} \eta' \cos (4w+v_1) + A_{12.0.1}^{(-2)} \eta' \cos (12w-v_1).
\end{aligned}$$

Te wyrażenia uporządkujemy, uwzględniając związek goniometryczny (a) w ten sposób, abyśmy otrzymali wyrazy jednakowych argumentów dla wyrazów charakterystycznych oraz elementarnych. Zachować będziemy musieli także i niektóre wyrazy zwykłe, zależne od argumentu $2v$, gdyż podobne wyrazy wystąpią później w wyrażeniach dla W .

Gdy wykonamy wskazane podstawienie oraz przekształcenie, otrzymamy wtedy ostatecznie wzór następujący:

$$(16) \left\{ \begin{aligned}
Q = & q_1 \sin 4w + q_2 \eta \sin v + q_4 \eta \sin (4w-v) \\
& + q_6 \eta \sin (8w-v) \\
& + q_3 \eta' \sin v_1 + q_5 \eta' \sin (4w-v_1) \\
& + q_7 \eta' \sin (8w-v_1) \\
& + q_8 \eta^2 \sin 4w + q_{12} \eta^2 \sin (4w-2v) + q_{15} \eta^2 \sin (8w-2v) \\
& + q_{18} \eta^2 \sin (12w-2v) \\
& + q_9 \eta \eta' \sin (4w+v-v_1) + q_{13} \eta \eta' \sin (4w-v-v_1) + \\
& + q_{16} \eta \eta' \sin (8w-v-v_1) + q_{19} \eta \eta' \sin (12w-v-v_1) \\
& + q_{10} \eta \eta' \sin (4w-v+v_1) + q_{14} \eta'^2 \sin (4w-2v_1) + \\
& + q_{17} \eta'^2 \sin (8w-2v_1) + q_{20} \eta'^2 \sin (12w-2v_1) \\
& q_{11} \eta'^2 \sin 4w + q_{21} \eta \eta' \sin (v-v_1) \\
& g_1 \sin 8w + g_2 \eta \sin (4w+v) + g_4 \eta \sin (12w-v) \\
& + g_3 \eta' \sin (4w+v_1) + g_5 \eta' \sin (12w-v_1) + G_Q.
\end{aligned} \right.$$

Przez q oznaczyliśmy współczynniki wyrazów charakterystycznych i elementarnych, zaś g oznacza współczynniki największych wyrazów zwykłych.

Wartości dla poszczególnych współczynników są następujące :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= A_{4.0.0} + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_1 + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_1 + \left\{ \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{2.0} - \frac{1}{4} A_{4.0.0}^{2.0} + \frac{1}{4} A_{12.0.0}^{2.0} \right\} \beta_1^2 \\
 &\quad - \mu \left\{ A_{4.0.0}^{1.0} - 3A_{12.0.0}^{1.0} \right\} \beta_1 \gamma_1 + \mu^2 \left\{ -4A_{4.0.0} - 2A_{4.0.0} + \frac{3}{2} A_{12.0.0} \right\} \gamma_1^2 \\
 q_2 &= \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{+1.1.0} \beta_1 + A_{8.0.0}^{1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_2 - \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_1 - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_6 + \\
 &\quad + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_4 + 2\mu A_{4.1.0}^{+1} \gamma_1 - 2A_{4.1.0}^{-1} \gamma_1 \\
 q_3 &= A_{0.0.1}^{+1} + \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{+1.1.0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_3 - \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_1 + \\
 &\quad + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_5 + 2\mu A_{4.0.1}^{+1} \gamma_1 - 2\mu A_{4.0.1}^{-1} \gamma_1 \\
 q_4 &= A_{4.1.0}^{-1} - \frac{1}{2} A_{0.0.0}^{1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_1 - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_4 + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_6 + \\
 &\quad + 4\mu A_{8.1.0}^{-1} \gamma_1 \\
 q_5 &= A_{4.0.1}^{-1} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_5 - \frac{1}{2} A_{0.0.1}^{+1.1.0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_1 - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_5 + \\
 &\quad + 4\mu A_{8.0.1}^{-1} \gamma_1 \\
 q_6 &= A_{8.1.0}^{-1} + \frac{1}{2} A_{12.1.0}^{-1.1.0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_2 + \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_1 + 6\mu A_{12.1.0}^{-1} \gamma_1 - \\
 &\quad - 4\mu A_{4.1.0}^{-1} \gamma_1 \\
 q_7 &= A_{8.0.1}^{-1} + \frac{1}{2} A_{12.0.1}^{-1.1.0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_1 + 6\mu A_{12.0.1}^{-1} \gamma_1 - \\
 &\quad - 2\mu A_{4.0.1}^{-1} \gamma_1 \\
 q_8 &= A_{4.2.0} + \frac{1}{2} A_{12.1.0}^{-1.1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_7 - \frac{1}{2} A_{3.1.0}^{-1.1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_2 - \\
 &\quad - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{21} + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_7 + 6\mu A_{12.1.0}^{-1} \gamma_4 - 2\mu A_{4.1.0}^{-1} \gamma_4 \\
 q_9 &= A_{4.1.1}^{+1} + \frac{1}{2} A_{12.0.1}^{-1.1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_9 - \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} A_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_2 - \\
 &\quad - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{22} + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_9 + 6\mu A_{12.0.1}^{-1} \gamma_4 - 2\mu A_{4.1.0}^{-1} \gamma_5 \\
 q_{10} &= A_{4.1.1}^{-1} + \frac{1}{2} A_{12.1.0}^{-1.1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_8 + \frac{1}{2} A_{0.0.1}^{+1.1.0} \beta_2 - \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_4 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} A_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_3 + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_8 + 6\mu A_{12.1.0}^{-1} \gamma_5 - 2\mu A_{4.0.1}^{-1} \gamma_4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{11} &= A_{4.0.2} + \frac{1}{2} A_{12.0.1}^{-1.1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_{10} + \frac{1}{2} A_{0.0.1}^{+1.1.0} \beta_3 - \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_5 + \\
&\quad + \frac{1}{2} A_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_3 + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{10} + 6\mu A_{12.0.1}^{-1} \gamma_5 - 2\mu A_{4.0.1}^{-1} \gamma_5 \\
q_{12} &= A_{4.2.0}^{-2} - \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{+1.1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_{17} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{14} - 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{17} + \\
&\quad + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{20} - 2\mu A_{4.1.0}^{+1} \gamma_4 + 4\mu A_{8.0.1}^{-1} \gamma_6 \\
q_{13} &= A_{4.1.1}^{-1} - \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{+1.1.0} \beta_4 - \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{+1.1.0} \beta_5 - \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_{18} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{15} - \\
&\quad - \frac{1}{2} A_{0.0.1}^{+1.1.0} \beta_2 - 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{18} - 2\mu A_{4.1.0}^{+1} \gamma_5 - 2\mu A_{4.1.0}^{+1} \gamma_4 + 4\mu A_{8.0.1}^{-1} \gamma_6 \\
q_{14} &= A_{4.0.2}^{-2} - \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{+1.1.0} \beta_5 - \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_{19} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{16} - \frac{1}{2} A_{0.1.0}^{+1.1.0} \beta_3 - \\
&\quad - 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{19} - 2\mu A_{4.0.1}^{+1} \gamma_5 \\
q_{15} &= A_{8.2.0}^{-2} + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{11} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{17} + \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_2 - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{11} - \\
&\quad - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{17} + 6\mu A_{12.1.0}^{-1} \gamma_6 \\
q_{16} &= A_{3.1.1}^{-2} + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{12} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{18} - \frac{1}{2} A_{0.1.1}^{+1.1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_3 + \\
&\quad + \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_2 - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{12} - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{18} + 6\mu A_{12.0.1}^{-1} \gamma_6 \\
q_{17} &= A_{8.0.2}^{-2} + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{13} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{19} - \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{3.0.1}^{-1.1.0} \beta_3 - \\
&\quad - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{13} - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_{19} \\
q_{18} &= A_{12.2.0}^{-2} + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_{11} + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{14} + \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_2 - \\
&\quad - 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{11} - 2\mu B_{4.1.0}^{-1} \gamma_4 \\
q_{19} &= A_{12.1.1}^{-2} + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_{12} + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{15} + \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} B_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_4 + \\
&\quad + \frac{1}{2} A_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_2 - 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{12} - 2\mu A_{4.0.1}^{-1} \gamma_4 - 2\mu A_{4.1.0}^{-1} \gamma_5 \\
q_{20} &= A_{12.0.2}^{-2} + \frac{1}{2} A_{8.0.0}^{1.0} \beta_{13} + A_{4.0.0}^{1.0} \beta_{16} + \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_3 - \\
&\quad - 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{13} - 2\mu A_{4.0.1}^{-1} \gamma_5 \\
q_{21} &= A_{0.1.1}^{+1} - \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_8 + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{1.0} \beta_9 - \frac{1}{2} A_{4.1.0}^{-1.1.0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{4.0.1}^{-1.1.0} \beta_2 - \\
&\quad - \frac{1}{2} A_{8.1.0}^{-1.1.0} \beta_5 + \frac{1}{2} A_{8.0.1}^{-1.1.0} \beta_4 - 2\mu A_{4.0.0} \gamma_8 + 2\mu A_{4.0.0} \gamma_9 - \\
&\quad - 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{22} - 2\mu A_{4.0.1}^{+1} \gamma_6 - 4\mu A_{8.1.0}^{-1} \gamma_5 + 4\mu A_{8.0.1}^{-1.0} \gamma_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1 &= A_{8,0,0} + \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{12,0,0}^{1,0} \beta_1 - 2\mu A_{4,0,0} \gamma_1 + 6\mu A_{12,0,0} \gamma_1 \\
 g_2 &= A_{4,1,0}^{+1} + \frac{1}{2} A_{8,0,0}^{1,0} \beta_2 + \frac{1}{2} A_{8,1,0}^{+1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{12,0,0}^{1,0} \beta_4 + 4\mu A_{8,1,0}^{+1} \gamma_1 + 6\mu A_{12,0,0} \gamma_4 \\
 g_3 &= A_{4,0,1}^{+1} + \frac{1}{2} A_{0,0,1}^{+1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{8,0,0}^{1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{8,0,1}^{+1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{12,0,0}^{1,0} \beta_5 + \\
 &\quad + 4\mu A_{8,0,1}^{+1} \gamma_1 + 6\mu A_{12,0,0} \gamma_5 \\
 g_4 &= A_{12,1,0}^{-1} + \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} \beta_4 + \frac{1}{2} A_{8,1,0}^{-1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{8,0,0}^{1,0} \beta_2 - 2\mu A_{4,0,0} \gamma_4 - \\
 &\quad - 4\mu A_{8,1,0}^{-1} \gamma_1 + 8\mu A_{16,0,0} \gamma_6 + 8\mu A_{16,1,0}^{-1} \gamma_1 + \frac{1}{2} A_{16,1,0}^{-1,1,0} \beta_1 \\
 g_5 &= A_{12,0,1}^{-1} + \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} \beta_3 + \frac{1}{2} A_{8,0,1}^{-1,1,0} \beta_1 + \frac{1}{2} A_{8,0,0}^{1,0} \beta_3 - 2\mu A_{4,0,0} \gamma_5 - \\
 &\quad - 4\mu A_{8,0,1}^{-1} \gamma_1 + 8\mu A_{16,0,1}^{-1} \gamma_1 + \frac{1}{2} A_{16,0,1}^{-1,1,0} \beta_1.
 \end{aligned}$$

IV. Całkowanie równań różniczkowych, odnoszących się do ruchu planetoidy (279) Thule.

W rozdziale I, równ. IV, V, VI dają nam wyrażenia różniczkowe współrzędnych Gyldénowskich; w poprzednim rozdziale zdołaliśmy już oddzielić wyrazy typowe odnoszące się do ruchu planetoid. Brendel¹⁾ i Kramer podzielili planetoidy wedle cech ich ruchu na pewne klasy. Według tego podziału planetoidę Thule (279) zalicza się do planetoid pierwszej klasy. W ruchu tej klasy planetoid wyrazy stopnia 0 w R i K są znaczne w porównaniu z masą Jowisza. W tej klasie planetoid wystąpi jeden bardzo znaczny wyraz z w rozwinięciu funkcji R , i ten wyraz, jak to wykazał Brendel²⁾ będzie kształtu D , według oznaczeń Harzer'a czyli charakterystycznym krótkookresowym. Do tej samej klasy co Thule należy także i planetoida Hekuba, której ruch, jak wiemy, był niejednokrotnie badany przy pomocy metod Gyldénowskich³⁾, lub ich modyfikacji. Zasadnicza jednak różnica pomiędzy temi dwiema planetoidami polega na tem, że Thule przybliżając się znacznie do drogi Jowisza, z jednej strony ulega silnym perturbacyom, z drugiej zaś dla tej planetoidy wskutek znacznej

¹⁾ Brendel Th. d. kl. Pl. I, pg. 92; Kramer. Th. d. kl. Pl., pg. 20, str. 199.

²⁾ Brendel. Om amvändningen, str. 26.

³⁾ Patrz prace Harzer'a, Kramer'a, Backlund'a.

bliskości drogi Jowisza i drogi Thule rozwinięcia wedle potęg stosunku osi lub promieni wodzących są bardzo powoli zbieżne. Aby otrzymać wystarczająco zbieżne rozwinięcia perturbacji Thule (tak, aby położenie planetoidy było określone z dokładnością około 1' na przeciąg jednego stulecia) możemy w rozwinięciach współrzędnych i w równ. IV, V, IV wyżej wymienionego rozdziału — pominąć wyrażenia rzędu trzeciej potęgi masy Jowisza, zachować zaś w wyrażeniach 0 stopnia wielkości rzędu trzeciej potęgi masy Jowisza, podzielonej przez mały czynnik ϵ . Natomiast w wyrażeniach I-go i II-go stopnia wystarczy uwzględnić wyrażenia rzędu kwadratu masy zakłócającej, podzielonej przez mały czynnik ϵ , a to dlatego, że w tych wyrazach występuje jeszcze bardzo mały czynnik η lub η' w pierwszej i drugiej potędze. W rozdziale VII pierwszej części swojej „Theorie der kleinen Planeten“ Brendel podał równania różniczkowe, wyrażające $\frac{d^2\rho}{dv^2}$ i $\frac{ds}{dv}$.

Ponieważ w zadaniu naszym postanowiliśmy się ograniczyć do wielkości rzędu do trzeciej potęgi masy ciała zakłócającego, dlatego też musimy rozwinięcie Brendel'a jeszcze dopełnić w sposób analogiczny, jak to zrobił Kramer dla Hekuby¹⁾. Gdy dodamy do wzorów Brendel'a, odnoszących się do ruchów Hekuby, wyrazy dopełniające, otrzymamy wtedy, z wystarczającą zupełnością dla naszego celu dokładnością, wzory różniczkowe na związki pomiędzy współrzędnymi Gyldeńowskimi dla planetoidy I klasy.

Ogólnie każdą funkcję zależną od v to znaczy Q, P, R, S, K, W i t. p. napiszemy w ten sposób, że wydzielimy w oddzielną grupę wyrazy 0, 1, 2 i t. d. stopnia i każdą grupę opatrzymy wskaźnikiem, który oznaczać nam będzie stopień uważanego wyrazu, np.

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 \dots$$

znaczy, że funkcya Q składa się z wyrazów stopnia 0, 1, 2 i t. d. Na stopień i rząd dwu wyrazów musimy zwracać baczną uwagę przy mnożeniu odnośnych wielkości, aby w wartościach $P, Q, R \dots$ nie otrzymać błędu większego od $\frac{1}{10^3}$. Zajmijmy się wyznaczeniem tych wyrazów dopełniających.

¹⁾ Kramer. Th. d. kl. Planeten, I, pg. 44, 46 sqq. sparsim; Brendel, l. c. pg. 139.

Mieliśmy

$$\rho = (\rho) + R,$$

gdzie (ρ) zawiera w sobie wszystkie wyrazy elementarne kształtu B , zaś w R są zgrupowane wszystkie wyrazy elementarne kształtu A , oraz charakterystyczne kształtu C i D . Stąd otrzymamy:

$$\frac{d\rho}{dv} = \frac{d(\rho)}{dv} + \frac{dR}{dv}$$

$\frac{dR}{dv}$ możemy napisać w postaci

$$\frac{dR}{dv} = \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 + \left(\frac{dR}{dv}\right)_1 + \left(\frac{dR}{dv}\right)_2$$

gdzie wskaźniki 0, 1, 2 oznaczają stopień odnośnych części w rozłożeniu $\frac{dR}{dv}$.

Analogicznie będziemy mogli napisać:

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 \quad \text{i} \quad S = S_0 + S_1 + S_2.$$

W rozwinięciu R występują współczynniki β , które, jak wiemy, są rzędu $\frac{m'}{\delta}$ (pg. 50) a więc wyrazy zależne od $(Q_0 + Q_1 + Q_2) \frac{dR}{dv_0}$ wejdą w nasze rozwinięcie. Wskutek różniczkowania wyrażań długookresowych R_1 i R_2 , gdy tworzyć będziemy wielkości $\frac{dR}{dv_1}$ i $\frac{dR}{dv_2}$, współczynniki β w tych wyrazach będą pomnożone przez mały czynnik δ_1 , przez co te wyrażenia staną się rzędu istotnie masy zakłócającej. Gdy zaś otrzymane wyrażenia zostaną pomnożone przez funkcję Q , która jest rzędu masy zakłócającej, to w rezultacie otrzymamy wielkości rzędu kwadratu masy zakłócającej, które będziemy musieli jeszcze uwzględnić. Zatem mieć będziemy:

$$(Q_0 + Q) \left(\frac{dR}{dv}\right)_p$$

gdzie wskaźnik p oznacza, że w $\frac{dR}{dv}$ uwzględnimy tylko niektóre wyrazy, mianowicie te, które są kształtu C . Podobnie przybędzie

jeszcze i wyraz $-Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)$. Ponieważ S jest rzędu m' , to iloczyny następujące będą musiały być uwzględnione:

$$\begin{aligned} & -2S_0 Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0; \quad -2S_1 P_0 \quad \text{i} \quad -2S_1 P_2; \quad -2S_0 S_2^{(A, C)}, \\ & +2S_1^{(A, C)} Q_0 \eta \sin v, \quad + (S_1^{(A, C)})^2, \end{aligned}$$

gdzie przez wskaźnik (A, C) zaznaczam, że tylko tego kształtu wyrazy w odnośnym rozwinięciu są uwzględnione. Ponieważ dalej $\frac{d\eta^2}{dv}$ jest stopnia 2-go ale rzędu masy zakłócającej, przeto będziemy

musieli uwzględnić jeszcze wyrazy $-2 \frac{d\eta^2}{dv} \left(\frac{dR}{dv} \right)_0$ będące jeszcze drugiego stopnia. W ten sposób w wyrażeniu różniczkowym dającym ρ jako funkcję v zostaną uwzględnione wszystkie wyrazy, aż do rzędu trzeciej potęgi masy zakłócającej włącznie.

Gdy do wyrazów podanych przez Brendel'a (l. c. kap. VII) dodamy jeszcze wyżej wymienione wyrazy (porówn. Kramer I, pg. 42 et sq.), to otrzymamy poszukiwane rozwinięcie postaci następującej:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho = 2S_0 - P_0 - Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 - 2S_0 Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 + \\ & + 2S_1 - P_1 - 2S^{(A, C)} P_0 + 2S_0 S_1^{(A, C)} + \\ & + Q_0 \eta \sin v - Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_{1p} - Q_1 \left(\frac{dR}{dv} \right)_{0p} + \\ & + 2S_2 - P_2 - 2S_1^{(A, C)} P_1 - 2S_2^{(A, C)} P_0 + \\ & + 2S_0 (S_2^{(A, C)} + S_1^{(A, C)})^2 + Q_1 \eta \sin v - \\ & - Q_2 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 - Q_1 \left(\frac{dR}{dv} \right)_{1p} - Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_{2p} + \\ & + 2S_1^{(A, C)} Q_0 \eta \sin v - 2 \frac{d\eta^2}{dv} \left(\frac{dR}{dv} \right)_0. \end{aligned} \right.$$

Ograniczając się do takiego samego stopnia dokładności, otrzymamy analogicznie drugie równanie następujące: ¹⁾

$$(2) \frac{dS}{dv} = -Q_0 - Q_1 - Q_2 - 3S_1^{(c)}Q_0 - 3S_2^{(c)}Q_0 - 3S_1^{(c)}Q_1 - \frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{dv}.$$

Równ. (1) i (2) są właśnie równaniami szukanymi. Zajmiemy się obecnie całkowaniem. Zanim jednak to zrobimy, musimy równ. (1) i (2) jeszcze cokolwiek przekształcić. Wielkości P i Q składają się z szeregów, w których występują współczynniki nieoznaczone. Np. w R mieliśmy różne współczynniki β , w drugich zaś funkcjach współczynniki α i γ . Aby sobie ułatwić zadanie, postaramy zgodnie z myślą przewodnią Brendel'a ²⁾ wyrazić wszystkie współczynniki α i γ przez współczynniki β ; w ten sposób uzyskamy wielkie uproszczenie naszych wzorów. Ponieważ w tej pracy ograniczamy się do rozwinięć liczbowych nie idących dalej, niż drugi stopień (Thule posiada bardzo mały mimośród — przeto w pierwszym przybliżeniu; pomijając wyrazy wyższych rzędów, niż pierwszy względem mimośrodu, nie popełniamy wielkiej niedokładności), możemy napisać następujące przybliżone wyrażenia, które zawierać będą wyrazy do I-go stopnia włącznie, mianowicie:

$$(3) \quad S = \alpha_2 \eta \cos(4w - v) + \alpha_3 \eta' \cos(4w - v_1)$$

(w tej funkcji S są znaczne wyrazy typu C)

oraz

$$(4) \quad R = \beta_1 \cos 4w + \beta_2 \eta \cos(4w - v) + \beta_3 \eta' \cos(4w - v_1) + \\ + \beta_4 \eta \cos(8w - v) + \beta_5 \eta' \cos(8w - v_1).$$

(Widzimy, że w R występują wyrazy charakterystyczne typu C i D). Ale z (1) uwzględniając definicję dla R , otrzymamy:

$$\frac{d^2 R}{dv^2} + R = 2S \dots$$

a ponieważ

$$\frac{d^2 R}{dv^2}$$

¹⁾ Ludendorff, l. c., Kap. II sparsim.; Kramer, l. c., pg. 43, 51.

²⁾ Brendel. Th. d. kl. Planeten I, p. 134; Ludendorff, l. c., pg. 8; Kramer id. p. 24; Brendel: Om amvändningen, pg. 29.

jest co najwyżej rzędu iloczynu masy zakłócającej przez mały czynnik, więc możemy je opuścić, wtedy otrzymamy

$$R = 2S,$$

czyli

$$(5) \quad R = 2\alpha_2\eta \cos(4w - v) + 2\alpha_3\eta' \cos(4w - v_1).$$

Uwzględniając (4) i (5) jednocześnie otrzymamy z łatwością¹⁾

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\beta_2; \quad \beta_2 = \frac{1}{2}\beta_3.$$

Przystąpmy teraz do wyznaczenia współczynników

$$\gamma_n \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots, 6).$$

Mieliśmy na str. 20 wyrażenie VI, dające nam $\frac{dW}{dv}$ w funkcji R i S mianowicie:

$$(6) \quad \frac{dW}{dv} = -2R_0 + S_1 = 2R_1 + 6R_0\eta \cos v + \dots$$

Z drugiej zaś strony mieliśmy na str. 37:

$$W = \bar{\gamma}v + W_a + K,$$

gdzie $\bar{\gamma}v$ oznacza wyrazy wiekowe.

