

KAZIMIERZ TARWID

Zakład Ekologii PAN,  
Warszawa

## **Metoda wyznaczania reprezentatywnej krzywej dla ciągu małych prób**

### **I. UWAGI WSTĘPNE**

Proponowana metoda ma zastosowanie w stosunku do serii małych prób dotyczących tylko zjawisk ciągłych. Dotyczy ona doboru właściwej ilości elementów, użytych do sumowania przy tzw. „wygładzaniu” przebiegu krzywej.

Jak uczy praktyka badawcza, na ogół w pracach ekologicznych, szczególnie przy analizie materiałów terenowych, badacz nie zdaje sobie najczęściej w całej rozciągłości sprawy z tego, w jakim stopniu na ujawnienie lub, przeciwnie na zatarcie wyniku wpływa wybór właściwej ilości elementów użytych do sumowania w trakcie wygładzania wykresów przy pomocy średniej ruchomej. Rozwój metodyki pracy ekologa coraz częściej stwarza materiały wymagające użycia tej właśnie metody, a to na skutek pojawiania się dużych serii prób, zazwyczaj o małych wymiarach i nikłej wartości. Jednak brak dostatecznie źródłowo opracowanych metod operowania tego rodzaju materiałem prób seryjnych w ekologii nastrocza często badaczom istotne trudności i jest powodem dość licznych nieporozumień statystycznych. Przegląd literatury ostatniego dziesięciolecia przekonuje o aktualności tego zagadnienia metodycznego dla praktyki naszych badań, szczególnie terenowych.

Uważam za jedną z istotniejszych w dniu dzisiejszym kwestii metodologicznych w terenowych pracach — sprawę stopnia reprezentatywności prób materiału przyrodniczego w stosunku do charakterystyk zadanych planem badań. Niedostateczna uwaga zwrócona na zapewnienie materia-

łom odpowiedniego stopnia reprezentatywności jest jednym z poważniejszych źródeł niejasności wyników wielu prac. Samo pojęcie reprezentatywności cząstkowej próby w stosunku do całości jest zrozumiałe.

To zagadnienie metodologiczne odnajduje również zastosowanie w analizie takich materiałów ekologicznych, które są uzyskiwane drogą zebrania szeregu prób ilustrujących ciągłą zmienność badanego zjawiska. Gdy te próby są drobne, wartość każdej z nich oddzielnie jest nikła. Łączenie szeregu prób pozwala natomiast uzyskać nie tylko dobrą informację o nasileniu zjawisk w danym czasie, ale również, przy użyciu średniej ruchomej, pozwala wnioskować o charakterze zmienności zjawiska. Jednakże sposób dokonania tej manipulacji nie jest obojętny dla wyniku i poprawne dokonanie tego może nastęrczyć trudności. Szereg względów metodologicznych nakazuje rozbijanie obserwacji na dużą ilość drobnych elementów, rozciągniętych wzdłuż przewidywanych osi zmienności zjawiska.

Wymienię niektóre z tych względów:

1. Jest to bodaj jedyny dziś łatwo dostępny, racjonalny sposób badania zmienności zjawisk ekologicznych, co jest albo celem nowoczesnego badania, albo elementem, z którym należy się liczyć w metodyce prac.

2. Rozbicie jednostki odniesienia obserwacji (czasu lub przestrzeni) na szereg odinkowych mniejszych prób pozwala wnikać w jej strukturę wewnętrzną i zapoznać się z nią odpowiednio do stopnia, w jakim ona znajduje swój wyraz ilościowy w badanym zjawisku. Próba duża, obejmująca większy okres czasu lub przestrzeni, oczywiście nie daje informacji o ewentualnej niejednorodności terenu, cechach struktury itd.

3. Szczegółowa seria prób pozwala lepiej określić granice danego typu zjawiska w terenie lub w czasie. Umożliwia bowiem dokonanie tego określenia *ex post* na podstawie zmienności wyników. Zmniejsza się tą drogą obciążenie pracy apriorycznymi założeniami, co w naukach przyrodniczych jest zawsze uważane za korzystne zbliżenie do rzeczywistości reprezentowanej przez fakty znalezione bezpośrednio w badaniu.

4. Tylko rozbicie analizy na odpowiednie serie prób pozwala wykryć wszelkie nieciągłości: ostre załamania przebiegu zjawiska, nagłe jego zmiany, przeskoki nasilenia itp.

5. Duże próby łatwo doprowadzają do „zakorkowania“ pracowni nadmiarem uciążliwego nieraz do oznaczenia materiału. Znane są na przykład wypadki, gdy analiza kilkunastu zaledwie próbek fauny glebowej, pobranej z prób o powierzchni 1 m<sup>2</sup>, dostarczając minimalnych informacji ekologicznych (zaledwie kilkanaście prób), pochłonięła kilka pracowitych lat, zużytych przez badacza na oznaczenie gatunku tysięcy egzemplarzy materiału.

6. Różne względy manipulacji rachunkowych wykazują, że pożądane są próby takich wielkości, które mają średnie nasilenie występowania badanego elementu w pobliżu przeciętnej  $\bar{x} = 1$ , w miarę możliwości bez przekraczania granic rzędu:  $0,1 < \bar{x} < 10,0$ .

Próby utrzymane w pobliżu  $\bar{x} = 1,0$  pozwalają na zaplanowanie w przybliżeniu potrzebnej badaczowi ilości prób do pobrania w terenie.

Podobnie przy analizie „spotykalności“ dwóch elementów w próbach, metodzie bardzo wiele obiecującej w technice badań ekologicznych, optimum wielkości próby kształtuje się na poziomie okazów  $0,3 < \bar{x} < 0,7$  w próbie.

Wreszcie tylko próby małe, właśnie wskazanego wyżej rzędu wielkości, umożliwiają średnio wprawnemu rachmistrzowi czynienie w czasie pracy szybkich obliczeń w pamięci zarówno wielu prostszych danych liczbowych do opracowań definitywnych, jak również — co jest szczególnie ważne — szacunkową ocenę wyników przy wszelkich wstępnych czy próbnych przeglądach i zestawieniach materiałów. A w jakim stopniu to jest ważne w pracy, wie każdy, kto stykał się z bogatym materiałem liczbowym w swych badaniach.

7. Tylko rozbiecie analizy na serie drobnych prób, umożliwiających wyrywkową,

Tabela I

Ilość much obserwowanych na wysychającej przynęcie, latem (10.VIII.1958)

Number of flies observed on the drying bait, summer 1958

Godz. Time	Ilość much Number of flies
11.00	4
11.05	6
11.10	2
11.15	4
11.20	0
11.25	3
11.30	1
11.35	0
11.40	2
11.45	0
11.50	1
11.55	0
12.00	0
Razem Total	23

częściową ocenę wyników podczas pracy, zezwala na kontrolowanie poprawności pracy w czasie jej trwania i umożliwia ewentualną korektę wtedy, gdy ona jest jeszcze możliwa, tzn. podczas pobierania prób, przed zakończeniem badań w terenie.

Już tylko przytoczone względy wystarczają, by wykazać iż postępowy kierunek rozwoju metodyki uzyskiwania danych dotyczących przebiegu lub rozmieszczenia zjawisk ekologicznych będzie skłonny do rozbijania dużych jednorazowych zdjęć na szereg drobnych.

Jednym z istotnych momentów opracowywania materiałów uzyskanych na takiej drodze (przy pomocy serii prób) jest odpowiednie oszacowanie waloru poszczególnych elementów serii. Pojedyncza próba jest, jak

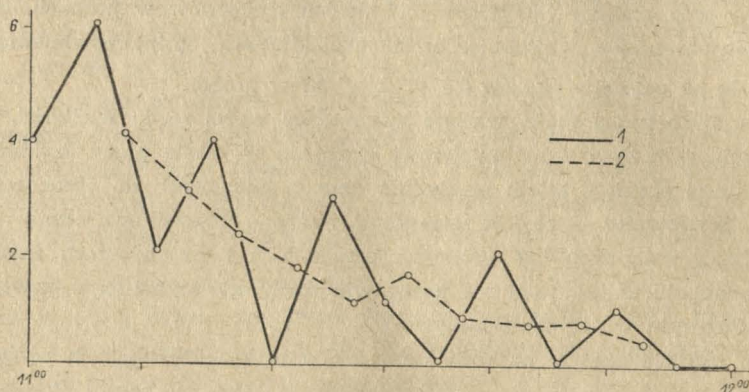


Fig. 1. Wyglądanie wykresu przy pomocy średniej ruchomej (ilości much przylatujących do przynęty w odstępach 5-minutowych).