Po zrózniczkowaniu otrzymujemy:

$$(a) \quad \frac{dW}{dv} = \bar{\gamma} + \frac{dW_a}{dv} + \frac{dK}{dv} \dots$$

ale

$$(b) \quad K = \gamma_1 \sin 4w + \gamma_4\eta \sin(8w - v) + \gamma_6\eta \sin(4w + v) + \gamma_5\eta' \sin(8w - v),$$

gdzie

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 + \gamma;$$

oraz część długookresową

$$(c) \quad \frac{dW_a}{dv} = \gamma_2\eta \cos(4w - v) + \gamma_3\eta' \cos(4w - v) - \gamma_0 \dots$$

¹⁾ Brendel. Th. d. kl. Planeten, p. 134.

Wyznamy te spóczynniki wyrazów z dokładnością większą, niż α i β , mianowicie będziemy musieli pominąć dopiero wyrażenia 3-go rzędu, a z wyrażen 2-go rzędu te, które są istotnie rzędu pierwszego lub wyższego, przeto wyrażenie (6) możemy także napisać w postaci następującej:

$$(7) \quad \frac{dW}{dv} = \gamma - 2\beta_1 \cos 4w + (\alpha_2 - 2\beta_2 + 3\beta_1\beta_4)\eta \cos(4w-v) + \\ + (\alpha_2 - 2\beta_3 + 3\beta_1\beta_5)\eta' \cos(4w-v_1) - 2\beta_4\eta \cos(8w-v) - \\ - 2\beta_5\eta' \cos(8w-v_1) + 3\beta_1\eta \cos(4w+v).$$

Z drugiej zaś strony uwzględniając (a), (b) i (c) oraz (10) otrzymamy:

$$(8) \quad \frac{dW}{dv} = \bar{\gamma} + (1 + \delta_1)\gamma_1 \cos 4w + \gamma_2\eta \cos(4w-v) + \\ + (1 + 2\delta_1)\gamma_4\eta \cos(8w-v) + \gamma_3\eta' \cos(4w-v_1) + \\ + (1 + 2\delta_1)\gamma_5\eta' \cos(8w-v) + (2 + \delta_1)\gamma_6\eta \cos(4w+v).$$

Z (7) i (8) wynika, że:

$$\left(\frac{dW}{dv}\right)_p = (1 + \delta_1)\gamma_1 \cos 4w + \gamma_2\eta \cos(4w-v) + \\ + (1 + 2\delta_1)\gamma_4\eta \cos(8w-v) + \gamma_3\eta' \cos(4w-v_1) + \\ + (1 + 2\delta_1)\gamma_5\eta' \cos(8w-v) + (2 + \delta_1)\gamma_6\eta \cos(4w+v) = \\ (9) = -2\beta_1 \cos 4w + (\alpha_2 - 2\beta_2 + 3\beta_1\beta_4)\eta \cos(4w-v) + \\ + (\alpha_2 - 2\beta_3 + 3\beta_1\beta_5)\eta' \cos(4w-v) - 2\beta_4\eta \cos(8w-v) - \\ - 2\beta_5\eta' \cos(8w-v) + 3\beta_1\eta \cos(4w+v).$$

Z (9) z łatwością otrzymujemy związki następujące ¹⁾:

$$(10) \quad \gamma_1 = -\frac{2\beta_1}{1 + \delta_1}; \quad \gamma_2 = 3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 + \beta_1\beta_4; \\ \gamma_3 = -\frac{3}{2}\beta_3 + 3\beta_1\beta_5; \quad \gamma_4 = -\frac{2\beta_4}{1 + 2\delta_1}; \\ \gamma_5 = -\frac{2\beta_5}{1 + 2\delta_1}; \quad \gamma_6 = \frac{3\beta_1}{2 + \delta_1}.$$

¹⁾ Brendel I, pg. 142; Ludendorff, l. c. § 4.

Gdybyśmy w wyrażeniu γ_n ograniczyli się do takiego samego stopnia dokładności, z jaką wyznaczyliśmy α_n , to otrzymalibyśmy wzory następujące:

$$(11) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= -2\beta_1; & \gamma_2 &= 3\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2; \\ \gamma_3 &= -\frac{3}{2}\beta_3; & \gamma_4 &= -2\beta_4; & \gamma_5 &= -2\beta_5; \\ \gamma_6 &= \frac{3}{2}\beta_1. \end{aligned}$$

Na str. 57 mieliśmy wzór dla Q , w którym występowały współczynniki $q_1, q_2 \dots$; napiszmy ten wzór, ograniczając się do wyrazów pierwszego rzędu tylko, mieć wtedy będziemy:

$$(12) \quad \begin{aligned} Q &= q_1 \sin 4w + q_2 \eta \sin v + q_4 \eta \sin (4w - v) + \\ &+ q_6 \eta \sin (8w - v) + q_3 \eta' \sin v_1 + q_5 \eta' \sin (4w - v_1) + \\ &+ q_2 \eta' \sin (8w - v_1). \end{aligned}$$

Ale na zasadzie związków, wypisanych na str. 58, 59, widzimy, że wszystkie współczynniki q są także funkcjami współczynników γ i β .

Zamieńmy w odnośnych współczynnikach wszystkie γ i β , posługując się związkami (10) i (11) i uporządkujmy rezultat tak, aby współczynnik β występował jako czynnik, wtedy otrzymamy związki następujące:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} q_1 &= q_1^{(0)} + q_1^{(1)}\beta_1 + q_1^{(1)}\beta_1^2 \\ q_2 &= q_2^{(0)} + q_2^{(1)}\beta_1 + q_2^{(2)}\beta_2 + q_2^{(4)}\beta_4 \\ q_3 &= q_3^{(0)} + q_3^{(1)}\beta_1 + q_3^{(3)}\beta_3 + q_3^{(5)}\beta_5 \\ q_4 &= q_4^{(0)} + q_4^{(1)}\beta_1 + q_4^{(4)}\beta_4 \\ q_5 &= q_5^{(0)} + q_5^{(1)}\beta_1 + q_5^{(5)}\beta_5 \\ q_6 &= q_6^{(0)} + q_6^{(1)}\beta_1 + q_6^{(2)}\beta_2 \\ q_7 &= q_7^{(0)} + q_7^{(1)}\beta_1 + q_7^{(3)}\beta_3 \end{aligned} \right.$$

Analogicznie mieliśmy także w owym wyrażeniu dla Q część wyrazów zwykłych w postaci następującej:

$$\begin{aligned} Q_2 &= g_1 \sin 8w + g_2 \eta \sin (4w + v) + g_4 \eta \sin (12w - v) + \\ &+ g_3 \eta' \sin (4w + v_1) + g_5 \eta' \sin (12w - v_1) \end{aligned}$$

będziemy więc mogli napisać dla współczynników g wyrażenia następujące:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 = g_1^{(0)} + g_1^{(1)} \beta_1 \\ g_2 = g_2^{(0)} + g_2^{(1)} \beta_1 + g_2^{(2)} \beta_2 + g_2^{(4)} \beta_4 \\ g_3 = g_3^{(0)} + g_3^{(1)} \beta_1 + g_3^{(3)} \beta_3 + g_3^{(5)} \beta_5 \\ g_4 = g_4^{(0)} + g_4^{(1)} \beta_1 + g_4^{(2)} \beta_2 + g_4^{(4)} \beta_4 \\ g_5 = g_5^{(1)} + g_5^{(1)} \beta_1 + g_5^{(3)} \beta_3 + g_5^{(5)} \beta_5 \end{array} \right.$$

Z (13 i (14) oraz ze związków na str. 58 i 59 widzimy, że współczynniki $q^{(m)}$ są funkcjami wielkości A i μ , a więc są to wielkości liczbowe, które będziemy mogli bez trudności obliczyć.

Zatem mieć będziemy:

$$(15) \quad \begin{aligned} q_1^0 &= A_{4,0,0}; & q_1^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{8,0,0}^{1,0} - 8\mu A_{8,0,0} \\ \bar{q}_1^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{2,0} - \frac{1}{4} A_{4,0,0}^{2,0} + \frac{1}{4} A_{12,0,0}^{2,0} + \mu (A_{4,0,0}^{1,0} - \frac{3}{2} A_{12,0,0}^{1,0}) - \\ &\quad - 4\mu^2 A_{4,0,0} - 8A_{4,0,0} + 62 A_{12,0,0} \\ q_2^0 &= 0; & q_2^{(1)} &= \frac{1}{2} (A_{4,1,0}^{+1,1,0} + A_{4,0,0}^{1,0}) - \mu (3A_{4,0,0} + 4A_{4,1,0}^{+1}) + 4A_{4,1,0}^{-1} \\ q_2^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0}; & q_2^{(4)} &= \frac{1}{2} A_{8,0,0}^{1,0} - 8\mu A_{8,0,0} \\ q_3^{(0)} &= A_{5,0,1}^{+1}; & q_3^{(1)} &= \frac{1}{2} [A_{4,0,1}^{+1,1,0} - A_{4,0,1}^{-1,1,0} - 8\mu (A_{4,0,1}^{+1} - A_{4,0,1}^{-1})] \\ q_3^{(3)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0}; & q_3^{(5)} &= \frac{1}{2} A_{8,0,0}^{1,0} - 8\mu A_{8,0,0} \\ q_4^{(0)} &= A_{4,1,0}^{-1}; & q_4^{(1)} &= \frac{1}{2} A_{8,1,0}^{-1,1,0} - 2\mu (4A_{8,1,0}^{-1} - 3A_{8,0,0}); \\ & & q_4^{(4)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 4\mu A_{4,0,0}; \\ q_5^{(0)} &= A_{4,0,1}^{-1}; & q_5^{(1)} &= \frac{1}{2} (A_{8,0,1}^{-1,1,0} - A_{0,0,1}^{+1,1,0} - 16\mu A_{8,0,1}^{-1}); \\ & & q_5^{(5)} &= -\frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0} + 4\mu A_{4,0,0}; \\ q_6^{(0)} &= A_{8,1,0}^{-1}; & q_6^{(1)} &= \frac{1}{2} (A_{12,1,0}^{-1,1,0} + A_{4,1,0}^{-1,1,0}) - 4\mu (3A_{12,1,0}^{-1} - 2A_{4,1,0}^{-1}); \\ & & q_6^{(2)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0}; \\ q_7^{(0)} &= A_{8,0,1}^{-1}; & q_7^{(1)} &= \frac{1}{2} (A_{12,0,1}^{-1,1,0} + A_{4,0,1}^{-1,1,0}) - 4\mu (3A_{12,0,1}^{-1} - A_{4,0,1}^{-1}); \\ & & q_7^{(5)} &= \frac{1}{2} A_{4,0,0}^{1,0}; \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad g_1^{(0)} &= A_{8,0,0}; & g_1^{(1)} &= \frac{1}{2}(A_{4,0,0}^{1,0} + A_{12,0,0}^{1,0}) + 4\mu(A_{4,0,0} - 3A_{12,0,0}); \\
 g_2^{(0)} &= A_{4,1,0}^{+1}; & g_2^{(1)} &= \frac{1}{2}A_{8,1,0}^{+1,0} - 8\mu A_{8,1,0}^{+1}; & g_2^{(2)} &= \frac{1}{2}A_{8,0,0}^{1,0}; \\
 & & g_2^{(4)} &= \frac{1}{2}A_{12,0,0}^{1,0} - 12\mu A_{12,0,0}; \\
 g_3^{(0)} &= A_{4,0,1}^{+1} + \frac{1}{2}(A_{0,0,1}^{+1,1,0} + A_{8,0,1}^{+1,1,0}) - 8\mu A_{8,0,1}^{+1}; & g_3^{(3)} &= A_{8,0,0}^{1,0}; \\
 & & g_3^{(5)} &= \frac{1}{2}A_{12,0,0}^{1,0} - 12\mu A_{12,0,0}; \\
 g_4^{(0)} &= A_{12,1,0}^{-1}; & g_4^{(1)} &= \frac{1}{2}(A_{8,1,0}^{-1,1,0} + A_{16,1,0}^{-1,1,0}) + 2\mu(A_{8,1,0}^{-1} + \\
 & & & + 3A_{16,0,0} - 8A_{16,1,0}^{-1}); \\
 g_4^{(2)} &= \frac{1}{2}A_{8,0,0}^{1,0}; & g_4^{(4)} &= \frac{1}{2}(A_{4,0,0}^{1,0} + \mu A_{4,0,0}); \\
 g_5^{(0)} &= A_{12,0,1}^{-1}; & g_5^{(1)} &= \frac{1}{2}(A_{8,0,1}^{-1,1,0} + A_{16,0,1}^{-1,1,0} + \\
 & & & + 8\mu(A_{8,0,1}^{-1} - 2A_{16,0,1}^{-1}); \\
 g_5^{(3)} &= \frac{1}{2}(A_{4,0,0}^{1,0} + 8\mu A_{4,0,0}).
 \end{aligned}$$

Zupełnie analogicznie postępując będziemy mogli napisać funkcję P w postaci następującej:

$$\begin{aligned}
 P &= p_0 + p_1 \cos 4w + p_2 \eta \cos v + p_4 \eta \cos (4w - v) + \\
 & + p_6 \eta \cos (8w + v) + p_3 \eta' \cos v_1 + p_5 \eta' \cos (4w - v_1) + \\
 & + p_7 \eta' \cos (8w - v_1)
 \end{aligned}$$

gdzie współczynniki p mają wartości następujące:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned}
 p_0 &= p_0^{(0)} + p_0^{(1)}\beta_1 + \overline{p_0^{(1)}}\beta_1^2 \\
 p_1 &= p_1^{(0)} + p_1^{(1)}\beta_1 + \overline{p_1^{(1)}}\beta_1^2 \\
 p_2 &= p_2^{(0)} + p_2^{(1)}\beta_1 + p_2^{(2)}\beta_2 + p_2^{(4)}\beta_4 \\
 p_4 &= p_4^{(0)} + p_4^{(1)}\beta_1 + p_4^{(3)}\beta_3 + p_4^{(5)}\beta_5 \\
 p_4 &= p_4^{(0)} + p_4^{(1)}\beta_1 + p_4^{(2)}\beta_2 + p_4^{(4)}\beta_4 \\
 p_5 &= p_5^{(0)} + p_5^{(1)}\beta_1 + p_5^{(3)}\beta_3 + p_5^{(5)}\beta_5 \\
 p_6 &= p_6^{(0)} + p_6^{(1)}\beta_1 + p_6^{(2)}\beta_2 + p_6^{(4)}\beta_4 \\
 p_7 &= p_7^{(0)} + p_7^{(1)}\beta_1 + p_7^{(3)}\beta_3 + p_7^{(5)}\beta_5
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
(18) \quad p_0^{(0)} &= B_{0,0,0}; \quad p_0^{(1)} = \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 4\mu B_{4,0,0}; \quad \bar{p}_0^{(1)} = \frac{1}{2} B_{0,0,0}^{2,0}; \\
p_1^{(0)} &= B_{4,0,0}; \quad p_1^1 = B_{0,6,0}^{1,0} + \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} - 8\mu B_{8,0,0}; \\
\bar{p}_1^{(1)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{2,0} + \frac{1}{4} (B_{4,0,0}^{2,0} + B_{12,0,0}^{2,0}) - 2\mu (B_{4,0,0}^{1,0} + 3B_{12,0,0}^{1,0}) + \\
&\quad + 2\mu^2 (31 B_{12,0,0} - 4B_{4,0,0}); \\
p_2^{(0)} &= B_{0,1,0}^{(+1)}; \quad p_2^{(1)} = \frac{1}{2} (B_{4,1,0}^{+1,1,0} + B_{4,1,0}^{-1,1,0}) - \mu (4B_{4,1,0}^{+1} + \\
&\quad + 4B_{4,1,0}^{-1} - 3B_{4,0,0}); \\
p_2^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0}; \quad p_2^{(4)} = \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} - 8\mu B_{8,0,0}; \\
p_3^{(0)} &= B_{0,0,1}^{+1}; \quad p_3^{(1)} = \frac{1}{2} (B_{4,0,1}^{+1,1,0} + B_{4,0,1}^{-1,1,0}) - 4\mu (B_{4,0,1}^{+1} + \\
&\quad + B_{4,0,1}^{-1}); \quad p_3^{(3)} = \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0}; \quad p_3^{(5)} = \frac{1}{2} B_{8,0,0}^{1,0} - 8\mu B_{8,0,0}; \\
p_4^{(0)} &= B_{4,1,0}^{-1}; \quad p_4^{(1)} = \frac{1}{2} (B_{0,1,0}^{+1,1,0} + B_{4,1,0}^{-1,1,0}) - 2\mu (4B_{8,1,0}^{-1} - \\
&\quad - 3B_{8,0,0}); \quad p_4^{(4)} = \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 4\mu B_{4,0,0}; \\
p_5^{(0)} &= B_{4,0,1}^{-1}; \quad p_5^{(1)} = \frac{1}{2} (B_{0,0,1}^{+1,1,0} + B_{4,0,1}^{-1,1,0}) - 8\mu B_{8,0,1}^{-1}; \\
p_5^{(3)} &= + B_{0,0,0}^{1,0} + \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0}; \quad p_5^{(5)} = \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} - 4\mu B_{4,0,0}; \\
p_6^{(0)} &= B_{8,1,0}^{-1}; \quad p_6^{(1)} = B_{12,1,0}^{-1,1,0} + \frac{1}{2} B_{4,1,0}^{-1,1,0} - 4\mu (3B_{12,1,0}^{-1} + B_{4,1,0}^{-1}); \\
p_6^{(2)} &= \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0}; \quad p_6^{(4)} = + B_{0,0,0}^{1,0}; \\
p_7^{(0)} &= B_{8,0,1}^{-1}; \quad p_7^{(1)} = \frac{1}{2} (B_{12,0,1}^{-1,1,0} + B_{4,0,1}^{-1,1,0}) - 4\mu (3B_{12,0,1}^{-1} + \\
&\quad + B_{4,0,1}^{-1}); \quad p_7^{(3)} = \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0}; \quad p_7^{(5)} = B_{0,0,0}^{1,0}.
\end{aligned}$$

W ten sposób mamy więc już w granicach przybliżenia, które zamierzaliśmy osiągnąć, wyznaczone wszystkie współczynniki rozwinięć P i Q , jako funkcje pewnych arytmetycznych wielkości, które, jak to później zobaczymy, możemy zawsze bez wielkich trudności obliczyć.

Przejdziemy teraz do właściwego całkowania naszych równań różniczkowych zasadniczych. Całkowanie tych równań wykonamy zgodnie z metodą wskazaną przez Brendel'a¹⁾, którą

¹⁾ Brendel. Th. d. kl. Pl. I kap. VII; II kap. III.

z wielkim powodzeniem zastosowali Ludendorff, Buchholz i Kramer. W niniejszej pracy ograniczymy się, przy całkowaniu naszych równań, do wielkości zerowego stopnia aż do rzędu trzeciego włącznie.

Zacznijmy od całkowania równania dającego nam $\frac{dS}{dv}$; gdy się ograniczymy do wyrazów rzędu O , wtedy ze wzoru (2) otrzymamy

$$\frac{dS}{dv} = -Q_0,$$

ale na zasadzie wzoru (12) jest

$$Q_0 = 4q_1 \sin 4w,$$

a zatem

$$(19) \quad \frac{dS}{dv} = -4q_1 \sin 4w$$

a ponieważ

$$w = (1 - \mu_2)v - B - \mu W_d$$

zawiera w sobie wyrazy okresowe rzędu wyższego, niż zerowy (a także i wyraz wiekowy, jak wiemy), to po całkowaniu w S wystąpią dzięki tej zmienności argumentu w , wyrazy rzędu conajmniej pierwszego, ponieważ w S_0 niema wyrazów zerowego rzędu kształtu A i C .

Całkując (19) otrzymamy:

$$(20) \quad S_0 = a_0 + a_1 \cos 4w + \text{wyrazy zwykłe.}$$

Zastanówmy się bliżej nad otrzymanym rezultatem (20). Przedewszystkiem wyrazy zwykłe, które oznaczmy $S_{n,0,0}$ otrzymamy z następującego wzoru:

$$\left(\frac{dS}{dv}\right) = -\Sigma A_{n,0,0} \sin nw$$

gdzie $n = 8, 12, \dots$; po scałkowaniu wyrazów zwykłych mieć będziemy:

$$(21) \quad S_{n,0,0} = \frac{A_{n,0,0}}{\frac{n}{4}(1 + \delta_1)} \cos nw;$$

W wyrażeniu (20) wyraz a_0 jest to pewna stała¹⁾, którą póź-

¹⁾ Brendel. A. N., 3346.

niej określimy. Aby wyznaczyć współczynnik a_1 zwróćmy się do wzoru dającego nam Q w funkcji współczynników A oraz argumentu w (pg. 55) uwzględniając związki (3) pg. 37 (10) pg. 46 oraz pg. 58 et seq. przez różniczkowanie otrzymamy:

$$4(1-\mu_1)A_{4.0.0} + 2(1-\mu_1)A_{8.0.0}^{1.0} + 16\mu_1(1-\mu_1)A_{8.0.0}\gamma_1 + \\ + \{(1-\mu_1)A_{4.0.0}^{2.0} + (1-\mu_1)A_{12.0.0}^{2.0}\}\beta_1^2 - \mu_1\{4(1-\mu_1)A_{4.0.0}^{1.0} - \\ - 12(1-\mu_1)A_{12.0.0}^{1.0}\}\beta_1\gamma_1 + \mu_1^2\} - 24(1-\mu_1)A_{4.0.0} + 62(1-\mu_1)A_{12.0.0}\gamma_1^2$$

po scałkowaniu otrzymamy: $a_1 =$

$$(a) \left\{ \begin{aligned} & \frac{A_{4.0.0}}{4(1-\mu_1)} + \frac{A_{8.0.0}^{1.0}}{8(1-\mu_1)}\beta_1 + \mu_1 \frac{A_{8.0.0}}{(1-\mu_1)}\gamma_1 + \left\{ \frac{1}{16} \frac{A_{4.0.0}^{2.0}}{(1-\mu_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \cdot \frac{A_{12.0.0}^{2.0}}{(1-\mu_1)} \right\} \beta_1^2 - \mu_1 \left\{ \frac{A_{4.0.0}^{1.0}}{4(1-\mu_1)} - \frac{3A_{12.0.0}^{1.0}}{4(1-\mu_1)} \right\} \beta_1\gamma_1 + \\ & \left. + \frac{\mu_1^2}{2} \left\{ \frac{31}{4} \frac{A_{12.0.0}}{(1-\mu_1)} - 3 \frac{A_{4.0.0}}{(1-\mu_1)} \right\} \gamma_1^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

ale

$$1 - \mu_1 = \frac{1 + \delta_1}{4}$$

oraz

$$\gamma_1 = -\frac{2\beta_1}{1 + \delta_1}$$

Uwzględnijmy te związki i uporządkujmy (a) według potęg rosnących β , wtedy otrzymamy:

$$(22) \quad a_1 = q' + q''\beta_1 + q'''\beta_1^2 + \dots$$

gdzie dla krótkości napisaliśmy:

$$(22^{bis}) \left\{ \begin{aligned} q' &= \frac{A_{4.0.0}}{1 + \delta_1} \\ q'' &= \frac{A_{8.0.0}^{1.0}}{2(1 + \delta_1)} - \frac{8\mu_1 A_{8.0.0}}{(1 + \delta_1)^2} \\ q''' &= \frac{A_{4.0.0}^{2.0}}{2(1 + \delta_1)} - \frac{A_{4.0.0}^{2.0}}{4(1 + \delta_1)} + \frac{A_{12.0.0}^{2.0}}{4(1 + \delta_1)} + \frac{2\mu_1 A_{4.0.0}^{1.0}}{(1 + \delta_1)^2} - \\ & \quad - \frac{6\mu_1 A_{12.0.0}^{1.0}}{(1 + \delta_1)^2} - \frac{16\mu_1^2 A_{4.0.0}}{(1 + \delta_1)^3} - \frac{8\mu_1^2 A_{4.0.0}}{(1 + \delta_1)^3} + \frac{62\mu_1^2 A_{12.0.0}}{(1 + \delta_1)^3} \end{aligned} \right.$$

Wyrażenie (20) po uwzględnieniu (22) przejdzie w następujące:

$$(23) \quad S_0 = a_0 + (q' + q''\beta_1 + q''' \beta_1^2) \cos 4w + S_{n,0,0}.$$

W wyrażeniu (23) możemy już wszystkie wyrazy obliczyć, z wyjątkiem tylko stałej całkowania a_0 , którą na końcu wyznaczymy po scałkowaniu równań, odnoszących się do pozostałych współrzędnych Gyldeń'owskich.