Polishing the diagram using moving average (number of flies flying to the bait at intervals of 5 minutes)

1 — wyniki surowe — preliminary results; 2 — średnia ruchoma z 4 elementów — moving average of 4 elements

wiadomo, obciążona skutkami różnorodnych zmienności, obcych dla postawionego w badaniach pytania. Analiza powinna doprowadzić do uwypuklenia cech poszukiwanych prawidłowości i zmienności, a do skasowania pobocznych. Wśród różnych metod analizy materiału szczególnie duże zasługi oddaje, jak już wspomniano, metoda średniej ruchomej. Daje się ona stosować do materiału ilustrującego ciągłą zmienność zjawiska. Dobrze eliminuje zmienność losową szczegółowych wyników i pozwala uwypuklić przebieg nasilenia badanego zjawiska, umożliwiając wykreślenie np. wiarygodnych krzywych zmienności rzeczywistego nasilenia.

W formie przykładu podaję rejestrację ilości much, przylatujących do przynęty w czasie minutowych obserwacji, powtarzanych co 5 minut (tab. I i fig. 1). Wykres (linia ciągła) liczb surowych już pozwala w danym wypadku wnioskować o ogólnym charakterze zmian nasilenia zjawiska. Nie zawsze tak jest. Często dopiero odpowiednia średnia ruchoma, kasująca dużą losową zmienność poszczególnych wyników, pozwala zorientować się co do charakteru zmian. Jednak w wypadku danego przykładu nie wszystkie faktycznie zaszłe zmiany surowej krzywej nadają się do przyjęcia przy interpretacji. Na przykład liczby tabeli nie upoważniają prawdopo-

dobnie do wnioskowania z faktu, iż o godz. 11.05 przyszło do przynęty o 2 muchy więcej niż o 11.00, lub faktu, iż o 11.40 były 2 muchy, a o 11.35 i 11.45 ani jednej. To już mieści się raczej w zakresie kasowanej zmienności. Średnia ruchoma zupełnie usuwa z pola uwagi interpretatora tego rodzaju zmienność (fig. 1, linia przerywana). Dana w powyższym przykładzie seria pozwala dość dobrze wyrównać materiał przy średniej ruchomej o drobnym skoku: 4 elementów. Ale już ten wykres, tak stosunkowo prosty, ujawnia łatwe do przeoczenia zniekształcenia przy mechanicznym stosowaniu metody. W danym wypadku, np. w czasie między 11.30 i 11.35, występuje „garb“ w momencie, gdy właśnie much przyleciało specjalnie mało. Jest to artefakt rachunkowy. W mało wypełnionych seriach prób tego rodzaju artefakty wzmagają się.

## II. WPŁYW ZAKRESÓW ŚREDNIEJ RUCHOMEJ NA KSZTAŁTOWANIE OBRAZU WYNIKÓW BADAŃ. WYBÓR REPREZENTATYWNEGO ZAKRESU

W niniejszych rozważaniach pomijam całkowicie elementarne zasady rachunkowe, obowiązujące przy tworzeniu średniej ruchomej. Traktuję je jako znane czytelnikowi. Zatrzymuję się na zagadnieniu podstawowym dla sprawy wymienionej w tytule.

Najpierw kilka słów co do potrzeby stawiania zagadnienia. Otóż metoda średniej ruchomej cieszy się dużą popularnością w kołach pracowników terenowych, stykających się z przejawami mozaikowości terenu lub zmienności nasilenia zjawisk w czasie. Zaufanie do metody jest najzupełniej słuszne. Podkreślam to szczególnie z tego względu, że podany dalej przykład, mając za zadanie zwrócenie uwagi czytelnika na istotność, w szczególnych wypadkach, stawianych przeze mnie obiekcji, został dobrany i przedstawiony w ten sposób, że przez swą jaskrawość może przyczynić się do podważenia zaufania do samej metody średniej ruchomej w ogóle.

Otóż użycie różnej wielkości skoku przy obliczaniu punktów średniej może każdorazowo uwypuklić różne okoliczności, decydujące o kształtowaniu szczegółowych wyników danych prób. Przykład wskaże, jak różne obrazy mogą wynikać w związku z doбором różnych wielkości skoku.

W tej metodzie reprezentatywną dla danego punktu nazywam taką odpowiadającą mu średnią, która jest zdolna do charakteryzowania nasilenia zjawiska w tym punkcie z najmniejszym obciążeniem wpływami zarówno losowej zmienności w chwili pobierania prób, jak też i oddziaływania sąsiednich punktów o odmiennej wartości wyniku. Co znaczy „zdolna“ do charakteryzowania wyjaśni się jeszcze w toku dalszego rozumowania.

Oczywiście wartość statystyczna każdego obliczonego punktu jest funkcją ilości elementów użytych do sumowania dla uzyskania każdego punktu krzywej wygładzonej przy pomocy średniej ruchomej. Idąc za sugestią pospolitej wśród biologów praktyki stosowania statystyki zapomina się tu często, iż w danym wypadku średnia wyliczona nie zawsze zbliża się do rzeczywistej jej wartości w miarę wzrostu ilości elementów

użytych do jej obliczenia. Innymi słowy: nie koniecznie — im większa ilość składowych średniej, tym prawdziwszy wynik. Ze względu na pomieszanie w takim materiale zmienności losowej (dla której właśnie, jak wiadomo, taka właśnie reguła jest słuszna) i jednej lub kilku elementów zmienności systematycznej, wynikającej z przyrodniczych prawidłowości zjawiska, uzyskuje się materiał, w którym rozpoznanie na oko, co jest wynikiem losowych zdarzeń, a co — interesujących nas prawidłowości, traci moc rozstrzygnięć pewnych.

Przy wystarczająco gęstym obstawieniu osi zmienności obserwacjami uzyskujemy materiał, o którym możemy sądzić, że w nim na każdą sytuację wyrażającą się w odpowiednim nasileniu wyniku wypadnie przynajmniej kilka obserwacji. Staje przed nami zadanie znalezienia najwłaściwszej rozpiętości zakresu sumowania (ilości elementów użytych dla każdego razowego obliczenia wartości poszczególnych punktów). Wiarygodność statystyczna wartości znalezionej dla poszczególnych punktów daje się (przy pewnych założeniach) oszacować *ex post* przy pomocy rachunku probabilistycznego.

Dla charakteryzowania całego ciągu wyników wydawałaby się zatem nęcąca droga obliczenia takich wielkości wyników, które dają rezultat obarczony najmniejszym statystycznie prawdopodobnym błędem. Jednakże w rzeczywistości taka droga, wbrew rozpowszechnionym wyobrażeniom, przeważnie nie powinna, a nawet często nie może tu być stosowana. Po pierwsze, ze względu na duże zbędne komplikacje rachunkowe zawiłych obliczeń. Po drugie, dlatego że w tego rodzaju materiałach, jak uczy praktyka, łatwo o wypadki, gdy można dojść do kilku różnych wyników o wskaźnikach „prawdopodobieństwa” podobnego rzędu przy ich mechanicznym obliczaniu.

Należy tu raczej posługiwać się inną metodą wyboru techniki obliczeń, która musi być m.in. bardziej prosta (i później szacować *ex post* w określonych przedziałach statystyczną realność znalezionych uprzednio liczb).

Praktycznego rozwiązania można szukać na różnych drogach, spełniających ten warunek, że dostarczą wystarczających przybliżeń.

\*

Obliczmy w punkcie  $A$  w jakiejś serii pomiarów jego wartość jako średnią kilku pomiarów, używając do tych obliczeń kolejno różnych ilości pomiarów sąsiednich. Wobec tego że przy obliczaniu średnich ilość pomiarów nie jest rzeczą obojętną dla wyniku, to i tutaj wynik za każdym razem będzie na ogół różny. Analizujemy więc różnice pomiędzy poszczególnymi wynikami. W tym celu budujemy funkcję:

$$(1) \quad g(A) = \bar{x}_{(n)} - \bar{x}_{(n-1)};$$

gdzie:

$g(A)$  — jest funkcją zmieniających się różnic wartości średnich dla punktu  $A$ ;

$\bar{x}_{(n)}$  — jest średnią arytmetyczną pomiarów w okolicy punktu  $A$ ,  
obliczoną z  $n$  pomiarów, przy tym  
 $n$  może przybierać różne wartości: 1, 2, 3...  $N$ ;  
 $N$  — ilość pomiarów w całej badanej serii.

Może zdarzyć się, że w okolicy jakiejś ilości  $n$  pomiarów różnica między daną średnią a średnią o 1 pomiar mniej (lub 1 pomiar więcej) będzie dążyć do zera. W „języku” materiałów, z jakimi zazwyczaj mamy do czynienia w naszej praktyce, może to uzewnętrznic się w ten sposób, że kilka różnych średnich obliczonych dla tych samych punktów da podobne wyniki w pobliżu owego  $n$ . Dla normalnych serii prób losowych warunek ten uzyskuje się zawsze przy wystarczająco dużym  $n$ . W naszym wypadku sprawa nie jest tak prosta. Oczekujemy, że poszczególne odcinki krzywej reprezentowane są przez inne wartości. Rozszerzanie obliczeń poza najbliższe otoczenie punktu  $A$  może niepotrzebnie wprowadzić w orbitę obliczeń obce mu wartości z innych odcinków krzywej. Dlatego też przy stopniowym zwiększaniu się  $n$  możemy oczekiwać najwyżej, że w miarę wzrostu  $n$  wystąpią pewne mniej lub więcej wyraźne objawy tendencji zmniejszania się  $g(A)$ , ale tylko do momentu, gdy przy dalszym zwiększaniu  $n$ , na skutek wciągnięcia w orbitę obliczeń spoza zakresu zmienności losowej należącej do otoczenia danego punktu  $A$ , wartość  $g(A)$  ulegnie ponownemu wzrostowi (w dalszym otoczeniu punktu  $A$  mogą znów nastąpić momenty ponownego stabilizowania się  $g(A)$ ). Przy wystarczająco gęstym obsadzeniu próbami badanego zjawiska istnieje dla nich takie  $n_x$ , że:

$$(2) \quad \begin{array}{l} g(A) \rightarrow 0; \\ \text{gdy} \\ n \rightarrow n_x. \end{array}$$

Postuluje, że najmniejsze  $n_x$  towarzyszące zbliżaniu się do spełnienia warunku (2) jest najlepszą reprezentacją (dla każdorazowo określonych materiałów) rzeczywistej wartości badanej zmiennej w punkcie  $A^1$ .

Sądzę, że metoda polegająca na spełnieniu warunku (2) czyni zadość dezyderatowi stawianemu wyżej. Wymaga jednak ustalenia odpowiedniej techniki rachunkowej oraz poczynienia pewnych uzupełnień dla stref lub punktów, gdzie w praktyce naszych materiałów spełnienie warunku (2) nie jest od razu oczywiste lub wręcz obliczenie odpowiedniej wartości punktu nie jest możliwe bez uzupełniających dróg aproksymacyjnych.

Wynikające tu trudności przedstawię przy pomocy przykładu materiału składającego się z 78 przeliczeń ilości żywych i martwych zwierząt do-

<sup>1</sup> W języku metodyki przyrodniczej powyższe wywody można przedstawić następująco:  $g(A) \rightarrow 0$  oznacza osiągnięcie takiej wartości średniej, że powiększanie serii pomiarów o jeszcze jeden wynik najprawdopodobniej pozostanie bez istotnego wpływu na rezultat. Jeżeli osiąga się tego rodzaju stan obliczeń dla kilku różnych wartości  $n$ , to najmniejsze z tych  $n$  zapewnia nam uwzględnienie pomiarów tylko z najbliższego otoczenia punktu  $A$ , najlepiej go więc reprezentuje, jako że punkty dalsze z natury rzeczy mają większe szanse podlegania wpływowi ubocznym spoza ośrodka  $A$ .

Tabela II

Stan dorosłych patyczaków w populacji eksperymentalnej  
 State of adult *Dixippus* in experimental population

Tydzień obserwacji i data Week of observation and date	Ilość dorosłych osobników Number of adult individuals	Ilość znalezio- nych martwych Number found dead	Oznaczenie stref podobnych Marking of simi- lar zones	Wskaźnik śmier- telności dla stref Mortality index for zones
a	b	c	d	e
1 (8.III.1956)	1			
2	2			
3	2			
4	2			
5	2			
6	2			
7 (19.IV)	3			
8	3			
9	4			
10	4			
11	4			
12	4		a	$< \frac{1}{106}$
13	4			
14	4			
15 (15.VI)	5			
16	5			
17	5			
18	6			
19	7			
20 (13.VII)	9			
21	9			
22	9			
23	10			
24	10			
25	10			
26 (25.VIII)	11	1		
27	11			
28	11			
29	12			
30 (22.IX)	12	1	b	$3:142 = \frac{1}{47}$
31	11			
32	11			
33	11			
34 (20.X)	11	1		
35	10			
36	11			

c.d. tab. II

a	b	c	d	e
37	11			
38	11	1		
39	10	1		
40	9			
41 (7.XII)	9	1		
42	9	1	c	$6:87 = \frac{1}{15}$
43	8			
44	8	2		
45	6			
46	6			
47	6			
48 (31.I.1957)	8	1		
49	7		d	$2:34 = \frac{1}{17}$
50	7	1		
51	6			
52	7			
53	7			
54	8			
55(22.III)	9	1		
56	8			
57	8			
58	9			
59	10		e	$2:204 = \frac{1}{102}$
60	12			
61	12			
62	12			
63	14			
64 (24.V)	14	1		
65	14			
66	15			
67	15			
68	15			
69	15			
70	15			
71 (11.VII)	15	1		
72	15			
73	16	1		
74	16		f	$4:126 = \frac{1}{32}$
75	16	1		
76	17	1		
77	16			
78 (30.VIII)	17			

rosłych w pewnej populacji patyczaków (*Dixippus morosus*) w eksperymencie laboratoryjnym. Przeliczeń dokonywano mniej więcej co tydzień. Surowy materiał przedstawiają kolumny a, b, c tabeli II. Przedmiotem analizy są zmiany śmiertelności osobników dorosłych w ciągu 78 tygodni trwania badań. Wskaźnik śmiertelności w tym materiale obliczono ze stosunku ilości osobników martwych do żywych, w przeliczeniu na jednostkę czasu (tydzień).

Uzyskujemy:

$$(3) \quad P_{A(x)} = \frac{\sum x_i \text{ martwych}}{\sum x_i \text{ żywych}}$$

gdzie:

$P_{A(x)}$  stanowi prawdopodobieństwo śmierci dorosłego patyczaka w ciągu tygodnia  $A$ , obliczone ze stosunku średniej z  $n$  pomiarów w sąsiedztwie,  $n$  pomiarów stanowi oczywiście  $n$  tygodni.

Dla wygody graficznej i rachunkowej nadaję wynikom postać, która pozwoli ponadto bardziej obrazowo uwypuklić kwestie interesujące mnie w niniejszym artykule.

Będzie to:

$$(4) \quad \text{przeżywalność} = \frac{1}{P_A}$$

co można interpretować jako szanse przeżycia ujęte w postaci odpowiedzi na pytanie: „ile patyczaków trzeba by było mieć w hodowli dla zrealizowania się w danych warunkach i w danym momencie szans na zdechniecie jednego“.

Wstępnie ustalamy dla danego przykładu:

Zjawisko nazwane:  $P$  (zatem również  $\frac{1}{P}$  jest zjawiskiem ciągłym w sensie istnienia w każdym momencie hodowli odpowiedniej dla danej chwili szanse śmierci lub przeżycia osobnika (zgodnie z praktyką statystyczną demografów) oraz przyjęcia, że w sposób oczywisty każdemu punktowi  $A$  odpowiada tylko jedna wartość wskaźnika.