Przejdźmy do scałkowania równania różniczkowego, odnoszącego się do współrzędnej R . Ponieważ obecnie chcemy pominąć wielkości stopnia pierwszego, więc przedewszystkiem musimy zauważyć, że $(\rho)_0 = 0$, gdyż w (ρ) , jak wiemy¹⁾, występują tylko wyrazy krótkookresowe kształtu B , których najniższych stopień jest pierwszy. Mieć więc będziemy ze wzoru (1) str. 63²⁾:

$$(24) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = 2S_0 - P_0 - Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0$$

gdź

$$\rho = (\rho) + R.$$

Analogicznie do tego, jak poprzednio pisaliśmy, wielkość Q_0 , możemy napisać:

$$P_0 = p_0 + p_1 \cos 4w.$$

S_0 znamy już ze wzoru (23), zatem w (24) pozostaje nam obliczyć tylko wielkość

$$Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0, \quad ^3)$$

otóż wzór (46) str. 34 daje nam:

$$(25) \quad Q_0 = \Sigma A_{n,0,0} \sin n w + R_0 \Sigma A_{n,0,0}^{1,0} \sin n w - \mu K \Sigma n A_{n,0,0} \cos n w,$$

zaś z (12) str. 48 znajdziemy:

$$(26) \quad \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 = -4\beta_1 \sin 4w \frac{dw}{dv}$$

czyli uwzględniając (10) str. 46 znajdziemy:

¹⁾ Brendel, l. c., pg. 29.

²⁾ Brendel, l. c. pg. 90.

³⁾ Brendel, l. c. pg. 123.

$$(27) \quad \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -\beta_1(1 + \delta_1) \sin 4w.$$

Pomnóżmy (25) przez (26), otrzymamy:

$$(28) \quad Q_0 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = \Sigma A_{n,0,0} \sin nw \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 + R_0 \Sigma A_{n,0,0}^{1,0} \sin nw \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 - \\ - \mu K \Sigma n \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 A_{n,0,0} \cos . n w$$

ale

$$R_0 = -\beta_1 \cos 4w,$$

a więc

$$(29) \quad R_0 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -\beta_1^2 (1 + \delta_1) \cos 4w \cdot \sin 4w = -\frac{1}{2} \beta_1^2 (1 + \delta_1) \sin 8w$$

$$K_0 = \gamma_1 \sin 4w$$

mieć więc będziemy:

$$(30) \quad K_0 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 = -\gamma_1 \beta_1 \sin 4w \cdot \cos 4w = (\cos 8w - 1) \frac{\gamma_1 \beta_1}{2} (1 + \delta_1).$$

W (28) wyrazy krótkookresowe będą te, dla których wskaźnik n przyjmować będzie wartość 4, 8 lub 12 a więc mieć będziemy:

$$(31) \quad \left[Q_0 \left(\frac{dR}{dv}\right)_0 \right]_p = -\frac{(1 + \delta_1)}{2} (A_{4,0,0} + A_{8,0,0} \cos 4w) \beta_1 - \\ - \frac{(1 + \delta_1)}{4} \{ A_{4,0,0}^{1,0} + A_{12,0,0}^{1,0} \} \beta_1 \cos 4w + \\ + \mu (1 + \delta_1) \{ A_{4,0,0} - 3 A_{12,0,0} \} \beta_1 \gamma_1 \cos 4w.$$

Wskutek tego (24) przejdzie w następujące:

$$(32) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = 2a_0 + p'_0 + \{ (\mathfrak{P})_1 + (\mathfrak{P})_2 \beta_1 + (\mathfrak{P})_3 \gamma_1 + (\mathfrak{P})_4 \beta_1^2 + \\ + (\mathfrak{P})_5 \beta_1 \gamma_1 + (\mathfrak{P})_6 \gamma_1^2 \} \cos 4w$$

gdzie dla krótkości napisaliśmy:

$$(33) \quad p'_0 = -B_{0,0,0} - \frac{1}{2} B_{4,0,0}^{1,0} \beta_1 + \frac{1 + \delta_1}{2} A_{4,0,0} \beta_1 - 2\mu B_{4,0,0} \gamma_1 - \\ - \frac{1}{2} B_{0,0,0}^{2,0} \beta_1^2.$$

$$\begin{aligned}
 (34) \quad (\mathfrak{P})_1 &= -B_{4.0.0} + \frac{2A_{4.0.0}}{1+\delta_1} \\
 (\mathfrak{P})_2 &= -B_{0.0.0}^{1.0} - \frac{1}{2}B_{8.0.0}^{1.0} + \frac{A_{8.0.0}^{1.0}}{1+\delta_1} + \frac{1+\delta_1}{2}A_{8.0.0} \\
 (\mathfrak{P})_3 &= -4\mu B_{8.0.0} + \frac{8\mu A_{8.0.0}}{1+\delta_1} \\
 (\mathfrak{P})_4 &= -\frac{1}{2}(B_{4.0.0}^{2.0} - \frac{1}{4}(B_{4.0.0}^{2.0} + B_{12.0.0}^{2.0})) + \\
 &\quad + \frac{A_{4.0.0}^{2.0}}{2(1+\delta_1)} + \frac{A_{12.0.0}^{2.0}}{2(1+\delta_1)} + \frac{1+\delta_1}{4}(A_{4.0.0}^{1.0} + A_{12.0.0}^{1.0}); \\
 (\mathfrak{P})_5 &= -\mu(B_{4.0.0}^{1.0} + 3B_{12.0.0}^{1.0}) - \frac{2\mu A_{4.0.0}^{1.0}}{1+\delta_1} + \frac{6\mu A_{12.0.0}^{1.0}}{1+\delta_1} - \\
 &\quad - \mu(1+\delta_1)(A_{4.0.0} - 3A_{12.0.0}) \\
 (\mathfrak{P})_6 &= 2\mu^2 B_{4.0.0} - 36\mu^2 B_{12.0.0} - \frac{12\mu^2 A_{4.0.0}}{1+\delta_1} + \frac{36\mu^2 A_{12.0.0}}{1+\delta_1}.
 \end{aligned}$$

Ale ze wzoru (12) str. 48 wynika¹⁾:

$$(35) \quad \frac{d^2 R}{d^2 v} + R = b_0 - [1 - (1 + \delta_1)^2] \beta_1 \cos 4w,$$

czyli

$$(36) \quad \frac{d^2 R}{d v^2} + R = b_0 - (2\delta_1 + \delta_1^2) \beta_1 \cos 4w,$$

gdzie dla krótkości piszemy:

$$b_0 = 2a_0 + p_0';$$

$$(a) \quad 2\delta_2 + \delta_1^2 = -\{(\mathfrak{P})_1 + (\mathfrak{P})_2 \beta_1 + (\mathfrak{P})_3 \gamma_1 + (\mathfrak{P})_4 \beta_1^2 + (\mathfrak{P})_5 \beta_1 \gamma_1 + (\mathfrak{P})_6 \gamma_1^2\}$$

zamiast γ_1 napiszmy:

$$-\frac{2\beta_1}{1+\delta_1},$$

wtedy analogicznie do równania (23) str. 73 będziemy mogli napi-

¹⁾ Brendel, l. c., pg. 120. Ludendorff, l. c., pg. 17. Kramer I, pg. 45.

sać współczynnik przy $\cos 4w$, jako rozłożony według potęg β_1 , w postaci następującej:

$$p_1 + p'' \beta_1 + p''' \beta_1^2$$

przez porównanie z (a) wynika:

$$(37) \quad (2\delta_1 + \delta_1^2) \beta_1 = p' + p'' \beta_1 + p''' \beta_1^2,$$

gdzie dla krótkości napisaliśmy:

$$(38) \quad p' = B_{4.0.0}^{1.0} - \frac{2A_{4.0.0}}{1 + \delta_1}.$$

$$p'' = B_{0.0.0}^{1.0} + \frac{1}{2} B_{8.0.0}^{1.0} - \frac{A_{8.0.0}^{1.0}}{1 + \delta_1} - \frac{1 + \delta_1}{2} A_{8.0.0} - 8\mu \frac{B_{8.0.0}}{1 + \delta_1} +$$

$$+ \frac{16\mu A_{8.0.0}}{1 + \delta_1}.$$

$$p''' = \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{2.0} + \frac{1}{4} B_{4.0.0}^{2.0} + \frac{1}{4} B_{12.0.0}^{2.0} - A_{4.0.0}^{2.0} + \frac{1}{2} A_{4.0.0}^{2.0} - \frac{1}{2} A_{12.0.0}^{2.0} -$$

$$- \frac{1}{4} A_{4.0.0}^{1.0} - \frac{1}{4} A_{12.0.0}^{1.0} - 2\mu B_{4.0.0}^{1.0} - 6\mu B_{12.0.0}^{1.0} - 4\mu A_{4.0.0}^{1.0} +$$

$$+ 12\mu A_{12.0.0}^{1.0} - 2\mu A_{4.0.0} + 6\mu A_{12.0.0} - 8\mu^2 B_{4.0.0} +$$

$$+ 72\mu^2 B_{12.0.0} + 48\mu^2 A_{4.0.0} - 144\mu^2 A_{12.0.0}.$$

Uwzględniając (36) i (38) otrzymamy:

$$(39) \quad R_0 = 2a_0 + p_0' - \frac{p' + p'' \beta_1 + p''' \beta_1^2}{2\delta_1 + \delta_1^2} \cos 4w,$$

gdzie znów dla krótkości napisaliśmy:

$$(40) \quad p_0' = -B_{0.0.0} - \frac{1}{2} B_{4.0.0}^{1.0} \beta_1 + \frac{1 + \delta_1}{2} A_{4.0.0} \beta_1^2 + \frac{4\mu}{1 + \delta_1} B_{4.0.0} \beta_1^2 -$$

$$- \frac{1}{2} B_{0.0.0}^{2.0} \beta_1^2.$$

Otrzymaliśmy więc wszystkie wyrazy typowe funkcji R — pozostaje jeszcze obliczenie tych z wyrazów zwykłych, których w naszym przypadku pominąć nie możemy.

Możemy bowiem napisać:

$$\frac{d^2 R}{dv^2} + R = 2S_0 - P_0 = \Sigma (2S_{n.0.0} \cos nw - B_{n.0.0} \cos nw),$$

albo, gdy oznaczymy $2S_{n.0.0} - B_{n.0.0}$ przez $\Psi_{n.0.0}$, to mieć będziemy:

$$(41) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = \Sigma \Psi_{n,0,0} \cos n w.$$

Całką równań (41) będzie:

$$(42) \quad R_0 = g_1 \sin v - g_2 \cos v. \quad ^1)$$

gdzie g_1 i g_2 są pewne funkcje, które należy wyznaczyć.

Z łatwością otrzymamy związki następujące:

$$\frac{dg_1}{dv} = \frac{1}{2} \Sigma \Psi_{n,0,0} \cos (n w + v) + \frac{1}{2} \Sigma \Psi_{n,0,0} \cos (n w - v)$$

$$\frac{dg_2}{dv} = \frac{1}{2} \Sigma \Psi_{n,0,0} \sin (n w + v) - \frac{1}{2} \Sigma \Psi_{n,0,0} \sin (n w - v).$$

Scałkujemy te równania według metody podanej przez Gyl-dén'a Brendel'a ²⁾.

Jest:

$$\int \cos (n w \pm v) dv = \frac{1}{n(1 - \mu_1) \pm 1} \sin (n w \pm v) +$$

$$+ \frac{n \mu_1}{n(1 - \mu_1) \pm 1} \int \frac{dw_a}{dv} \cos (n w \pm v) dv$$

$$\int \sin (n w \pm v) dv = \frac{1}{n(1 - \mu_1) \pm 1} \cos (n w \pm v) +$$

$$+ \frac{n \mu_1}{n(1 - \mu_1) \pm 1} \int \frac{dw_a}{dv} \sin (n w \pm v) dv$$

a ponieważ W_a zawiera tylko wyrazy długookresowe kształtu A lub C , a wyrazy kształtu C mogą występować dopiero gdy uwzględnimy wielkości pierwszego stopnia ³⁾, dla tego też w naszych wyrażeniach w całkach zależnych od W_a nie będąc żadnych wyrazów stopnia zerowego. Wstawiając ostatnie dwie równości w dwie poprzednie, znajdziemy:

¹⁾ Kramer, l. c. I, pg. 48.

²⁾ Brendel. Om Användningen §. 11,

³⁾ Brendel. Th. d. kl. Pl. I, pg. 120.

$$(43) \left\{ \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2} \sum \frac{\Psi_{n,0,0}}{n(1-\mu_1)+1} \sin(nw+v) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum \frac{\Psi_{n,0,0}}{n(1-\mu_1-1)} \sin(nw-v) \\ g_2 &= -\frac{1}{2} \sum \frac{\Psi_{n,0,0}}{n(1-\mu_1)+1} \cos(nw+v) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum \frac{\Psi_{n,0,0}}{n(1-\mu_1)-1} \cos(nw-v), \end{aligned} \right.$$

gdzie (43) wstawimy w (42), otrzymamy:

$$R_0 = \sum R_{n,0,0} \cos nw,$$

gdzie

$$R_{n,0,0} = \frac{\Psi_{n,0,0}}{1-n^2(1-\mu_1)^2};$$

ale

$$\Psi_{n,0,0} = 2S_{n,0,0} - B_{n,0,0} \quad \text{i} \quad (1-\mu_1)^2 = \frac{(1+\delta_1)^2}{16}$$

więc ostatecznie otrzymamy:

$$(44) \quad R_{n,0,0} = \frac{2S_{n,0,0} - B_{n,0,0}}{1 - \left(\frac{n(1+\delta_1)}{4}\right)^2}$$

dla wartości $n \geq 4$ gdzie $S_{n,0,0}$ jest określone przez (21).

Pozostaje nam jeszcze całkowanie równania dającego związek pomiędzy W i v . Zajmijmy się obecnie tym równaniem. Mieliliśmy na str. 20 równ. VI, w którym obecnie uważajmy tylko wyrazy stopnia zerowego, mieć tedy będziemy:

$$(45) \quad \frac{dW}{dv} = S_0 - 2_0R_0 - 2R_0S_0 + 3R_0^2 + 3R_0^2S_0 - 4R_0^3.$$

Wielkości S_0 i R_0 są nam już znane, jakoż uwzględniając związki na str. 48 mieć będziemy:

$$S_0 = a_0 + a_1 \cos 4w; \quad R_0 = b_0 + \beta_1 \cos 4w,$$

z których odrazu znajdziemy:

$$(46) \left\{ \begin{array}{l} S_0 R_0 = a_0 b_0 + a_1 b_1 \cos 4w + a_0 \beta_1 \cos 4w + a_1 \beta_1 \cos^2 4w; \\ R_0^2 = b_0^2 + 2b_0 \beta_1 \cos 4w + \beta_1^2 \cos^2 4w; \\ R^3 = b_0^3 + 3b_0^2 \beta_1 \cos 4w + 3b_0 \beta_1^2 \cos^2 4w + \beta_1^3 \cos^3 4w; \\ S_0 R_0^2 = a_0 b_0 + 2a_0 b_0 \beta_1 \cos 4w + a_0 \beta_1^2 \cos^2 4w + \\ + a_1 b_0^2 \cos 4w + 2b_0 a_1 \beta_1 \cos^2 4w + \beta_1^2 a_1 \cos^3 4w. \end{array} \right.$$

Zbadajmy wyrażenia (46). Wielkości: a_0 , b_0 , a_1 , b_1 , są istotnie rzędu masy zakłócającej m' , a więc a_0^2 , b_0^2 , $a_0 b_0$, $a b^2$, $a_1 b_1$ są istotnie rzędu m'^2 – należy je pominąć¹⁾; β_1 jest rzędu $\frac{m'}{\delta}$ gdzie δ oznacza małą wielkość; zatem mieć będziemy:

$$R^2 = 2b_0 \beta_1 \cos 4w + \beta_1^2 \cos^2 4w$$

ale ponieważ

$$\cos^2 4w = \cos 4w \cdot \cos 4w = \frac{1}{2} \cos 8w + \frac{1}{2},$$

to

$$(47) \quad \begin{aligned} R_0^2 &= 2b_0 \beta_1 \cos 4w + \frac{1}{2} \beta_1^2 + \beta_1^2 \cos 8w \\ S_0 R_0 &= a_0 \beta_1 \cos 4w + \frac{1}{2} a_1 \beta_1 + \frac{1}{2} a_1 b_1 \cos 8w \\ S_0 R_0^2 &= \frac{1}{2} a_0 \beta_1^2 + a_0 \beta_1^2 \cos 8w + \frac{3}{4} a_1 \beta_1^2 \cos 4w + \frac{1}{4} a_1 \beta_1^2 \cos 12w \\ R^3 &= \frac{3}{2} b_0 \beta_1^2 + \frac{3}{2} b_0 \beta_1^2 \cos 8w + \frac{3}{4} \beta_1^3 \cos 4w + \frac{1}{4} \beta_1^3 \cos 12w. \end{aligned}$$

Gdy uwzględnimy powyższe związki, otrzymamy ostateczne równ. różniczkowe dające $\frac{dW}{dv}$.

$$(47) \quad \frac{dW}{dv} = c_0 + \gamma + (a_1 - 2a_0 \beta_1 - 2\beta_1 + 6b_0 \beta_1 + \\ + \frac{3}{4} a_1 \beta_1^2 - 3\beta_1^3) \cos 4w - (a_1 b_1 - \frac{3}{2} \beta_1^2 + \\ + \frac{3}{2} a_0 \beta_1^2 - 6b_0 \beta_1^2) \cos 8w + (\frac{3}{4} a_1 \beta_1^2 - \beta_1^3) \cos 12w,$$

gdzie dla krótkości oznaczyliśmy wielkości następujące:

¹⁾ Brendel w przypadku Hekuby i Hildy pomijał wszystkie wyrazy rzędu wyższego, niż drugi, a z wyrazów drugiego rzędu odrzucał te, które są rzędu istotnie pierwszego lub wyższego. Ponieważ w moich rachunkach posuwam dokładność o jeden krok dalej, przeto pomijam dopiero wyrazy rzędu wyższego, niż m^3 , oraz te, które są rzędu istotnie drugiego lub wyższego.

$$\gamma = \frac{3}{2} \beta_1^2$$

$$c_0 = a_0 - a_1 \beta_1 + \frac{3}{2} a_0 \beta_1^2 - 6b_0 \beta_1^2 - 2b_0.$$

W tej wielkości c_0 występuje jako wspólny czynnik masa m' , podczas gdy w wyrazie $\frac{3}{2} \beta_1^2$ występuje masa m' podzielona przez małą wielkość δ_1 . Wykonajmy całkowanie równania (47). Mieliśmy przedewszystkiem na str. 32 równanie (42):

$$W = \bar{\gamma}v + W_a + K,$$

różniczkujemy ten związek względem v , otrzymamy:

$$\frac{dW}{dv} = \bar{\gamma} + \frac{dW_a}{dv} + \frac{dK}{dv};$$

$\bar{\gamma}$ oznacza część wiekową, a ponieważ długookresowe wyrazy 0 stopnia nie istnieją¹⁾ w funkcji W_a ani też tembardziej w K , prze-
to będziemy mogli napisać:

$$(48) \quad \frac{dW}{dv} = \bar{\gamma} + \frac{dK}{dv}.$$

Porównajmy (47) i (48). Otóż widzimy, że

$$(49) \quad \bar{\gamma} = c_0 + \gamma,$$

z drugiej zaś strony, uwzględniając związek (13) str. 49, oraz (10) str. 46, przez różniczkowanie znajdziemy:

$$(49) \quad \frac{dK}{dv} = \gamma_1(1 + \delta_1) \cos 4w + 2(1 + \delta_1) K'_2 \cos 8w + \\ + 3(1 + \delta_1) K'_3 \cos 12w,$$

gdzie współczynniki K'_2 i K'_3 oznaczają wyrazy zwykłe.

Podstawmy w (48) związek (49) znajdziemy:

$$(50) \quad \frac{dW}{dv} = \bar{\gamma} + \gamma_1(1 + \delta_1) \cos 4w + 2(1 + \delta_1) K'_2 \cos 8w + \\ + 3(1 + \delta_1) K'_3 \cos 12w.$$

Porównajmy wzór (50) ze wzorem (47) to otrzymamy:

¹⁾ Patrz wzór 14, str. 49; Brendel. Th. d. kl. Pl. I, p. 68.

$$(51) \left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma} = c_0 + \gamma \\ \gamma_1 = \frac{a_1 - 2a_0\beta_1 - 2\beta_1 + 6b_0\beta_1 + \frac{3}{4}a_1\beta_1^2 - 3\beta_1^3}{1 + \delta_1} \\ K'_2 = \frac{3\beta_1^2 - 2a_1\beta_1 - 3a_0\beta_1^2 + 12b_0\beta_1^2}{4(1 + \delta_1)} \\ K'_3 = \frac{3a_1\beta_1^2 - 4\beta_1^3}{12(1 + \delta_1)} \end{array} \right.$$

Do wyznaczenia stałych całkowania jeszcze powrócimy, tymczasem ograniczymy się do uwagi, że ponieważ uważana przez nas planetoida Thule należy do krytycznych planetoid pierwszej klasy, według podziału Brendel'a¹⁾, to dla takiej planetoidy mieć będziemy:

$$c_0 = 0, \text{ ale } \gamma \neq 0,$$

a więc w naszym przypadku $\bar{\gamma} = \gamma$ ²⁾ i równ. (48) przejdzie po scałkowaniu w następujące:

$$(52) \quad \mathbf{W} = \gamma v + K.$$

Przypuśćmy, że stałą a_0 już wyznaczyliśmy, wtedy uwzględniając związek $b_0 = 2a_0 + p'^0$ na str. 70 i zw. (40) str. 76 będziemy mogli napisać po uporządkowaniu rezultatu według potęg β_1 :

$$(53) \left\{ \begin{array}{l} \text{gdzie} \\ b_0 = 2a_0 + q_0 + q_1\beta_1 + q_2\beta_1^2, \\ q_0 = -B_{0.0.0}; \\ q_1 = -\frac{1}{2}B_{4.0.0}^{1.0} + \frac{1+\delta_1}{2}A_{4.0.0} + \frac{4\mu}{1+\delta_1}B_{4.0.0}, \\ q_2 = -\frac{1}{2}B_{0.0.0}^{2.0}. \end{array} \right.$$

Zatem, gdy znamy stałą a_0 , to na zasadzie równ. (51) i (53) możemy z łatwością obliczyć już poszczególne części równania (52) i tym samym otrzymać funkcję \mathbf{W} , ograniczając się ciągle do wielkości stopnia zerowego. Postępując zupełnie analogicznie do tego, cośmy zrobili gdyśmy szukali wyrazów zwykłych w funkcji R (str. 73), znajdziemy z łatwością podobne wyrazy i dla \mathbf{W} , mianowicie będą one:

¹⁾ Brendel, l. c., pg. 92, 100.

²⁾ Brendel, l. c.; Kramer I. § 1.

$$(54) \quad W_{n,0,0} = \frac{S_{n,0,0} - 2R_{n,0,0}}{\frac{n}{4}(1 + \delta_1)} \quad \text{dla } n \geq 4.$$

Przejdźmy obecnie do wyznaczenia stałych całkowania. Ponieważ obecnie ograniczymy się tylko do badania ruchu planetoidy w samej płaszczyźnie jej drogi, więc mieć będziemy tylko 4 stałe, które powinny występować w naszych równaniach po ich scałkowaniu. Te stałe całkowania są, jak to wiemy, κ moduł mimośrodowy, Γ długość perihelium, a połowa osi drogi planetoidy oraz tak zwana stała ruchu n . Jak widzieliśmy po wykonaniu całkowania wyrażeń różniczkowych spółrzędnych Gyl'dén'owskich występuje jeszcze jedna nowa stała a_0 , którą, dzięki temu, że jest nadliczbową, możemy uważać jako stałą dowolną; tę stałą a_0 określimy za pomocą warunku, że b_0 , część stała, w wyrażeniu na R ma być rzędu istotnie pierwszego—wtedy także i b_0 będzie takiego samego rzędu (str. 70). Ta stała a_0 będzie tak dobrana, aby część stała c_0 w wyrażeniu (47) przyjmowała wartość zero. Ponieważ $W = W_a + K$, a K składa się z funkcji R i S , to stała część w W składać się będzie ze stałych części funkcji R oraz S ; wskutek tego mieć będziemy

$$(55) \quad c_0 + \gamma = a_0 - 2b_0.$$

Ale Brendel¹⁾ wykazał, że o ile mamy do czynienia z planetoidą charakterystyczną, to musi zachodzić związek następujący:

$$a_0 - 2b_0 = 0 = c_0 + \gamma;$$

dla krytycznych planetoid, a taką jest Thule, γ nie może być zerem²⁾; a równość

$$a_0 - 2b_0 = c_0 + \gamma$$

pozostaje ważną i dla planetoid krytycznych, będziemy więc mieć związki następujące:

$$(56) \quad c_0 = 0; \quad \gamma \neq 0.$$

Z pierwszego związku (53) widzimy, że b_0 da się wyrazić jako funkcja liczbowa wielkości a_0 oraz potęg β_1 , a więc w przypadku ruchu planetoidy typu Thule, należącej do klasy pierwszej, równania (53) i (56) najzupełniej określą nam wartość stałej a_0 .

¹⁾ Brendel, l. c., rozdz. V sparsim.

²⁾ Brendel, Astr. Nachr. 3346; id. Th. d. kl. Plan. I rozdz. VII spars.

Wielkość \mathbf{W} (str. 37) możemy napisać w postaci następującej:

$$(57) \quad \mathbf{W} = (c_0 + \bar{\gamma})v + \text{wyrazy okresowe},$$

czyli

$$\mathbf{W} = (c_0 + \gamma + \gamma_0)v + \text{wyrazy okresowe},$$

gdzie jak zwykle

$$\bar{\gamma} = \gamma + \gamma_0,$$

ale γ_0 jest przynajmniej stopnia drugiego, więc obecnie możemy je opuścić, zatem

$$(58) \quad \bar{\gamma} = \gamma.$$

Mieliśmy związek następujący:

$$w_1 = w - \mu K$$

i

$$w_1 = (1 - \mu)v - B - \mu \mathbf{W},$$

a więc

$$w = w_1 + \mu K = (1 - \mu)v - B - \mu \mathbf{W} + \mu K,$$

ale

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_d + \bar{\gamma}v$$

$$w = (1 - \mu)v - \mu \bar{\gamma}v + \text{wyrazy okresowe} =$$

$$= (1 - \mu_2)v + \text{wyrazy okresowe},$$

gdzie

$$\mu_2 = \mu(1 + \bar{\gamma});$$

zatem część wiekowa \mathbf{W} jest następująca:

$$(59) \quad \text{pars sec } w = (1 + \mu_2)v.$$

Przypomnijmy sobie określenie wielkości μ i μ_1 .

Mieliśmy związek następujący:

$$(60) \quad \frac{n'}{n} = \mu; \quad \text{oraz} \quad \frac{n'}{n_1} = \mu_1.$$

We wzorach (60) jak wiemy z poprzedniego, przez n oznaczamy stałą całkowania; wielkość, którą Brendel nazwał „stałą ruchu“; n_1 zaś oznacza rzeczywisty ruch średni dzienny.

Wprowadźmy dalej wielkości δ i δ_1 zdefiniowane w sposób następujący:

$$\mu = \frac{3 - \delta}{4}; \quad \mu_1 = \frac{3 - \delta_1}{4};$$

Z wymienionych przez nas małych wielkości δ i δ_1 , występuje w naszych wyrażeniach, jako dzielnik tylko δ_1 .

Brendel wykazał, że δ_1 nie może być zerem w przypadku ścisłej wymierności, jest ono rzędu m' o wykładniku $\leq \frac{2}{3}$ przeto zawsze ono jest znacznie większe od masy zakłócającej. Co zaś do wielkości δ , to ona jest rzędu m' z wykładnikiem ≤ 1 a w przypadku wymierności staje się nawet równą zeru. Otóż zasadnicza myśl metody podanej przez Brendel'a polega właśnie na tem, że w wyrażeniach perturbacyi występują, jako małe dzielniki nie δ lecz δ_1 . Brendel wykazał, że stosunek ścisłej wymierności może zachodzić tylko pomiędzy wielkościami n i n' (a nie pomiędzy n_1 i n'), wtedy $\delta=0$.

Na zasadzie wzorów poprzedzających mieć będziemy¹⁾:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu(1 + \bar{\gamma}) = \mu(1 + \gamma + c_0) \\ \text{ale} \quad 3 - \delta_1 &= (3 - \delta)(1 + \bar{\gamma} + c_0) \\ \delta_1 &= \delta c_0 + \delta \bar{\gamma} + \delta - 3c_0 - 3\bar{\gamma}; \end{aligned}$$

ponieważ mamy do czynienia z planetoidą krytyczną, dla której

$$c_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \bar{\gamma} = \gamma,$$

to mieć będziemy:

$$\delta_1 = \delta \gamma + \delta - 3\gamma,$$

ale ponieważ

$$4\mu = 3 - \delta,$$

to ostatecznie otrzymamy:

$$(61) \quad \delta_1 = \delta - 4\gamma\mu.$$

Zupełnie analogicznie możemy napisać, że

$$\frac{n'}{n_2} = \mu_2 = \frac{3 - \delta_2}{4},$$

gdy uwzględnimy (59), to n_2 możemy uważać jak ruch średni planetoidy w długości. Postępując zupełnie analogicznie jak poprzednio robiliśmy, otrzymamy:

$$(62) \quad \delta_2 = \delta - 4\mu\bar{\gamma} = \delta_1 - 4\mu\gamma_0,$$

Gdy δ_2 staje się bardzo małym lub nawet zerem, wtedy za-

¹⁾ Brendel, A. N. 3346.

chodzi przypadek libracyi, który w teorii Gyl d é n'a jest łatwy do uwzględnienia. n_2 właśnie określa nam ten ruch średni dzienny, który powoduje libracyę; musimy też znać dokładnie tę wielkość n_2 , aby móc wyznaczyć czas obiegu planetoidy. Należy zauważyć, że μ_1 i μ_2 różnią się tylko o stałą γ_0 . Wielkość γ_0 jest drugiego stopnia, a więc obecnie ją opuszczamy, podczas gdy $\gamma = \gamma$ jest stale dodatnią i w przypadku planet charakterystycznych pierwszej klasy, do jakich zresztą należy Thule, jest już wielkością stopnia zerowego, a więc w obecnych warunkach musi być ona uwzględnioną.

V. Zastosowanie liczbowe otrzymanych wzorów do ruchu planetoidy (279) Thule.

Planetoidę Thule (279) jako gwiazdę 13.5 odkrył w Wiedniu J. Palisa dnia 25 października 1888 r. Po kilkunastu dniach obserwacji, ten astronom odrazu się zorientował po wstępnym rachunku, że droga tej planetoidy leży w bardzo znacznej odległości od słońca, mianowicie prawie 4 razy dalej niż średnia odległość ziemi od słońca. Przypuszczenia Palis'y były potwierdzone przez rachunki Lange'go z Berlina i Halm'a w Kiel. Niebawem dotąd wśród małych planet rozmiary drogi nowo odkrytej planetoidy wskazywały, że ta planetoida, znajdująca się na zewnętrznej części pierścienia planetoidalnego będzie bardzo ciekawym objektem dla badań teoretycznych. Można było bowiem przewidywać, że planetoida Thule z powodu swego znacznego oddalenia od Słońca oraz z powodu znacznego zbliżenia się do Jowisza — może podlegać okresowo nadzwyczaj silnym zakłóceniom spowodowanym przez przyciąganie Jowisza. Z tych wielkich perturbacji ruchu Thule, znając dokładnie jej pierwiastki drogi, z czasem można będzie obliczyć masę układu Jowisza, analogicznie jak to zrobił Newcomb, badając ruchy (33) Polyhymnii¹⁾, ale uczynić to będzie można, jak to słusznie zauważył Bidschhof²⁾,

¹⁾ S. Newcomb. Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris vol. V, part V.

²⁾ Sitzungsberichte der Ak. der Wissenschaften, Wien Bd. 100: pg. 937.

dopiero wtedy, gdy mieć będziemy przynajmniej 25 lat obserwacji tej planety. Pomimo słabego blasku (1.35—15.5) jakim świeci Thule, wskutek czego może być ona obserwowana jedynie przy pomocy wielkich narzędzi, obserwowano tę planetoidę podczas wszystkich opozycji, które miały miejsce od chwili odkrycia, t. j. 25/X 1888 r. aż do 10/II 1891 r. Te wszystkie obserwacje zostały bardzo szczegółowo opracowane przez Bidschofa¹⁾, który na ich zasadzie podał wartości pierwiastków drogi tej planetoidy, oraz efemerydy dla czasów bliskich opozycji od czasu odkrycia do r. 1894. W pracy swej wspomina Bidschof, że 3 razy w ciągu stulecia następuje znaczne zbliżenie pomiędzy Thule i Jowiszem, w ruchu planetoidy występować muszą bardzo znaczne perturbacje.

Na zasadzie wszystkich obserwacji, które mu były dostępne, wyprowadził Bidschof następujące ostateczne elementy:

Epoka: 1881 Luty 20.0 cz. śr. Berl.

$$L = 104^{\circ} 21' 30''. 8$$

$$M = 155 \quad 36 \quad 48.8$$

$$\pi = 308 \quad 44 \quad 42.0$$

$$\Omega = 75 \quad 26 \quad 12.1$$

$$\omega = 233 \quad 18 \quad 29.9$$

$$i = 2 \quad 22 \quad 34.2$$

$$\varphi = 4 \quad 43 \quad 14.2$$

$$\log a = 0.629 \quad 6674$$

$$\mu = 403''. 1860,$$

} równ. 1890.0

oraz wyznaczył wielkość Thule dla średniej opozycji, $13^m 76$. Według obliczeń Bidschofa, najkorzystniejsze opozycje bywają w lipcu i sierpniu; wtedy planetoida osiąga $13^m 3$, ale zato, dla obserwatoryów leżących w większych szerokościach północnych, jest ona wtedy dość niekorzystnie położona na niebie, gdyż jej deklinacja wówczas waha się pomiędzy $-24^{\circ} 5$ a $-15^{\circ} 5$. Elementy, które wyżej przytoczyłem zostały wyprowadzone na podstawie 8 miejsc normalnych. Te miejsca normalne są dość do-

¹⁾ Sitzungsberichte d. Ak. d. Wiss. Wien Bd. 100, pg. 937.

brze przedstawione przez ostateczne elementy; największe odchylenie wynosi dla

$$\cos \delta d\alpha = + 3''. 1;$$

zaś dla

$$d\delta = - 3''. 0.$$

W r. 1908 A. Wedemeyer¹⁾ ogłosił nowe rachunki, odnoszące się do planetoidy Thule. Powodem podjęcia na nowo tych rachunków było z jednej strony to, iż od chwili odkrycia do roku 1906 Thule dwa razy obiegała swoją drogę, z drugiej zaś strony, dzięki pracy Bidschofa, który wprowadził uwzględnienie w swych rachunkach obserwacje do 1891 r. lecz podał efemerydy aż do r. 1894 i dalej, zdołano podczas wielu opozycji zaobserwować (279). Ze względu na ten nagromadzony materiał, A. Wedemeyer zdecydował się, wychodząc z elementów Bidschofa, opracować wszystkie obserwacje, jakie tylko były zrobione od r. 1888 do r. 1906 (ogółem 53), uwzględnić dokładne pozycje gwiazd porównawczych i na podstawie tego całego materiału ugrupowanego w 14 miejsc normalnych wyprowadzić nowe elementy.

W swoich rachunkach Wedemeyer posługiwał się bardzo dogodną metodą Oppolzer'a, obliczania perturbacji pierwiastków drogi. Ostateczne elementy, otrzymane po wyrównaniu miejsc normalnych, były następujące²⁾:

Epoka i oskulacja 1907 grudzień 6.5 cz. ś. B

$$M = 210^{\circ} 15' 47''. 26$$

$$\left. \begin{array}{l} w = 234 \quad 28 \quad 20.52 \\ \Omega = 75 \quad 35 \quad 57.14 \\ i = 2 \quad 22 \quad 29.93 \end{array} \right\} 1910.0$$

$$\varphi = 4 \quad 37 \quad 35.94$$

$$\mu = 404'' 29204.$$

Obserwacji późniejszych nie uwzględnionych przez Wedemeyer'a wykonano niewiele, mianowicie w 1906 r. dn. 17/X w Wiedniu i w 1911 r. w dniach 20 i 30 kwietnia fotograficzna w Heidelbergu³⁾. Planetoida coraz bardziej przybliżała się do Jo-

¹⁾ Archiv. der deutschen Seewarte XXXI Jahrgang.

²⁾ Elementy Wedemeyer'a służą za podstawę niniejszych rachunków.

³⁾ A. N. 4591, 4563.

wisza przez co perturbacje jej biegu stawały się coraz znaczniejsze i zgodność pomiędzy elementami Wedemeyer'a a rzeczywistością stawała się gorszą. Krytyczne zbliżenie Thule i Jowisza następowało w r. 1912. W lipcu 1913 r. Viljev¹⁾ ogłosił nowe oskulacyjne elementy Thule. Te jednak elementy nie mogą być uważane za bardzo dokładne, gdyż obliczone zostały wprost z elementów Wedemeyer'a przez dodanie tylko perturbacji od oskulacji 1907 r., które obliczył przy pomocy jednej z metod perturbacji szczególnych bez uwzględnienia obserwacji z lat 1906 i 1911. Viljev podał efemerydy na podstawie swoich elementów. Dla chwili opozycji miejsce wskazane przez Viljev'a znacznie się różniło od tego, jakie było podane przez B. J. na podstawie elementów Wedemeyer'a, planetoidy jednak nie zaobserwowano.

Elementy podane przez Viljev'a są następujące:

Epoka i oskulacja 1913 czerwiec 17.5 cz. śr. Berl.

$$M = 358^{\circ} 35' 20''.7$$

$$\omega = 220 \quad 43 \quad 38.9$$

$$\Omega = 75 \quad 20 \quad 6.6$$

$$i = 2 \quad 21 \quad 2.6$$

$$\varphi = 3 \quad 39 \quad 49.0$$

$$\mu = 397''.60002$$

} 1910.0

$$\log a = 0.6337068.$$

Aby więc zbadać ruch tej ciekawej planetoidy, podlegającej tak znacznym zaburzeniom, wydaje mi się, że jedyna droga jaka nam pozostaje, jest podać, przynajmniej w przybliżeniu, wyrażenia analityczne perturbacji ogólnych aby umożliwić na długi czas obliczanie efemeryd, pozwalających obserwatorom odnalezienie tego ciała niebieskiego. Metoda Gylden'a-Brendel'a wydaje mi się tutaj najodpowiedniejszą ze względu na to, że odrazu, przy pierwszym obliczeniu perturbacji, pozwala uwzględnić wpływ wyrazów zależnych od wyższych potęg masy Jowisza. Gdy nowy materiał obserwacyjny zostanie zdobyty, to wtedy okaże się konieczność obliczenia nowych pierwiastków drogi Thule, a rozporządzając już całym materiałem obserwacyjnym, obejmującym

¹⁾ A. N. 4661.

znaczny przeciąg czasu, będzie można dopiero wówczas podjąć zagadnienie wyznaczenia; na zasadzie perturbacji Thule, masy układu Jowisza.

Do naszych rachunków użyliśmy elementów Jowisza według „*Connaissance des Temps pour 1914*“. Masę Jowisza m' wzięłem według Newcomb'a, wynosi ona:

$$m' = \frac{1}{1047.355} \quad (\lg m' = 6.9799061).$$

Ponieważ w niniejszej pracy ograniczymy się do wyszukania przerwy (luki) dla planetoid typu $\frac{3}{4}$, pozostawiając do następnej części wyrażenia liczbowe współczynników dających rozwinięcie perturbacji Thule, dla tego też przytoczymy tutaj tylko rachunki, które odnoszą się bezpośrednio do tego zagadnienia. W rozdziale drugim podaliśmy, zgodnie z teorią, którą do naszego przypadku stosujemy, wyrażenia analityczne rozwinięcia funkcji perturbacyjnej, w których występowały pewne arytmetyczne wielkości, dające się wyrazić przez stosunek α połowy osi drogi Thule do połowy osi drogi Jowisza. Te współczynniki liczbowe były to wielkości β i γ zaopatrzone odpowiednimi wskaźnikami.

Przystąpmy do ich obliczenia. Z elementów Jowisza i Thule znajdziemy wielkość α :

$$\lg \alpha = 9.912 \ 6572.$$

Ta wielkość mało się różni od jedności i widzimy, że współczynniki β i γ , zależne od tej wielkości, nie będą się znajdować ani w tablicach Masal'a¹⁾, w których mamy tabułowane wartości β i γ dla argumentu $\lg \alpha$ od 9.30 aż do 9.60, ani w tablicach Gyldeń'a²⁾, w których jest zawarty $\lg \alpha$ od 9.620 do 9.800.

Musimy więc bezpośrednio z elementów obliczyć wszystkie β . Na str. 24 mieliśmy wzór (8):

1) Masal H.: *Tables de l'intégrale* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi\}^{\frac{3}{2}}}$. *Astronomi-*

ska iakttagelser och undersökningar ånstadla på Stockholms observatorium, Fjerdre Bandet, Stockholm 1891, pg. 51.

2) Gyldeń H.: *Astr. Gesell. Publ. 21. Hülfstafeln zur Berechnung der Hauptgleichheiten der Kl. Planeten.*

$$I \quad \beta_n^s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi\}^{\frac{3}{2}}}$$

Znając α możemy przystąpić do obliczenia wszystkich β_n^s .

Gylden¹⁾, Harzer²⁾ obliczali te wielkości w ten sposób, że przedewszystkiem znajdowali wszystkie β_n^s dla $n=1$. Przy pomocy pewnych wielkości pomocniczych f_n , λ_n i ϑ_n , określonych w sposób następujący:

$$f_n = \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)(2n+4)} \cdot \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}; \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\alpha^2+1};$$

$$\vartheta_n = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{\beta_{n+1}^s}{\beta_n^s}.$$

Wielkość ϑ_n można rozwinąć w ułamek ciągły:

$$\vartheta_n = \frac{1}{1 - \frac{f_n}{1 - \frac{f_{n+1}}{1 - \frac{f_{n+2}}{1 - \dots \frac{f_{n+m-1}}{1 - f_{n+m} \vartheta_{n+m+1}}}}}}.$$

Użycie tego wzoru jest następujące: najpierw oblicza się ϑ_n z największym n zachodzącym w naszych wzorach, wprost ze wzoru:

$$\vartheta_n = \frac{1}{1 - \frac{f_n}{1 - \frac{f_{n+1}}{\dots \frac{f_{n+m-1}}{1 - f_{n+m-1} \vartheta_{n+m+1}}}}}$$

a potem przez kolejne stosowanie wzoru redukcyjnego

$$\vartheta_n = \frac{1}{1 - f_n \vartheta_{n+1}}$$

otrzymuje się wszystkie poprzedzające ϑ .

Wprowadźmy jeszcze wielkość pomocniczą $p_n = \lambda_n \vartheta_n$, wtedy mieć będziemy wzór następujący:

$$\beta_n^s = \beta_0^s p_0 p_1 p_2 \dots p_{n-1},$$

¹⁾ Gylden H. Orbites absolues I, livre III.

²⁾ Harzer P. Untersuchungen etc. p. 26.

który może posłużyć do tego, aby po znalezieniu β^1_0 obliczyć wszystkie β^1_n . Potem wszystkie inne β^s_n otrzymamy na zasadzie następującego wzoru rekurencyjnego:

$$\text{II}^1) \quad \beta^{s+2}_n = \beta^s_n + \alpha^2 \beta^{s+2}_{n+1}$$

Trudność w obliczeniu wielkości β^s_n polega na tem, że ułamek ciągly, wyrażający β_n , jest w niektórych przypadkach mało zbieżny. Harzer zauważył, że dla planetoid zwykłych wystarczy przyjąć ostatnie $n=12$; ale w naszym przypadku stosunek α jest mało różny od 1, wielkości f_n maleją bardzo powoli, nawet dla $n=30$ jeszcze nie możemy osiągnąć tego, aby dwa następujące po sobie przybliżenia w rozwinięciu ułamka²⁾, różniły się od siebie o wielkości zaniedbywalne, musimy więc, aby módz obliczyć β^1_n , postąpić inaczej, bez obliczenia wielkości pomocniczych λ_n i f_n . W tym celu przedewszystkiem obliczymy spółczynnik β^1_0 ; możemy to zrobić najlepiej przy pomocy metody średniej arytmetyczno-geometrycznej. Na tę metodę poraz pierwszy wskazał C. F. Gauss³⁾, jako na praktyczny sposób obliczania całki eliptycznej zupełnej, mamy bowiem:

$$\beta^1_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \varphi}},$$

jako pierwsze przybliżenie kładziemy

$$x=1; \quad y=\sqrt{1-\alpha^2}$$

obliczmy z tych dwu wartości średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$x' = \frac{x+y}{2}; \quad y' = \sqrt{xy},$$

następnie z x' i y' znowu średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$x'' = \frac{x'+y'}{2}; \quad y'' = \sqrt{x'y'} \text{ i t. d.}$$

aż przy pewnej wartości m znajdziemy:

$$x^{(m)} = y^{(m)}$$

¹⁾ Gyldeń H. Uundersökningar af theorien för himlakropparnas rörelser. II, str. 23, (Bihang till sv. Vet.-Ak. Handl. Bd. 6).