Przyjęta praktyka dopuszcza charakterystykę zmienności wskaźnika przy użyciu średniej ruchomej opartej na mechanicznie stosowanym zakresie sumowania, ustalonym arbitralnie dla całej serii. Obliczamy przy użyciu średniej ruchomej odpowiednie wartości  $\frac{1}{P}$  dla:  $n = 3$  i dalej kolejno:  $= 5, 7, 9, 11, 15, 19, 23, 27$ . Wyniki przedstawia wykres (fig. 2). Już pierwszy rzut oka ujawnia kolosalną rozpiętość tych „wyników“. Poszczególne linie są niezgodne w swym przebiegu ze sobą. Żadna z nich zatem nie może być przyjęta automatycznie jako wiarygodny wynik. Nieświadomy tego badacz, mechanicznie stosujący jedną z nich jako przypadkową podstawę swoich dalszych rozumowań, może łudzić się pozorami takich czy innych „wyników“.

Strefy c i d na wykresie ujawniają dość szeroki zakres różnych  $n$ , dla

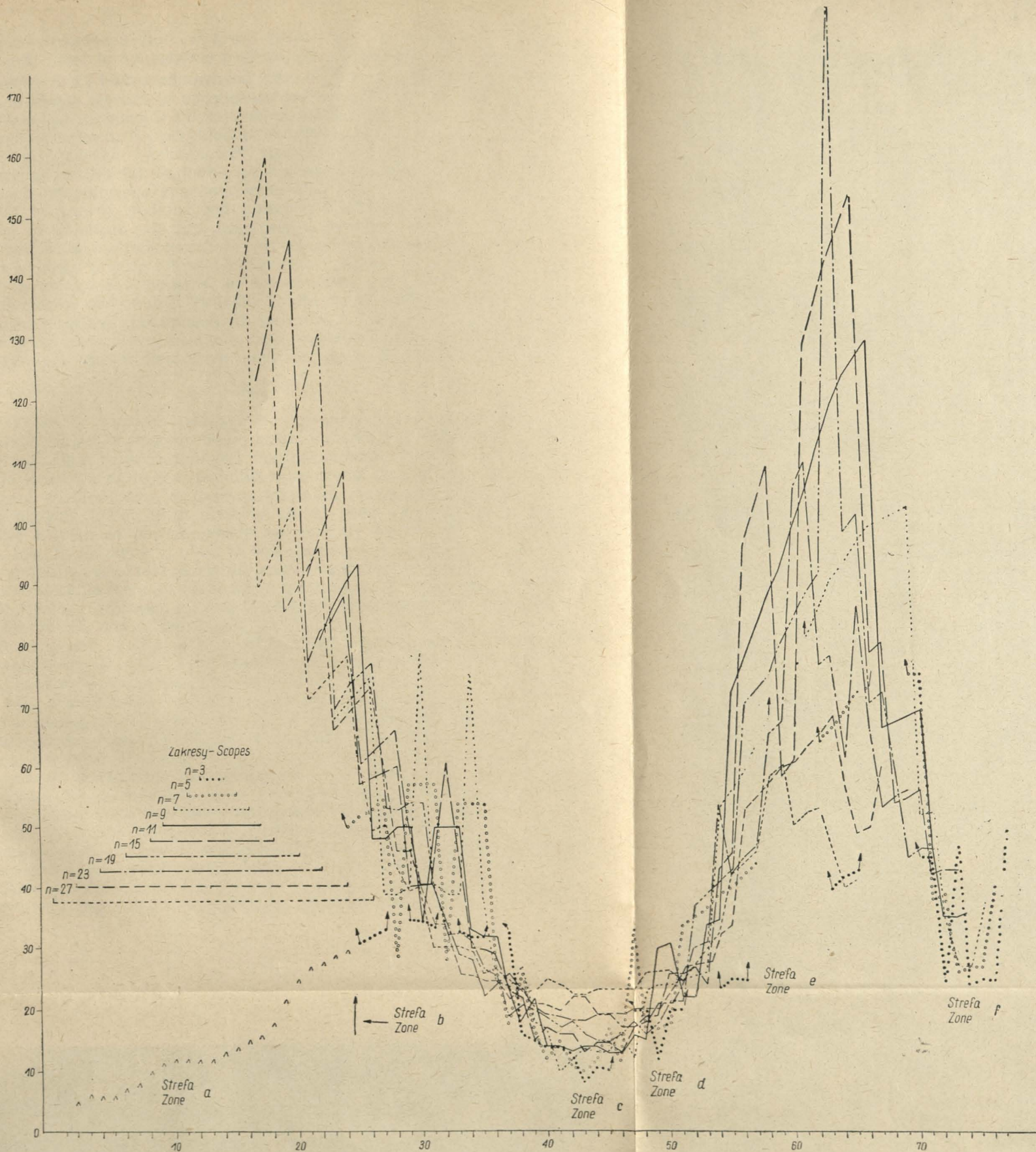


Fig. 2. Przeżywalność dorosłych patyczaków. Zależność obszaru zmienności wskaźnika od zakresu sumowania przy użyciu średniej ruchomej  
Survival of adult *Dixippus*. Dependence of area of variation of index on the extent of summation using a moving average

Obliczenie punktów krzywej typowej dla przykładu z tabeli II przy  $x_{n(2)}$ . (W tabeli dla linii pomocniczych uwzględniono tylko wyniki obliczeń)  
Calculation of points of typical curve for example from Table II, for  $x_{n(2)}$ .

Kolumny tab. II Columns Table II			Wartość — Value of $n(k)$													
$a$	$b$	$c$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=13$	$n=14$	$n=15$	$n=16$	$n=17$
1	1															
2	2															
3	2															
4	2															
5	2															
6	2															
7	3															
8	3															
9	4															
10	4															
11	4															
12	4															
13	4															
14	4															
15	5															
16	5															
17	5															
18	5															
19	7															
20	9															
21	9															
22	9															
23	10															
24	10															
25	10															
26	10	1						75	87:2=44	48						
27	11							39	88:2=44	48						
28	11							39	89:2=45	50						
29	12							40	90:2=45	50						
30	12	1						79	90:2=45	34						
31	11							40	89:2=45	50						
32	11							39	89:2=45	50						
33	11							39	88:2=44	50						
34	11	1						76	87:2=44	33						
35	10							38		32						
36	11															
37	11															
38	11	1														
39	10	1	22	32:2=16	22											
40	9		11	30:2=15	21											
41	9	1	19	28:2=14	13											
42	9	1	18	27:2=14	12											
43	8		9	26:2=13	18			13								
44	8	2	17	25:3=8	9		43:3=13	13								
45	6				10	12	42:3=13	13								
46	6					17	41:3=13	16								
47	6					11	40:2=20	12								
48	8	1				33	20	46:2=23	27							
49	7						21	47:2=24	27							
50	7	1					21	48:2=24	28							
51	6						21	48:2=26	28							
52	7						22	50:2=25	30							
53	7						45	51:2=26	30							
54	8							52:2=26	30							
55	9	1														
56	8															
57	8															
58	9															
59	10										63			68		
60	12										66	129:2=65		48		
61	12										70	137:2=69		75		80
62	12										74			80	145:2=73	84
63	14										77			84	153:2=77	88
64	14	1									80			88	161:2=81	82
65	14													91	178:2=89	95
66	15							59	132:2=66	75				111	184:2=92	66
67	15							118	133:2=67	74				98	191:2=95	69
68	15							60	135:2=68	75						
69	15							61								
70	15															
71	15	1		45		38										
72	15			23	61:2=31	39										
73	16	1		47	62:2=31	26										
74	16			48:2=24	63:2=32	27										
75	16	1		49:2=25	22											
76	17	1	32	25	33											
77	16		32		66:2=33	47										
78	17		17													

których odpowiednie linie wykresu mniej więcej pokrywają się w swym przebiegu. Dają to np. zgodnie następujące wartości  $n$ : 5, 6, 7..., 15.

Strefy:  $b$ ,  $e$  i  $f$  mają odpowiedni zakres  $n$ , bardzo wąski, tak że nie znalazło to swego wyrazu w uwzględnionym na wykresie wyborze linii.