²⁾ Hansen zauważył, że dla n dużego $\beta_n = 1 + \alpha^2$.

³⁾ Gauss C. F. Werke III, pg. 352.

wtenczas:

$$\beta_{0}^{1} = \frac{1}{x^{(m)}} = \frac{1}{y^{(m)}}.$$

Ta metoda obliczenia β_{0}^{1} jest bardzo praktyczną i nadzwyczaj prędko prowadzi do celu.

W naszym przypadku mamy:

$$\lg x = 0; \quad \lg \sqrt{1-\alpha^2} = 9.7600268$$

$$x^{1V} = 9.8882366 \quad y^{1V} = 9.8882666$$

a więc

$$\lg \beta_{0}^{1} = 0.1117634.$$

Najwyższa wartość wskaźnika n jaka nam jest potrzebna jest $n = 12$, obliczyć więc musimy β_n^1 dla $n = 1 \dots, 12$.

Te współczynniki otrzymamy najprędzej przy pomocy metody podanej przez Ludendorffa¹⁾. Tablicę pomocniczą podaną przez Ludendorffa rozszerzyłem tak co do rozciągłości, jak i stopnia dokładności i przy pomocy jego wzorów znalazłem stosunkowo łatwo pozostałe β_n^1 ($n = 1, 2 \dots 12$). Dla kontroli drugi raz te same współczynniki β_n^1 ($n = 0, 1, 2 \dots 12$) zostały obliczone przy pomocy kwadratur mechanicznych. Tę metodę do obliczenia współczynników β_n^2 poraz pierwszy zastosował Harzer, później zaś O. Callandrea u. Dokładność w rachunkach jest znaczna i kontrola łatwa, gdyż każdy współczynnik jest obliczony jako średnia arytmetyczna z dwóch sum mało różniących się od siebie; ze zgodności tych dwóch rezultatów widzimy, czy nie został popełniony jakiś grubo błąd rachunkowy. W naszym przypadku kąt 90° dzieliłem na przedziały po 5° i dopiero wykonałem całkowanie. Ponieważ cały rachunek wykonałem według wzorów podanych przez Harzer'a i O. Callandrea u, dlatego też w bliższe szczegóły, odnoszące się do tej metody, nie wdaję się, odsyłam do rozpraw skąd one zostały wzięte²⁾.

Wartości β_n^1 obliczone za pomocą kwadratur mechanicznych wypadły zupełnie zgodne z wartościami obliczonymi przy pomocy powyższej tablicy. Aby otrzymać pozostałe współczynniki $\beta_{12}^1, \beta_{12}^3, \beta_{12}^5, \beta_{12}^7, \beta_{12}^9$, które mają posłużyć jako punkt wyjścia do użycia wzoru II, znów zastosowałem metodę kwadratur mechanicznych,

¹⁾ Ludendorff. A. N. Bd. 160.

²⁾ Callandrea u. Journal de l'École Polytechnique, II série, t. VII; Harzer, l. c.; pg. 26.

oraz kontrolę przy pomocy tablicy Ludendorffa; zacząłem od obliczenia powyższych współczynników dlatego, ponieważ wedle uwagi Harzer'a¹⁾ najkorzystniej obliczyć współczynniki β_n^s najpierw dla najwyższej wartości n , gdyż w ten sposób najlepiej zmniejszy wpływ błędów, pochodzących od zaokrągleń. Gdy już współczynniki β_n^s zostały znalezione, zastosowałem wzór II i w ten sposób otrzymałem wszystkie pozostałe współczynniki. Aby skontrolować cały rachunek obliczyłem kilka dowolnie wziętych współczynników metodą kwadratur. Rezultaty otrzymane różniły się tylko o parę jednostek w 7-ej cyfrze logarytmów, co dla naszego przypadku, gdzie się ograniczamy do rachunku 6-cio cyfrowego, jest najzupełniej obojętne.

W ten sposób znalezione logarytmy współczynników β_n^s są następujące:

Logarytmy współczynników β_n^s

n/s	1	3	5	7	9
0	0.111763	0.388660	0.719219	1.092421	1.495190
1	9.887778	0.236762	0.620523	1.027947	1.451216
2	9.761532	0.153599	0.563644	0.986993	1.420154
3	9.693387	0.102476	0.524368	0.955978	1.394980
4	9.642434	0.062590	0.492468	0.929894	1.373181
5	9.601597	0.029631	0.465363	0.907191	1.353821
6	9.567459	0.001428	0.441683	0.887002	1.336327
7	9.538099	9.976724	0.420599	0.868721	1.320326
8	9.512324	9.954718	0.401561	0.852056	1.305577
9	9.489344	9.934848	0.384186	0.836699	1.291872
10	9.468604	9.916727	0.368193	0.822446	1.279062
11	9.449703	9.900062	0.353368	0.809138	1.267029
12	9.432337	9.884629	0.339546	0.796650	1.255680

Gdy już znaleźliśmy wszystkie wielkości I, to na zasadzie wzoru następującego

$$\text{III} \quad \gamma_{n,\sigma} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\sigma - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2\sigma} \alpha^{n+2\sigma+1} \beta_{n+\sigma}^{(2\sigma+1)}$$

otrzymamy współczynniki $\gamma_{n,\sigma}$.

¹⁾ Harzer P, l. c. pg. 26.

Te współczynniki są następujące:

Logarytmy współczynników $\gamma_{n,s}$.

n/s	0	1	2	3	4
0	0.024421	9.673703	9.700962	9.839429	0.023954
1	9.713092	9.583198	9.574342	9.726002	9.917251
2	9.499504	9.364732	9.455100	9.615956	9.812414
3	9.344016	9.237503	9.340652	9.508424	9.709071
4	9.205720	9.117201	9.229629	9.402800	9.606979
5	9.077540	9.001658	9.121202	9.298793	9.505931
6	8.956059	8.889613	9.014822	9.196093	9.405778
7	8.839356	8.780260	8.910104	9.094497	9.306403
8	8.726239	8.673047	8.806768	8.993846	9.207710
9	8.615916	8.567583	8.704600	8.894015	
10	8.507834	8.463575	8.603436	8.794901	
11	8.401590	8.360800	8.503145	8.696416	
12	8.296881	8.259083	8.403622	8.598585	

$$\lg \bar{\gamma}_{0,0} = 9.859395.$$

Znaleźliśmy w ten sposób współczynniki $\beta_n^{(s)}$ i $\gamma_{n,\sigma}$, możemy obecnie przystąpić do obliczenia wielkości A i B opatrzonych odpowiednimi wskaźnikami u góry i u dołu. Te wielkości podstawowe A i B mogą być obliczone dwoma sposobami. Jeden stanowi zastosowanie wzorów (20) i (24) (str. 26, 27) przy pomocy wielkości pomocniczych $\Omega_{n,m,p}$ które są funkcjami $\gamma_{n,\sigma}$, oraz wielkości $P_{n,m,p}$ i $Q_{n,m,p}$, znów będących funkcjami $\Omega_{n,m,p}$. Podobne postępowanie *Brendel* zaleca; jest ono istotnie bardzo praktyczne, gdy chcemy odrazu obliczyć wszystkie potrzebne współczynniki w rozwinięciu funkcji perturbacyjnej dla danej planetoidy. W naszym jednak przypadku podobny sposób postępowania nie zalecałby się, gdyż ograniczając się do wyrażień zerowego stopnia, daleko prościej odrazu obliczyć współczynniki A i B wprost we funkcji $\gamma_{n,\sigma}$. Wzory stosowne dla takiego rachunku zostały podane przez *Masala*¹⁾. Są one wygodne w użyciu o ile nie posu-

¹⁾ H. Masal: Formeln und Tafeln zur Berechnung der Absoluten Störungen der Planeten, Kongl. Svenska Vetensk. Ak. Handlingar. Bd. 23.

wamy się w rozwinięciach do wyższych stopni, gdyż wtedy stają się one skomplikowane. W granicach dokładności przyjętych przez nas, wzory Masal'a są następujące:

$$A_{n,0,0} = -2n\bar{\gamma}_{n,0}$$

$$B_{n,0,0} = +2n\bar{\gamma}_{n,0} + 4\gamma_{n,1}$$

$$A_{n,1,0}^{(+1)} = \bar{\gamma}_{n,0} [(n^2 + 2n) - 2n^2\varphi] + 2n\gamma_{n,1}$$

$$B_{n,1,0}^{(+1)} = \bar{\gamma}_{n,0} [-(n^2 + n) + 2n^2\varphi] + \gamma_{n,1} [-(4n + 6) + 4n\varphi] - 8\gamma_{n,2}$$

$$A_{n,1,0}^{(-1)} = \bar{\gamma}_{n,0} [(n^2 + 2n) + 2n^2\varphi] + 2n\gamma_{n,1}$$

$$B_{n,1,0}^{(-1)} = \bar{\gamma}_{n,0} [-(n^2 + n) - 2n^2\varphi] + \gamma_{n,1} [-(4n + 6) - 4n\varphi] - 8\gamma_{n,2}$$

$$A_{n,0,0}^{1,0} = \bar{\gamma}_{n,0}(2n^2 + 4n) + 4n\gamma_{n,1}$$

$$B_{n,0,0}^{1,0} = -\bar{\gamma}_{n,0}2n(n+1 - \gamma_{n,1}(8n+12)) - 16\gamma_{n,2}$$

$$A_{n,0,0}^{2,0} = -\bar{\gamma}_{n,0}(n^3 + 5n^2 + 6n) - \gamma_{n,1}(4n^2 + 14n) - 8n\gamma_{n,2}$$

$$B_{n,0,0}^{2,0} = +\bar{\gamma}_{n,0}n(n+1)(n+2) + \gamma_{n,1}6(n+2)^2 + \\ + \gamma_{n,2} \cdot 24(n+3) + 48\gamma_{n,3}.$$

gdzie $\varphi = \frac{n}{n'}$. Na zasadzie tych wzorów otrzymaliśmy następujące wartości logarytmów współczynników A i B .

n	0	4	8	12
$A_{n,0,0}$		0.108 810 _n	9.930 359 _n	9.677 092 _n
$B_{n,0,0}$	0.275 763	0.257 352	0.017 139	9.738 837
$A_{n,0,0}^{1,0}$		0.991 403	1.001 115	0.876 663
$B_{n,0,0}^{1,0}$	1.136 647 _n	1.173 232 _n	1.088 907 _n	0.931 817 _n
$A_{n,0,0}^{2,0}$		1.682 384 _n	1.834 337 _n	1.818 637 _n
$B_{n,0,0}^{2,0}$	1.906 612	1.946 349	1.945 695	1.972 880.

Znaleźliśmy więc ostatecznie potrzebne współczynniki rozwinięcia funkcji perturbacyjnej; możemy obecnie przystąpić do wyrachowania przerwy dla planetoidy typu Thule w pierścieniu planetoidalnym.

Mieliśmy równanie (37):

$$(1) \quad (2\delta_1 + 2\delta_1^2) \beta_1 = p' + p'' \beta_1 + p''' \beta_1^2,$$

które zawiera tylko jedną niewiadomą β_1 (δ_1 wyraża się przez β_1) przy pomocy związku (61) str. 84 i jest względem tej niewiadomej stopnia trzeciego; (jak zobaczymy współczynnik przy β_1 w tym równaniu zawiera δ).

Brendel okazał, że w celu znalezienia obu granic przerwy należy wyznaczyć ten współczynnik, przez nadanie odpowiedniej wartości na δ , w taki sposób, ażeby to równanie dawało na β_1 tylko dwie, od siebie różne wartości, wówczas dwie wartości δ_1 , odpowiadające tym dwóm różnym wartościom β_1 , określają właśnie granice przerwy.

Brendel¹⁾ wykazał, że β_1 w przypadku planetoidy charakterystycznej, nigdy nie może się stać większem co do rzędu wielkości od pierwiastka trzeciego stopnia z masy zakłócającej; gdy mamy do czynienia z planetoidą tego rodzaju, że stosunek ruchu średniego dziennego planety zakłócającej do takiegoż ruchu dziennego planetoidy wyraża się ściśle przez prosty ułamek, wtedy

$$\delta = 0, \quad \text{zaś} \quad \delta_1 = -4\mu\gamma;$$

ale jak to już poprzednio widzieliśmy

$$\gamma = \frac{3}{2} \beta_1^2.$$

Ponieważ β_1 w przypadku planetoidy charakterystycznej co najwyżej może być rzędu $\sqrt[3]{m'}$, przeto najmniejsza wartość (δ_1) jest rzędu mniejszego (co do rzędu wielkości) niż $m'^{\frac{2}{3}}$. Jeżeli mianowicie ta wartość graniczna byłaby przekroczoną, to wtedy nasze rozwinięcia stałyby się rozbieżne²⁾, ruch planetoidy, któraby miała takie δ_1 byłby niestały. Dla tych krytycznych wartości δ_1

¹⁾ Brendel. A. N. 3346.

²⁾ Brendel, l. c.; Brendel. Theorie d. kl. Pl. I, Kap. VII; Gylden Acta Math.: t. IX.

a więc i β_1 występuje (w znaczeniu Brendlowskim) przerwa (laku) w pierścieniu planetoidalnym; przerwa ta przychodzi do skutku w ten sposób, że δ_1 zrywa ciągłość; wartości jego po obu stronach przerwy są przeciwnego znaku. Ponieważ δ_1 , jak to wynika z poprzedniego, nigdy nie może być zerem, przeto $\mu_1 = \frac{n'}{n_1}$ nigdy nie może się równać jakiemuś prostemu ułamkowi. Natomiast δ może się stać równem zeru: ma to miejsce wtedy, gdy μ jest równe prostemu ułamkowi. dla tego też we wszystkich naszych dotychczasowych wzorach, gdzie zachodzi mały mianownik δ_1 , nie wolno zastąpić go przez δ , jakkolwiek δ może być blizkie δ_1 .

Stosownie do tego, cośmy wyżej powiedzieli, zajmijmy się przedewszystkiem wyznaczeniem wartości β_1 . W tym celu weźmy na uwagę przytoczone przed chwilą równanie (1). Ponieważ δ_1 nie jest rzędu zero, to $\delta_1^2 \beta_1$ jest rzędu wyższego, niż pozostałe wyrazy w tym wzorze, możemy je więc opuścić. Zamiast δ_1 podstawmy

$$\delta - 4\mu \gamma = \delta - 6\mu \beta_1^2,$$

wtedy otrzymamy:

$$2\delta\beta_1 - 12\mu\beta_1^3 = p' + p''\beta_1 + p'''\beta_1^2,$$

co możemy napisać:

$$(2) \quad \frac{p'}{12\mu} + \frac{p'' - 2\delta}{12\mu} \beta_1 + \frac{p'''}{12\mu} \beta_1^2 + \beta_1^3 = 0,$$

czyli

$$(3) \quad \beta_1^3 + i\beta_1^2 + j\beta_1 + k = 0,$$

gdzie dla krótkości położyliśmy:

$$(4) \quad i = \frac{p'''}{12\mu}; \quad j = \frac{p'' - 2\delta}{12\mu}; \quad k = \frac{p'}{12\mu}.$$

Z (4) widzimy, że tylko współczynniki i oraz k są niezależne od δ . Równanie (2) musimy tak przekształcić, aby się pozbyć wyrazu β_1^2 ; w tym celu położmy:

$$(a) \quad \beta_1 = b_1 - \frac{i}{3}$$

wtedy znajdziemy:

$$(5) \quad b_1^3 + db_1 + e = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$(6) \quad d = j - \frac{i^2}{3}$$

oraz

$$e = \frac{2}{27} i^3 - \frac{ij}{3} + k.$$

Równanie (4) będzie posiadało pierwiastek podwójny wtedy, gdy wyróżnik równania (5) jest równy 0. Po obu stronach przerwy, b_1 ma wartości przeciwnego znaku; ponieważ $\beta_1 - b_1$ jest małe w porównaniu z b_1 , przeto także i wartości β_1 będą przeciwnego znaku.

Wyróżnik ten jest

$$1 + \frac{4}{27} \frac{e^3}{d^2} = D;$$

z teorii równań trzeciego stopnia wiemy, że gdy $D > 0$, wtedy mieć będziemy tylko jeden rzeczywisty pierwiastek równania (5), a więc dla β_1 otrzymamy tylko jedną wartość; gdy $D = 0$, wtedy otrzymujemy trzy rozwiązania, z których dwa są równe i wartość β_1 znaleziona z tego warunku daje nam właśnie krytyczną wartość δ_1 ; wreszcie gdy $D < 0$ mieć będziemy wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste, ale tylko jeden, jak to możemy się przekonać przez podstawienie, spełniać będzie nasze równania.

Aby znaleźć ten krytyczny warunek, z otrzymanych poprzednio rozwinięć współczynników współrzędnych Gylđénowskich obliczymy stałe wielkości i oraz k ; w naszym przypadku znaleźliśmy:

$$\lg i = 8.442234_{-10}; \quad \lg k = 6.672816_{-10}$$

te wielkości są stałe; wielkość d zależy od j , a więc od δ , po szeregu prób dokonanych co do wartości j znajdujemy, że warunkowi $D = 0$ czyni zadość ta wartość j , która daje ze wzoru (5)

$$\lg d = 8.12508_{n-10} \quad \text{i} \quad \lg e = 7.773160_{-10},$$

skąd znajdujemy:

$$\lg b_1' = \lg b_1'' = 8.824044$$

zaś

$$\lg b_1''' = 9.125074_n$$

na zasadzie wzoru (a) z łatwością otrzymamy:

$$\lg(\beta_1)_I = 8.759360; \quad \lg(\beta_1)_{II} = 9.154128_n$$

te wartości β_1 są krytyczne. Znając wartość krytyczną j z łatwością znajdziemy tej wartości odpowiadającą wartość δ . W naszym przypadku znaleźliśmy:

$$\lg \delta = 8.559884;$$

znając

$$(\beta_1)_I \text{ i } (\beta_1)_{II}$$

otrzymamy dwie wartości dla γ na zasadzie następującego wzoru, dokładniejszego niż ten, który poprzednio stosowaliśmy¹⁾:

$$(7) \quad \gamma = \frac{1}{(1 - \beta_1^2)} - 1.$$

Wartości te w przypadku naszym są następujące:

$$\lg \gamma_I = 7.696539; \quad \lg \gamma_{II} = 8.495577.$$

Teraz ze wzoru (2), rozdziału poprzedzającego, znajdziemy dwie wartości δ_1 , odpowiadające tem wartościom γ , mianowicie:

$$\lg(\delta_1)_I = 8,334772; \quad \lg(\delta_1)_{II} = 8.750883_n$$

dalej ze wzoru

$$n_1 = \frac{4n'}{3 - \delta_1}$$

znajdziemy obie wartości prawdziwego ruchu średniego, które ograniczają szukaną przerwę dla typu $3/4$. Te wartości są:

$$(n_1)_I = 401''.732; \quad (n_1)_{II} = 391''.485$$

wreszcie stałą n , dla wartości krytycznych δ_1 , znajdziemy ze wzoru następującego:

$$n = \frac{4n'}{3 - \delta},$$

skąd:

$$n = 403''.723.$$

Rezultaty otrzymane możemy więc wystawić w sposób następujący:

Dla planetoid typu $3/4$, wartość β_1 musi spełniać warunek następujący:

¹⁾ Brendel A. N. 3346 wzór № 38.

zaś $\lg \beta_1 \leq 8.759360$ lub $\lg \beta_1 \geq 9.154128_n$

$\lg \delta_1 \leq 8.334772$ lub $\lg \delta_1 \geq 8.750883_n$

zatem prawdziwy ruch dzienny n_1 dla typu Thule musi być

$n_1 > 401''.732$ lub $n_1 < 391''.485$.

Pomiędzy temi wartościami n_1 znajduje się przerwa w znaczeniu Brendelowskim w pierścieniu planetoidalnym; planetoida, która posiadałaby ruch średni dzienny prawdziwy (w definicji Brendelowskiej), zawarty pomiędzy powyższymi granicznymi wartościami n_1 poruszałaby się po drodze niestalej.

[Musimy tu zwrócić uwagę, że ze względu na definicyę n_1 ta wielkość nie jest bezpośrednio porównywalną z wartością ruchu średniego dziennego oskulacyjnego, jaki znamy z elementów planetoidy].

W ten sposób otrzymaliśmy wartości krytyczne prawdziwego ruchu średniego dziennego, warunkującego przerwę dla typu $3/4$; taka przerwa dotąd była wyznaczoną dla Hekuby i Hildy (zrobił to Brendel¹⁾). Prace Schwarzschild'a dla Hekuby²⁾ i Dziewulskiego³⁾ dla Hildy, wykonane na zupełnie odmiennej drodze, mianowicie metodą Poincaré'go wynajdywania rozwiązań okresowych, potwierdzają rezultaty otrzymane przez Brendel'a jego własną metodą, co daje nam najlepsze świadectwo o wartości tej metody, stosunkowo łatwej w zastosowaniach praktycznych.

¹⁾ Brendel. A. N. 3396. Buchholz H. Untersuchungen etc.

²⁾ Schwarzschild. A. N. Bd. 160.

³⁾ Dziewulski. A. N. Bd. 181.

L i t e r a t u r a .

- M. Brendel. Theorie der kleinen Planeten I — IV. Göttingen, 1898 — 1911. (Abhandl. der Königl. Gessellschaft der Wissenschaften. Neue Folge Bd. I, VI, VIII).
- Über die Lücken im System der kleinen Planeten und über ein Integrationsverfahren im Problem der drei Körper (Astr. Nachr. Bd. 140).
- Om användningen af den absoluta Störingsteorien på en grupp af små planeterna med numerisk tillämpning på planeten (46) Hestia. (Astronomiska iakttagelser och undersökningar anställda på Stockholms Observatorium, B. IV, 3).
- H. Buchholz. Untersuchungen der Bewegung vom Typus $\frac{2}{3}$ im Problem der drei Körper 2 Tle. (Abhandl. d. K. Akademie in Wien. Bde. 72, 77) 1901, 1904.
- K. Bohlin. Om en grupp af differentialeqvationer hvilkas solution medför s. k. små divisorer. (Öfversigt af K. Svenska Vet.-Ak. Förhandlingar, 1887).
- Bidschof. Die Bahn der (279) Thule. (Sitzungsberichte d. K. Akademie der Wissenschaften in Wien; Bd. 100, p. 937).
- O Callandreau. Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. (Journal de l'Ecole Polytechnique II série — VII).
- H. Gylden. Om bestämningen af ojemnheter med mycket long period i teorien för planeters och satelliters rörelser. (Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien Förhandlingar, 1895, № 7)
- Olika metoder att bestemma termerma i den differentialeqvationer sôm förmedlar härledingen af ojemnheterna en planets longitud [Öfv. af K. Sv. Vet.-Ak. Förhandl., 1896, № 6].
- Untersuchungen über die konvergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Koordinaten der Planeten angewendet werden.— [Acta Mathematica t. 9].
- Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. (Acta Mathematica, t. 15, 17).

- H. Gylden. Undersökningar af theorien för himmlakropparnas rörelser I, II, III. (Bihang till K. Svenska Akad. Handlingar Bd. VI, VII).
 — Traité analytique des orbites absolues, t. I. — Stockholm, 1899.
 — Hülfsstafeln zur Berechnung der Hauptungleichheiten der kleinen Planeten. (Astr. Gesellsch. Publ. 21).
- P. Harzer. Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. (Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, VII série, t. XXXIV, 12).
- Kramer J. I. = Theorie der kleinen Planeten. — Die Planeten von Hecuba Typus. (Abh. d. K. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, neue Folge Bd. II).
 — II. = Untersuchungen und Tafeln zur Theorie der kleinen Planeten von Hecuba Typus. (Abh. d. k. Gesell. d. Wissensch. zu Göttingen — neue Folge, Bd. V)
- Lemke H. Über die Mars — und Jupiterstörungen der kleinen Planeten von Hebe-Typus, Berlin, 1897.
- Ludendorff H. Die Jupiterstörungen der kleinen Planeten von Hecuba Typus. Berlin, 1897.
 — Tafel zur Berechnung der Störungfunction für die äussersten kleinen Planeten. (Astr. Nachr. Bd. 140).
- Masal H. Formeln und Tafeln zur Berechnung der Absoluten Störungen der Planeten. (Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 23, 1889).
- Wedemeyer A. Die Bahn der Planeten (279) Thule. (Archiv der deutschen Seewarte, XXXI Jahrgang).
- Wellmann V. Die intermediäre Bahn des Planeten (17) Thetis, nach Herrn Gylden's Theorie. (Grunert's Archiv. 2, Bd. VI).

JAN KRASSOWSKI.

Sur le mouvement des petites planètes du type de Thule ($\frac{3}{4}$).

Détermination des termes élémentaires et de la lacune pour le type Thule.

Le nombre croissant des petites planètes a suscité l'apparition des méthodes spéciales en mécanique céleste qui permettent de calculer plus ou moins rapidement les perturbations.

G y l d é n et ses nombreux élèves ont divisé les petites planètes en groupes, appelés „types“ où la relation de commensurabilité entre le mouvement moyen diurne de la petite planète et celui de Jupiter joue un rôle très important. On sait que si ce rapport peut s'exprimer approximativement par un rapport simple des deux nombres entiers, les perturbations, causées par la planète principale, deviennent de plus en plus grandes à mesure que le rapport de ces deux moyens mouvements diurnes s'approche de la commensurabilité exacte. Jupiter produit dans l'essaim de petites planètes en général des grandes perturbations grâce à sa masse énorme. Les perturbations Joviennes deviennent déjà très sensibles pour les planétoïdes du groupe $\frac{1}{3}$ (moyen mouvement diurne ca 900'') et du groupe $\frac{1}{2}$ (moyen mouvement diurne ca 600'').

Si la commensurabilité devient très approchée, les perturbations croissent très vite et les méthodes ordinaires du calcul des perturbations deviennent insuffisantes ou très difficiles et pénibles dans les applications, surtout s'il s'agit des planétoïdes-types.

C'est à Gyldén que nous devons une des méthodes du calcul approché des perturbations. Cette méthode, remaniée et perfectionnée par ses éminents élèves (M. M. Backlund, Brendel, Harzer, Wolf etc.), peut être même appliquée dans les cas les plus difficiles où la commensurabilité des moyens mouvements de la planète principale et de la petite planète est à peu près exacte.

Cette méthode a fait ses preuves; elle a été déjà plusieurs fois appliquée, avec bon résultat, aux différents cas difficiles du calcul des perturbations des petites planètes appartenant aux groupes d'Hécube, de Hestia ou Hilda.

M. M. Brendel et Kramer nous ont donné des tables étendues, qui nous facilitent notablement le calcul des perturbations dans le cas des types Hestia et Hécube et permettent rapidement de déterminer leurs positions géocentriques. Les calculs de M. Harzer ont été sur une autre voie brillamment contrôlés par M. Simonin pour Hécube. Le cas difficile du type de Hilda ($\frac{2}{3}$) a été commencé d'être étudié par M. Buchholz, qui a déterminé les termes caractéristiques, sans donner l'expression même des perturbations.

La petite planète Thule (279) appartient au type $\frac{3}{4}$ des petites planètes et jusqu'à présent c'est l'unique représentant de ce type. Thule peut s'approcher de l'orbite de Jupiter beaucoup plus que Hilda. M. Bidschof trouve que des grandes proximités entre Jupiter et Thule arrivent jusqu'à trois fois dans l'espace d'un siècle. Pendant un pareil rapprochement le mouvement de Thule est fortement perturbé par la puissante action de Jupiter, qui produit des variations très notables dans son orbite. Ainsi pendant la proximité qui a eu lieu en 1912, les calculs de M. Viljev nous montrent que le moyen mouvement de Thule a subi de très fortes variations.

M. Kobb, en se basant sur les travaux de M. Darwin sur les orbites périodiques, a cru pouvoir admettre que l'orbite de Thule peut devenir instable et s'entrecouper même avec celle de Jupiter.

Jusqu'à présent le mouvement de cette petite planète, appartenant à un type planétoïdal si intéressant, n'a pas été étudié d'une manière générale. A ce que je sais, M. M. Bidschof et

Wedemeyer ont seulement calculé et corrigé les éléments de Thule. M. Viljev de son côté n'a fait que le calcul des perturbations de son mouvement, limité à un court espace de temps en se basant sur les éléments de M. Wedemeyer.

Il m'a semblé intéressant d'essayer d'appliquer à Thule les méthodes de Gylđen, modifiées et perfectionnées avec tant de succès par M. Brendel. L'orbite de départ de nos calculs a été celle de M. Wedemeyer.

Dans le présent mémoire je donne un aperçu succinct de la méthode de Gylđen, modifiée par M. Brendel, je détermine pour le type Thule les termes caractéristiques ainsi que la lacune (dans le sens de M. Brendel) dans l'anneau planétoidal, qui jusqu'à présent n'a pas été déterminée pour ce type.

Pour ne pas être trop long je me permets de renvoyer le lecteur aux formules contenues dans le texte polonais, aux quelles, du reste, je fais les renvois donnant les numéros des formules et les pages correspondantes du texte.

1. Dans le premier chapitre je me suis attaché d'exposer, aussi brièvement qu'il m'a été possible, les idées générales sur lesquelles repose la théorie de Gylđen ainsi que les équations les plus importantes de la théorie qui nous intéresse,

On sait que c'est la méthode de Hansen qui a servi à Gylđen du point de départ. Les équations fondamentales sont: I pg. 4; II pg. 8; et III pg. 9, texte pol. Dans ces équations v désigne la longitude vraie de la planète et r son rayon vecteur.

Les équations de Hansen en coordonnées polaires, Gylđen transforme, en introduisant des nouvelles variables ρ , η S et v , qu'il appelle „longitude vraie“ et qui est une variable indépendante. Les équations nouvelles ainsi obtenues sont: IV, IV^{bis} pg. 11, V, V^{bis} pg. 12. Nous introduisons maintenant les notations de M. Brendel¹⁾ et nous rappelons la définition des termes élémentaires et caractéristiques à longue et courte période. Parmi ces termes nous distinguons, suivant M. Harzer²⁾ ceux qui appartiennent au genre A, B, C, D et ceux que M. Bren-

¹⁾ Brendel. Theorie d. kl. Planeten I.

²⁾ Harzer P. Untersuchungen etc.: pg. 3.

del appelle „rein erster Ordnung“. Avec M. Brendel nous désignerons par les lettres latines les termes du premier ordre, et par les lettres grecques ceux qui contiennent, comme diviseur, la petite quantité δ .

Dans le présent mémoire nous nous bornons à ne considérer que le mouvement de la petite planète qui s'effectue dans le plan même de l'orbite: c'est pour cela que nous laissons de côté les perturbations de l'inclinaison.

En nous servant des relations connues, données par M. Brendel, entre les quantités Gyldéniennes η , Π , R nous obtenons:

$$(1) \quad (r) = \frac{a(1-\eta)}{1+\eta \cos v}$$

où (r) c'est le rayon vecteur „absolu“.

Après quelques transformations on parvient à l'équation suivante:

$$(2) \quad \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{1+\eta \cos v} = 1 + \sum n B_n \cos n v.$$

Cette équation obtenue par Gyldén est très importante, car le second membre ne contient aucun élément à longue période, tandis que le premier membre de cette équation est formé par une fonction pareille.

Pour achever toutes les transformations nécessaires on introduit encore le „temps réduit“ (t) qui est donné par l'équation suivante:

$$(3) \quad n(t) + \Lambda = v + \sum B_n \sin n v \quad \text{où} \\ L = nt + \Lambda$$

et la quantité Ξ est définie par:

$$\frac{d\Xi}{dv} = \sum \frac{d \cdot B_n \cos n \Pi}{dv} \sin n v - \sum \frac{dB_n \sin n \Pi}{dv} \cos n v,$$

alors (12) devient:

$$(4) \quad n \frac{d(t)}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta \cos v)} + \frac{d\Xi}{dv}.$$

Si W nous donne la différence entre l'angle déterminé par le

temps vrai nt et celui qui correspond au „temps réduit“ $n(t)$, nous aurons encore la relation suivante:

$$(5) \quad W = nt - n(t)$$

qui enfin nous donnera l'équation différentielle VI pg. 20 où entrent aussi les quantités R et S .

Pour les applications de la méthode les relations IV, IV^{bis}, V, V^{bis} et VI sont les plus importantes. Nous allons maintenant tâcher d'intégrer ces équations. Ces équations contiennent les quantités P et Q qui sont des dérivées partielles par rapport à v et à r de la fonction perturbatrice Ω que nous devons développer en série suivant les procédés, donnés par Gyl d'én.

2. On sait que Gyl d'én pose:

$$(6) \quad \frac{a}{\Delta} = R_0 + 2R_1 \cos H + 2R_2 \cos 2H + \dots$$

où

$$(7) \quad R_n = \frac{2}{\pi} \frac{a'}{r'} \alpha^{n+1} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 \varphi + \alpha^2 \lambda \sin^2 \varphi}}$$

en substituant dans cette expression les coefficients numériques connus $\gamma_{n,s}$, ne dépendant que de α (on se rappelle que $\alpha = \frac{a}{a'}$, le rapport des demi-axes de la planète troublée et troublante) on trouve:

$$(8) \quad R_n = \frac{a'}{r'} (1-\lambda)^{\frac{n}{2}} \{ \gamma_{n,0} - \gamma_{n,1} \lambda + \gamma_{n,2} \lambda^2 - \gamma_{n,3} \lambda^3 \dots \}.$$

Ce développement converge encore dans le cas de Thule.

En introduisant dans (6) l'expression trouvée, nous obtenons le développement en série seulement de la partie $\frac{a}{\Delta}$ de la fonction perturbatrice, qui, comme on le sait d'ailleurs, étant complète, s'exprime au moyen de la relation suivante:

$$(9) \quad a(\Omega) = m' \left[\frac{a}{\Delta} - \frac{a'}{r'} \alpha^2 (1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \cos H \right].$$

Si nous développons cette expression en série, en introduisant les coefficients numériques connus, nous obtenons:

$$(10) \quad a(\Omega) = 2m' \sum_{n, s, s', v, v'} \Omega(n, s, s')_{n, v'} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos nH$$

où

$$(11) \quad \Omega_n = m' \sum_{n, s, s', v, v'} \Omega(n, s, s')_{v, v'} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'}$$

Ces coefficients sont des fonctions numériques de α et peuvent s'exprimer au moyen des $\gamma_{n,s}$.¹⁾ Cette relation est donnée pg. 25 texte pol. (20).

Les quantités P et Q peuvent s'exprimer, après quelques transformations, au moyen des relations suivantes:

$$(12) \quad \begin{cases} P = 2 \sum_{(n,s,s',v,v')}^* P_{(n,s,s',v,v')} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \cos n(v-v') \\ Q = 2 \sum_{(n,s,s',v,v')}^* Q_{(n,s,s',v,v')} \rho^s \rho^{s'} \eta^{2v} \eta'^{2v'} \sin n(v-v') \end{cases}$$

(où * signifie que pour $n=0$ le facteur 2 doit être omis).

Les coefficients de ces expressions sont données par les formules pg. 27 — 30 texte pol., qui n'ont pas besoin d'aucune explication.

Dans les expressions (12) nous écrivons ρ en séparant la partie élémentaire du genre B et les termes caractéristiques:

$$(13) \quad \rho = (\rho) + R$$

où (ρ) désigne les termes élémentaires du genre B et P contient les termes ordinaires et caractéristiques. En ne considérant dans ρ que les termes caractéristiques seuls et les substituant dans P et Q , nous obtenons l'expression (39) pg. 31 texte pol. pour P et une expression analogue pour Q .

Pour avoir les expressions définitives des quantités P et Q il est nécessaire d'effectuer encore une transformation, parce que dans ces quantités entrent les S, R, W , qui de leur côté contiennent les termes des genres différents (ordinaires, à courte et longue périodes, élémentaires etc.). En effectuant des transformations analogues aux précédentes (pg. 32 texte pol.) on obtient les expressions définitives pour P et Q (pg. 32, 33 texte pol.)²⁾

¹⁾ Brendel, Th. d. kl. Plan. I, pg. 52; Harzer, Untersuch., pg. 49; Kramer I, Th. d. kl. Pl. pg. 9.

²⁾ Brendel, l. c. pg. 70; Harzer: l. c. pg. 30.

3. Nous allons déterminer maintenant les termes caractéristiques et élémentaires dans les cas de Thule (279).

Aux pg. 12 et 14 texte pol. nous avons donné les équations différentielles qui déterminent les quantités δ et ρ ; l'équation différentielle en W leur est analogue :

$$(14) \quad W = c_0 + \sum \frac{c_n}{\lambda_n} \sin (\lambda_n v - B_n).$$

Dans toutes ces équations a_n , b_n , c_n sont des petites quantités, λ_n est un petit diviseur. Quelquefois cependant, après avoir effectué l'intégration, il arrive que malgré que les quantités a_n , b_n , c_n sont petites, les termes renfermant le diviseur λ_n peuvent être ou peu différents de zéro ou très grands¹⁾, car, après cette opération, les termes considérés peuvent avoir comme facteur $\frac{1}{\lambda_n}$ ou $\frac{1}{1 - \lambda_n^2}$. Si λ_n est peu différent de zéro, l'argument de la fonction cosinus est un très petit angle, ce qui nous donne pour le terme considéré une période très longue.

Si λ_n diffère peu de 1 alors la période du terme, renfermant un pareil λ est peu différente de la période de la variation de v , par conséquent elle diffère peu de la durée de révolution de la planète considérée. Des pareilles expressions nous donneront les termes à courte période.

Par l'intégration, dans les expressions se rapportant à S , seront agrandis seulement les termes à longue période, tandis que ceux à courte période vont demeurer sans changement; inversement dans les expressions de ρ après l'intégration augmenteront seulement les termes à courte période et ceux qui auront une période longue ne seront pas changés.

M. Brendel a remarqué, que dans le cas d'une commensurabilité très approchée entre les moyens mouvements de la planète troublée et troublante, il arrive que les termes du second ordre sont encore très importants. L'idée de Gylden repose sur ce principe que dans les expressions approchées, obtenues pour P et Q , nous ordonnons les termes non suivant leur ordre ou degré

¹⁾ Brendel, Om användningen etc., pg. 6. Ludendorff, Die Jupiterstörungen d. kl. Pl. von Hecuba-Typus, pg. 4.

mais selon leur valeur véritable, qu'ils obtiennent après l'intégration. C'est pour cela que nous devons d'abord pour Thule déterminer dans les développements de S , ρ , R , W les termes à longue et courte période.

Nous commencerons par séparer avec M. Brendel dans S , ρ , W , R les parties à longue et à courte période ainsi que les termes ordinaires, en souscrivant sous chaque lettre un des indices d , k , z . Nous aurons donc ainsi

$$S = S_d + S_k + S_z \quad R = R_d + R_k + R_z$$

$$\rho = (\rho) + R \quad W = \bar{\gamma} v + W_d + K$$

où

$$K = W_k + W$$

et $\bar{\gamma} v$ c'est le terme séculaire.

Dans notre cas spécial le rapport du moyen mouvement diurne n' de Jupiter au même mouvement n_2 de la planète Thule (279) est:

$$\frac{n'}{n_2} = \mu_2 = 0.7398 = \frac{3 - \delta_2}{4}$$

(δ_2 représente une petite quantité) d'où :

$$1 - \mu_2 = \frac{1 + \delta_2}{4}.$$

Généralement l'argument des fonctions trigonométriques qui entrent dans nos développements a la forme suivante:

$$nw = n(1 - \mu_2)v - nB - n\mu W_d.$$

Donc, dans les termes à courte période, le coefficient de v sera peu différent de 1 et dans ceux à longue période ce même argument différera peu de 0. Maintenant, dans les expressions précédentes pour P et Q , il faut déterminer les termes de ces genres différents; les expressions de ces deux quantités, données aux pg. 42—43 texte pol. nous donnent tous les termes particuliers qui caractérisent le type planétoïdal considéré. Nous devons encore transformer ces expressions pour pouvoir calculer les différentes parties mentionnées plus haut, des expressions de S , R et W .

Comme on a remarqué précédemment, ces quantités sont formées avec des termes à longues et à courtes périodes, qui d'ailleurs dépendent des mêmes arguments que dans les expressions pour P et Q .

En introduisant la classification de M. Harzer des différents termes particuliers et faisant des transformations nécessaires, nous obtenons les expressions (10 pag. 40 texte pol.) où les différents termes de chaque catégorie de M. Harzer sont spécifiés par la majuscule correspondante.

Dans (10) pag. 46 texte pol. cinq expressions ne contiennent point la quantité δ_2 , qui, comme on le sait, est seule liée avec le mouvement d'une petite planète déterminée, ces expressions seront donc applicables au mouvement d'une petite planète quelconque¹⁾, par contre les termes contenus dans (10) l. c. doivent être calculés à nouveau dans chaque cas traité spécialement. C'est pour cela que Gylden a appelé ces termes caractéristiques, comme ceux qui nous déterminent dans chaque cas spécial les conditions du mouvement d'une certaine petite planète. Dans les termes de la catégorie (C) et (D) nous trouvons dans l'argument la quantité W_a , qui est une fonction variant peu avec le temps; c'est d'ailleurs la partie à longue période de W , qui est, suivant la nomenclature de M. Brendel, „la réduction du temps“. Cette quantité nous rend difficile l'intégration de nos équations différentielles. Dans les termes de la catégorie (A) l'intégration introduit un petit diviseur δ , de l'ordre de la masse perturbatrice. Dans (D), (C) nous avons δ en dénominateur après avoir intégré l'expression pour S , qui comme on le sait, contient la masse avec l'exposant moindre que l'unité. Ces termes deviennent zéro avec la masse. Nous devons aussi remarquer que l'intégration de l'expression pour S fait augmenter les termes du genre (A) et (C) tandis que dans ρ , sont augmentés seulement les termes de la catégorie (B) et (D). Nous pourrions donc constater que S_a sera de l'ordre de m' et $S_k, R_k, R_a, W_k, W_a, K_k$ — de l'ordre $\frac{m'}{\delta}$ et que les termes ordinaires qui entrent dans S, R, K seront de l'ordre de la masse perturbatrice.

¹⁾ Brendel. Theorie d. kl. Plan. I, pg. 106.

Nous trouverons donc les expressions définitives des différentes parties de S , R , K , qui sont données aux pages 48 et 49 du texte pol. Nous devons encore substituer les séries trouvées dans les expressions pour R et Q . Les expressions ainsi obtenues sont données aux pages 50—60 du texte pol. G_p désigne la somme des termes ordinaires; p_n , q_n et g_n sont des coefficients numériques qu'on peut calculer sans aucune difficulté.

4. Nous allons effectuer maintenant l'intégration des équations différentielles données, (IV pg. 11, V pg. 12, VI pg. 20 texte pol.). Plus haut nous avons déjà séparé les différents termes singuliers qui entrent dans les expressions des mouvements des petites planètes. M. M. Brendel et Kramer ont divisé les petites planètes suivant leur moyen mouvement diurne en certaines classes. Suivant cette classification la planète Thule appartient à la première classe¹⁾. Le mouvement des petites planètes appartenant à cette classe est caractérisé par des termes de degré 0, qui entrent dans R et K , qui sont grands par rapport à la masse de Jupiter. Dans cette classe on aura aussi dans le développement de R un terme important qui, comme l'a démontré M. Brendel, appartiendra à la catégorie D de M. Harzer c. à d. caractéristique à courte période.

Comme Thule peut se trouver en grande proximité avec Jupiter, les séries développées suivant le rapport des axes ou des rayons vecteurs, deviennent lentement convergentes, il faut donc dans les limites d'exactitude²⁾ que nous nous sommes assignées, dans les développements des coordonnées et dans les équat. IV, V, VI, omettre la troisième puissance de la masse de Jupiter, ainsi que dans, les expressions du degré 0, les quantités qui seront du troisième ordre par rapport à la masse perturbatrice, divisée par une petite quantité ζ , parce qu'elles ont encore en facteur une petite quantité η ou η' ou les carrés de ces quantités. Comme nous poussons nos développements jusqu'à la troisième puissance de la masse perturbatrice, nous devons à l'exemple de M. Kramer (dans le cas de Hécube) compléter les développements de M. Brendel. Nous obtenons ainsi les équations (1) pg. 63, (2),

¹⁾ Brendel, Th. d. kl. Pl. I pg. 92; Kramer I, pg. 20, 144.

²⁾ L'exactitude que nous nous sommes assignés dans la représentation du mouvement de Thule est celle que M. Brendel admet dans sa „Theor. d. kl. Plan.“.

(3), (4) pg. 64. (5), (6) pg. 65, (9) pg. 66. (12), (13) pg. 67 et les relations (14)–(18) pgs, 68–70. Nous avons donc trouvé, dans les limites d'exactitude désirée, tous les coefficients de P et Q . Ces coefficients sont des grandeurs numériques que l'on peut calculer sans beaucoup de difficultés.

Maintenant nous pouvons aborder l'intégration en se servant de la méthode de M. Brendel, que M. M. Ludendorff, Buchholz et Kramer ont appliqué avec tant de succès. Nous commencerons par intégrer l'équation qui nous donne $\frac{dS}{dv}$ En se

limitant aux termes du degré 0 nous aurons $\frac{dS}{dv} = -Q = -4q_1 \sin 4w$

et comme $w = (1 - \mu_2)v - B - \mu W_a$, contient aussi des termes périodiques d'un ordre supérieur à zéro (nous savons aussi que le terme séculaire lui appartient) nous trouverons donc après l'intégration de S des termes qui seront au moins de l'ordre 1, parceque dans S_0 il ne peut être des termes du genre A et C .