Wiele linii całkowicie fałszuje obraz, a każda linia paczy go w poszczególne odcinkach. Na przykład w obrębie strefy  $a$  linie tworzą pozorne przebiegi zjawiska („schodkowy“ spadek wskaźnika śmiertelności, co oczywiście jest fikcją). Podobnie w obrębie strefy  $b$  wszystkie  $n > 11$  dają złudzenie stopniowego spadania wskaźnika śmiertelności (przy posuwaniu się w prawo), podczas gdy prosty rzut oka na tabelę II utwierdza w tym, że wskaźnik jest tam przez cały okres mniej więcej stały. Na skutek artefaktów rachunkowych w różnych miejscach występują nagle wyskoki wykresu w górę lub w dół (zauważmy, że jest to spotęgowane przez fakt, iż mamy do czynienia ze wskaźnikiem wyliczonym z iloczynów dwóch ciągów obserwacji). Podobne źródło ma „schodkowa“ struktura wykresu na granicach poszczególnych okresów, w czasie wzrastania lub opadania wskaźnika. Uderza fantastyczna rozpiętość różnic wyników dla poszczególnych linii w niektórych punktach, np. w 64 tygodniu: dla  $n = 3$ ,  $\frac{1}{P} = \text{ca } 40$ ; i dla  $n = 15$ ,  $\frac{1}{P} = \text{ca } 190$ ...

Jakkolwiek wypadki podobne do opisanego nie muszą być codziennym zjawiskiem w naszych materiałach, powinniśmy dysponować metodą zabezpieczającą przed podobnymi niespodziankami. Tym bardziej że szczególnie wrażliwa na to jest technika operowania stosunkami między kilku różnymi wielkościami. W naszym wypadku mamy do czynienia z serią prób małych, takich gdzie kolejny szereg prób daje normalnie wyniki zerowe i tylko co pewien odstęp pojawia się pozytywny wynik próby (por. tab. II, kolumna  $c$ ). Jest to właśnie typowy wypadek dla serii małych prób. I właśnie taki, gdzie normalnie stosowana praktyka automatycznego stosowania średniej ruchomej o sztywnym zakresie  $n$  może zawodzić.

Należałoby proponować metodę obliczeń uniezależnioną od tego rodzaju efektów. Są one oczywistym wynikiem włączania do obliczeń w pewnych odstępach liczb z prób wypełnionych, zatem zależą od sposobu dozowania narzucającego „kęsy“ wyniku znacznie różniące się od przypadającej na dany moment rzeczywistej wartości wskaźnika. Technika kasowania tego artefaktu (dla zjawiska ciągłego) może polegać na oparciu obliczeń o wielkości tych odstępów. Będzie to technika rachunku bazującego na wypełnianiu luk w nasycaniu prób materiałem. Rzućmy okiem na kolumnę  $c$  w tabeli II. Zmienność przebiegu zjawiska charakteryzowana jest tu zarówno wielkością liczb uzyskanych z obserwacji, jak i wielkością luk. Wielkości luk, a co zatem idzie i rozmieszczenie prób pełnych, są więc zależne od nasilenia zjawiska w czasie pobierania prób i mogą je odpowiednio charakteryzować (łącznie z wielkością „kęsów“ wyniku). W tym celu obliczamy średnią wypełnienia jednostki pomiaru (w przykładzie: tydzień) w obrębie poszczególnej luki. Jeżeli w ciągu prób każdej luce przyporządkować jedną z ograniczających ją prób z wynikiem pozytywnym, otrzymamy ciąg wielkości zmiennego stosunku ilości prób niewypełnio-

nych i prób pełnych. Ciąg ten charakteryzuje zmiany nasilenia zjawiska w miarę posuwania się obserwacji.

$$(5) \quad \bar{x}_{n(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n(1)} f(x_i)}{n(1)}$$

gdzie:

$f(x_i)$  — wartości wyniku każdej próby w punkcie  $x$ ,

$n(1)$  — ilość prób niewypełnionych wraz z ograniczającą ją jedną próbą pełną.

Jeżeli obliczany wskaźnik jest wynikiem jakiejś operacji arytmetycznej na paru ciągach, z których tylko jeden daje efekt „kęsowego” rozmieszczania się wyników (jak w naszym przykładzie — wypadki padnięcia dorosłych patyczaków) należy oczywiście  $\bar{x}_{n(1)}$  obliczać oddzielnie dla każdego punktu danej luki, utrzymując w jej obrębie ten sam zakres sumowania:  $n(1)$ . Zbór tak wyliczonych średnich dla całego materiału badań wytyczy nam odcinek krzywej, którą nazywam linią typową.

Ciąg wytyczający linię typową dla  $\bar{x}_{n(1)}$  może być obarczony w dużym stopniu skutkami losowego zdarzenia, jakim jest lokalizacja pojedynczego zjawiska każdorazowego wypełnienia próby właśnie w danym punkcie a nie w sąsiednim, co oczywiście wpływa na efekt określenia wielkości  $n(1)$ . Można zbudować ciąg wytyczający odcinki linii typowej w oparciu o dwie sąsiednie luki, przyporządkowując im odpowiednie dwie próby wypełnione, ograniczając każdą lukę z tej samej strony; zatem:

$$(6) \quad \bar{x}_{n(2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n(2)} f(x_i)}{n(2)}$$

Taki ciąg obliczeń obarczony jest już w mniejszym stopniu skutkami losowości w rozkładzie wyników, jeszcze mniej oczywiście odpowiedni z trzech sąsiednich luk:  $\bar{x}_{n(3)}$ , jeszcze mniej z czterech itd. Jeżeli mamy do czynienia z materiałem zmiennych wskaźników, to jednak  $x(k)$  o większych  $k$  zaciera subtelności szczegółowego rozkładu zmienności wyników. Wynik staje się tym samym w mniejszym stopniu reprezentatywny dla oceny szczegółów zmienności zjawiska. Oczywiście przy łączeniu kilku luk realność przyrodnicza poszczególnych odcinków takich ciągów jest warunkowana tym, by łączeniu podlegały tylko luki w obrębie tego samego typu przebiegu krzywej.

Oczekujemy, że odcinki krzywej typowej powinny być albo identyczne albo bliskobieżne z odpowiednimi odcinkami krzywej reprezentatywnej według definicji jak w warunku (2), a to dlatego że w obu wypadkach odcinki krzywych wynikają na skutek eliminowania losowych wahań maskujących prawidłowy i równomierny (z założenia), rzeczywisty przebieg krzywej na określonych odcinkach.

Wykres (fig. 3) daje wynik obliczenia odcinków krzywej typowej dla  $x_{n(2)}$  w zastosowaniu do użytego przeze mnie przykładu. Na rysunku wprowadzono linie kontrolne:  $x_{n(2)+1}$  i  $x_{n(2)-1}$  (w związku z sformułowaniem warunku (2)).

Wykres następny (fig. 4) daje porównanie elementów:  $x_{n(1)}$ ,  $x_{n(2)}$ ,  $x_{n(3)}$ ; wyższych wartości  $k$  w danym przykładzie nie można obliczyć ze względu na niewielkie rozmiary odcinków poszczególnych stref. Jak przewidywano,  $x_{n(1)}$  podlega nadmiernie efektom losowości rozkładu wyników w próbach;  $x_{n(2)}$  i  $x_{n(3)}$  dają zadawalającą zbieżność obrazów.

Przy wykreślaniu całości obrazu krzywej poszczególne odcinki wykresu (fig. 3) powinny być odpowiednio łączone. Linia  $x_{n(2)}$  jest na tyle wyznaczona nakreślonymi odcinkami, że połączenie poszczególnych odcinków bez naruszenia zasady rysowania przebiegu w możliwie dobrej aproksymacji nie przedstawia już szczególnej trudności. Oczywiście wartość krzywej w poszczególnych punktach jest dana tylko z pewnym przybliżeniem. Można je ocenić na drodze normalnych metod statystycznych stosowanych dla odpowiednio dłuższych odcinków krzywej, na przykład dla całej strefy wyrównanego przebiegu. Przy wykreślaniu ostatecznej linii sumującej powinno się skontrolować na innej drodze szczegółową lokalizację miejsc załamania, względnie granic poszczególnych stref wyrównanego przebiegu oraz realność punktów szczególnych, jeżeli ujawniają się w obrazie danej krzywej. Dodatkową pomoc przy kreśleniu krzywej można uzyskać, jeżeli wykres sporządzono w odpowiednio dobranej skali, tak by pole krzywej nad linią ogólnej średniej arytmetycznej dla całości materiału było równe polu pod nią.