En intégrant (1) nous trouvons: (2) $S_0 = a_0 + a_1 \cos 4w + S_{n,0,0}$ ($S_{n,0,0}$ désigne les termes ordinaires), après quelques transformations nous obtenons l'équation (2) pg. 73 (texte pol.).

$$(3) \quad S_0 = a_0 + (q' + q''\beta_1 + q''' \beta_1^2) \cos 4w + S_{n,0,0}.$$

Dans (3) nous pouvons calculer tous les termes, sauf a_n que nous déterminerons ultérieurement.

Intégrons maintenant l'équation différentielle qui détermine la coordonnée R . Comme nous omettons pour le moment les quantités du premier ordre, nous devons remarquer qu'alors $(\rho) = 0$, parceque cette quantité contient seulement les termes à courte période du genre B , qui sont au moins du premier degré. L'équation (1) pg. 63 texte pol. va nous donner¹⁾:

$$(4) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = 2S_0 - P_0 - Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0 \text{ car } \rho = (\rho) + R.$$

Nous pouvons écrire aussi:

$$P_0 = p_0 + p_1 \cos 4w.$$

¹⁾ Les indices 0 indiquent que les fonctions correspondantes sont de l'ordre 0.

S_0 nous est connue par (3), il faut donc calculer $Q_0 \left(\frac{dR}{dv} \right)_0$; l'équation 6 pag. 34 nous donne l'équation (25) pag. 73 texte pol. d'où, après quelques transformations nous obtenons l'équation suivante:

$$(5) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = 2a_0 + p'_0 + \{(\Psi)_1 + (\Psi)_2 \beta_1 + (\Psi)_3 \gamma_1 + (\Psi)_4 \beta_1^2 + (\Psi)_5 \beta_1 \gamma_1 + (\Psi)_6 \gamma_1^2\} \cos 4w$$

où les constantes autres que a_0 sont données par (33) et (34) pg. 74—75 texte pol.

L'équation (12) pg. 48 texte pol. nous donne:

$$(6) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = b_0 - [1 - (1 + \delta_1)^2] \beta_1 \cos 4w, \\ = b_0 - (2\delta_1 + \delta_1^2) \beta_1 \cos 4w$$

où

$$b_0 = 2a_0 + p'_0 \text{ et } 2\delta_1 + \delta_1^2 = -\{(\Psi)_1 + (\Psi)_2 \beta_1 + (\Psi)_3 \gamma_1 + (\Psi)_4 \beta_1^2 + (\Psi)_5 \beta_1 \gamma_1 + (\Psi)_6 \gamma_1^2\}$$

Au lieu de γ_1 écrivons

$$-\frac{2\beta_1}{1 + \delta_1},$$

alors après quelques transformations nous trouvons:

$$(7) \quad R_0 = 2a_0 + p'_0 - \frac{p' + p''\beta_1 + p'''\beta_1^2}{2\delta_1 + \delta_1^2} \cos 4w,$$

où les coefficients sont donnés par les (29) (37)—(40) pg. 66 tex. p.

Nous avons donc déterminé tous les termes singuliers de la fonction R ; nous devons encore calculer entre les termes ordinaires ceux qui seront grands. Nous pouvons écrire:

$$(8) \quad \frac{d^2 R}{dv^2} + R = \Sigma \Psi_{n,0,0} \cos nw.$$

$$\text{où} \quad \Psi_{n,0,0} = 2S_{n,0,0} - B_{n,0,0}.$$

En appliquant à l'intégration de l'équation (8) la méthode de M. Brendel, nous obtenons:

$$(9) \quad R_0 = g_1 \sin v - g_2 \cos v$$

où les g_1 et g_2 sont donnés par les relations (43) pg. 78 tex. pol.

Après avoir effectué la substitution dans (9), des valeurs trouvées pour les constantes, nous arrivons à la relation (44) pg. 78 tex. pol. qui est:

$$(9) \quad R_{n,0,0} = \frac{2S_{n,0,0} - B_{n,0,0}}{1 - \left(\frac{n(1 + \delta_1)}{4}\right)^2}$$

où, pour $n \neq 4$, $S_{n,0,0}$ est donné par (21) pg. 71 tex. pol.

Il nous reste encore à intégrer l'équation différentielle qui nous donne la relation entre W et v . En nous limitant aux termes de l'ordre 0 nous aurons :

$$(10) \quad \frac{dW}{dv} = S_0 - 2R_0 - 2R_0 S_0 + 3R_0^2 + 3R_0^2 S_0 - 4R_0^3.$$

et les relations (47) pg. 79 tex. pol. En substituant ces relations dans l'équation (10) nous trouvons enfin :

$$(11) \quad \frac{dW}{dv} = c_0 + \gamma + (a_1 - 2a_0\beta_1 - 2\beta_1 + 6b_0\beta_1 + \\ + \frac{3}{4}a_1\beta_1^2 - 3\beta_1^3) \cos 4w - (a_1 b_1 - \frac{3}{2}\beta_1^2 + \\ + \frac{3}{2}a_0\beta_1^2 - 6b_0\beta_1^2) \cos 8w + (\frac{3}{4}a_1\beta_1^2 - \beta_1^3) \cos 12w,$$

où

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta_1 \quad \text{et} \quad c_0 = a_0 - a_1\beta_1 + \frac{3}{2}a_0\beta_1^2 - 6b_0\beta_1^2 - 2b_0.$$

c_0 contient m' en facteur; $\frac{3}{2}\beta_1$ contient m' divisé par la petite quantité δ_1 .

Nous allons intégrer (11) en se rappelant que

$$(12) \quad W = \bar{\gamma}v + W_a + K,$$

Mais $\bar{\gamma}$ c'est la partie séculaire, donc dans W_a et a fortiori dans K les termes à longue période du degré 0 n'existant pas, nous aurons :

$$(13) \quad \frac{dW}{dv} = \bar{\gamma} + \frac{dK}{dv}.$$

En comparant (11) et (13) nous trouvons

$$(14) \quad \bar{\gamma} = c_0 + \gamma,$$

En ayant égard à la relation (13) pg. 49 tex. pol. et différentiant (10) pg. 49 tex. pol., nous trouverons l'équation (49) pg. 80 tex. pol.

En substituant dans (13) cette dernière équation, on trouve l'équation 50 pg. 80, d'où nous pourrions conclure les relations entre les coefficients qui y entrent. Puisque Thule suivant M. Brendel appartient aux petites planètes critiques de la première

classe, il est évident que nous aurons $c_0 = 0$ et $\gamma \neq 0$. Dans notre cas spécial ($\bar{\gamma} = \gamma$ ¹⁾) et l'équation (13) deviendra

$$(14) \quad W = \gamma v + K.$$

Si nous connaissons déjà la constante a_0 , nous pouvons, en se rapportant aux formules (51) et (53) pg. 81 tex. pol., calculer les membres singuliers de l'équation (14), en se limitant toujours aux termes du degré zéro.

En effectuant maintenant sur la fonction W les mêmes transformations que nous avons appliquées à R , nous obtiendrons sans peine.

$$(15) \quad W_{n,0,0} = \frac{S_{n,0,0} - 2R_{n,0,0}}{\frac{n}{4}(1 + \delta_1)}; \quad (n \geq 1).$$

Déterminons à présent les constantes d'intégration. Ces constantes se réduiront au nombre de quatre, puisque nous étudions pour le moment le mouvement de la petite planète dans le plan même de son orbite. Les constantes à déterminer seront: k le module de l'excentricité, Γ — la longitude du périhélie, a — le demi-axe de l'orbite et n la constante du mouvement; a_0 joue dans nos formules le rôle de constante surnuméraire, que nous pouvons pour cela traiter comme une constante arbitraire.

La constante a_0 nous déterminons au moyen de b_0 , en supposant que dans le développement de R la partie constante doit être effectivement du premier ordre (rein erster Ordnung). La fonction $W = W_a + K$ et K est formée au moyen des fonctions R et S , pour cela la partie constante de W se composera des parties constantes de R et de S . Nous aurons donc:

$$(16) \quad c_0 + \gamma = a_0 - 2b_0.$$

Mais M. Brendel²⁾ a démontré, que dans le cas d'une petite planète caractéristique nous avons la relation

$$a_0 - 2b_0 = 0 = c_0 + \gamma.$$

Si la planète considérée est critique (le cas de Thule) γ ne peut être zéro et dans ce cas l'équation suivante:

$$a_0 - 2b_0 = c_0 + \gamma$$

¹⁾ Brendel, l. c. pg. 92, 100.

²⁾ Brendel, l. c. kap. V, sparsim.

a lieu aussi — c'est pourquoi nous trouvons:

$$(17) \quad c_0 = 0; \quad \gamma \neq 0.$$

On voit donc que dans le cas qui nous intéresse, l'équation 53 pg. 81 texte pol. et l'équat. (17) vont nous déterminer la constante a_0 .

La fonction \mathbf{W} nous pouvons écrire:

$$(18) \quad \mathbf{W} = (c_0 + \gamma + \gamma_0)v + \text{les termes périodiques}$$

$$\text{où} \quad \bar{\gamma} = \gamma + \gamma_0$$

mais γ_0 est au moins du second degré, alors $\bar{\gamma} = \gamma$.

On a trouvé la relation suivante:

$$w_1 = (1 - \mu)v - B - \mu \mathbf{W},$$

et

$$(19) \quad w_1 = w - \mu K$$

$$\text{donc} \quad w = w_1 + \mu K = (1 - \mu)v - B - \mu \mathbf{W} + \mu K,$$

$$\text{mais} \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_a + \bar{\gamma} v$$

$$\text{et} \quad w = (1 - \mu_2)v + \text{les termes périod.} \quad [\mu_1 = \mu(1 + \bar{\gamma})].$$

De ces relations nous trouvons ainsi la partie séculaire de W :

$$\text{pars sec } w = (1 + \mu_2)v.$$

Rappelons—nous le définition des quantités μ et μ_1 .

On avait les relations suivantes:

$$\frac{n'}{n} = \mu; \quad \text{et} \quad \frac{n'}{n_1} = \mu_1$$

(n c'est une constante d'intégration „la constante du mouvement“ selon M. Brendel, n_1 c'est le mouvement diurne vrai). Dans les relations précédentes introduisons δ et δ_1 (qui sont des petites quantités) alors nous trouvons:

$$\mu = \frac{3 - \delta}{4} \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{3 - \delta_1}{4}.$$

On voit que dans nos expressions, dont nous avons besoin, intervient maintenant δ_1 seul, qui dans le cas même de commensurabilité exacte est toujours beaucoup plus grand que la masse perturbatrice, tandis que la quantité δ_1 dans le cas d'une commensu-

rabilité exacte, peut devenir 0. L'idée de M. Brendel est que dans les expressions des perturbations apparaissent, comme petits diviseurs, non les δ mais le δ_1 . M. Brendel a démontré aussi que le rapport de commensurabilité exacte peut avoir lieu seulement entre n et n' et non entre n_1 et n' . Dans ce cas aussi nous aurons $\delta=0$.

Nous aurons maintenant les relations suivantes¹⁾:

$$\mu_1 = \mu(\gamma + c_0 + 1)$$

et

$$\delta_1 = c_0 \delta + \delta \bar{\gamma} + \delta - 3c_0 - 3\bar{\gamma}.$$

Comme nous étudions le mouvement d'une petite planète critique pour laquelle:

$$c_0 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} = \gamma$$

nous aurons:

$$\delta_1 = \delta - 4\gamma\mu.$$

D'une manière tout à fait analogue nous pouvons écrire:

$$\frac{n'}{n_1} = \mu_2 = \frac{3 - \delta_2}{4} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \delta_1 - 4\mu\gamma_0.$$

Quand δ_2 devient très petit ou presque zéro, nous aurons alors à faire à la libration qui, dans la méthode de Gylden n'est pas difficile à étudier. La quantité n_2 nous donne le mouvement moyen diurne dans le cas de la libration; nous devons aussi connaître exactement cette quantité pour pouvoir déterminer la période de révolution de la petite planète.

Nous devons remarquer encore que μ_1 et μ_2 se distinguent seulement par la présence de la constante γ_0 . Cette quantité est de second degré et comme telle pour le moment elle n'entre pas dans nos calculs; $\bar{\gamma} = \gamma$ est toujours positive et, dans le cas des planètes caractéristiques de première classe (auxquelles appartient Thule), étant même du degré zéro, elle doit être conservée dans nos calculs.

5. Passons maintenant aux applications numériques de nos formules. La petite planète Thule (279) fut découverte par M. Palisa à Vienne le 25 octobre 1888; au moment de la découverte elle était de grandeur 13.5. Les premiers éléments calculés par

¹⁾ Brendel, A. N., 3346.

M. M. Lange et Halm ont montré que cette nouvelle planète est un astre très lointain, qui se meut à peu près à la distance de 4 unités astronomiques du Soleil. Une orbite plus exacte a été calculée à nouveau par M. Bidschoff¹⁾, qui a utilisé dans ses calculs toutes les observations de Thule de 25/X 1888 à 10/II 1891. M. Bidschoff, dans son travail, trouve que Thule se rapproche beaucoup de Jupiter (en moyenne trois fois pendant un siècle).

Les éléments calculés par M. Bidschoff sont donnés pg. 86 texte pol.

Après M. Bidschoff, M. Wedemeyer²⁾ a calculé une nouvelle orbite, en utilisant toutes les observations et en leur appliquant les perturbations, calculées par la méthode d'Oppolzer. Les éléments de M. Wedemeyer se trouvent pg. 87 texte pol. Les observations de Thule, effectuées après la correction de son orbite par M. Wedemeyer, sont très peu nombreuses, notamment en 1906 Thule fût observée le 7/X Vienne et en 1911 le 20 et 30 avril photographiée à Heidelberg.

La petite planète s'approchait de plus en plus de Jupiter, ses perturbations augmentaient, et sans doute l'accord entre les positions de Thule effectives et calculées devenait de moins en moins satisfaisant. La proximité avec Jupiter arrivait en 1912. M. Viljev³⁾ a effectué à nouveau les calculs des perturbations et les a appliqué aux éléments de Thule de M. Wedemeyer; il a donné ainsi des nouveaux éléments osculateurs (pg. 88 tex. pol.) et une éphéméride, déduite de ces éléments. Thule ne fut point retrouvée en 1913.

Pour nos calculs nous avons utilisé les éléments de M. Wedemeyer (B. J. für 1914) et les éléments de Jupiter donné par la „Conn. des Temps“ pour 1914, en prenant comme valeur de la masse $m' = \frac{1}{1047.355}$. Dans ce travail nous nous limitons pour le moment à la recherche de la lacune (dans le sens de M. Brendel) pour les petites planètes du type $\frac{3}{4}$, c'est pour celà que nous donnerons ici seulement les calculs qui s'y rattachent. Dans le § 2

¹⁾ Sitzungsberichte d. Ak. d. Wiss. Wien, Bd. 100, pg. 937.

²⁾ Wedemeyer, Archiv. d. deutschen Seewarte XXXI Jhgg.

³⁾ Astr. Nachr. 4661.

nous avons donné, conformément à la théorie, que nous appliquons à notre cas spécial, les expressions analytiques du développement de la fonction perturbatrice. Dans ces développements entre la quantité α , qui s'exprime au moyen du rapport du demi-axe de l'orbite de Thule à celui de Jupiter. Les coefficients numériques de ces développements sont exprimés au moyen des quantités β et γ .

Calculons ces coefficients. Avec les éléments de Jupiter et de Thule nous trouvons :

$$\log \alpha = 9.9156572.$$

Comme cette quantité diffère peu de l'unité, nous voyons que les coefficients β , γ ne se trouvent point ni dans les tables de M. Masal¹⁾ ni dans celle de Gylgén²⁾.

Nous devons donc les calculer spécialement en se basant sur leurs expressions analytiques. Nous calculons d'abord β_0 au moyen des formules de la moyenne arithmético-géométrique; nous trouvons :

$$\log \beta_0^{(1)} = 0.1117634.$$

Après avoir calculé β_0 , nous calculons les autres coefficients β_n pour $n = 1, 2 \dots 12$. Ces coefficients nous obtiendrons le plus facilement en employant la méthode de M. Ludendorff³⁾.

La table des valeurs auxiliaires, donnée par M. Ludendorff fut augmentée et au moyen de cette table ainsi transformée, j'ai obtenu les β_n . Comme contrôle de nos calculs, j'ai obtenu les mêmes coefficients en se servant des quadratures mécaniques.

L'accord des valeurs des coefficients ainsi obtenus à été complet. Les coefficients β_{12}^3 , β_{12}^5 , β_{12}^7 , β_{12}^9 ont été calculés au moyen des quadratures mécaniques, et contrôlés par les tables de M. Ludendorff. Pour les coefficients qui nous restent encore à déterminer, j'ai appliqué la relation suivante :

$$\beta_n^{s+2} = \beta_{(n)}^{(s)} + \alpha^2 \beta_{n+1}^{s+2}.$$

¹⁾ Masal H. Astronomiska iakttagelser och undersökningar ånstända på Stockholms Observatorium. Fjerde Bandet. Stockholm, 1891.

²⁾ Gylgén H. Astr. Ges. Publ. 21.

³⁾ Ludendorff H. A. N. Bd. 160.

Les résultats obtenus furent contrôlés aussi par la quadrature mécanique. Ainsi nous avons obtenu les logarithmes de tous les β_n^3 qui sont données pg. 93 texte pol.

Maintenant en appliquant la relation:

$$\gamma_{n,\sigma} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\sigma - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2\sigma} \alpha^{n+2\sigma+1} \beta_{n+1}^{2\sigma+1}$$

nous avons obtenu les logarithmes de $\gamma_{n,\sigma}$, qui sont donnés pg. 94 tex. pol. Nous pouvons déjà calculer les A et B (avec des indices différents) qui entrent dans nos formules. Ce calcul peut être effectué de deux manières différentes. On peut appliquer les relations (20) et (24) pg. 27 et 29 tex. pol. et faire le calcul de A et B au moyen des quantités $\Omega_{n,m,p}$, qui sont des fonctions de $\gamma_{n,\sigma}$ et des $P_{n,m,p}$ et $Q_{n,m,p}$, fonctions à leur tour des $\Omega_{n,m,p}$.

Cette façon de procéder est recommandée par M. Brendel, elle est très pratique, quand on doit calculer tous les coefficients nécessaires pour le calcul des perturbations, mais dans notre cas spécial où nous nous limitons aux termes du degré zéro, c'est beaucoup plus pratique de calculer les A et B directement en fonction de $\gamma_{n,\sigma}$ en se servant des tables très pratiques de M. Masal¹⁾.

Le résultat de notre calcul est donné pg. 95 tex. pol.

Nous avons donc trouvé tous les coefficients nécessaires dans le développement de la fonction perturbatrice, nous pouvons maintenant calculer pour Thule la lacune correspondante dans l'anneau planétoïdal.

Nous avons eu l'équation suivante, où β_1 est l'inconnue:

$$(2\delta_1 + \delta_1^2)\beta_1 = p' + p''\beta_1 + p'''\beta_1^2$$

(où δ_1 s'exprime au moyen de β_1 (67) pg. 84 texte pol.).

M. Brendel a montré que pour trouver les limites de la lacune il faut déterminer β_1 de cette manière, qu'en assignant une certaine valeur pour δ , cette équation nous donne seulement deux différentes valeurs pour δ_1 , qui correspondent aux deux valeurs de β_1 . Ces valeurs particulières déterminent les limites de la lacune. En se basant sur la théorie de M. Brendel, nous pouvons déterminer δ_1 de telle manière que cette fonction devienne discon-

¹⁾ Masal H. Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten. Kongl. Sv. Vet. Ak. Handl. Bd. 23.

tinue, alors suivant M Brendel à ces valeurs de δ_1 correspondent les β_1 , qui déterminent la lacune.

Puisque δ_1 ne peut être zéro donc $\mu_1 = \frac{n'}{n_1}$ ne peut être égale à une fraction simple, tandis que δ peut être égale à zéro, quand μ devient une fraction simple.

C'est pourquoi dans toutes nos formules où nous trouvons en dénominateur δ_1 , nous ne pouvons le remplacer par δ , même dans le cas lorsque ces deux quantités diffèrent très peu l'une de l'autre.

Nous avons maintenant à calculer β_1 . Si δ_1 ne peut être de l'ordre 0, alors $\delta_1^2 \beta_1$ est d'un ordre plus élevé que les autres termes qui se trouvent dans notre formule. Au lieu de δ_1 écrivons

$$\delta - 4\mu\gamma = \delta - 6\mu\beta_1^2,$$

nous aurons:

$$2\delta\beta_1 - 12\mu\beta_1^3 = p' + p''\beta_1 + p'''\beta_1^2$$

$$\frac{p'}{12\mu} + \frac{p'' - 2\delta}{12\mu}\beta_1 + \frac{p'''}{12\mu}\beta_1^2 + \beta_1^3 = 0,$$

ou bien:

$$\beta_1^3 + i\beta_1^2 + j\beta_1 + k = 0 \quad 1)$$

où

$$i = \frac{p'''}{12\mu}; \quad j = \frac{p'' - 2\delta}{12\mu}; \quad k = \frac{p'}{12\mu}.$$

Résolvons l'équation (1) en admettant qu'elle doit avoir une racine double; nous trouvons pour β_1 les valeurs suivantes:

$$\log(\beta_1)_I = 8.759360; \quad \log(\beta_1)_{II} = 9.154128,$$

Les deux valeurs de β_1 ainsi obtenues sont justement les valeurs critiques. Nous pouvons aussi sans difficulté calculer δ . Nous trouvons:

$$\log \delta = 8.559884;$$

Connaissant $(\beta_1)_I$ et $(\beta_1)_{II}$ nous obtiendrons deux valeurs pour γ en appliquant la formule suivante, donnée par M. Brendel¹⁾:

$$\gamma = \frac{1}{(1 - \beta_1^2)} - 1.$$

¹⁾ Brendel A. N. 3346.

Les valeurs de γ sont :

$$\log \gamma_{\text{I}} = 7.696539; \quad \log \gamma_{\text{II}} = 8.495577$$

et les valeurs correspondantes de δ_1 .

$$\log(\delta_1)_{\text{I}} = 8.334772; \quad \log(\delta_1)_{\text{II}} = 8.750883_n$$

Maintenant de la relation

$$n_1 = \frac{4n'}{3 - \delta_1}$$

nous trouvons les deux valeurs du moyen mouvement diurne vrai, qui limitent la lacune pour le type $\frac{3}{4}$. Ces valeurs sont :

$$(n_1)_{\text{I}} = 401''.732; \quad (n_1)_{\text{II}} = 391''.485$$

La constante n pour les valeurs critiques δ_1 sera :

$$n = \frac{4n'}{3 - \delta}$$

d'où :

$$n = 403''.723.$$

Les résultats, que nous avons trouvés peuvent s'exprimer de la manière suivante :

Pour les petites planètes du type $\frac{3}{4}$ la quantité β_1 doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\log \beta_1 \leq 8.759360 \quad \text{ou} \quad \log \beta_1 \geq 9.154128_n$$

et

$$\log \delta_1 \leq 8.334772 \quad \text{ou} \quad \log \delta_1 \geq 8.750883_n$$

d'où le vrai mouvement diurne n_1 pour le type Thule doit être

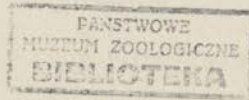
$$n_1 > 401''.732 \quad \text{ou} \quad n_1 < 391''.485.$$

Entre ces deux valeurs de n_2 se trouve la lacune, dans le sens de M. Brendel, dans l'anneau planétoïdal; une petite planète avec un moyen mouvement diurne vrai (comme il est défini par M. Brendel) contenu entre ces limites de n_1 aurait une orbite instable.