Zrealizowanie w praktyce uwag ostatniego ustępu dla omawianego w tym opracowaniu przykładu sprowadza się do następujących okoliczności:

1. W strefie c szczególnie niskie położenie wartości punktu 43 tygodnia jest wynikiem lokalizacji pojedynczego przypadku śmierci zwierzęcia w tygodniu 44, a nie 43. Statystyczna realność tego faktu, a tym samym wartość wygięcia krzywej w strefie c w jednym punkcie ku dołowi, jest nikła.

2. W strefie f krzywa zatacza łuk ku dołowi. To również wynika z lokalizacji tylko jednego przypadku śmierci patyczaka w tygodniu 76, a nie w 77. Oczywiście i w tym wypadku statystyczna wartość tego jest nikła podobnie jak w wypadku poprzednim.

3. Wobec tego że wykres dotyczy wskaźnika uzyskanego z mnożenia  $\frac{1}{P} = (\text{kolumna } b) \cdot \frac{1}{(\text{kolumna } c)}$ , skalą która by pozwalała posługiwać się wielkością pola objętego krzywą, jako pomocą przy kreśleniu, jest skala logarytmiczna dla osi rzędnych (fig. 5).

Dodatkowe zastosowanie metody daje kasowanie każdej zmienności (nie tylko zatem losowej), przewidzianej do eliminowania w ilościowym materiale. W rozdziale o technice prowadzenia obliczeń uwzględniony jest odpowiedni przykład (tabl III).

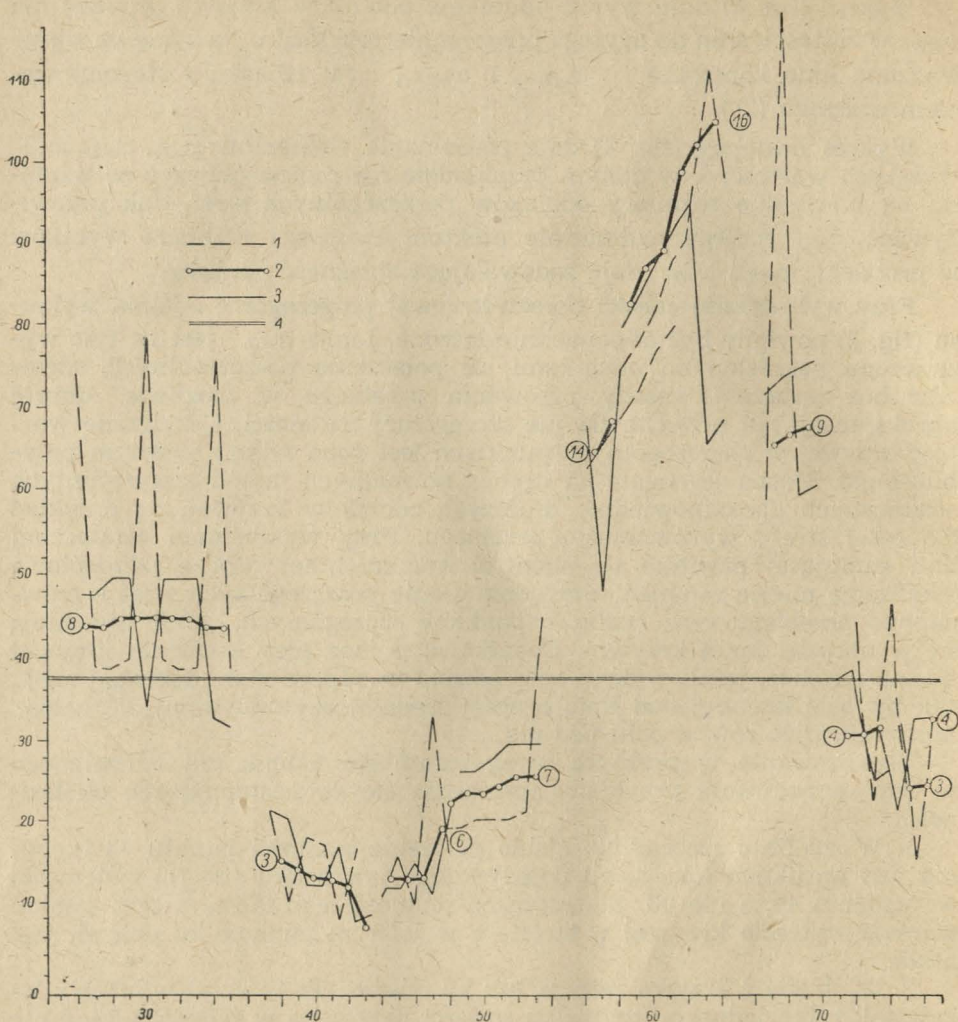


Fig. 3. Przeżywalność dorosłych patyczaków. Wyznaczenie elementów typowej krzywej zmienności wskaźnika przy  $n(2)$  elementach sumowania

Survival of adult *Dixippus*. Determining of elements of typical curve of variation index using  $n(2)$  elements of summation

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n(2)-1} f(x_i)}{n(2)-1}; \quad 2 - \frac{\sum_{i=1}^{n(2)} f(x_i)}{n(2)}; \quad 3 - \frac{\sum_{i=1}^{n(2)+1} f(x_i)}{n(2)+1}$$

4 — ogólna średnia (25—78 tygodni) — total average (25—78 weeks); liczby w obwódkach — wielkość  $n$  — figures within rings — value of  $n$

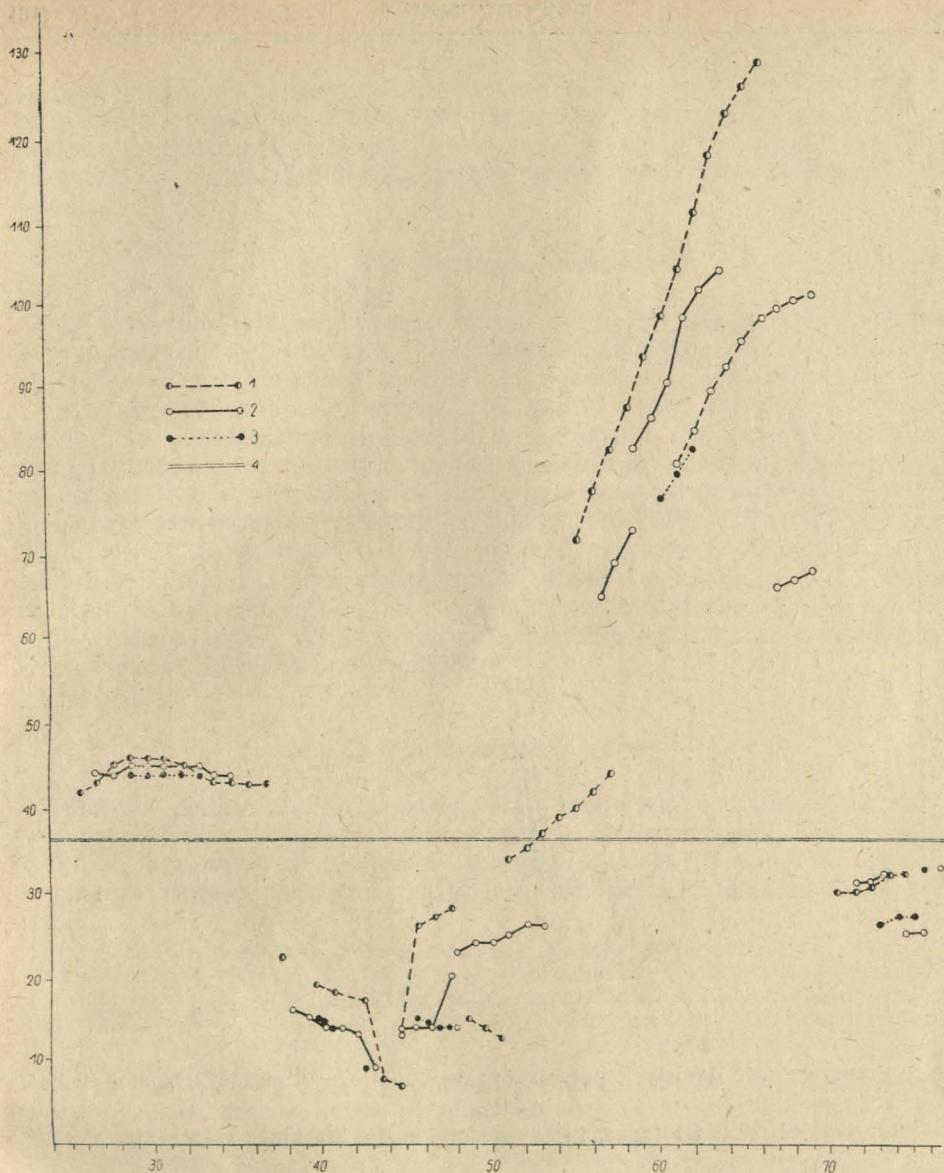


Fig. 4. Przeżywalność dorosłych patyczaków. Elementy krzywej typowej zmienności wskaźnika dla różnych zakresów średniej ( $n(1)$ ,  $n(2)$ ,  $n(3)$ )

Survival of adult *Dixippus*. Elements of typical curve of variation index for various extent of the average ( $n(1)$ ,  $n(2)$ ,  $n(3)$ ).

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n(1)} f(x_i)}{n(1)}; \quad 2 - \frac{\sum_{i=1}^{n(2)} f(x_i)}{n(2)}; \quad 3 - \frac{\sum_{i=1}^{n(3)} f(x_i)}{n(3)};$$

4 — średnia dla całego okresu — average for the entire period

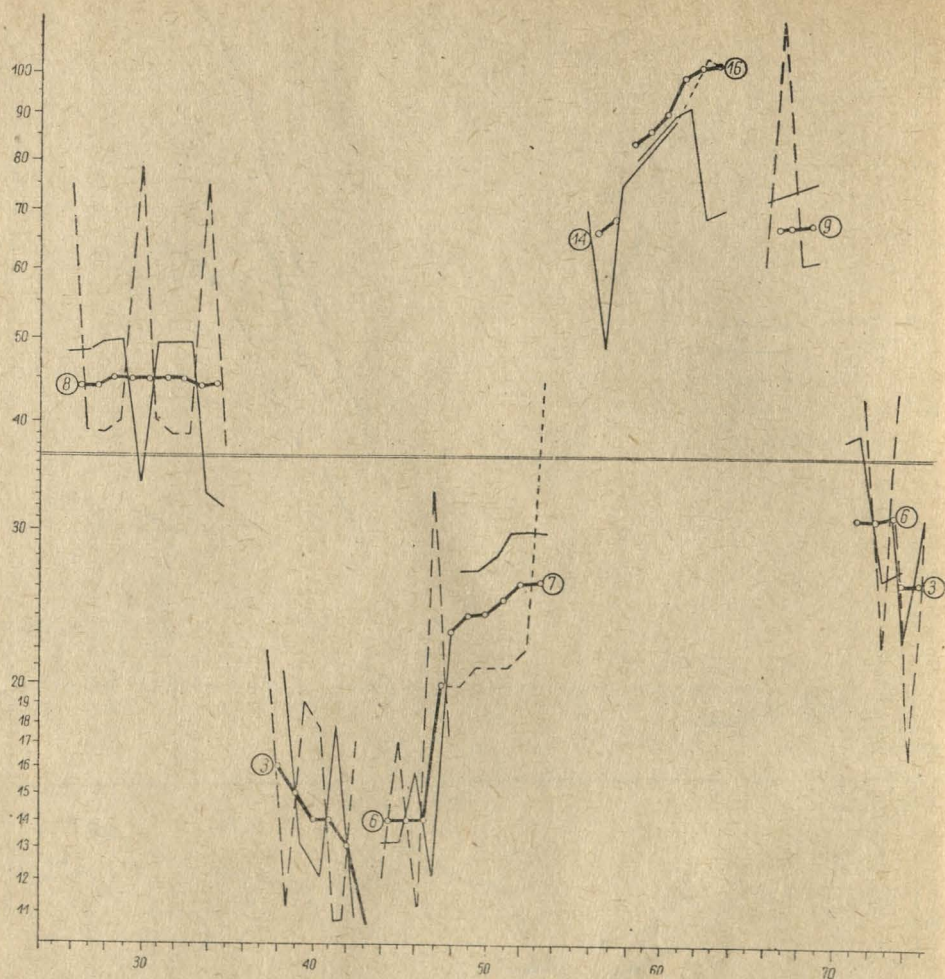


Fig. 5. Przeżywalność dorosłych patyczaków, w skali logarytmicznej. Oznaczenia jak na fig. 3

Survival of adult *Dixippus*, in logarithmic scale. Markings as for Fig. 3

### III. OGRANICZENIA METODY

#### A. Zbędność

Metoda jest zbędna w wypadku gęstego wypełnienia prób materiałem wyników niezerowych oraz występowania wyników w sposób wyrównany, gdy amplituda zmienności losowej (lub innej) jest wielkością niezbyt dużą w stosunku do liczb wyników. W takich wypadkach wystarcza sto-

sowana pospolicie technika automatycznego sumowania niewielkiego zakresu zdjęć sąsiednich wzdłuż osi zmienności. Po wyeliminowaniu zjawiska z przykładu (fig. 1) (tab. I — „garb“ wynikły z podkreślenia przez niewłaściwy zakres sumowania rytmu wahań, które właśnie należało skasować).

### B. Wykorzystanie częściowe

W wypadku istnienia rytmu wahań do kasowania metoda przedstawiona staje do wyboru obok kilku innych<sup>2</sup>. Powinna znaleźć zastosowanie tylko w tych częściach wykresu, gdzie zachodzi tego potrzeba.

Pod względem operatywności i szybkości pracy metoda ta ustępuje innym, na przykład wymienionym w odnośniku. W szczególności jeśli chodzi o technikę, przeciwstawną jest znacznie prostszej metodzie obliczania przeciętnych wskaźników od razu dla większych przestrzeni uznanych na jakiejś (odpowiedniej) drodze za wyrównane (jako przykład służyć może tabela II, zawierająca materiał naszego przykładu arbitralnie podzielony na strefy, dla których obliczono przeciętne wskaźniki. Na takich odcinkach wykresu, gdzie daje się bez zastrzeżeń stosować ta druga metoda, należy raczej wyłączyć użycie metody omówionej w niniejszym opracowaniu, jako zbyt pracochłonnej.

### C. Ograniczenia lokalne

Metoda nadaje się do wyznaczania „typowych“ odcinków krzywych w ich przebiegach ciągłych i mniej więcej równomiernych. Nie wyznacza wartości krzywych w miejscach załamań, skoków, nieciągłości itp. Nie wyznacza również dokładnie położenia nieciągłości, lokalizując je tylko

<sup>2</sup> W formie przykładu jeszcze dwa inne sposoby postępowania:

1. Jeżeli ciąg wyników:  $y_1, y_2, y_3 \dots, y^n$  ma tendencję do rytmicznego wznoszenia się lub opadania co  $a$  prób, to zakres sumowania  $x = a + m$  (gdzie  $m$  nieparzyste) zapewni wygładzenie krzywej w danym miejscu. Dla przykładu podaje wykres (fig. 6) materiału z tab. I przy  $n = 4, 5$  i  $6$ , gdzie wartość  $a$  dla początkowej części materiału wynosi  $3$ , a w okolicy „garbu“ wynosi  $4$ .