(Il faut remarquer qu'on ne peut comparer n_1 immédiatement avec le moyen mouvement diurne osculateur, calculé avec les éléments de l'orbite de la petite planète).

Nous avons donc obtenu les valeurs critiques du vrai moyen mouvement diurne qui nous déterminent la lacune dans le type $\frac{3}{4}$. Cette lacune jusqu'à présent n'a point été déterminée.

Cet élément ne fut déterminé par M. Brendel que dans le cas d'Hécube, par M. Buchholz dans le cas de Hilda et par M. M. Schwarzschild et Dziewulski dans le cas de Hécube et Hilda. Les deux derniers auteurs employèrent la méthode de Poincaré et recherchaient les solutions périodiques; les résultats qu'ils ont obtenus, sont en parfait accord avec ceux de M. Brendel et confirment ainsi la haute valeur de la nouvelle méthode.



DO NABYCIA WE WSZYSTKICH KSIĘGARNIACH

NASTĘPUJĄCE DZIEŁA,
WYDANE Z ZAPOMOGI

KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM

imienia D-RA MED. JÓZEFA MIANOWSKIEGO,

LUB OFIAROWANE NA RZECZ KASY.

MATEMATYKA.

Rb. k.

Autenrieth Ed. Mechanika Techniczna. Podręcznik nauki statyki i dynamiki dla mech. inż. budow. Przeł. z upow. autora Stanisław Patschke 1900, XI + 613, rys. 327	2 40
Baraniecki M. A. Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem 1885, XVI + 131, rys. 63	— 40
Danielewicz A. Metoda najmniejszych kwadratów 1904, X, + 185 + X	1 20
Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych 1895, 335, tabl. X	— 10
Danielewicz Bolesław. Z dziedziny statystyki matematycznej 1884, 30	— 10
Dedekind Ryszard. Ciągłość a liczby niewymierne. Z czwartego niemieńskiego wydania przełożył St. Straszewicz 1914, VIII + 17	— 45
Enriques F. Zagadnienia dotyczące geometrii elementarnej. Tom I. Krytyka podstaw. Z drugiego wydania włoskiego przełożyli: St. Kwietniewski i Wł. Wojtowicz 1914, IV + 331	1 50
Feldblum M. Geometria wykreslna 1902. XVI + 325, rys. 172	2 —
Folkierski Wł. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego, wyd. 2, znacznie zmien. Tom I, 1904, XII + 574 + 55 fig.	2 40
— Tom II, 1909, XI + 630 + 101 fig.	2 40
Franke J. N. Mechanika teoretyczna 1887—1889, XXXI + 645 + 72 drzew.	1 —
Gauss K. F. Rozważania ogólne o powierzchniach krzywych, z oryginału łacińskiego przełożył Stefan Finkelkraut, objaśnieniami i uwagami opatrzył Juliusz Rudnicki z przedmową Kazimierza Żórawskiego, wyd. Władysław Wojtowicz 1913, 71	— 75
Gosiewski Wł. Rachunek prawdopodobieństwa 1906, X + 265.	2 —
Hardy G. H. M. A. Wykłady elementarne z dziedziny analizy, przełożył Wł. Wojtowicz 1916, XV + 492.	3 —
Kowalczyk. O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich 1901, XII, 624 + 3 tabl.	7 50
Loria Gino. Przeszość i stan obecny najważniejszych teorii geometrycznych. Przekł. uzup. dod. S. Dicksteina 1889, VII + 112.	— 60
Majewski W. Geometria praktyczna. Podręcznik dla rzemieślników. 1903, 301 (karton)	— 75
Malanowicz J. Kreślenie geometryczne i jego praktyczne zastosowania. 1907, XI + 176 + 45 tabl. i 346 rys. (karton)	— 60
— Kreślenie i zdobienie geometryczne. Kurs pierwszy, wyd. 2, 1912, VIII + 110 + II + 45 tab. i 225 rys. (karton)	— 60
— Rzuty geometryczne. (Geometria wykreslna dostosowana do potrzeb przemysłu i rzemiosł). Podręcznik dla szkół techn. i zawod. z 269 rys. 1913.	— 75
Pieri Mario. Geometria elementarna oparta na pojęciach „Punktu i Kuli” z oryginału włoskiego przełożył Stefan Kwietniewski 1915, 152	1 —
Poradnik dla samouków. Wskazówki metodyczne dla studyjacych poszczególnych nauk. Wydawnictwo A. Heflicha i St. Michalskiego. Wydanie nowe. Tom I-szy w opracowaniu J. Łukasiewicza, Z. Janiszewskiego, St. Kwietniewskiego, St. Mazurkiewicza, Wł. Sierpińskiego i St. Zaremby 1915, XXXIX + 618, z 314 fig. w tekście i 1 tablicą.	2 40
Prace matematyczno - fizyczne, wydawane przy współudziale Wład. Natansona, J. Puzyny, M. Smoluchowskiego, S. Zaremby, K. Żórawskiego przez S. Dicksteina. Tom XXVII, 1916, 277, rys. 10	— —

Rozmarynowicz T. Matematyczne podstawy ubezpieczeń na wypadek niezdolności do pracy w zastosowaniu do urzędzenia kas emeryt. Wyd. Bolesław Danielewicz, 1886, IV + 53.	— 10
Schür F. Podręcznik geometrii analitycznej. Przełoż. T. Łopuszański 1901, X + 246 + 1 nlb., rys 76.	1 —
Sierpiński Wł. dr. Teorya liczb niewymiernych. Wykłady uniwers. 1910, 4 nlb + 149.	— 75
— Teorya liczb (kurs uniwersytecki) 1914, XIV + 412.	1 80
Sochocki. Rozwiązywanie równań śczebnych. 1884, XII + 212.	— 60
Sprawozdania z piśmiennictwa naukowego polskiego w dziedzinie nauk matematyczno - przyrodniczych:	
I — (1882) 1883, III + 187,	
II — (1883) 1885, III + 222,	
III — (1884) 1886, 294 + 10,	
IV — (1885) 1887, 300 + VI, każdy tom	1 —
Steiner J. Konstrukcyje geometryczne wykonane za pomocą linii prostej i stałego koła; przełożył Stefan Kwietniewski 1915, VIII + 69, rysunk. 25.	— 45
Szczepański Józef. Stopień wyższy matematyki elementarnej i początki rachunku nieskończonościowego. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich i dla samouków. 1906, 450.	1 50
Wektor Czasopismo matem. fiz. Red. Władysław Wojtowicz w Warszawie. 5,— z przesyłką 6, — zeszyt pojedynczy.	— 75
Witwiński Romuald. O układach odwracalnych powierzchni potrójnie ortogonalnych. Odbitka z tomu XXVII-go Prac mat.-fizycznych. 1915, 52, rys. 10.	— 75
Zaremba Stanisław. Wstęp do analizy. Część I-sza. Pojęcie dowodu matematycznego oraz inne wiadomości pomocnicze 1915, 124.	— 60

NAUKI PRZYRODNICZE.

Berdau Feliks dr. Flora Tatr, Pienin i Beskidu Zachodniego, 1890, VI + 827 + 55.	3 —
Braun Juljan. Badania w dziedzinie azotowych związków organicznych i ich pochodnych (1900 — 1908). 1908, VII + 238.	1 —
Chmielewski Z. Podręcznik analizy chemiczno-rolniczej 1905, 169.	1 —
Dyakowski B. Zarys metodyki elementarnego kursu historii naturalnej. Wyd. W. Jezierski. 1909, 38.	— 30
Dziedzicki H. Atlas organów rozrodczych (hypopygium) typów Winnertz'a i gatunków znajdujących się w jego zbiorze. Mycetophilidów, 1915, 16, tabl. XXI.	1 50
Dzieje myśli. Tom I zes. 1. O rozwoju metod badań naukowych. Wiedza ludów pierwotnych. Dzieje astronomii. Rys rozwoju fizyki. W opracow. Wł. Heinricha, Ludwika Krzywickiego, Stanisława Kramszytki i Ludwika Brunera, 1907, XXXI + 296, rys. 82.	1 50
— Tom I zes. 2. Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Szkic ewolucyi pojęć w mineralogii. Zarys rozwoju matematyki: a) rozwój matematyki do końca XVI w., b) zarys rozwoju geometrii w starożytności, wiekach średnich i w epoce odrodzenia, c) rozwój matematyki od początku w XVII. W oprac. Leona Marchlewskiego, Józefa Siomy, M. Feldbluma, Wł. Smosarskiego i Stef. Kwietniewskiego, 1911, 279, z 33 ilustracyami.	1 50
— Tom II zes. 1. Historia ogólnej nauki o ziemi (geografii — geologii). Dzieje nauk biologicznych. Dzieje antropologii. Dopelnienie do historii fizyki. W oprac. Wacława Nałkowskiego, Józefa Nusbauera, Ludwika Krzywickiego i L. Brunera. 1907, 471, 40 ilustracyi w tekście, 2 tablice.	2 —
— Tom II zes. 2. Dzieje psychologii. Dzieje językoznawstwa. W oprac. S. Lorii i J. Baudouina de Courtenay. Warszawa, 1909, str. 302.	1 50
Faraday. Dzieje świecy, przeł. M. i St. Kalinowscy. Warszawa, 1914, XXIII + 105, rys 35.	— 50

- Filipowicz Kazimierz dr.** Wiadomości początkowe z botaniki (podług dzieła d-ra **Le Maout**: „Leçons élémentaires de botanique“) z 194 drzew. w tekście, 1884, III + 225 + II. (karton.) — 25
- Grzybowski J. prof.** Przeglądowa mapa geologiczna ziem polskich z tekstem objaśniającym z trzema przekrojami, pod redakcją prof. J. Morozewicza, wydał Z. Weyberg, 1912, 139, 1 mapa kolorowa 1 —
- Guenther Konrad.** Zagadnienia życia w świetle darwinizmu. Z upoważnienia autora spolszczyli Ad. Kudelski i Kazimierz Kulwiec. 1906, XIX + 425 2 —
- Holleman A. F. prof.** Podręcznik chemii nieorganicznej, z 3 niem. wyd. przeł., według 7 wyd. niem. poprawił K. Jabłczyński wyd. 2. 1910, X + 410 + 1 1 50
- Jędrzejewicz J.** Kosmografia. Wyd. 2, oprac. przez d-ra M. Ernsta, z 246 fig. w tekście i 11 tabl. 1907, XVI - 442 3 —
- Joubert J.** Zasady elektryczności. Z czwartego wydania francuskiego przełożył Marian Grotowski. 1915, XV + 507 z 354 rys. w tekście
- Klein P.** Meteorologia ogólna. Przełożył R. Merecki. Warszawa. 1916, 92 + V tabl. 1 80
- Kołodziejczyk January.** Stosunki florystyczne jeziora Świtezi. 1915, VII + 437. Sprostowania str. 7. — 50
- Kontkiewicz S.** Krótki podręcznik mineralogii. 1907, V + 226 + 3 tabl. (Karton) 1 —
- Kozłowski Wł. M.** Zasady przyrodoznawstwa w świetle teorii poznania, 1905, 311 1 —
- Kulwiec Kazimierz.** Chrząszcze polskie. Klucz do określania owadów tęgopokrywych, dla użytku młodzieży, amatorów i ogrodników, 1907, 227 — 60
- Loth E.** Wskazówki do badań antropol. na człowieku żywym. 1914 — 75
- Malinowski Edmund dr.** Świat roślin. O kształtach roślin, powstawaniu gatunków, krążeniu soków w roślinach. 1912, VI + 2 nlb 145 + 2 nlb., 108 rys., 2 tabl. barwne. — 30
- Męczkowska T., Rychterówna St.** Zbiór ćwiczeń i doświadczeń z przyrody martwej (202 doświadczeń z 112 rysunkami), 1915, 156 — 75
- Mendel G.** Badania nad mieszańcami roślin, przełoż. W. Wolska. 1915, II + 67 — 50
- Merczyng H.** Teoria prądu elektrycznego. Zarys zasadniczych praw ustalonego i nieustalonego prądu elektrycznego i towarzyszących mu zjawisk magnetycznych. Podstawy elektromagnetycznej teorii światła. 1905, IX + 92. — 75
- Merecki R.** Klimatologia ziem polskich. Warszawa. 1914, 313. 1 80
- Miłobędzki Tadeusz.** Szkoła analizy jakościowej. 1910, VIII—271 (Karton) 1 20
- Mohn H.** Zasady meteorologii, przełożył St. Kramsztyk. 1888, XVI + 218 + VI, 46 rys. i 25 tablic. 1 —
- Neumayr M. prof.** Dzieje ziemi, w opr. prof. d-ra Wiktora Uhliga:
I. Geologia ogólna. Wyd. 2 pod red. J. Morozewicza, opracował K. Koziorowski, z dopeln. M. Limanowskiego. 1912, XX+837, mapa barwna, 16 tablic, 300 rys. w tekście 4 —
II. Geologia opisowa, przeł. z 2 niem. wyd. J. Lewiński i K. Koziorowski; dopelnienia poczynili: K. Bohdanowicz i J. Grzybowski. Wydał J. Morozewicz. 1908. XVI + 674 + 343 rys. w tekście, 2 mapy barwne, 9 tabl. (1 kolor.) 4 —
- Nusbaum Józef dr. prof.** Zasady anatomii porównawczej.
I. Wiadomości wstępne i anatomia porównawcza zwierząt bezkręgowych; 1899, III + 744 + XXI, rys 212 + tabl. 5.
II. Anatomia porównawcza zwierząt kręgowych. 1903, X + 552, 134 rys. 4 —
- Nusbaum J. dr.** Zootomia praktyczna. Wyd. staraniem d-ra Jana Tura, ze 100 drzeworytami. 1908, VIII + 263. 2 —

- Nusbaum Hilarowicz Józef.** Szlakami nauki ojczyściej. Wyd. Jan Tur. 1916, III + 230 + 11 potretów. 1 50
- Pamiętnik Fyzyograficzny**, wydany staraniem E. Dziewulskiego i B. Znatowicza:
- Tom III. Dział I Meteorologia i hydrografia. II. Geologia z chemią. III. Botanika i zoologia. IV. Antropologia. V. Miscelanea. 1883. 536 + 2 + 2 + 13 tab., rys. lit., 21 drzeworytów w tekście;
- V. Dział I, II, III, IV, V. 1885, 4 nlb. 113 + 76 + 223 + 74 + 111 + 4.
- VIII. Dział I, II, III, IV, V. 1888, 2 nlb. + XIX + 19 + 155 + 389 + 17 + 33 + 4 nlb.; 27 tabl. rys. lit. i drzew. w tekście;
- Wydawcy: A. Słóarski i Br. Znatowicz.
- IX. Dział I, II, III, IV. 1889 2 nlb. + XIX + 235 + 45 + 11 + 295 + 77 + IV, 24 tabl. rys. litogr. i drzewor.
- X. Dział I, II, III, IV. 1890. 2 nlb. + XXI + 202 + 75 + 437 + 2 nlb. + 20 + II + II. 29 tabl. rys. lit. i drzew. w tekście.
- XI. Dział I, II, III. 1891, 8 + 18 + 186 + 162 + 133 + II + II 14 tabl. rys. litogr. i drzewor. w tekście.
- XII. Dział I, II, III, IV. 1892. 17 + 214 + 235 + 23 + II + II + 12 tabl. rys. litogr. i drzewor. w tekście.
- XIII. Dział I, II, III. 1895, 19 + 152 + 231 + I + I + 7 tabl. rys. lit.
- XIV. Dział I, II, III. 1896, 23 + 151 + 30 + 228 + I + I + 7 tabl. rys. lit.
- Wydawcy: W. Wróblewski i Br. Znatowicz.
- XV. Dział I, II, III. 1898, 19 + 183 + 285 + 39 + I + I + 4 mapy + 3 tabl. lit.
- XVI. Dział I, II, III. 1900, 13 + 139 + 13 + 44 + 208.
- XVII. Dział I, II, III, IV. 1902, 16 + 134 + 144 + 104 + 22 + I + I + I mapa i tabl. litogr.
- XVIII. Dział I, II, III, IV, V. 1904, 61 + 193 + 147 + 104 + 24 + 42 + I + I.
- XIX. Dział I, II, III, IV. 1907, 79 + 183 + 59 + 82 + 7 + I + I.
- Pamiętnik Fyzyograficzny**, wyd. star. E. Dziewulskiego i B. Znatowicza.
- XX. Meteorologia i Miscelanea 1910, XLI + 203 + 46.
- Wydawcy: K. Kulwiec i K. Stolyhwo.
- XXI. Dział I, II, III, IV, V. 1913, IX + XV + 155 + 30 + 25 + 117 + 48 + 41 + 4 mapy + 19 rys. + 24 tabl. fot.
- XXII. I, II, III, IV, V. 1914 IX + XV + 155 + 30 + 25 + 117 + 48 + 41 + 4 mapy + 19 rys. + 24 tabl. fot.
- XXIII. Dział I, II, III, IV, V. 1916, 262 + XXVIII tabl. + 142 + 1 tabl. + 246 + 1 mapa + 16 rys. + 16 + 8, każdy tom 5 -
- Pogorzelski W.** Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze. - 50
- Pol G.** Słownik łacińsko - polski nazw gatunkowych roślin (12 + 17), 1904, 59 - 50
- Pawłowski Stanisław.** Ze studyów nad zlodowaczeniem Czarnohory. 1915, 61, XI tabl. - 50
- Požaryski Mieczysław.** Podstawy naukowe elektrotechniki łącznie z zasadami pomiarów. 1915 X + 415, z 427 rysunkami w tekście 2 40
- Roszkowski W. i Żebrowska A.** O budowie pochewek prącia u błotniarek. 1915. 55, II tabl. - 50
- Routh E. I.** Statyka teoretyczna z licznymi przykładami z drugiego wydania angielskiego przełożył Zygmunt Straszewicz. 1916, X + 453, rys. 159. 3 -
- Rydzewski Bronisław.** Próba charakterystyki paleobotanicznej Dąbrowskiego Zagłębia Węglowego. 1915, 86, tabl. 5 - 50
- Siemiradzki I.** Gąbczaki jurajskie ziem polskich (Paleontologia ziem polskich pod red. J. Lewińskiego № 1), 1913, 49 + tabl. VIII 1 50

Silberstein Ludwik. Elektryczność i magnetyzm. I. 1908, VIII + 366 . . .	3 50
II. 1910, 304	3
III. cz I, 1913, 173	1 80
Słownik Geograficzny Król. Pol. i innych krajów słowiańskich. Komplet .	60 —
Slupski Światopełk Zygmunt. Atlas ziem polskich Tom I, część I Wielkie Księstwo Poznańskie, 46 map i planów. 1915	10 —
Strasburger E. dr., Jost L. dr., Schenk K. dr., Karsten G. dr. Podręcznik botaniki dla szkół wyższych. Z XI wyd niem. przełożyli Jadwiga i Karol Szeinbokowie. Zeszyt I. 1913, 160. Zeszyt II. 1914, 161 — 320. Zeszyt III. 1915.	3 —
Świat i człowiek. Zeszyt I, wyd. 2. Pojęcie rozwoju. Wszechświat i jego rozwój. Rozwój ziemi, oprac. I. Waserberg, S. Kramsztyk, W. Nałkowski, 1908, XVI + 215 + 82 ilustr. + 3 tablice kolor.	1 35
Zeszyt II, wyd. 2. Rozwój życia organicznego. Genealogia roślin. Genealogia zwierząt. Pochodzenie człowieka. Rozwój człowieka, opr. J. Nusbaum, Z. Wóycicki, J. Eismont, K. Stołyhwo, L. Krzywicki, 1912, 321 + 73 ilustr. + 1 tabl.	1 60
Zeszyt III, wyd. 2. Rozwój kultury. Rozwój mowy. Rozwój stosunków gospodarczych. W opr. L. Krzywickiego i K. Appela. Warsz. 1912, str. 356 + 65 ilustr.	1 80
Zeszyt IV, wyd. 2. Rozwój społeczny. Rozwój psychiczny. Rozwój w dziejach sztuki. Znaczenie rozwoju. W opr. L. Krzywickiego, M. Borowskiego, Wl. Tatarkiewicza i F. Znanieckiego. Warszawa, 1913, str. 355 + 5 ilustr.	2 —
Szokalski W. T. Początek i rozwój umysłowości w przyrodzie. 1885, VIII + 468	— 60
Tenenbaum Szymon. Fauna koleopterologiczna wysp Balearskich. 1915. 150 + IV	— 75
Tombeck D. i Gouard E. Chemia przemysłowa, przełożył J. Harabaszewski. 1915. XI + 422.	1 80
Tur Jan. Nowe badania nad rozwojem układu nerwowego potworów platyneurycznych. 1915, 128.	— 50
Warming E. Zbiorowiska roślinne. Zarys ekologicznej geografii roślin. Z wydania niem. E. Knoblauch'a przeł. z upow. autora E. Strumpf i Trzebiński. 1900, XV + 450	1 50
Witkowski Aug. prof. uniwers. Jagiellońskiego. Zasady fizyki. Tom I, wyd. 3. (Fizyka ogólna. Dynamiczne własności materii. Akustyka). 1908, XV + 536 + 205 fig.	2 —
Tom I, wydanie 4-te, 1915. XX + 535, rys. 205	2 40
Tom II, wyd. 2. (Ciepło. Fizyka cząsteczkowa. Promienowanie.). 1908, X + 651 + 285 fig. + 2 tabl. kol.	2 40
Tom III. (Elektryczność i magnetyzm) 1914, IX + 1 nbl. + 655 + 326 fig.	2 40
W. K. Rzeki i jeziora, tekst objaśniający do mapy hydrograf. dawnej słowiańszczyzny, część północno-zachodnia. 1883, II + 125 + 1 nbl.	— 5
Wóycicki Zygmunt. Obrazy roślinności Królestwa Polskiego. Zeszyt I. Roślinność niziny Ciechocińskiej. 1911, 12 nbl + tabl. 10 + 20 str. nbl. objaśnień	1 —
Zeszyt II. Roślinność wyżyny Kielecko-Sandomierskiej. 1912, 36 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt III. Roślinność wyżyny Kielecko-Sandomierskiej. 1912, 32 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt IV. Roślinność Bolesławia i Olkusza. 1913, 34 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt V. Roślinność Ojcowa. 1913, 39 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt VI. Roślinność Ojcowa. 1913, 26 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt VII. Roślinność okolic Częstochowy i Olsztyna. 1914. 30 + 10 tabl.	1 —
„Ziemia” Tygodnik Ilustrowany. Redaktor i wyd. K. Kulwiec. Rocznie	6 —

Redaktor i Wydawca

Jan Tur.

Adres Redakcyi: Kaliksta № 8 (w lokalu Towarzystwa Naukowego Warszawskiego).

Cena kop. **50.**

Inst. Zool. PAN
Biblioteka

P.1801