2. Metoda graficzna łączenia połówek sąsiednich odcinków wykreślonych surowych wyników. Metoda bardzo wygodna ze względu na szybkość pracy i dobre eliminowanie szans pomyłek rachunkowych. Wymaga jednak znacznego wypełnienia prób materiałem. Daje ona zawsze tylko złagodzenie wahań, nie kasując ich całkowicie, albowiem wartości poszczególnych punktów uzyskane na tej drodze są średnią arytmetyczną tylko w stosunku do pierwszego podziału (dwóch sąsiednich pomiarów). W stosunku do następnych uzyskane wartości akcentują rolę punktów centralnych zwiększając ich wagę w kształtowaniu wyniku. Na przykład, jak łatwo sprawdzić, po dwukrotnym zabiegu kolejnego łączenia połówek odcinków, uzyskany wynik z trzech wartości:  $a, b, c$ , nie jest ich średnią arytmetyczną  $\frac{a+b+c}{3}$ , a tylko

wielkością:  $\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2}\right) \cdot 2$ , czyli  $\frac{a+2b+c}{4}$ . Akcentuje zatem w sposób widoczny rolę centralnej części użytego każdorazowo ciągu prób. Metoda ta ma ograniczone zastosowanie.

w przybliżeniu (tym lepszym na ogół, im mniejszego  $n$  użyto w obliczeniach). Z tego względu lokalizacja takich punktów szczególnych, jeżeli gra rolę we wnioskowaniu, powinna być dokonana lub skontrolowana także na innej drodze.

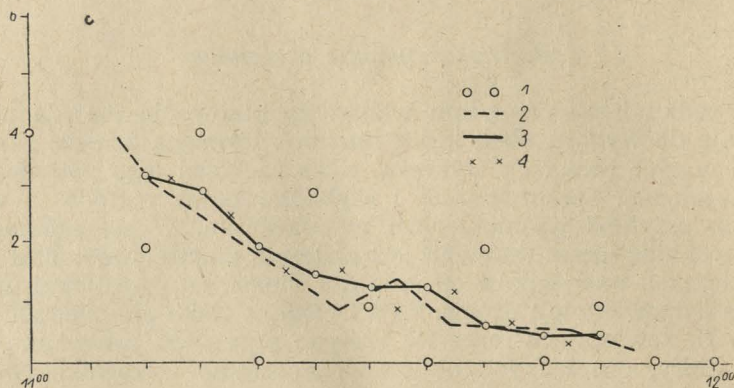


Fig. 6. Zastosowanie średniej ruchomej w różnym zakresie  $n$  dla materiału z tab. I (fig. 1)

Application of moving average in different  $n$  for material from Table I (Fig. 1)

1 — surowe wyniki — preliminary results; 2 — średnia ruchoma dla zakresu  $n = 4$  — moving average for  $n = 4$ ; 3 — średnia ruchoma dla zakresu  $n = 5$  — moving average for  $n = 5$ ; 4 — punkty średniej dla zakresu  $n = 6$  — points of average for  $n = 6$

#### IV. TECHNIKA PROWADZENIA RACHUNKU

Wykonanie potrzebnych obliczeń możliwe jest przy nadaniu im postaci umożliwiającej w miarę możności postępowanie zeschematyzowane, polegające na automatycznym powtarzaniu określonych operacji rachunkowych. Sposób zapisywania wyników obliczeń i szczegóły schematu postępowania zależą od osobistego przygotowania i nawyków pracującego. Uważam też za właściwe pozostawić to jego inicjatywie. Jedynie w formie ilustracji wskażę na przykładzie użytym już poprzednio wariant sposobu prowadzenia obliczeń zastosowany przy tej okazji (tab. II i III).

Oto kolejne czynności:

1. Wyznaczenie punktów szczytowych zmienności, którą chcemy kasować. W naszym wypadku kasowaniu podlegały skutki losowego rozmieszczenia wyniku oraz skutki ujawniania się go jakby w „kęsach“, w liczbach całkowitych, podczas gdy odpowiednie wyniki wskaźnikowe przeliczone na jednostki czasu wypadałyby jako wielkości ułamkowe. W naszym przypadku materiał składa się z dwóch kolumn liczb. Dla kolumny b (tab. III) nie zachodzi potrzeba szczególnych manipulacji w celu wyznaczenia tego rodzaju punktów; wykres dla kolumny swobodnie można by prowadzić przy pomocy liczb surowych, całkiem bez używania średniej ruchomej. Dla kolumny c wyznaczenie punktów szczególnych jest

potrzebne; nie przedstawia ono trudności. Będą to oczywiście momenty znajdowania martwych zwierząt. W wypadku gdy chcemy kasować wahania ciągu liczb takiego typu jak na przykład w tabeli IV, można zaznaczyć punkty szczytowe (maksima lub minima). W tabeli IV wybrano i oznakowano punkty szczytowe maksymalnych wyników. Odstępy między nimi, przy obliczaniu odcinków typowych, wyznaczają zakres  $n(k)$  łącznie z ograniczającymi je punktami szczególnymi. Podobnie jak w przykładzie omawianym poprzednio wyznaczały go luki w wypełnieniu prób materiałem. Sposób wyznaczenia punktów szczególnych decyduje całkowicie o tym, jakie elementy zmienności ulegną skasowaniu, a jakie zostaną tym samym uwypuklone przez pozostawienie ich w obrazie materiału. Dlatego też wyznaczanie ich, jako czynność bardzo ważna, nie może odbywać się mechanicznie i powinno następować jako wynik kwalifikowanej oceny charakteru rozkładu zmienności wyników.

Tabela IV

Stosowanie metody dla serii prób wypełnionych  
Using the method for series of full samples

Lp. No.	Wynik Result	Punkt szczytowy Peak point
1	18	×
2	14	
3	10	
4	16	×
5	15	
6	15	×
7	16	
8	19	×
9	18	
10	17	
11	15	
12	13	
13	17	×
14	14	
15	10	
16	16	×

2. Wyznaczenie w materiale stref jednolitych i wyznaczenie miejsc albo nie nadających się do stosowania metody (w myśl rozdziału poprzedniego), albo takich, gdzie ekonomiczniejsze byłoby stosowanie innej metody.

3. Wyznaczenie i przeliczenie poszczególnych stref obliczeń. Tabela III zestawia te przeliczenia dla  $\bar{x}_{n(2)}$ . Jest ona dość przejrzysta i nie wymaga, jak sądzę, wyjaśnień.

4. Jako pewnego rodzaju kontrolę poprawności uzyskanych elementów wykresu można zalecić obliczenie kontrolnych linii dla  $n(2) + 1$  i  $n(2) - 1$ , w myśl warunku (2). Zostało to dokonane na wykresie (fig. 4) i wyniki obliczeń włączone są do tabeli III. Warto przestudiować charakterystyczne szczegóły przebiegu tych trzech linii na wykresach (fig. 4 i 6). Szczególnie godne uwagi jest wyrównany przebieg linii podstawowej już w stosunku nawet do sąsiednich (kontrolnych).

5. Ustalenie odpowiedniej skali wykresu z uwzględnieniem elementów, ułatwiających graficzne uzupełnienie poszczególnych odcinków wykresu.

6. Ocena, gdzie potrzeba, statystycznej wiarygodności wyznaczonych elementów wykresu, decydujących o dalszym wnioskowaniu. Wartościowe wyniki daje tu ocena wiarygodności nie poszczególnych punktów, a odpowiednich większych odcinków krzywej typowej.

#### A METHOD OF DETERMINING THE REPRESENTATIVE CURVE FOR A SERIES OF SMALL SAMPLES

##### Summary

A series of partly empty small samples may make it difficult, when analysing ecological material, to obtain a picture giving a proper representation of the course of the phenomenon. Application of a moving average fails when the gaps (sequences of zero samples) in the completion of the series by material are large and unequal (cf. Fig. 2, referring to material set out in Table II). The author suggests a method of calculating the curve by small sections formed from the various gaps which are limited on one side by a completed sample. The different sections may be formed either from single gaps or from two or three neighbouring gaps. The value of each section is defined by the arithmetical average of the values of the empty and full samples contained in it according to the formula:

$$f[\bar{x}_{n(k)}] = \frac{\sum_{i=1}^{n(k)} f(x_i)}{n(k)}$$

Figs. 3 and 5 illustrate the elements of the curve calculated according to the method given for the example from Table II. They were calculated on the basis of two neighbouring gaps:  $n(2)$ .